29.

ADDITION A LA NOTE SUR QUELQUES INTÉGRALES MULTIPLES.

[From the *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* (Liouville), tome X. (1845), pp. 242—244.]

On démontre, au moyen des formules que j'ai données sur ce sujet, [28], une propriété remarquable de l'intégrale multiple

$$V = \int dx_1 \dots dx_n x_1^{2\alpha_1+1} \dots x_{f+1}^{2\alpha_{f+1}} \dots \phi(a_1 - x_1 t, \dots),$$

prise entre les limites

$$\frac{x_1^2}{h_1^2} + \dots + \frac{x_n^2}{h_n^2} \stackrel{=}{<} 1.$$

En effet, en supposant toujours que l'on peut développer la fonction ϕ selon les puissances entières et positives de t, l'intégrale V peut s'exprimer sous la forme

$$V = \frac{(-)^f \pi^{\frac{1}{2}n} t^f}{2^{k+f}} \left(\frac{d}{da_1} \dots \frac{d}{da_f}\right) \left(h_1^3 \frac{d}{dh_1}\right)^{\alpha_1} \dots \left(h_n^3 \frac{d}{dh_n}\right)^{\alpha_n} h_1^3 \dots h_{f+1} \dots U,$$

où

$$k = \alpha_1 + \dots + \alpha_n,$$

$$U = \mathbf{S}_{p=0}^{p=\infty} \left(\frac{t^{2p}}{2^{2p}\,\Gamma(p+1)\,\Gamma(p+k+f+\frac{1}{2}n+1)} \nabla^p \phi(a_1, \dots)\right),$$

$$\nabla = h_1^2 \frac{d^2}{da_1^2} + \dots + h_n^2 \frac{d^2}{da_n^2}.$$

Soit

$$W = \int dx_1 \dots \phi(a_1 - x_1 t T, \dots)$$

entre les mêmes limites que V. On a

$$W = \pi^{\frac{1}{2}n}\, h_1 \ldots h_n \mathbf{S}_{p=0}^{p=\infty} \left(\frac{T^{2p}\, t^{2p}}{2^{2p}\,\Gamma(p+1)\,\Gamma(p+\frac{1}{2}n+1)} \nabla^p \phi(a_1, \ldots) \right).$$

En multipliant par

$$\frac{2}{\Gamma(k+f)} T^{n+1} (1-T^2)^{k+f}\, dT,$$

et intégrant depuis $T=0$ jusqu'à $T=1$, on obtient

$$\frac{2}{\Gamma(k+f)} \int_0^1 T^{n+1} (1-T^2)^{k+f}\, W dT$$

$$= \pi^{\frac{1}{2}n}\, h_1 \ldots h_n \mathbf{S}_{p=0}^{p=\infty} \left(\frac{t^{2p}}{2^{2p}\,\Gamma(p+1)\,\Gamma(p+k+f+\frac{1}{2}n+1)} \nabla^p \phi(a_1, \ldots) \right)$$

puisque en général

$$\frac{2}{\Gamma(k+f)} \int_0^1 T^{2p+n+1} (1-T^2)^{k+f}\, dT = \frac{\Gamma(p+\frac{1}{2}n+1)}{\Gamma(p+k+f+\frac{1}{2}n+1)}.$$

On a donc l'équation

$$\frac{2}{\Gamma(k+f)} \int_0^1 T^{n+1} (1-T^2)^{k+f}\, W dT = \pi^{\frac{1}{2}n}\, h_1 \ldots h_n U.$$

Mettons la valeur de U qui en résulte, dans l'équation entre V et U; faisons aussi $t=1$, ce qui ne nuit pas à la généralité. On a, en rassemblant les formules,

$$V = \int dx_1 \ldots dx_n \ldots x_1^{2a_1+1} \ldots x_{f+1}^{2a_{f+1}} \ldots \phi(a_1 - x_1, \ldots),$$

$$W = \int dx_1 \ldots dx_n \ldots \phi(a_1 - x_1 T, \ldots),$$

$$V = \frac{(-)^f}{2^{k+f-1}\,\Gamma(k+f)} \left(\frac{d}{da_1} \cdots \frac{d}{da_f}\right) \left(h_1{}^3 \frac{d}{dh_1}\right)^{a_1} \cdots \left(h_n{}^3 \frac{d}{dh_n}\right)^{a_n} h_1{}^2 \ldots h_f{}^2 \int_0^1 T^{n+1} (1-T^2)^{k+f} W dT;$$

ce qui établit ce théorème: La suite des intégrales V s'exprime au moyen des coefficients différentiels par rapport à $h_1 \ldots h_n$ et $a_1 \ldots a_f$ de la seule intégrale

$$\int_0^1 T^{n+1} (1-T^2)^{k+f} \int dx_1 \ldots dx_n \ldots \phi(a_1 - x_1 T, \ldots).$$

En supposant que les indices dans V soient tous pairs, on a $f=0$. Les symboles $\frac{d}{da_1}, \ldots$ n'entrent plus dans l'expression de V. En changeant la fonction ϕ, on a ces formules plus simples,

$$\left\{\begin{aligned} V &= \int dx_1 \dots dx_n\, x_1^{2a_1} \dots x_n^{2a_n}\, \phi(x_1, \dots, x_n), \\ W &= \int dx_1 \dots dx_n\, \phi(Tx_1, \dots, Tx_n), \\ V &= \frac{1}{2^{k-1}\,\Gamma(k)} \left(h_1^3 \frac{d}{dh_1}\right)^{a_1} \dots \left(h_n^3 \frac{d}{dh_n}\right)^{a_n} \int_0^1 T^{n+1}(1-T^2)^k\, W dT, \end{aligned}\right.$$

où V s'exprime au moyen des coefficients différentiels par rapport à $h_1, \dots, h_n$ de l'intégrale

$$\int_0^1 T^{n+1}(1-T^2)^k \int dx_1 \dots dx_n\, \phi(Tx_1, \dots, Tx_n),$$

de manière que nous avons trouvé des relations entre des intégrales définies qui contiennent une fonction indéterminée, assujettie à la seule condition d'être développable dans les limites de l'intégration selon les puissances entières et positives des variables[1], mais dans lesquelles les limites sont données par

$$\frac{x_1^2}{h_1^2} + \dots + \frac{x_n^2}{h_n^2} \overset{=}{<} 1.$$

[1] Cette condition est supposée dans la démonstration, mais il me paraît, d'après la forme du résultat, qu'elle n'est pas essentielle.