28.

SUR QUELQUES INTÉGRALES MULTIPLES.

[From the *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* (Liouville), tome x. (1845), pp. 158—168.]

J'AI donné, il y a trois ans, dans le *Cambridge Mathematical Journal*, [2], une formule assez singulière pour l'intégrale multiple

$$\int \dots dx_1\, dx_2 \dots \phi\,(a_1 - x_1, \quad a_2 - x_2 \dots),$$

prise entre les limites données par l'équation

$$\frac{x_1^2}{h_1^2} + \frac{x_2^2}{h_2^2} + \dots = 1,$$

la fonction ϕ étant seulement assujettie à la condition de ne pas devenir infinie entre les limites de l'intégration. L'expression que j'obtiens est une suite infinie, dont le terme général est de cette forme,

$$A_p \left(h_1^2 \frac{d^2}{da_1^2} + h_2^2 \frac{d^2}{da_2^2} + \dots \right)^p \phi\,(a_1, a_2 \dots).$$

En appliquant ce résultat à un cas particulier, j'ai obtenu l'intégrale à n variables analogue à celle qui exprime le *potentiel* d'un ellipsoïde homogène, pour un point extérieur. J'ai depuis cherché à étendre ces résultats au cas d'une densité variable et égale à une fonction rationnelle et entière des coordonnées, et d'une loi d'attraction selon une puissance quelconque de la distance (toujours à n variables); mais quoique j'aie réussi à effectuer cette généralisation, mes formules étaient si confuses et si inférieures à celles que donne la belle analyse de M. Lejeune-Dirichlet, que je ne les ai jamais publiées. Cependant, en revenant il y a quelques jours sur ce sujet, en me fondant sur une intégrale plus générale, j'ai trouvé que la question était à peine plus difficile que dans le cas d'une densité constante, et se laissait traiter exactement de la même manière. J'ai réussi de cette façon à exprimer l'intégrale cherchée au moyen d'une seule intégrale définie *abélienne*, et de ses coefficients différentiels relatifs aux constantes qui y entrent ; et il m'a paru que les formules que j'ai ainsi obtenues pourraient n'être pas tout à fait indignes de l'attention des géomètres.

Considérons l'intégrale multiple à n variables V, donnée par l'équation

$$V = \int dx_1 \dots x_1^{2\alpha_1+1} \dots (f \text{ termes})\ x_{f+1}^{2\alpha_{f+1}} \dots (n-f \text{ termes})\ \phi\,(a_1 - x_1 t, \dots),$$

où les variables $x_1, \dots$ doivent recevoir des valeurs réelles quelconques, positives ou négatives, qui satisfassent à la condition

$$\frac{x_1^2}{h_1^2} + \dots \leqq 1\,;$$

et l'on suppose de plus qu'il est permis de développer (sous le signe intégral) la fonction ϕ suivant les puissances ascendantes des variables $x_1, \dots$.

En faisant ce développement, il est clair que les termes qui contiennent des puissances impaires d'une ou de plusieurs des variables se détruisent par l'intégration ; donc, en ne faisant attention qu'aux termes qui contiennent seulement des puissances paires, on a ce terme général,

$$\frac{(-)^f\, t^{2p+f}}{[2r_1+1]^{2r_1+1} \dots [2r_{f+1}]^{2r_{f+1}} \dots} \left(\frac{d}{da_1}\right)^{2r_1+1} \dots \left(\frac{d}{da_{f+1}}\right)^{2r_{f+1}} \dots \phi\,(a_1, \dots)$$

$$\times \int dx_1 \dots x_1^{2\alpha_1+2r_1+2} \dots x_{f+1}^{2\alpha_{f+1}+2r_{f+1}} \dots,$$

où

$$p = r_1 + \dots\,;$$

il est à peine nécessaire de remarquer que, dans l'expression

$$[2r_1+1]^{2r_1+1} \dots [2r_{f+1}]^{2r_{f+1}} \dots,$$

il faut prendre f termes tels que $[2r_1+1]^{2r_1+1}$, et $\overline{n-f}$ termes de l'autre forme $[2r_{f+1}]^{2r_{f+1}}$, et ainsi dans tous les cas semblables.

L'intégrale qui entre dans cette formule a été trouvée, comme on sait, par M. Dirichlet. Sa valeur est

$$\frac{\Gamma\,(\alpha_1 + r_1 + \frac{3}{2}) \dots \Gamma\,(\alpha_{f+1} + r_{f+1} + \frac{1}{2}) \dots}{\Gamma\,(p + k + f + \frac{1}{2}n + 1)}\, h_1^{2\alpha_1+2r_1+3} \dots h_{f+1}^{2\alpha_{f+1}+2r_{f+1}+1},$$

où

$$k = \alpha_1 + \dots.$$

Le terme entier devient, après quelques réductions très-simples,

$$\frac{(-)^f \pi^{\frac{1}{2}n} t^{2p+f}}{2^{2p+k+f}\,\Gamma(p+k+f+\frac{1}{2}n+1)}$$

$$\times \frac{L_1 \ldots M_{f+1} \ldots}{[r]^{r_1} \ldots} h_1^{2\alpha_1+2r_1+3} \ldots h_{f+1}^{2\alpha_{f+1}+2r_{f+1}+1} \left(\frac{d}{da_1}\right)^{2r_1+1} \ldots \left(\frac{d}{da_{f+1}}\right)^{2r_{f+1}} \ldots \phi(a_1, \ldots),$$

où l'on écrit, pour un moment,

$$\begin{aligned} L_1 &= (2r_1 \;+3)\,(2r_1 \;+5) \ldots (2r_1 \;+2\alpha_1 \;+1), \\ &\;\vdots \\ M_{f+1} &= (2r_{f+1}+1)\,(2r_{f+1}+3) \ldots (2r_{f+1}+2\alpha_{f+1}-1); \\ &\;\vdots \end{aligned}$$

puis on le transforme en

$$\frac{(-)^f \pi^{\frac{1}{2}n} t^{2p+f}}{2^{2p+k+f}\,\Gamma(p+k+f+\frac{1}{2}n+1)}$$

$$\times \left(\frac{d}{da_1} \ldots \frac{d}{da_f}\right)\left(h_1^3 \frac{d}{dh_1}\right)^{\alpha_1} \ldots h_1^3 \ldots h_{f+1} \ldots \frac{1}{[r_1]^{r_1}}\left(h_1^2 \frac{d^2}{da_1^2}\right)^{r_1} \ldots \phi(a_1, \ldots).$$

En effet, les symboles $\dfrac{d}{da_1}$ et $h_1^3 \dfrac{d}{dh_1}$ étant conversibles, on a

$$\frac{d}{da_1}\left(h_1^3 \frac{d}{dh_1}\right)^{\alpha_1} h_1^{2r_1+3}\left(\frac{d}{da_1}\right)^{2r_1} = L_1 h_1^{2r_1+2\alpha_1+3}\left(\frac{d}{da_1}\right)^{2r_1+1};$$

et ainsi de suite.

En prenant la somme de tous les termes qui correspondent à une même valeur de p, on a

$$\mathbf{S}\, \frac{1}{[r_1]^{r_1}}\left(h_1^2 \frac{d^2}{da_1^2}\right)^{2r_1} \ldots = \frac{1}{[p]^p}\,\nabla^p.$$

En posant

$$\nabla = \left(h_1^2 \frac{d^2}{da_1^2} + \ldots\right);$$

puis, en observant que p doit s'étendre depuis 0 jusqu'à ∞, on a, pour l'intégrale cherchée,

$$V = \frac{(-)^f \pi^{\frac{1}{2}n}}{2^{k+f}}\left(\frac{d}{da_1} \ldots \frac{d}{da_f}\right)\left(h_1^3 \frac{d}{dh_1}\right)^{\alpha_1} \ldots$$

$$\times \left[h_1^3 \ldots h_{f+1} \ldots t^f\, \mathbf{S}_{p=0}^{p=\infty}\left(\frac{t^{2p}}{2^{2p}[p]^p\,\Gamma(p+k+f+\frac{1}{2}n+1)}\,\nabla^p \phi(a_1, \ldots)\right)\right],$$

ce qui fait voir que l'intégrale V dépend de cette seule expression,

$$U = \mathbf{S}_0^\infty\left(\frac{t^{2p}}{2^{2p}[p]^p\,\Gamma(p+k+f+\frac{1}{2}n+1)}\,\nabla^p \phi(a_1, \ldots)\right).$$

On peut remarquer, en passant, que cette quantité satisfait à cette équation différentielle,

$$\frac{1}{t}\frac{d}{dt}\left(t^{-2k-2f-n+1}\frac{d}{dt}(t^{2k+2f+n}\,U)\right)-\nabla U=0,$$

ou

$$\frac{d^2U}{dt^2}+(2k+2f+n+1)\frac{1}{t}\frac{dU}{dt}-\nabla U=0.$$

M. G. Boole, de Lincoln, a déduit une équation semblable de mes formules dans le *Mathematical Journal*. C'est à lui qu'on doit l'introduction dans l'intégrale proposée de cette quantité t, ce qui, au reste, n'est pas d'une grande importance ici; mais j'ai cru devoir la conserver, à cause de cette équation même, qui pourrait conduire à des résultats intéressants.

A présent, soit

$$\phi(a_1-x_1t,\ldots)=\frac{1}{\{(a_1-x_1t)^2+\ldots\}^{\frac{1}{2}n-s}},$$

où s est un nombre entier; je pose, pour abréger,

$$\tfrac{1}{2}n-s=i,\quad k+f+s=\sigma,$$

ce qui donne

$$\Gamma(p+k+f+\tfrac{1}{2}n+1)=\Gamma(p+i+\sigma+1)=[p+i+\sigma]^{p+1}\,\Gamma(i+\sigma);$$

et ainsi

$$U=\frac{1}{\Gamma(i+\sigma)}\mathbf{S}_0^\infty\left(\frac{t^{2p}}{2^{2p}\,[p]^p\,[p+i+\sigma]^{p+1}}\,\nabla^p\,\frac{1}{(a_1^2+\ldots)^i}\right).$$

Le cas de $\sigma=0$, qui est le plus simple, est, en effet, celui du Mémoire cité, et à ce cas on peut réduire celui de σ entier négatif; il y a même deux manières d'effectuer cette réduction. Représentons, en effet, la valeur de U par cette notation plus complète U_i; on obtient tout de suite

$$U_i^{-\sigma}=2^{-2\sigma}\,t^{2\sigma-2i}\left(\frac{1}{t}\frac{d}{dt}\right)^\sigma(t^{2i}\,U_i^0),$$

et

$$U_i^{-\sigma}=\frac{1}{2^{2\sigma}\,[1-i]^\sigma\,[1-\frac{1}{2}n]^\sigma}\left(\frac{d^2}{da_1^2}+\ldots\right)^\sigma U_{i-\sigma}^0,$$

la seconde desquelles équations se déduit de cette formule facile à démontrer,

$$\left(\frac{d^2}{da_1^2}+\ldots\right)^\sigma\frac{1}{(a_1^2+\ldots)^{i-\sigma}}=2^{2\sigma}\,[i-1]^\sigma\,[i-\tfrac{1}{2}n]^\sigma\,\frac{1}{(a_1^2+\ldots)^i}.$$

Nous pouvons donc, dans la suite, ne considérer que le cas de σ entier positif.

Commençons par opérer la transformation que voici; en déterminant ζ par l'équation

$$\frac{a_1^2}{\zeta+h_1^2}+\ldots=t^2,$$

je pose $l_1 = \dfrac{h_1^2}{\zeta}, \ldots, \quad a_1^2 = (1+l_1)\, t^2 \alpha_1^2, \ldots,$

ce qui donne

$$\zeta = \alpha_1^2 + \ldots,$$

$$a_1^2 + \ldots = t^2 [(1+l_1)\, \alpha_1^2 + \ldots],$$

$$\nabla = \frac{\zeta}{t^2} \left(\frac{l_1}{1+l_1} \right) \frac{d^2}{d\alpha_1^2} + \ldots \Big),$$

où il faut remarquer que ce ζ, contenu en ∇, ne doit pas être affecté des symboles $\dfrac{d}{d\alpha_1}, \ldots$ de ∇, de manière qu'il faut écrire

$$\nabla^p = t^{-2p} \zeta^p \left(\frac{l_1}{1+l_1} \frac{d^2}{d\alpha_1^2} + \ldots \right)^p = t^{-2p} (\alpha_1^2 + \ldots)^p \left(\frac{l_1}{1+l_1} \frac{d^2}{d\alpha_1^2} + \ldots \right)^p,$$

$$U = \frac{1}{\Gamma(i)\, t^{2i} (\alpha_1^2 + \ldots)^i}$$

$$\times \mathbf{S}_0^\infty \left(\frac{1}{2^{2p} [p+i+\sigma]^{p+\sigma+1} [p]^p} (\alpha_1^2 + \ldots)^{p+i} \left(\frac{l_1}{1+l_1} \frac{d^2}{d\alpha_1^2} + \ldots \right)^p \frac{1}{\{\alpha_1^2 (1+l_1) + \ldots\}^i} \right),$$

formules qui se prêtent mieux aux réductions, quoique plus compliquées en apparence.

Écrivons d'abord

$$\frac{l_1}{1+l_1} \frac{d^2}{d\alpha_1^2} + \ldots = \left(\frac{d^2}{d\alpha_1^2} + \ldots \right) - \left(\frac{1}{1+l_1} \frac{d^2}{d\alpha_1^2} + \ldots \right) = \Delta - \left(\frac{1}{1+l_1} \frac{d^2}{d\alpha_1^2} + \ldots \right).$$

En développant la $p^{ième}$ puissance de ce symbole selon les puissances de Δ, on a

$$(-)^{p-q} \frac{[p]^p}{[p-q]^{p-q} [q]^q} \Delta^q \left(\frac{1}{1+l_1} \frac{d^2}{d\alpha_1^2} + \ldots \right)^{p-q},$$

qui doit s'appliquer à $\dfrac{1}{\{\alpha_1^2 (1+l_1) + \ldots\}^i}$.

Considérons l'expression

$$\left(\frac{l_1}{1+l_1} \frac{d^2}{d\alpha_1^2} + \ldots \right)^{p-q} \frac{1}{\{\alpha_1^2 (1+l_1) + \ldots\}^i},$$

et mettons, pour un moment,

$$(1+l_1)\, \alpha_1^2 = \alpha_1'^2 \ldots;$$

cette expression se trouve réduite à

$$\left(\frac{d^2}{d\alpha'^2} + \ldots \right)^{p-q} \frac{1}{(\alpha_1'^2 + \ldots)^i},$$

laquelle, par une formule déjà citée, devient

$$2^{2p-2q} [i+p-q-1]^{p-q} [i+p-q-\tfrac{1}{2}n]^{p-q} \frac{1}{(\alpha_1'^2 + \ldots)^{i+p-q}},$$

c'est-à-dire $$2^{2p-2q}\,[i+p-q-1]^{p-q}\,[i+p-q-\tfrac{1}{2}n]^{p-q}\,\frac{1}{\{\alpha_1^2(1+l_1)+\ldots\}^{i+p-q}}.$$

Le terme général de U, en faisant abstraction du facteur $\dfrac{1}{\Gamma(i)\,t^{2i}\,(\alpha_1^2+\ldots)^i}$, se réduit à

$$\frac{(-)^{p-q}\,(\alpha_1^2+\ldots)^{p+i}}{2^{2q}\,[p+i+\sigma]^{\sigma+q+1}\,[p-q]^{p-q}\,[q]^q}\,[i+p-q-\tfrac{1}{2}n]^{p-q}\,\Delta^q\,\frac{1}{\{\alpha_1^2(1+l_1)+\ldots\}^{i+p-q}};$$

considérons la partie de ce terme qui est de l'ordre θ en $l_1, \ldots$, elle devient

$$\frac{(-)^{p-q+\theta}\,(\alpha_1^2+\ldots)^{p+1}}{2^{2q}\,[p-q]^{p-q}\,[q]^q\,[s]^s}\,[i+p-q+\theta-1]^{\theta-\sigma-q-1}$$

$$\times\,[i+p-q-\tfrac{1}{2}n]^{p-q}\,\Delta^q\,\frac{(l_1\alpha_1^2+\ldots)^\theta}{(\alpha_1^2+\ldots)^{i+p-q+\theta}}.$$

Soit, en général, Θ une fonction homogène de l'ordre 2θ des lettres $\alpha_1, \ldots$; on a

$$\Delta\,\frac{\Theta}{(\alpha_1^2+\ldots)^i}=\frac{\Delta\Theta}{(\alpha_1^2+\ldots)^i}+2^2 i\,(i+1-2\theta-\tfrac{1}{2}n)\,\frac{\Theta}{(\alpha_1^2+\ldots)^{i+1}};$$

et de là, en répétant toujours l'opération Δ, et faisant attention à ce que $\Delta\Theta$, $\Delta^2\Theta, \ldots$ sont des fonctions homogènes des ordres $\overline{2\theta-1}$, $\overline{2\theta-2}$, &c., on obtient

$$\Delta^q\,\frac{\Theta}{(\alpha_1^2+\ldots)^i}=\frac{[q]^q}{[\lambda]^\lambda\,[q-\lambda]^{q-\lambda}}\,2^{2q-2\lambda}\,[i+q-\lambda-1]^{q-\lambda}$$

$$\times\,[i+q-2\theta-\tfrac{1}{2}n]^{q-\lambda}\,\Delta^\lambda\Theta\cdot\frac{1}{(\alpha_1^2+\ldots)^{i+q-\lambda}},$$

ou $$\Delta^q\,\frac{(l_1\alpha_1^2+\ldots)^\theta}{(\alpha_1^2+\ldots)^{i+p-q+\theta}}=\frac{[q]^q}{[\lambda]^\lambda\,[q-\lambda]^{q-\lambda}}\,2^{2q-2\lambda}\,[i+p+\theta-\lambda-1]^{q-\lambda}$$

$$\times\,[i+p-\theta-\tfrac{1}{2}n]^{q-\lambda}\,\Delta^\lambda\,(l_1\alpha_1^2+\ldots)^\theta\cdot\frac{1}{(\alpha_1^2+\ldots)^{i+p+\theta-\lambda}},$$

depuis $\lambda=0$ jusqu'à $\lambda=q$.

Puis, pour le terme général de U,

$$\frac{(-)^{p-q+\theta}}{2^{2\lambda}\,[p-q]^{p-q}\,[\theta]^\theta\,[\lambda]^\lambda\,[q-\lambda]^{q-\lambda}}\,[i+p+\theta-\lambda-1]^{\theta-\sigma-\lambda-1}$$

$$\times\,[i+p-q-\tfrac{1}{2}n]^{p-q}\,[i+p-\theta-\tfrac{1}{2}n]^{q-\lambda}\,\Delta^\lambda\,(l_1\alpha_1^2+\ldots)^\theta\cdot\frac{1}{(\alpha_1^2+\ldots)^{\theta-\lambda}},$$

ou $$\frac{(-)^{-q}}{[p-q]^{p-q}\,[q-\lambda]^{q-\lambda}}\,[i+p-q-\tfrac{1}{2}n]^{p-q}\,[i+p-\theta-\tfrac{1}{2}n]^{q-\lambda}$$

$$\times\,\frac{(-)^{p+\theta}}{2^{2\lambda}\,[\theta]^\theta\,[\lambda]^\lambda}\,[i+p+\theta-\lambda-1]^{\theta-\sigma-\lambda-1}\,\Delta^\lambda\,(l_1\alpha_1^2+\ldots)^\theta\cdot\frac{1}{(\alpha_1^2+\ldots)^{\theta-\lambda}};$$

le dernier facteur étant indépendant de q, q doit s'étendre depuis 0 jusqu'à p. Mais à cause de $[q-\lambda]^{q-\lambda}$ qui devient infini pour $q<\lambda$, on peut faire étendre q depuis $q=\lambda$ jusqu'à $q=p$; ou, en écrivant

$$q-\lambda=q',\ p-\lambda=p',$$

q' s'étend depuis 0 jusqu'à p'. Le facteur à sommer est donc

$$(-)^\lambda \left\{\frac{(-)^{q'}}{[p'-q']^{p'-q'}\,[q']^{q'}}\,[C-q']^{p'-q'}\,[M]^{q'}\right\},$$

si, pour un moment, l'on pose

$$C=i+p'-\tfrac{1}{2}n,\quad M=i+p-\theta-\tfrac{1}{2}n.$$

Cette somme se réduit à

$$(-)^\lambda\frac{[C-M]^{C-M-p'}}{[C-M-p']^{C-M-p'}},$$

c'est-à-dire à

$$(-)^\lambda\frac{[\theta-\lambda]^{\theta-p}}{[\theta-p]^{\theta-p}},$$

et nous avons ainsi le terme général

$$\frac{(-)^{\lambda+p+\theta}\,[\theta-\lambda]^{\theta-p}\,[i+\theta-\lambda-1+p]^{\theta-\sigma-\lambda-1}}{2^{2\lambda}\,[\theta]^\theta\,[\lambda]^\lambda\,[\theta-p]^{\theta-p}}\,\Delta^\lambda\,(l_1\alpha_1^2+\dots)^\theta\cdot\frac{1}{(\alpha_1^2+\dots)^{\theta-\lambda}}.$$

Écrivons

$$p=\theta-p';$$

cela devient

$$\frac{(-)^{p'}\,[M]^{p'}\,[C-p']^{C-A}}{[p']^{p'}}\;\frac{(-)^\kappa}{2^{2\lambda}\,[\theta]^\theta\,[\lambda]^\lambda}\,\Delta^\lambda\,(l_1\alpha_1^2+\dots)^\theta\cdot\frac{1}{(\alpha_1^2+\dots)^{\theta-\lambda}},$$

où $\quad M=\theta-\lambda,\quad C=i+2\theta-\lambda-1,\quad C-A=\theta-\sigma-\lambda-1;$

p' doit s'étendre depuis $-\infty$ jusqu'à θ. Mais à cause de $[p']^{p'}$, qui devient infini, pour p' négatif, on peut l'étendre seulement depuis 0 jusqu'à θ, ou même seulement depuis 0 jusqu'à M, à cause du facteur $[M]^{p'}$. La somme se réduit à

$$[C-M]^{C-M-A}\,[C-A]^M=[i+\theta-1]^{-\sigma-1}\,[\theta-\sigma-\lambda-1]^{\theta-\lambda},$$

et le terme général devient

$$\frac{(-)^\lambda}{2^{2\lambda}\,[\theta]^\theta\,[\lambda]^\lambda}\,[i+\theta-1]^{-\sigma-1}\cdot[\theta-\sigma-\lambda-1]^{\theta-\lambda}\,\Delta^\lambda\,(l_1\alpha_1^2+\dots)^\theta\cdot\frac{1}{(\alpha_1^2+\dots)^{\theta-\lambda}}.$$

Écrivons enfin

$$\theta=\lambda+\kappa,$$

le terme devient

$$\frac{(-)^\lambda}{2^{2\lambda}[\lambda]^\lambda[\lambda+\kappa]^{\lambda+\kappa}[i+\lambda+\kappa+\sigma]^{\sigma+1}}[\kappa-\sigma-1]^\kappa\,\Delta^\lambda(l_1\alpha_1^2+\dots)^{\lambda+\kappa}\cdot\frac{1}{(\alpha_1^2+\dots)^\lambda}.$$

Il faut que κ soit toujours positif, car autrement le terme s'évanouit à cause de $\Delta^\lambda(l_1\alpha_1^2+\dots)^{\lambda+\kappa}$; mais pour κ plus grand que σ, le facteur $[\kappa-\sigma-1]^\kappa$ s'évanouit, donc κ s'étend seulement depuis 0 jusqu'à σ.

Soit $k_1+\dots=\kappa$, et considérons les termes de $\Delta^\lambda(l_1\alpha_1^2+\dots)^{\lambda+\kappa}$ qui contiennent $\alpha_1^{2k_1},\dots$; ces termes seront de la forme

$$\frac{[\lambda]^\lambda}{[q_1]^{q^1}\dots}\,\frac{[\lambda+\kappa]^{\lambda+\kappa}}{[q_1+k_1]^{q_1+k_1}\dots}\left(\frac{d^2}{d\alpha_1^2}\right)^{2q_1}\dots l_1^{q_1+k_1}\,\alpha_1^{2q_1+2k_1}\dots,$$

où

$$q_1+\dots=\lambda,$$

c'est-à-dire

$$\frac{[\lambda]^\lambda[\lambda+\kappa]^{\lambda+\kappa}[2q_1+2k_1]^{2q_1}\dots}{[q_1]^{q_1}\dots[q_1+k_1]^{q_1+k_1}\dots}\,l_1^{q_1+k_1}\dots\alpha_1^{2k_1}\dots,$$

ou, en réduisant,

$$2^{2\lambda}[\lambda]^\lambda[\lambda+\kappa]^{\lambda+\kappa}\frac{\alpha_1^{2k_1}\dots}{[k_1]^{k_1}\dots}\,\frac{[q_1+k_1-\frac{1}{2}]^{q_1}\dots}{[q_1]^{q_1}\dots}\,l_1^{q_1+k_1}\dots;$$

et cela donne pour U,

$$\frac{(-)^\lambda}{[i+\kappa+\lambda+\sigma]^{\sigma+1}}\,\frac{[q_1+k_1-\frac{1}{2}]^{q_1}\dots}{[q_1]^{q_1}\dots}\,l_1^{q_1+k_1}\dots\frac{[\kappa-\sigma-1]^\kappa\cdot\alpha_1^{2k_1}\dots}{[k_1]^{k_1}}\,\frac{1}{(\alpha_1^2+\dots)^\kappa}.$$

Soit

$$\frac{1}{\{(1+l_1u)\dots\}^{\frac{1}{2}}}=(0)+(1)\,u\dots+(\lambda)\,u^\lambda+\dots;$$

on a

$$(\lambda)=(-)^\lambda\frac{[q_1-\frac{1}{2}]^{q_1}\dots}{[q_1]^{q_1}\dots}\,l_1^{q_1}\dots+\&\text{c.},\quad q_1+\dots=\lambda;$$

et de là,

$$\frac{1}{[k_1-\frac{1}{2}]^{k_1}\dots}\,\frac{1}{l_1^{\frac{1}{2}}\dots}\left(l_1^2\frac{d}{dl_1}\right)^{k_1}\dots l_1^{\frac{1}{2}}(\lambda)=(-)^\lambda\frac{[q_1+k_1-\frac{1}{2}]^{q_1}\dots}{[q_1]^{q_1}\dots}\,l^{q_1+k_1}\dots,$$

de manière que le terme de U devient

$$\frac{1}{l_1^{\frac{1}{2}}\dots}\left(l_1^2\frac{d}{dl_1}\right)^{k_1}\dots l_1^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{[i+\kappa+\lambda+\sigma]^{\sigma+1}}(\lambda)\right)\frac{[\kappa-\sigma-1]^\kappa\,\alpha^{2k_1}\dots}{[2k_1]^{2k_1}\dots}\,\frac{1}{(\alpha_1^2+\dots)^\kappa}.$$

Prenant la somme pour λ, à l'aide de

$$[\sigma]^\sigma\int_0^1(1-u)^\sigma\,u^{i+\kappa+\lambda-1}\,du=\frac{1}{[i+\kappa+\sigma+\lambda]^{\sigma-1}}$$

(ce qui suppose $l+u>0$), on obtient

$$\frac{2^{2\kappa}\,[\sigma]^{\sigma}\,[\kappa-\sigma-1]^{\kappa}\,\alpha_1^{\,2k_1}\ldots}{[2k_1]^{2k_1}\ldots(\alpha_1^{\,2}+\ldots)^{\kappa}}\;\frac{1}{\sqrt{l_1\ldots}}\left(l_1^{\,2}\frac{d}{dl_1}\right)^{k_1}\ldots\sqrt{l_1\ldots}\int_0^1\frac{(1-u)^{\sigma}\,u^{i+\kappa-1}\,du}{\{(1+l_1u)\ldots\}^{\frac{1}{2}}},$$

ou, mettant $l_1=\dfrac{h_1^{\,2}}{\zeta},\ldots,$

$$2^{\kappa}\,[\sigma]^{\sigma}\,[\kappa-\sigma-1]^{\kappa}\,\frac{\alpha_1^{\,2k_1}\ldots}{[2k_1]^{2k_1}\ldots}\,\zeta^{\frac{1}{2}n-2\kappa}\times\frac{1}{h_1\ldots}\left(h_1^{\,3}\frac{d}{dh_1}\right)^{k_1}\ldots h_1\ldots\int_0^1\frac{(1-u)^{\sigma}\,u^{i+\kappa-1}\,du}{\{(\zeta+h_1^{\,2}u)\ldots\}^{\frac{1}{2}}};$$

en rétablissant le facteur constant $\dfrac{1}{\Gamma(i)\,t^{2i}\,\zeta^{i}}$ de U, le terme général de cette quantité est

$$\frac{2^{\kappa}\,[\sigma]^{\sigma}\,[\kappa-\sigma-1]^{\kappa}}{t^{2i}\,\Gamma(i)}\,\frac{\alpha_1^{\,2k_1}\ldots}{[2k_1]^{2k_1}\ldots}\,\zeta^{\frac{1}{2}n-2\kappa+i}\times\frac{1}{h_1\ldots}\left(h_1^{\,3}\frac{d}{dh_1}\right)^{k_1}\ldots h_1\ldots\int_0^1\frac{(1-u)^{\sigma}\,u^{i+\kappa-1}\,du}{\{(\zeta+h_1^{\,2}u)\ldots\}^{\frac{1}{2}}},$$

où k_1, &c., sont des entiers positifs quelconques qui satisfont à

$$k_1+\ldots=\kappa,$$

et κ peut s'étendre depuis 0 jusqu'à σ. Il faut observer qu'en différentiant par $\dfrac{d}{dh_1}$, &c., on ne doit pas considérer ζ comme fonction de $h_1\ldots$, ce qui est cependant nécessaire dans l'équation entre V et U.