

- 1.1. — metody analityczne i półanalityczne
- 3.3.10. — dyski, łopatki, wały wirujące
- 3.4. — fale w ciałach stałych
i elementach konstrukcyjnych

PRACA HABILITACYJNA

Tomasz Krzyżyński

DYNAMIKA UKŁADÓW CIĄGŁYCH
O OKRESOWYCH WŁASNOŚCIACH
STRUKTURY I WZBUDZENIA

38/1995

P.269

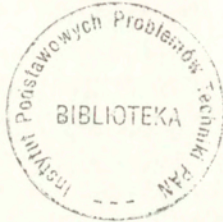


WARSZAWA 1995

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 22 grudnia 1995 r.

Praca habilitacyjna

recenzent – Prof. dr hab. Roman Bogacz



56572



Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN
Nakład 100 egz. Ark. wyd. 7,6 Ark. druk. 9,50
Oddano do drukarni w styczniu 1996 r.

Wydawnictwo Spółdzielcze sp. z o.o.
Warszawa, ul. Jasna 1

dr inż. Tomasz Krzyżyński
Samodzielna Pracownia
Dynamiki i Stateczności
Maszyn i Pojazdów
IPPT PAN

DYNAMIKA UKŁADÓW CIĄGLYCH O OKRESOWYCH WŁASNOŚCIACH STRUKTURY I WZBUDZENIA¹

STRESZCZENIE

Idealne struktury periodyczne (układy o okresowych własnościach struktury) składają się z jednakowych elementów połączonych ze sobą w identyczny sposób. Mogą być to układy rozmieszczone wzdłuż prostej o nieskończonej lub skończonej długości lub układy rozmieszczone na łuku kda. Przykładami występowania struktur periodycznych w praktyce są: tory kolei konwencjonalnej, tory kolei unoszonej magnetycznie, kadłuby samolotów, wysokie budynki zbudowane z powtarzalnych kondygnacji, turbiny o wirnikach wyposażonych w łopatki, których drgania tłumione są za pomocą elementów ciernych, stacje satelitarne, które zamierza się budować za pomocą powtarzalnych elementów wynoszonych sukcesywnie na orbitę wokółziemską, czy też nazemne anteny do obserwacji astronomicznych lub łączności satelitarnej, o dużych rozmiarach.

Niniejsza praca, poza wstępem i zakończeniem, składa się z dwóch zasadniczych części. Część pierwsza pracy, przedstawiona w rozdziale drugim, poświęcona jest ciągłym układom periodycznym rozmieszczonym wzdłuż prostej. Celem tej części jest opracowanie efektywnej metody analizy dynamicznej struktur periodycznych poddanych działaniu ruchomych źródeł zaburzeń. Zapropionowana metoda polega na poszukiwaniu rozwiązań równania różniczkowego ruchu układu ciągłego, w postaci wynikającej z twierdzenia Floqueta. Część druga pracy, przedstawiona w rozdziale trzecim, poświęcona jest cyklicznym układom periodycznym. Celem

¹STEADY-STATE DYNAMICS OF CONTINUOUS PERIODIC STRUCTURES, English summary on page 135.

tej części jest wykazanie istnienia pewnej regularności w stacjonarnej odpowiedzi dynamicznej układów niedostrojonych i zaproponowanie uproszczonej metody badania dynamiki tego typu układów.

W pierwszym punkcie rozdziału drugiego rozpatrywane są struktury periodyczne stanowiące nieograniczone belki ciągłe na sztywnych podporach. W punkcie tym podano podstawowe pojęcia dotyczące pasm przenoszenia i pasm zanikania oraz przepływu energii w układach rozmieszczonych wzdłuż prostej. Szczegółowo omówiono metodę uzyskiwania rozwiązań problemu dynamiki układów poddanych działaniu poruszającej się siły skupionej o harmonicznie zmiennej wartości oraz podano sposób określania krytycznych parametrów obciążenia. Kolejnym układem rozpatrywanym w rozdziale drugim jest tor kolei unoszonej magnetycznie, który modelowany jest za pomocą łańcucha oddziałujących między sobą belek swobodnie podpartych. Badana jest dynamika toru w płaszczyźnie zgodnej z pionowymi drganiami pojazdu i w płaszczyźnie prostopadłej do niej, które w obu przypadkach zawierają oś toru. Badane jest ukształtowanie pasm przenoszenia i pasm zanikania na płaszczyźnie „częstość – liczba falowa” i odpowiedź dynamiczna układu pod obciążeniem w postaci jednej lub kilkudziesięciu poruszających się sił skupionych. Trzecim z rozważanych układów periodycznych rozmieszczonych wzdłuż prostej jest tor kolei konwencjonalnej. Z uwagi na konieczność porównania zidentyfikowanych postaci drgań własnych toru z wynikami przedstawianymi w literaturze problemu, szczególnie przebadano przypadek propagacji fal bieżących w nieobciążonym torze. Dyskusję rozwiązania w przypadku układu obciążonego poruszającą się siłą harmoniczną przeprowadzono rozważając dwa graniczne przypadki: niezerowej wartości częstości siły wymuszającej i niezerowej wartości prędkości źródła zaburzeń.

Cykliczny układ periodyczny rozważany w drugiej części pracy to układ modelujący dynamikę wirników wyposażonych w łopatki, których drgania tłumione są za pomocą elementów ciernych. Elementy te, umiejscowione pomiędzy łopatkami, na skutek działania siły odśrodkowej powodują powstawanie siły tarcia, która przyczynia się do zmniejszenia amplitud drgań. Jednak ich zastosowanie powoduje dodatkowe sprzężenie łopatek, które wraz z niedostrojeniem pewnych parametrów układu może być przyczyną lokalizacji drgań. W niniejszej pracy rozpatrzono liniowe przybliżenie układu. Analizę dynamiczną przeprowadzono za pomocą modelu o cyklicznie periodycznych komórkach, modelowanych utwierdzonymi na jednym brzegu belkami ciągłymi oraz o liniowym oddziaływaniu pomiędzy nimi, modelowanym za pomocą elementu lepkosprężystego o zespolonej sztywności. W przypadku zarówno drgań własnych, jak i wymuszonych, badany jest przypadek układu idealnego oraz struktury o okresowym niedostrojeniu częstości drgań własnych łopatek i masy elementów ciernych (zmiana siły kontaktu pomiędzy łopatkami). W przypadku drgań swobodnych badany jest również problem lokalizacji za pomocą modeli stanowiących układy idealne zaburzone pojedynczym „elementem obcym”. Rezultaty w przypadku drgań wymuszonych uzyskano za pomocą metody „globalnej” polegającej na rozwiązaniu równań równowagi całego układu oraz za pomocą metody „modalnej”. Zaproponowana przez autora metoda „modalna” polega na zredukowaniu liczby koniecznych do rozwiązania równań, poprzez uwzględnienie kilku wybranych postaci drgań odpowiadającej układowi niedostrojonymu struktury idealnej.

Poniżej podano najważniejsze rezultaty i wnioski przedstawione w niniejszej pracy.

W części poświęconej ciągłym układom periodycznym rozmieszczonym wzdłuż prostej podano metodę analizy dynamicznej struktur periodycznych nieobciążonych oraz poddanych działaniu ruchomej analizy źródeł zaburzeń. Metoda ta polega na poszukiwaniu rozwiązań równania różniczkowego ruchu układu ciągłego, w postaci wynikającej z twierdzenia Floqueta. Pozwoliło

to na uzyskanie szeregu jakościowo nowych rezultatów. Otrzymano rozwiązania analityczne opisujące ole przemieszczeń wewnątrz komórek układu i określono krytyczne parametry obciążenia. Podano interpretację fizyczną zjawiska narastania amplitud fal przy krytycznych parametrach obciążenia. Wykazano konieczność uwzględnienia oddziaływania sąsiadujących przęsel w rzypadku analizy dynamiki bocznej toru kolei unoszonej magnetycznie. Zidentyfikowanodotychczas nie dyskutowane stany własne periodycznego toru kolei konwenconalnej. W części poświęconej cyklicznym strukturom periodycznym wykazano istnienie pewnych regularności w stacjonarnej odpowiedzi dynamicznej układów niedostrojonych i zaproponowano uproszczoną metodę badania dynamiki tego typu układów. Pomimo faktu, że rozpatrzone liniwe przybliżenie, rezultaty i wnioski znajdują zastosowanie w przypadku układów, w których drozważań przyjęto bliższe rzeczywistemu modele oddziaływania łopatek. Uzyskane w tej część rezultaty badania układów cyklicznych o okresowym niedostrojeniu parametrów są jakościowo nowe.

PODZIĘKOWANIA

Część zprezentowanych w tej pracy rezultatów została uzyskana w czasie mojego pobytu w Instytucie Mechaniki Uniwersytetu w Hanowerze, w ramach stypendium Fundacji Alexandra von Humbólta w latach 1991–1993 oraz w ramach projektu „Dynamika układów periodycznych o nieostrojonych parametrach“ wspieranego przez Fundację Volkswagena w Hanowerze w 1995 rok. Moim opiekunem naukowym był wówczas profesor Karl Popp. Niniejsza praca powstała wSamodzielnej Pracowni Dynamiki i Stateczności Maszyn i Pojazdów IPPT PAN, kierowanej przez profesora Romana Bogacza. Wymienionym osobom i instytucjom pragnę złożyć serdeczne podziękowania.

Tomasz Krzyżyński

Spis treści

1	Wstęp	15
1.1.	Wprowadzenie	15
1.2.	Przegląd literatury	16
1.3.	Cel i zakres pracy	18
2	Układy periodyczne rozmieszczone wzdłuż prostej	21
1.	Układy ciągłe na sztywnych podporach	21
1.1.	Modelowanie rozważanych układów	21
1.2.	Propagacja fal bieżących w układzie swobodnym	23
1.2.1.	Pasma przenoszenia i zanikania	24
1.2.2.	Przepływ energii w pasmach przenoszenia	27
1.3.	Odpowiedź dynamiczna układu poddanego działaniu ruchomego źródła zaburzeń	31
1.3.1.	Sposób uzyskania rozwiązania	32
1.3.2.	Rozwiązanie w przypadku układu sprężystego	34
1.3.3.	Dyskusja uzyskanego rozwiązania	35
1.3.4.	Krytyczne parametry obciążenia	39
1.4.	Najważniejsze wnioski	40
2.	Dynamika toru kolei unoszonej magnetycznie	42
2.1.	Równanie ruchu i warunki brzegowe	43
2.2.	Fale bieżące w nieobciążonym torze	43
2.2.1.	Dynamika układu w płaszczyźnie (x, y)	45
2.2.2.	Dynamika układu w płaszczyźnie (x, z)	47
2.3.	Układ poddany działaniu ruchomego źródła zaburzeń	51
2.3.1.	Przypadek obciążenia działającego w płaszczyźnie (x, y)	52
2.3.2.	Przypadek obciążenia działającego w płaszczyźnie (x, z)	53

24.	Krytyczne parametry obciążenia	54
3.	Dynamika toru kolei konwencjonalnej	59
31.	Sformułowanie problemu	59
32.	Propagacja swobodnych fal bieżących	60
33.	Układ pod obciążeniem poruszającą się siłą harmoniczną	64
3.3.1.	Przypadki szczególne	66
3.3.1.1.	Cechy rozwiązania w przypadku $V = 0, \Omega \neq 0$	66
3.3.1.2.	Cechy rozwiązania w przypadku $V \neq 0, \Omega = 0$	68
3.3.2.	Krytyczne parametry obciążenia	71
4.	Wnioski do rozdziału drugiego	73
3	Cykliczne układy periodyczne	77
1.	Nodelowanie układu	77
11.	Modelowanie podukładu ciągłego	77
12.	Modelowanie podukładu dyskretnego	83
13.	Konfiguracja układu	84
2.	Irgania swobodne	85
21.	Idealna struktura periodyczna	85
2.1.1.	Układ nieskończony	86
2.1.2.	Układ skończony złożony z N elementów	88
22.	Układ niedostrojony	90
2.2.1.	Niedostrojenie parametrów kontaktu	95
2.2.2.	Niedostrojenie częstości drgań własnych podukładu ciągłego	97
3.	Irgania wymuszone	101
31.	Odpowiedź dynamiczna układu idealnego	106
32.	Układ o okresowym niedostrojeniu częstościowym	107
33.	Układ o okresowym niedostrojeniu parametrów kontaktu	111
4.	Przybliżona metoda analizy układów niedostrojonych	113
41.	Układ o okresowym niedostrojeniu częstościowym	115
4.1.1.	Zależność sztywności dynamicznej $K_B(\phi)$ od rzędu niedostrojenia	115
4.1.2.	Uwagi o drganiach własnych układu o okresowym niedostrojeniu częstościowym	117
4.1.3.	Rozwiązanie za pomocą szeregów Fouriera	118
4.1.4.	Rozwiązania w przypadku układu $k_f = 1$	124

4.2.	Układ o okresowym niedostrojeniu parametrów kontaktu	124
4.2.1.	Rozwiązania w przypadku układu $k_c = 1$	126
5.	Wnioski do rozdziału trzeciego	127
4	Zakończenie	132
1.	Podsumowanie	132
2.	Perspektywy dalszych badań	133
A	English summary	135
	Literatura	138

Spis rysunków

2.1	Modele rozważanych układów.	22
2.2	Krzywe dyspersyjne na płaszczyźnie (Ω_0, λ) w przypadku $L = 2\pi$ (układ (A), układ (B)).	26
2.3	Ukształtowanie pasm przenoszenia (P) i zanikania (S) w przypadku układu (A) w funkcji długości komórki L	27
2.4	Rozkład gęstości energii $\langle H_n \rangle$ przy częstościach z drugiego pasma przenoszenia układu (A).	30
2.5	Prędkość grupowa V_G określona w przypadku pasm przenoszenia: 1, 2, 3, w układzie (A).	31
2.6	Przemieszczenia układu (A) w wybranych chwilach przy $V = 0.9$ i $\Omega = 0.1$	35
2.7	Przemieszczenia układu (A) w wybranych chwilach przy $V = 0.118$ i $\Omega = 2.0$	36
2.8	Ilustracja graficznej metody wyznaczania liczb falowych w przypadku układu (B).	37
2.9	Płaszczyzna fazowa w przypadku $X = 0.5L$ w układzie (A) i $V = 0.1$, $\Omega = 1.7$; (I) – w chwilach $\tau = nL/V$, (II) – w chwilach $\tau = nT$	38
2.10	Płaszczyzna fazowa w przypadku $X = V\tau$ w układzie (A) oraz: (a) – $V = 0.1$, $\Omega = 1.7$ i (b) – $V = 0.111$, $\Omega = 1.7$, w chwilach $\tau = nT$	39
2.11	Konfiguracja krzywych krytycznych odpowiadająca piątemu pasmu przenoszenia i wybranym strefom Brillouina w przypadku układu (A).	40
2.12	Konfiguracja krzywych krytycznych określona w przypadku układu (A).	41
2.13	Tor kolei unoszonej magnetycznie i jego model.	42
2.14	Model układu w przypadku dynamiki poprzecznej.	46
2.15	Konfiguracja płaszczyzny $(\nu_0, \bar{\lambda})$ w przypadku dynamiki poprzecznej; (a) – układ czysto sprężysty, (b) – układ lepkosprężysty.	48
2.16	Model układu w przypadku dynamiki bocznej.	49
2.17	Konfiguracja płaszczyzny $(\nu_0, \bar{\lambda})$ w przypadku dynamiki bocznej; (a) – układ czysto sprężysty, (b) – układ lepkosprężysty.	50

- 2.18 Obciążenie w płaszczyźnie (x, y) : przemieszczenia układu przy $v = 150 \text{ m/s}$,
(a) – $p_0 = 3.3 \cdot 10^5 \text{ N}$, (b) – $p_0 = 49 \cdot 204081.6 \text{ N} = 10^6 \text{ N}$ 53
- 2.19 Obciążenie w płaszczyźnie (x, y) : $v = 150 \text{ m/s}$, $p_0 = 3.3 \cdot 10^5 \text{ N}$, prze-
mieszczenia punktów: (a) – środek rozpiętości przęsła $x = 1.5 \text{ l}$, (b) – pilar
 $x = 1 \text{ l}$ 54
- 2.20 Obciążenie w płaszczyźnie (x, y) : przemieszczenie pod obciążeniem przy $v =$
 150 m/s , $p_0 = 3.3 \cdot 10^5 \text{ N}$, (a) – porównanie z rozwiązaniem quasi-statycznym,
(b) – porównanie z rozwiązaniem problemu belki swobodnie podpartej (b.s.p.). . 55
- 2.21 Obciążenie w płaszczyźnie (x, z) : przemieszczenia układu przy $v = 103 \text{ m/s}$,
(a) – $p_0 = 3.3 \cdot 10^5 \text{ N}$, (b) – $p_0 = 49 \cdot 2.0408 \cdot 10^5 \text{ N} = 10^6 \text{ N}$ 56
- 2.22 Obciążenie w płaszczyźnie (x, z) : $v = 103 \text{ m/s}$, $p_0 = 3.3 \cdot 10^5 \text{ N}$, prze-
mieszczenia punktów: (a) – środek rozpiętości przęsła $x = 3.5 \text{ l}$, (b) – pilar
 $x = 3 \text{ l}$ 56
- 2.23 Obciążenie w płaszczyźnie (x, z) : przemieszczenie pod obciążeniem przy $v =$
 103 m/s , $p_0 = 3.3 \cdot 10^5 \text{ N}$, (a) – porównanie z rozwiązaniem quasi-statycznym,
(b) – porównanie z rozwiązaniem problemu belki swobodnie podpartej (b.s.p.). . 57
- 2.24 Dynamika układu w płaszczyźnie (x, y) : konfiguracja krzywych krytycznych
określona w przypadku pierwszych dwóch pasm przenoszenia i stref Brillouina
1 – 10. 57
- 2.25 Dynamika układu w płaszczyźnie (x, z) : (a) – konfiguracja krzywych krytycz-
nych określona w przypadku pierwszego pasma przenoszenia i stref Brillouina
1 – 6, (b) – amplituda fali w funkcji prędkości obciążenia. 58
- 2.26 Dynamika układu w płaszczyźnie (x, z) : ilustracja graficznej metody wyznacza-
nia krytycznych parametrów obciążenia. 58
- 2.27 Model toru kolejowego. 59
- 2.28 Zależności dyspersyjne w przypadku czysto sprężystym. 62
- 2.29 Zależności dyspersyjne w przypadku małego tłumienia. 64
- 2.30 Zależności dyspersyjne w przypadku lepkosprężystym. 65
- 2.31 Przemieszczenia układu w wybranych chwilach przy wybranych częstościach
obciążenia ω i $v = 0$, w przypadku małego tłumienia, linia ciągła – szyna,
■ – podkład. 67
- 2.32 Ugięcie szyny w punkcie x_R , spowodowane siłą działającą w punkcie x_F , w
przypadku małego tłumienia, (a) – $x_R = x_F = 2.5 \text{ l}$, (b) – $x_R = x_F = 2.75 \text{ l}$. 68

2.33	Ugięcie szyny (a) i podkładu (b) w punkcie $x = x_R$ spowodowane siłą działającą w punkcie $x_F = 3l$, w przypadku małego tłumienia.	69
2.34	Ugięcie szyny w punkcie x_R , spowodowane siłą działającą w punkcie x_F , w przypadku lepkosprężystym, (a) - $x_R = x_F = 2.5l$, (b) - $x_R = x_F = 2.75l$. 69	69
2.35	Przemieszczenia układu w wybranych chwilach przy $v = 50, 75, 100 \text{ m/s}$ i $\omega = 0$, linia ciągła - szyna, ■ - podkład.	70
2.36	Ugięcie szyny i podkładu w punkcie $x = 5l$ przy wybranych wartościach prędkości obciążenia i $\omega = 0$	71
2.37	Ugięcie szyny w punkcie przyłożenia poruszającego się obciążenia przy wybranych wartościach prędkości obciążenia i $\omega = 0$	72
2.38	Krytyczne parametry obciążenia, dwa pasma przenoszenia, dwie strefy Brillouina. 73	73
2.39	Krytyczne parametry obciążenia, trzy pasma przenoszenia, cztery strefy Brillouina.	74
3.1	Rozważany układ i jego model.	78
3.2	Podukład ciągły i jego model.	79
3.3	Postaci drgań własnych podukładu ciągłego.	83
3.4	Nieliniowa charakterystyka podukładu dyskretnego uzyskana w pracy [10].	84
3.5	Konfiguracja układu.	85
3.6	Geometria kontaktu.	86
3.7	Relacje dyspersyjne w przypadku układu nieskończonego.	88
3.8	Ilustracja sposobu wyznaczania częstości drgań własnych.	89
3.9	Postaci drgań własnych układu idealnego (częstości z pierwszego pasma przenoszenia).	91
3.10	Postaci drgań własnych układu idealnego (częstości z drugiego pasma przenoszenia).	92
3.11	Przemieszczenia punktów kontaktu: (a) - $k = 1$, (b) - $k = 2$, (c) - $k = 3$, (d) - $k = 11$	93
3.12	Funkcja $\mathcal{D}_M = \mathcal{D}_M(\omega)$ w przypadku struktury idealnej.	95
3.13	Funkcja $\mathcal{D}_M = \mathcal{D}_M(\omega)$ w przypadku $q_{c(23)} = 1.25q_c$	96
3.14	Postać drgań własnych układu niedostrojonego $q_{c(23)} = 1.25q_c$ przy częstości $\omega = 120.95Hz$	98
3.15	Postać drgań własnych układu niedostrojonego $q_{c(23)} = 1.25q_c$ przy częstości $\omega = 121.09Hz$	99
3.16	Funkcja $\mathcal{D}_M = \mathcal{D}_M(\omega)$ w przypadku $\Delta_q = 25\%$ i $k_c = 11$	100

- 3.17 Przesunięcia punktów kontaktu przy drugiej postaci drgań układu idealnego (*) i niedostrojonego (●) w przypadku $\Delta_q = 25\% i k_c = 1$ 101
- 3.18 Postać drgań własnych układu niedostrojonego $\omega_{0(23)} = 1.004 \omega_0$ 103
- 3.19 Przesunięcia punktów kontaktu przy pierwszej postaci drgań układu niedostrojonego $\Delta_\omega = 2.5\%$: (a) - $k_f = 1$, (b) - $k_f = 11$ 104
- 3.20 Wybrane częstotliwości drgań własnych układu niedostrojonego $k_f = 1$ w funkcji stopnia niedostrojenia Δ_ω 105
- 3.21 Przesunięcie i faza układu idealnego przy obciążeniu rzędu $k_e = 0$ oraz $k_e = 1$ 107
- 3.22 Przesunięcie i faza układu idealnego przy obciążeniu rzędu $k_e = 2$ oraz $k_e = 3$ 108
- 3.23 Przesunięcie i faza układu niedostrojonego częstotściowo $k_f = 1$, przy obciążeniu rzędu $k_e = 0$ oraz $k_e = 1$ 109
- 3.24 Przesunięcie i faza układu niedostrojonego częstotściowo $k_f = 1$, przy obciążeniu rzędu $k_e = 2$ oraz $k_e = 3$ 110
- 3.25 Przesunięcie i faza układu niedostrojonego częstotściowo $k_f = 1$, przy obciążeniu rzędu $k_e = 1$ oraz $k_e = 3$ 111
- 3.26 Moc dostarczana do układu niedostrojonego częstotściowo $k_f = 1$, odpowiadające rzędów obciążenia: $k_e = 1, 2, 3$ oraz 4 112
- 3.27 Przesunięcie i faza układu niedostrojonego częstotściowo $k_f = 11$, przy obciążeniu rzędu $k_e = 0$ oraz $k_e = 1$ 113
- 3.28 Przesunięcie i faza układu niedostrojonego częstotściowo $k_f = 11$, przy obciążeniu rzędu $k_e = 2$ oraz $k_e = 3$ 114
- 3.29 Moc dostarczana do układu niedostrojonego częstotściowo $k_f = 11$, przy obciążeniu rzędu: $k_e = 1, 2, 3$ oraz 4 115
- 3.30 Przesunięcie i faza układu niedostrojonego $k_f = 1$, przy obciążeniu rzędu $k_e = 1$ oraz $k_e = 2$ 117
- 3.31 Przesunięcie i faza układu niedostrojonego $k_c = 11$, przy obciążeniu rzędu $k_e = 1$ oraz $k_e = 2$ 118
- 3.32 Przesunięcie i faza układu niedostrojonego $k_c = 1$ i $k_f = 11$ oraz układu $k_c = 11$ i $k_f = 1$, przy obciążeniu rzędu $k_e = 1$ 119
- 3.33 Sztywność dynamiczna $K_{B(n)}$ przy $k_f = 1$ i $\delta_l = 0$ w funkcji częstotliwości ω 120
- 3.34 Sztywność dynamiczna $K_{B(n)}$ i jej aproksymacja $K_B(\phi)$ przy $k_f = 1$, $\delta_l = 0$ i wybranych częstotliwości ω 121

- 3.35 Sztywność dynamiczna $K_{B(n)}$ i jej aproksymacja $K_B(\phi)$ przy $k_f = 1, k_f = 11$ i częstotliwości $\omega/2\pi = 100 \text{ Hz}$, (a) – część rzeczywista, (b) – część zespolona . . . 122
- 3.36 Funkcje $f_{j(n)}(\phi)$, $j = 2, 3$ i ich aproksymacje $f_j(\phi)$ przy $k_f = 1$ i wybranych częstotliwości ω 123
- 3.37 Przemieszczenie i faza w punktach $\mathbf{x}_{(n)} = \mathbf{x}_{e(n)}$ w układzie $k_f = 1$, w przypadku $k_e = 0$ i $k_e = 1$, uzyskane za pomocą metody modalnej. 125
- 3.38 Przemieszczenie i faza w punktach $\mathbf{x}_{(n)} = \mathbf{x}_{c(n)}$ w układzie $k_f = 1$, w przypadku $k_e = 2$, uzyskane za pomocą metody modalnej (M.A.) i metody globalnej (M.G.). 126
- 3.39 Przemieszczenie i faza w punktach $\mathbf{x}_{(n)} = \mathbf{x}_{c(n)}$ w układzie $k_f = 1$ w przypadku $k_e = 3$, uzyskane za pomocą metody modalnej (M.A.) i metody globalnej (M.G.). 127
- 3.40 Przemieszczenie i faza w punktach $\mathbf{x}_{(n)} = \mathbf{x}_{c(n)}$ w układzie $k_e = 1$, w przypadku $k_e = 2$, uzyskane za pomocą metody modalnej (M.A.) i metody globalnej (M.G.). 129
- 3.41 Przemieszczenie i faza w punktach $\mathbf{x}_{(n)} = \mathbf{x}_{c(n)}$ w układzie $k_e = 1$, w przypadku $k_e = 3$, uzyskane za pomocą metody modalnej (M.A.) i metody globalnej (M.G.). 130
- 3.42 Niedostrojenie częstotliwości drgań własnych łopatek rozpatrywane w pracy [10] . . 131
- 3.43 Przemieszczenia punktów $\mathbf{x}_n = \mathbf{x}_{(n)e}$ odpowiadające niedostrojeniu częstotściowemu zilustrowanemu na rysunku 3.42, uzyskane w pracy [10] 131

Spis tabel

2.1	Parametry modelu (A).	23
2.2	Parametry modelu (B).	23
2.3	Parametry rozważanego modelu.	43
2.4	Parametry toru w przypadku dynamiki w płaszczyźnie (x, y)	47
2.5	Parametry toru w przypadku dynamiki w płaszczyźnie (x, z)	49
2.6	Wartości parametrów rozważanego układu.	60
2.7	Podział płaszczyzny $(\nu_0, \bar{\lambda})$ w wybranym zakresie częstości (Hz).	63
2.8	Charakterystyczne częstości własne układu i odpowiadające im postaci ruchu.	63
3.1	Definicja funkcji U_j	80
3.2	Parametry podukładu ciągłego.	82
3.3	Porównanie częstości drgań własnych układu (Hz).	82
3.4	Parametry podukładu dyskretnego.	84
3.5	Parametry opisujące konfigurację układu.	85
3.6	Częstości drgań własnych układu idealnego.	90
3.7	Częstości drgań własnych układu niedostrojonego $q_{c(23)} = 1.25q_c$	97
3.8	Częstości drgań własnych układu niedostrojonego $\omega_{0(23)} = 1.025 \omega_0$	102
3.9	Postaci wzbudzone w układzie niedostrojonym częstościowo $k_f = 1$	108
3.10	Postaci wzbudzone w układzie niedostrojonym częstościowo $k_f = 11$	116
3.11	Przybliżone rozwiązanie w przypadku układu $k_f = 1$	124
3.12	Przybliżone rozwiązanie w przypadku układu $k_c = 1$	128

Rozdział 1

Wstęp

1. Wprowadzenie

Idealne układy o okresowych własnościach struktury składają się z jednakowych elementów połączonych ze sobą w identyczny sposób. Mogą być to układy rozmieszczone wzdłuż prostej o nieskończonej lub skończonej długości lub układy rozmieszczone na łuku koła. Przykładami występowania struktur okresowych w praktyce są: tory kolei konwencjonalnej, tory kolei unoszonej magnetycznie, kadłuby samolotów, wysokie budynki zbudowane z powtarzalnych kondygnacji, turbiny o wirnikach wyposażonych w łopatki, których drgania tłumione są za pomocą elementów ciernych, stacje satelitarne, które zamierza się budować za pomocą powtarzalnych elementów wynoszonych sukcesywnie na orbitę okołozemską, czy też naziemne anteny do obserwacji astronomicznych lub łączności satelitarnej, o dużych rozmiarach. Podczas eksploatacji takich obiektów ważne jest rozpoznanie ich specyficznych własności dynamicznych. Badane są zagadnienia propagacji fal w tego typu układach, zarówno swobodnych jak i wymuszonych oraz ich odpowiedzi dynamiczne np. pod działaniem wędrujących obciążeń inercyjnych (tory), okresowych zmian ciśnienia (kadłuby i turbiny), uderzenia dokującego statku lub meteoru (stacje satelitarne) i inne. Badaniu złożonego i wielostronnego problemu dynamiki struktur okresowych powinna towarzyszyć analiza wpływu niedostrojenia układu (ang. mistuning). Przykładami występowania zjawiska niedostrojenia w praktyce są odchylenia w dokładności wytwarzania elementów lub różnice własności materiałowych. W wyniku otrzymujemy niedokładności wykonania, na przykład niejednakowe częstości drgań własnych łopatek turbin. W rezultacie w niektórych układach małe zaburzenie okresowości struktury może spowodować duże zmiany własności dynamicznych, np. lokalizację drgań.

Problematyką dynamiki układów o strukturze okresowej zajmuje się wiele liczących się

w świecie ośrodków naukowych, zarówno ze względów aplikacyjnych jak i poznawczych. Na Uniwersytecie w Southampton (D. J. Mead, R. S. Langley) prowadzone są badania teoretyczne i doświadczalne nad dynamiką płyt i powłok periodycznych w zastosowaniu do kadłubów lotniczych. Na Uniwersytecie Illinois (A. F. Vakakis) prowadzone są badania nad cyklicznymi układami periodycznymi modelującymi turbiny i radioteleskopy. Na Uniwersytecie w Hanowerze (K. Popp) badane są zagadnienia niedostrojenia w łopatkach tłumionych elementami ciernymi oraz w układach modelujących tor kolei konwencjonalnej. W Instytucie Mechaniki Rosyjskiej Akademii Nauk w Nizhnym Novgorodzie (A. I. Vesnicky, A. Metrikine) prowadzi się badania teoretyczne nad zagadnieniem propagacji fal i samowzbudności w układach periodycznych we współpracy z Politechniką w Delft (H. A. Dieterman, J. J. Kalker). Na Uniwersytecie w Waterloo (S. T. Ariaratnam, W. -C. Xie) badane są zagadnienia dynamiki, stateczności i lokalizacji przemieszczeń w układach periodycznych o losowym niedostrojeniu. W wielu ośrodkach badania nad powyższą problematyką są finansowane bezpośrednio z przemysłu, z uwagi na bardzo wysokie koszty ewentualnych awarii (zniszczenie turbiny, degradacja toru). Bibliografia dynamiki struktur periodycznych znajdujących zastosowania w mechanice sięga liczby kilkuset pozycji. W następnym punkcie pracy omówimy najważniejsze, z punktu widzenia rozpatrywanych w niniejszej pracy zagadnień, pozycje literatury problemu.

2. Przegląd literatury

Najważniejszą pozycją w literaturze dotyczącej dynamiki układów periodycznych znajdujących zastosowanie w fizyce ciała stałego i elektrotechnice jest monografia Brillouina [26]. Choć rozważania zawarte w [26] dotyczą przede wszystkim struktur dyskretnych, pozycja ta jest cytowana we wszystkich niemal pracach dotyczących układów o parametrach rozłożonych w sposób ciągły. W monografii tej podano podstawowe pojęcia i definicje dotyczące problemu propagacji fal bieżących (biegnących) w ośrodkach o periodycznych własnościach struktury oraz omówiono najważniejsze prace z tej dziedziny do końca lat czterdziestych.

Jedną z pierwszych prac dotyczących problemu propagacji fal bieżących w jednowymiarowych ośrodkach ciągłych jest praca [37] (1953). W pracy tej rozważono nieograniczoną belkę spoczywającą na okresowo rozłożonych sztywnych podporach oraz belkę o okresowo rozłożonych masach skupionych. Problem rozwiązano za pomocą metod macierzowych stosowanych wówczas w elektrotechnice uzyskując zależności dyspersyjne w przypadku tego typu układów. Podobny układ, lecz o skończonej długości, rozpatrywano w pracy [117] (1956) stosując metodę przemieszczeń. Problem propagacji fal w płaskim ruszcie z zastosowaniem metody

polegającej analizie współczynników transmisji i odbicia fal rozpatrywany był w pracy [56] (1964). Metodę macierzy przeniesienia do analizy problemu propagacji fal w periodycznych układach belkowych zastosowano po raz pierwszy w pracy [91] (1969).

Ważną z punktu widzenia teorii propagacji fal w ciągłych układach periodycznych grupę prac, stanowią publikacje Meada i współautorów, powstałe na Uniwersytecie w Southampton [99] – [114]. W pracach tych rozważano zarówno proste układy belkowe, jak i płyty oraz powłoki o okresowo rozłożonych usztywnieniach, w zastosowaniu do modelowania kadłubów samolotów. Rozpatrywano zarówno problem propagacji fal w układach idealnie sprężystych, jak i odpowiedź dynamiczną układów lepkosprężystych poddanych działaniu okresowych zmian ciśnienia, stosując metody analityczne (m.in. metodę superpozycji modalnej), metodę macierzy przeniesienia i metodę elementów skończonych. Zagadnieniom dotyczącym przepływu energii w ciągłych układach periodycznych poświęcone są m.in. prace [48, 163, 54, 119, 120, 38] oraz prace Langleya [80, 82].

Zagadnieniom niedostrojenia w ciągłych układach periodycznych rozmieszczonych wzdłuż prostej poświęcone są prace [92], [136] – [134]. Z ostatnio ogłoszonych publikacji dotyczących tej problematyki należy wymienić prace [194, 8], gdzie rozpatrywano układy o losowo niedostrojonych parametrach. Zagadnieniom niedostrojenia w cyklicznych układach periodycznych rozpatrywane są m.in. w pracach [182, 183] [173, 175, 174].

Z prac poświęconych ciągłym układom periodycznym poddanym działaniu poruszającego się źródła zaburzeń możemy wymienić m.in. [167, 168, 29, 65, 147], gdzie rozpatrywano układy belkowe modelujące m.in. tor kolei unoszonej magnetycznie i konwencjonalnej. Przedstawiona przez Jezequela w pracy [65] metoda rozwiązywania problemu układu poddanego działaniu poruszającej się siły skupionej o stałej wartości polegała na zastąpieniu periodycznie rozłożonych wielkości skupionych (sił, momentów) nieograniczoną sumą funkcji delta Diraca oraz poszukiwaniu rozwiązań za pomocą transformacji całkowitej Fouriera. Metoda Jezequela została uogólniona na przypadek obciążenia o harmonicznie zmiennej wartości i wykorzystywana w pracach [62, 162, 121]. Problem drgań belki ciągłej spoczywającej na okresowo rozłożonych sztywnych podporach, wymuszonych poruszającą się siłą o stałej wartości, rozpatrywano w pracy [168]. Rozwiązań poszukiwano za pomocą transformacji całkowitej o postaci podobnej do przedstawionej w pierwszym punkcie rozdziału drugiego niniejszej pracy, jednak w [168] wyniki uzyskano obliczając numerycznie transformację odwrotną. Ważnym wkładem w teorię propagacji fal w strukturach periodycznych, wzbudzanych przez poruszające się źródło zaburzeń jest praca Roguli [149]. W pracy tej przedstawiono graficzny sposób określania prędkości krytycznych w układach dyspersyjnych poddanych działaniu poruszającego się źródła zaburzeń

o stałej wartości.

Z prac poświęconych zagadnieniom dynamiki cyklicznych struktur periodycznych, modelujących układy, które w niniejszej pracy rozpatrywane są w rozdziale trzecim, możemy wymienić m.in. publikacje Muszyńskiej i Jonesa [126, 124, 125]. W pracach tych rozpatrywano problem dynamiki wirników o łopatkach, których drgania są tłumione za pomocą elementów ciernych. Problem niedostrojenia częstości drgań własnych łopatek wirników rozpatrywany był przez Afolabi'ego w pracach [5, 4, 6]. Z prac dotyczących tej tematyki, opublikowanych w ostatnich latach, wymienić możemy m.in. [97], [10] oraz prace Rządковского [154, 152, 153]. W rozprawie doktorskiej Balmera [10], która została przygotowana i przedłożona w Instytucie Mechaniki Uniwersytetu w Hanowerze w czasie pobytu autora niniejszej pracy w ramach stypendium Fundacji Humboldta w Hanowerze, analizowano za pomocą MES model układu niedostrojonego o nieliniowym oddziaływaniu pomiędzy łopatkami. W niniejszej pracy rozpatrzono liniowe przybliżenie tego typu układu, o podobnych do rozważanych w pracy [10] parametrach, przedstawiając rozwiązanie analityczne problemu.

Niektóre z zagadnień przedstawionych i szczegółowo dyskutowanych w niniejszej pracy było przedmiotem publikacji autora. Wyniki badań nad zagadnieniem przepływu energii w ciągłych układach periodycznych omówiono w pracy [75]. Analizę wpływu lepkiego tłumienia na dynamikę struktur periodycznych przedstawiono w pracy [76]. Zagadnieniu struktur periodycznych poddanych działaniu poruszających się źródeł zaburzeń poświęcone są prace [21] (belki ciągle na okresowo rozłożonych sztywnych podporach), [22] (tor kolei unoszonej magnetycznie), [74] (tor kolei konwencjonalnej). Problem częstościowego niedostrojenia w cyklicznych układach periodycznych rozpatrywano w pracy [77]. Zagadnienia przedstawione w niniejszej rozprawie były również przedmiotem prezentacji na międzynarodowych spotkaniach naukowych [24, 78, 23].

W ostatnim rozdziale pracy zamieszczono uporządkowaną alfabetycznie literaturę, która została zebrana przez autora w trakcie badań nad przedstawianą problematyką. Jednak szczegółowe jej omówienie wykracza poza zakres i cel niniejszej rozprawy.

3. Cel i zakres pracy

Poza wstępem i zakończeniem praca składa się z dwóch zasadniczych części. Część pierwsza pracy, przedstawiona w rozdziale drugim, poświęcona jest ciągłym układom periodycznym rozmieszczonym wzdłuż prostej. Celem tej części jest opracowanie efektywnej metody analizy dynamicznej struktur periodycznych poddanych działaniu ruchomych źródeł zaburzeń. Zaproponowana metoda polega na poszukiwaniu rozwiązań równania różniczkowego ruchu układu

ciągłego, w postaci wynikającej z twierdzenia Floqueta. Część druga pracy, przedstawiona w rozdziale trzecim, poświęcona jest cyklicznym układom periodycznym. Celem tej części jest wykazanie istnienia pewnej regularności w stacjonarnej odpowiedzi dynamicznej układów niedostrojonych i zaproponowanie uproszczonej metody badania dynamiki tego typu układów.

W pierwszym punkcie rozdziału drugiego rozpatrywane są struktury periodyczne stanowiące nieograniczone belki ciągle na sztywnych podporach. W punkcie tym podano podstawowe pojęcia dotyczące pasm przenoszenia i pasm zanikania oraz przepływu energii w układach rozmieszczonych wzdłuż prostej. Szczegółowo omówiono metodę uzyskiwania rozwiązań problemu dynamiki układów poddanych działaniu poruszającej się siły skupionej o harmonicznym zmiennej wartości oraz podano sposób określania krytycznych parametrów obciążenia.

Kolejnym układem rozpatrywanym w rozdziale drugim jest tor kolei unoszonej magnetycznie, który modelowany jest za pomocą łańcucha oddziałujących między sobą belek swobodnie podpartych. Badana jest dynamika toru w płaszczyźnie zgodnej z pionowymi drganiami pojazdu i w płaszczyźnie prostopadłej do niej, które w obu przypadkach zawierają oś toru. Badane jest ukształtowanie pasm przenoszenia i zanikania na płaszczyźnie „częstość – liczba falowa“ i odpowiedź dynamiczna układu pod obciążeniem w postaci jednej lub kilkudziesięciu poruszających się sił skupionych.

Trzecim z rozważanych układów periodycznych rozmieszczonych wzdłuż prostej jest tor kolei konwencjonalnej. Z uwagi na konieczność porównania zidentyfikowanych postaci drgań własnych toru z wynikami przedstawianymi w literaturze problemu, szczegółowo przebadano przypadek propagacji fal bieżących w nieobciążonym torze. Dyskusję rozwiązania w przypadku układu obciążonego poruszającą się siłą harmoniczną przeprowadzono rozważając dwa graniczne przypadki: niezerowej wartości częstości siły wymuszającej i niezerowej wartości prędkości źródła zaburzeń.

Cykliczny układ periodyczny rozważany w drugiej części pracy to układ modelujący dynamikę wirników wyposażonych w łopatki, których drgania tłumione są za pomocą elementów ciernych. Elementy te, umiejscowione pomiędzy łopatkami, na skutek działania siły odśrodkowej powodują powstawanie siły tarcia, która przyczynia się do zmniejszenia amplitud drgań. Tego typu układy techniczne zaczęto stosować w latach osiemdziesiątych w krajach zaawansowanych technologicznie, co przyczyniło się do znacznego zwiększenia wydajności i niezawodności turbin. Jednakże zastosowanie dodatkowych elementów ciernych powoduje dodatkowe sprzężenie łopatek, które wraz z niedostrojeniem pewnych parametrów układu może być przyczyną lokalizacji drgań, a w konsekwencji zniszczenia turbiny lub jej elementów.

Analizę dynamiczną układu przeprowadzono za pomocą modelu o cyklicznie periodycznych

komórkach, modelowanych utwierdzonymi na jednym brzegu belkami ciągłymi oraz o liniowym oddziaływaniu pomiędzy nimi, modelowanym za pomocą elementu lepkosprężystego o zespolonej sztywności. W przypadku zarówno drgań własnych, jak i wymuszonych, badany jest przypadek układu idealnego oraz struktury o okresowym niedostrojeniu częstości drgań własnych łopatek i masy elementów ciernych (zmiana siły kontaktu pomiędzy łopatkami). W przypadku drgań swobodnych badany jest również problem lokalizacji za pomocą modeli stanowiących układy idealne zaburzone pojedynczym „elementem obcym“.

Rezultaty w przypadku drgań wymuszonych uzyskano za pomocą metody „globalnej“ polegającej na rozwiązaniu równań równowagi całego układu oraz za pomocą metody „modalnej“. Zaproponowana przez autora metoda „modalna“ polega na zredukowaniu liczby koniecznych do rozwiązania równań, poprzez uwzględnienie kilku wybranych postaci drgań odpowiadającej układowi niedostrojonemu struktury idealnej.

Zarówno rozdział drugi jak i trzeci zakończone są podaniem podstawowych wniosków dotyczących rozpatrywanych zagadnień. W zakończeniu pracy przedstawiono krótkie podsumowanie i perspektywy dalszych badań.

Rozdział 2

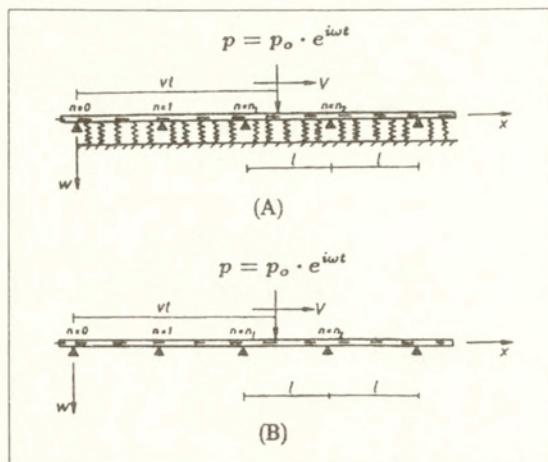
Układy periodyczne rozmieszczone wzdłuż prostej

1. Układy ciągłe na sztywnych podporach

W niniejszym punkcie pracy rozpatrzmy struktury periodyczne stanowiące nieograniczone belki ciągłe na sztywnych podporach. W punkcie tym podamy podstawowe pojęcia dotyczące pasm przenoszenia i zanikania oraz przepływu energii w układach rozmieszczonych wzdłuż prostej. Przedstawimy i szczegółowo omówimy metodę uzyskiwania rozwiązań problemu dynamiki układów poddanych działaniu poruszającej się siły skupionej o harmonicznie zmiennej wartości oraz podamy sposób określania krytycznych parametrów obciążenia.

1.1. Modelowanie rozważanych układów

Rozpatrywać będziemy dwa modele ciągłego układu periodycznego. Pierwszym z nich jest belka Bernoulli'ego-Eulera spoczywająca na lepkosprężystym podłożu Winklera i na rozłożonych w równych odstępach l sztywnych podporach (model (A)). Drugi rozważany model - (B) , różni się od pierwszego brakiem sprężystego podłoża. Problem sformułowany jest w sposób umożliwiający badanie obu modeli za pomocą podobnych zależności, a szczegółowa analiza dotyczyć będzie przede wszystkim pierwszego z modeli. W celu porównania rezultatów uzyskanych w przypadku rozważanych struktur periodycznych z rozwiązaniem problemu dynamiki układów nieokresowych, będziemy odwoływać się do modelu (C) , który stanowi belka ciągła (na sprężystym podłożu lub bez podłoża). Równanie ruchu belki spoczywającej na lepkosprężystym podłożu, poddanej działaniu obciążenia $p(\mathbf{x}, t)$, przyjęto w następującej postaci:



Rysunek 2.1: Modele rozważanych układów.

$$(2.1) \quad EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \eta \frac{\partial w}{\partial t} + qw = p(x, t),$$

gdzie $w = w(x, t)$ jest przemieszczeniem belki w funkcji zmiennej przestrzennej x i czasu t , w kierunku osi prostopadłej do osi x .

W równaniu (2.1) E , I , μ , q i η oznaczają odpowiednio: moduł Younga, moment bezwładności przekroju poprzecznego belki, masę belki na jednostkę długości, współczynnik sprężystości i lepkości podłoża. Rozpatrywać będziemy problem drgań swobodnych układu z częstością ω_0 oraz zagadnienie drgań wymuszonych poruszającą się ze stałą prędkością v siłą o harmonicznie zmiennej wartości.

W dalszych rozważaniach problem dynamiki układu opisany będzie za pomocą wielkości bezwymiarowych. Bezwymiarowe równanie ruchu układu (A), przy oznaczeniach podanych w tabeli (2.1), przyjmuje następującą postać:

$$(2.2) \quad \frac{\partial^4 W}{\partial X^4} + 4 \frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2} + 8N \frac{\partial W}{\partial \tau} + 4W = P(X, \tau).$$

Wykorzystując do opisu oznaczenia podane w tabeli 2.2, otrzymujemy bezwymiarowe równanie ruchu układu (B), gdzie $q = 0$, przy czym η jest teraz współczynnikiem wewnętrznego tłumienia

$X = xa_0$	$\tau = t\bar{\omega}_0$	$W(X, \tau) = w(x, t)/w_0$
$\Omega_0 = \omega_0/\bar{\omega}_0$	$V = v/v_0$	$N = \eta/\eta_0$
$L = la_0$	$w_0 = p_0/(8EIa_0^3)$	$a_0 = \sqrt[3]{q/(4EI)}$
$\bar{\omega}_0 = \sqrt{q/\mu}$	$\eta_0 = 2\sqrt{q\mu}$	$v_0 = \bar{\omega}_0/a_0$

Tabela 2.1: Parametry modelu (A).

$$(2.3) \quad \frac{\partial^4 W}{\partial X^4} + 4 \frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2} + 8N \frac{\partial W}{\partial \tau} = P(X, \tau).$$

$X = xa_0$	$\tau = t\bar{\omega}_0$	$W(X, \tau) = w(x, t)/w_0$
$\Omega_0 = \omega_0/\bar{\omega}_0$	$V = v/v_0$	$N = \eta/\eta_0$
$L = la_0$	$w_0 = p_0/(8EIa_0^3)$	$a_0 = \sqrt[3]{1/(4I)}$
$\bar{\omega}_0 = \sqrt{E/\mu}$	$\eta_0 = 2\sqrt{E\mu}$	$v_0 = \bar{\omega}_0/a_0$

Tabela 2.2: Parametry modelu (B).

W tabelach: 2.1 i 2.2 wielkość p_0 jest amplitudą obciążenia $p(x, t)$.

1.2. Propagacja fal bieżących w układzie swobodnym

W przypadku drgań własnych struktury periodycznej zastosujemy metodę zaproponowaną w pracy [103]. Siły reakcji nieskończonego łańcucha sztywnych podpór potraktujemy jako obciążenie zewnętrzne działające na układ. W stanie ustalonym zakładamy, że amplitudę siły w punkcie $\mathbf{x}_{n+1} = (n+1)l$ można wyrazić w funkcji amplitudy siły w punkcie $\mathbf{x}_n = nl$, za pomocą następującej zależności:

$$(2.4) \quad p_{n+1} = p_n e^{i\lambda l}, \quad n \in (-\infty, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, \infty),$$

gdzie $i = \sqrt{-1}$, a λ jest pewną liczbą zespoloną (fazą).

Funkcja obciążenia $p(x, t)$ określona jest następująco:

$$(2.5) \quad p(x, t) = \sum_{-\infty}^{\infty} p_0 \delta(x - nl) e^{i(n\lambda l + \omega_0 t)},$$

a jej bezwymiarowy odpowiednik $P(X, \tau)$ przyjmuje następującą postać:

$$(2.6) \quad P(X, \tau) = 8 \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(X - nL) e^{i(n\lambda L + \Omega_0 \tau)},$$

gdzie $\delta(x - nl)$ jest funkcją Diraca oraz $\lambda = \bar{\lambda}/a_0$.

W dalszej części niniejszego punktu pracy podamy zależności w przypadku modelu (A). Wyniki w przypadku modelu (B) otrzymamy podstawiając do otrzymanych wzorów wielkości podane w tabeli 2.2.

1.2.1. Pasma przenoszenia i zanikania

Rozwiązań równania (2.2) z prawą stroną o postaci (2.6) poszukujemy w następującej formie:

$$(2.7) \quad W(X, \tau) = \bar{W}(X) e^{i\Omega_0 \tau}.$$

Po podstawieniu powyższej zależności oraz relacji (2.6) do równania (2.2), otrzymujemy zwyczajne równanie różniczkowe względem funkcją $\bar{W}(X)$, które rozwiążemy za pomocą następującej transformacji całkowej:

$$(2.8) \quad \bar{W}^*(S) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{W}(X) e^{-iSX} dX, \quad \bar{W}(X) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{W}^*(S) e^{iSX} dS.$$

Uzyskaną jako rozwiązanie funkcję przemieszczenia można zapisać w następującej formie:

$$(2.9) \quad W(X, \tau) = 8i \left[\sum_{j=1}^2 A_j \left(\sum_{-\infty}^{n=n_1} e^{inL(\lambda - S_j) + iS_j X} + \sum_{n=n_2}^{\infty} e^{inL(\lambda + S_j) - iS_j X} \right) \right] e^{i\Omega_0 \tau},$$

gdzie

$$(2.10) \quad S_1 = S, \quad S_2 = iS, \quad A_1 = 1/(4S^3), \quad A_2 = iA_1.$$

$$(2.11) \quad \begin{aligned} S &= \sqrt{2} \sqrt{\Omega_0^2 - 2iN - 1} && \text{w układzie A,} \\ S &= \sqrt{2} \sqrt{\Omega_0^2 - 2iN} && \text{w układzie B.} \end{aligned}$$

W równaniu (2.9) mamy $X \in \langle n_1 L, n_2 L \rangle$, gdzie n_1 i $n_2 = n_1 + 1$ są kolejnymi numerami podpór. Oznacza to, że zależność (2.9) opisuje przemieszczenia komórki (n_1, n_2) struktury periodycznej. Zakładając zbieżność półnieskończonych sum w relacji (2.9) otrzymujemy

$$(2.12) \quad W(X, \tau) = 8e^{i(n_1 \lambda L + \Omega_0 \tau)} \sum_{j=1}^2 A_j \frac{\sin S_j(n_2 L - X) + e^{i\lambda L} \sin S_j(X - n_1 L)}{\cos S_j L - \cos \lambda L},$$

lub

$$(2.13) \quad W(X, \tau) = W(1 - \xi) e^{i(n_1 \lambda L + \Omega_0 \tau)} + W(\xi) e^{i(n_2 \lambda L + \Omega_0 \tau)},$$

gdzie

$$(2.14) \quad \begin{aligned} W(\xi) &= Z_1 \sin SL\xi + Z_2 \sinh SL\xi, \quad \xi = X/L, \quad \xi \in \langle 0, 1 \rangle, \\ Z_1 &= 2/[S^3(\cos SL - \cos \lambda L)], \quad Z_2 = -2/[S^3(\cosh SL - \cos \lambda L)]. \end{aligned}$$

W przypadku ogólnym, gdy λ jest liczbą zespoloną, zależność (2.13) opisuje zanikającą w przestrzeni falę biejącą o liczbie falowej λ i częstości ω_0 , której „kształt“ wewnątrz komórki opisany jest za pomocą funkcji $W(\xi)$ i $W(1 - \xi)$. Przy $n_1 = 1$ równanie (2.12) przyjmuje postać otrzymaną w pracy [103].

Z warunku jednorodności przemieszczenia w miejscu sztywnego podparcia $X = nL$, otrzymujemy następującą relację dyspersyjną:

$$(2.15) \quad \cos \lambda L = f[S(\Omega_0)] = \frac{\sin SL \cosh SL - \sinh SL \cos SL}{\sin SL - \sinh SL}.$$

W przypadku układu idealnie sprężystego ($N = 0$) zależność (2.15) jest spełniona przez rzeczywiste wartości λ lub przez liczby zespolone o postaci

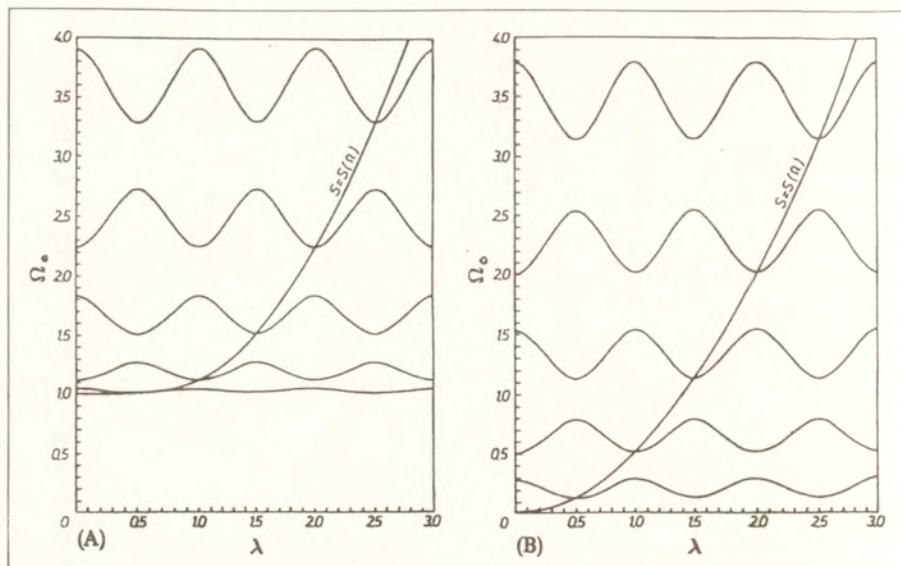
$$(2.16) \quad \lambda = \frac{(k\pi \pm i\lambda_I)}{L},$$

gdzie k jest liczbą całkowitą, a λ_I liczbą rzeczywistą.

W pierwszym przypadku zależność (2.13) opisuje falę biejącą o stałej amplitudzie propagującą się w całej nieograniczonej strukturze. Odpowiadający temu zjawisku zakres częstości, przedstawiony na płaszczyźnie „częstość Ω_0 – liczba falowa λ “, określa się mianem pasma przenoszenia [26]. W przypadku liczby λ o postaci (2.16), relacja (2.13) opisuje zanikającą eksponencjalnie falę, a odpowiadający temu zjawisku zakres częstości na płaszczyźnie (Ω_0, λ) , określa się jako pasmo zanikania. Z uwagi na nieograniczoną liczbę stopni swobody w komórce rozważanej struktury periodycznej, liczba występujących na przemian na płaszczyźnie (Ω_0, λ) pasm przenoszenia i zanikania jest nieograniczona.

Konfigurację krzywych reprezentujących relację dyspersyjną (2.15) na płaszczyźnie (Ω_0, λ) , określoną w przypadku kilku wybranych pasm przenoszenia oraz $L = 2\pi$, zilustrowano na rysunku 2.2. Na płaszczyźnie tej naniesiono również krzywe reprezentujące relację dyspersyjną $S = S(\Omega_0)$ odpowiadającego modelu ciągłego (C). Jak widać z rezultatów przedstawionych na rysunku 2.2, zależność $\Omega_0 = \Omega_0(\lambda)$ jest okresową funkcją λ o okresie $T_L = \frac{2\pi}{L}$. Jest ona ponadto symetryczna względem osi Ω_0 i λ . Obszar na płaszczyźnie (Ω_0, λ) odpowiadający dwóm odcinkom

$$(2.17) \quad \lambda \in \left(-\frac{k\pi}{L}, -\frac{(k-1)\pi}{L}\right), \quad \lambda \in \left(\frac{k\pi}{L}, \frac{(k+1)\pi}{L}\right),$$



Rysunek 2.2: Krzywe dyspersyjne na płaszczyźnie (Ω_0, λ) w przypadku $L = 2\pi$ (układ (A), układ (B)).

określany jest mianem k -tej strefy propagacji [26] lub k -tej strefy Brillouina.

Punkty odpowiadające maksimum i minimum krzywych dyspersyjnych $\Omega_0 = \Omega_0(\lambda)$ reprezentują tzw. częstotści obcięcia Ω_C (ang.: cut-off frequency), to jest częstotści graniczne pomiędzy pasmem przenoszenia i zanikania. Punkty na płaszczyźnie (Ω_0, λ)

$$(2.18) \quad \left(\lambda_C = \frac{m\pi}{L}, \Omega_C \right),$$

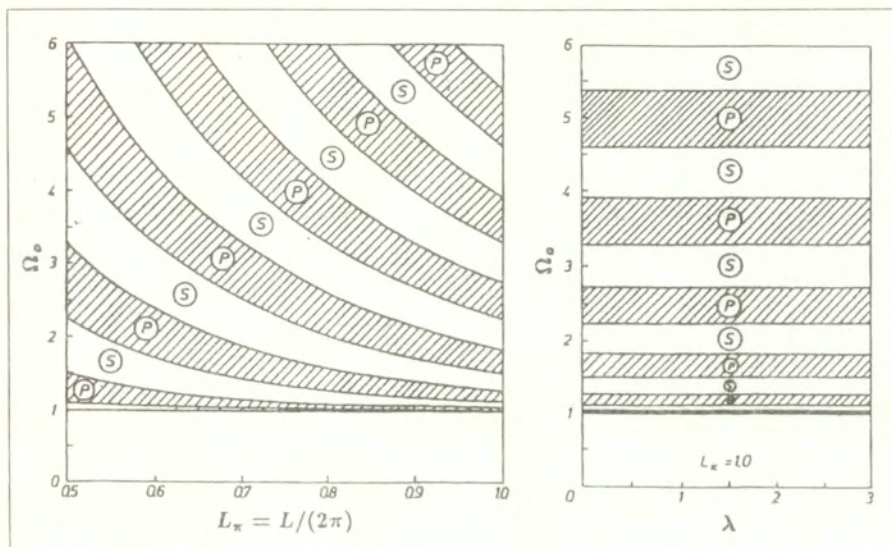
gdzie m jest liczbą całkowitą, reprezentują fale stojące w układzie periodycznym.

Jak widać na rysunku 2.2, krzywe dyspersyjne układu ciągłego (C) przecinają j -tą krzywą dyspersyjną $\Omega_0 = \Omega_0(\lambda)$ w m -tym punkcie minimum $(\lambda_{C(j)}^{(m)}, \Omega_{C(j)}^{(m)})$ dokładnie przy $m = j$. Częstotści odpowiadające tym punktom są częstotściami drgań własnych belki swobodnie podpartej o długości $L = 2\pi$. Pozostałe częstotści Ω_C są częstotściami drgań własnych belki obustronnie utwierdzonej o rozpiętości $L = 2\pi$.

Podstawową różnicą w ukształtowaniu krzywych dyspersyjnych na płaszczyźnie (Ω_0, λ) w przypadku układu (A) i układu (B) jest miejsce występowania pierwszego pasma przenoszenia. Z uwagi na fakt, że w układzie ciągłym (C) odpowiadającym modelowi (A) fale bieżące

propagują się przy częstotliwości $\Omega_0 > 1.0$, pierwsze pasmo przenoszenia w układzie (A) może występować tylko przy częstotliwości $\Omega_0 > 1.0$ (rysunek 2.2).

Ukształtowanie pasm przenoszenia i zanikania w funkcji współczynnika zależnego od długości komórki układu periodycznego $L_\pi = \frac{L}{2\pi}$, zilustrowano w przypadku układu (A) na rysunku 2.3. Jak wynika z rezultatów przedstawionych na rysunku 2.3, w ustalonym przedziale częstotliwości Ω_0 liczba pasm przenoszenia i zanikania rośnie wraz ze wzrostem długości komórki struktury periodycznej. W przykładach liczbowych prezentowanych w dalszej części niniejszego punktu pracy przyjmujemy $L = 2\pi$.



Rysunek 2.3: Ukształtowanie pasm przenoszenia (P) i zanikania (S) w przypadku układu (A) w funkcji długości komórki L .

1.2.2. Przepływ energii w pasmach przenoszenia

Rozważania niniejszego punktu dotyczą fal biegnących z pasm przenoszenia. Chwilowy przepływ energii P pomiędzy dwoma nieskończenie bliskimi punktami układu, który jest jednocześnie mocą absorbowaną przez przekrój poprzeczny belki ciągłej, wyrazić można w następującej formie:

$$(2.19) \quad P = -\left(-EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t}\right) + \left(-EI \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\right) \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right).$$

Poszczególne składniki w zależności (2.19) stanowią iloczyn momentu zginającego w belce

$$(2.20) \quad M = -EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

i prędkości obrotu przekroju poprzecznego belki oraz iloczyn siły poprzecznej w belce

$$(2.21) \quad F = -EI \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}$$

i prędkości przemieszczenia.

Średnia moc absorbowana w czasie $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ wynosi

$$(2.22) \quad \begin{aligned} \langle P \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T [-(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t}) \cdot (-EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}) + (\frac{\partial w}{\partial t}) \cdot (-EI \frac{\partial^3 w}{\partial x^3})] dt, \\ \langle P \rangle &= \omega_0 \sin \lambda L EI a_0^3 S^3 w_0^2 [(Z_1)^2 \sin SL - (Z_2)^2 \sinh SL]. \end{aligned}$$

Wielkość $\langle P \rangle$ jest niezależna od położenia przekroju $X \in (n_1 L, n_2 L)$ oraz od wyboru komórki struktury periodycznej (n_1, n_2) , przyjmując wartości dodatnie lub ujemne w zależności od wartości liczby falowej λ .

Chwilowa gęstość energii H , którą stanowi suma energii potencjalnej i kinetycznej, określona jest w następujący sposób:

$$(2.23) \quad H = \frac{1}{2} [EI (\frac{\partial^2 w}{\partial x^2})^2 + q w^2 + \rho A (\frac{\partial w}{\partial t})^2].$$

Średnia gęstość energii $\langle H \rangle$ w czasie $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ wynosi:

$$(2.24) \quad \begin{aligned} \langle H \rangle &= \frac{1}{2T} \int_0^T [EI (\frac{\partial^2 w}{\partial x^2})^2 + q w^2 + \rho A (\frac{\partial w}{\partial t})^2] dt, \\ \langle H \rangle &= \frac{1}{2} w_0^2 [(EI a_0^4 S^4 + q) C_2(X) + q C_3(X)] \end{aligned}$$

gdzie

$$(2.25) \quad \begin{aligned} C_2(X) &= (Z_1)^2 (\sin^2 \bar{\eta} + \sin^2 \bar{\xi} + 2 \cos \lambda L \sin \bar{\eta} \sin \bar{\xi}) \\ &\quad + (Z_2)^2 (\sinh^2 \bar{\eta} + \sinh^2 \bar{\xi} + 2 \cos \lambda L \sinh \bar{\eta} \sinh \bar{\xi}), \\ C_3(X) &= 2 Z_1 Z_2 [\sin \bar{\eta} \sinh \bar{\eta} + \sin \bar{\xi} \sinh \bar{\xi} \\ &\quad + (\sin \bar{\eta} \sinh \bar{\xi} + \sin \bar{\xi} \sinh \bar{\eta}) \cos \lambda L], \\ \bar{\xi} &= SX, \quad \bar{\eta} = S(L - X). \end{aligned}$$

Wielkość $\langle H \rangle$ zależna jest od zmiennej przestrzennej $X \in (n_1 L, n_2 L)$, lecz nie zależy ona od wyboru komórki struktury periodycznej (n_1, n_2) .

Zgodnie z definicją podaną w pracy [26], prędkość przepływu energii określona jest jako iloraz $\langle P \rangle / \langle H \rangle$. Bezpośrednie zastosowanie tej definicji prowadziłoby do uzyskania prędkości zależnej od położenia X :

$$V^{(1)}(X) = \frac{\langle P \rangle}{\langle H \rangle} = \frac{\omega_0 \sin \lambda L 2EIS^3 a_0^3 C_1}{(EIS^4 a_0^4 + q) C_2(X) + q C_3(X)} = \frac{\sin \lambda L C_1}{C_2(X) + C_3(X)/\Omega_0^2} V_{GC}, \quad (2.26)$$

gdzie

$$C_1 = Z_1^2 \sin SL - Z_2^2 \sinh SL. \quad (2.27)$$

Wielkość V_{GC} w zależności (2.26) jest prędkością przepływu energii w nieperiodycznym układzie ciągłym (C), określoną w następujący sposób:

$$V_{GC} = \frac{d\omega_0}{ds}, = v_0 \frac{d\Omega_0}{dS}. \quad (2.28)$$

Wielkość w mianowniku zależności (2.26)

$$\langle H_N \rangle = C_2(X) + C_3(X)/\Omega_0^2, \quad (2.29)$$

reprezentuje bezwymiarową średnią w czasie T gęstość energii.

Rozkład gęstości energii $\langle H_N \rangle$ przy wybranych częstościach z drugiego pasma przeniesienia zilustrowano na rysunku 2.4. Jak wynika z przeprowadzonej analizy, liczba punktów odpowiadających maksimum krzywych reprezentujących zależność (2.29) jest równa kolejnemu numerowi pasma przeniesienia.

Prędkość niezależną od położenia X można określić na dwa sposoby. Pierwszy z nich polegałby uśrednieniu prędkości

$$\langle V^{(1)} \rangle = \frac{1}{L} \int_0^L V^{(1)} dX \quad (2.30)$$

w komórce (n_1, n_2) .

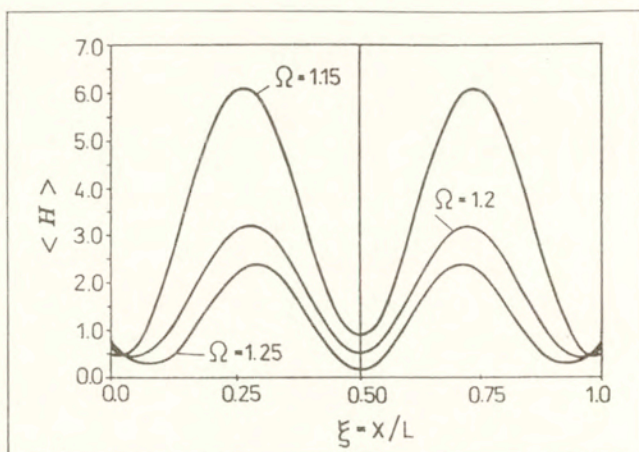
Drugi sposób polega na obliczeniu ilorazu średniej w czasie i komórce (n_1, n_2) mocy $\langle\langle P \rangle\rangle$ i średniej w czasie i komórce gęstości energii $\langle\langle H \rangle\rangle$

$$V_{EF} = \frac{\langle\langle P \rangle\rangle}{\langle\langle H \rangle\rangle} = \frac{\sin \lambda L C_1}{\bar{C}_2 + \bar{C}_3/\Omega_0^2} V_{GC}, \quad (2.31)$$

gdzie

$$\bar{C}_2 = \frac{1}{L} \int_0^L C_2(X) dX, \quad \bar{C}_3 = \frac{1}{L} \int_0^L C_3(X) dX. \quad (2.32)$$

Należy oczekiwać, że niezależna od położenia X prędkość przepływu energii równa jest prędkości grupowej fal w układzie. Prędkość grupową V_{GP} określimy za pomocą następujących



Rysunek 2.4: Rozkład gęstości energii $\langle H_n \rangle$ przy częstościach z drugiego pasma przenoszenia układu (A).

zależności:

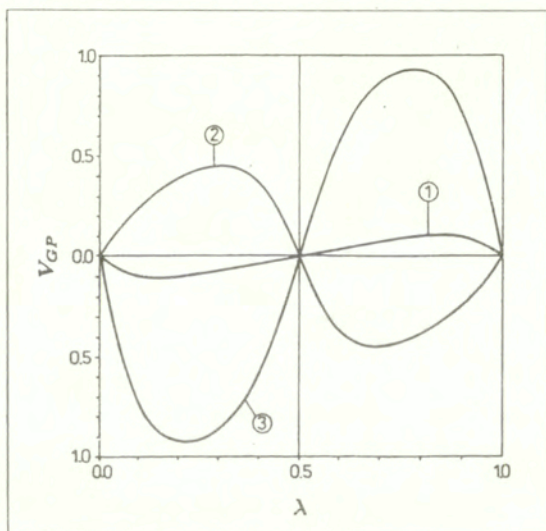
$$(2.33) \quad \begin{aligned} \cos \lambda L &= f[S(\Omega_0)] \\ \frac{d(\cos \lambda L)}{d\Omega_0} &= -L \sin \lambda L \frac{d\lambda}{d\Omega_0} = \frac{d[f(S)]}{d\Omega_0}, \end{aligned}$$

$$(2.34) \quad V_{GP} = \frac{d\omega_0}{d\lambda} = v_0 \frac{d\Omega_0}{d\lambda} = v_0 \frac{-L \sin \lambda L}{\frac{d[f(S)]}{d\Omega_0}} = \frac{-L \sin \lambda L}{\frac{d[f(S)]}{dS}} V_{GC},$$

Jak wynika z przeprowadzonej w pracy analizy relacji: (2.26) (2.31), (2.34), prędkość przepływu energii określona za pomocą (2.31) jest równa prędkości grupowej (2.34). Bezwymiarową prędkość grupową $\bar{V}_{GP} = V_{GP}/v_0$ w układzie (A) zilustrowano na rysunku 2.5, w przypadku pasm przenoszenia: 1, 2, 3, gdzie pasmo nr 1 jest pierwszym pasmem występującym przy częstości $\Omega_0 > 1.0$. Jak wynika z rezultatów przedstawionych na tym rysunku, prędkość grupowa jest funkcją okresową o takim samym okresie $\bar{T} = 2\pi/L$ jak relacja dyspersyjna $\Omega_0 = \Omega_0(\lambda)$. Zgodnie z postacią rozwiązania (2.13), zarówno prędkość fazowa fali $V_F = \Omega_0/\lambda$, jak i prędkość grupowa przyjmują wartości dodatnie w przypadku propagacji bądź przepływu energii w kierunku ujemnych wartości osi X .

Należy zauważyć, że zależna od położenia prędkość przepływu energii $V^{(1)} = V^{(1)}(X)$ może być traktowana jako wielkość lokalna. Prędkość $V^{(1)}$ odpowiada energii przepływającej

przez przekrój poprzeczny układu ciągłego, który stanowi jeden z elementów struktury periodycznej. Prędkość określona za pomocą zależności (2.31) jest wielkością globalną, która odpowiada energii przepływającej z jednej komórki struktury periodycznej do komórki sąsiadującej i stanowi odpowiednik prędkości przepływu energii w dyskretnych układach periodycznych [26].



Rysunek 2.5: Prędkość grupowa V_G określona w przypadku pasm przenoszenia: 1, 2, 3, w układzie (A).

1.3. Odpowiedź dynamiczna układu poddanego działaniu ruchomego źródła zaburzeń

Równanie ruchu układu (A), poddanego działaniu poruszającej się ze stałą prędkością v siły skupionej o harmonicznym zmiennej wartości $p_0 \exp i\omega t$, zapisane w formie bezwymiarowej, przyjmuje następującą postać:

$$(235) \quad \frac{\partial^4 W}{\partial X^4} + 4 \frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2} + 8N \frac{\partial W}{\partial \tau} + 4W = 8 \delta(X - V\tau) e^{i\Omega\tau}.$$

Warunek jednorodności przemieszczenia, ciągłości kąta obrotu przekroju poprzecznego belki i momentu zginającego w punktach $X = nL$

$$(2.36) \quad \begin{aligned} W(nL, \tau) = 0, \quad \frac{\partial W(nL^-, \tau)}{\partial X} &= \frac{\partial W(nL^+, \tau)}{\partial X}, \\ \frac{\partial^2 W(nL^-, \tau)}{\partial X^2} &= \frac{\partial^2 W(nL^+, \tau)}{\partial X^2}, \end{aligned}$$

stanowią warunki brzegowe równania (2.35).

1.3.1. Sposób uzyskania rozwiązania

Stacjonarnego rozwiązania równania (2.35), które spełnia warunki (2.36), poszukujemy w następującej postaci:

$$(2.37) \quad \begin{aligned} W(X, \tau) &= \frac{8}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(X, \lambda) e^{i\lambda(X-V\tau)+i\Omega\tau} d\lambda, \\ \delta(X - V\tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda(X-V\tau)} d\lambda. \end{aligned}$$

Zakładamy, że funkcja $A = A(X, \lambda)$ jest funkcją okresową o okresie równym długości komórki oraz $W(-\infty) = 0$, $W(\infty) = 0$. Po podstawieniu powyższych zależności do równania (2.36) otrzymujemy następujące, zwyczajne równanie różniczkowe:

$$(2.38) \quad \frac{d^4 A}{dX^4} + 4i\lambda \frac{d^3 A}{dX^3} - 6\lambda^2 \frac{d^2 A}{dX^2} - 4i\lambda^3 \frac{dA}{dX} + (\lambda^4 - S^4)A = 1,$$

gdzie

$$(2.39) \quad \begin{aligned} S^4 &= 4(\bar{\Omega}^2 - 2Ni\bar{\Omega} - 1) \quad \text{w układzie A,} \\ S^4 &= 4(\bar{\Omega}^2 - 2Ni\bar{\Omega}) \quad \text{w układzie B,} \\ \bar{\Omega} &= -\lambda V + \Omega. \end{aligned}$$

Odpowiadające warunkom brzegowym (2.36) warunki na funkcję $A = A(X, \lambda)$ przyjmują następującą postać:

$$(2.40) \quad \begin{aligned} A(n_1 L, \lambda) &= 0, \quad A(n_2 L, \lambda) = 0, \\ \frac{dA(n_1 L, \lambda)}{dX} &= \frac{dA(n_2 L, \lambda)}{dX}, \\ \frac{d^2 A(n_1 L, \lambda)}{dX^2} &= \frac{d^2 A(n_2 L, \lambda)}{dX^2}, \quad n_2 = n_1 + 1. \end{aligned}$$

Przyjęta do rozważań postać rozwiązania 2.37, w której wielkość $-\lambda V + \Omega$ jest wymuszoną częstotliwością drgań, funkcja $A = A(X, \lambda)$ opisuje pole przemieszczeń w dowolnej komórce

układu a wielkość $e^{i\lambda X}$ określa zmianę fazy, pozwala na sprowadzenie problemu do rozwiązania zwyczajnego równania różniczkowego z warunkami brzegowymi o postaci niezależnej od wyboru komórki układu periodycznego. Z uwagi na fakt, że teoria zwyczajnych równań różniczkowych o liniowych współczynnikach stanowi zamknięty rozdział, w niniejszej pracy nie będziemy szczegółowo omawiać sposobu uzyskania rozwiązań równań typu (2.38).

Rozwiązania równania (2.38) poszukujemy w formie następującej zależności:

$$(2.41) \quad A(X, \lambda) = \sum_{j=1}^4 a_j e^{\alpha_j X} + \frac{1}{\lambda^4 - S^4},$$

gdzie

$$(2.42) \quad \alpha_{1,2} = -i(\lambda \mp S), \quad \alpha_{3,4} = -i(\lambda \mp iS).$$

Po podstawieniu zależności (2.41) do warunków (2.40) otrzymujemy

$$(2.43) \quad \begin{bmatrix} 1, & 1, & 1, & 1 \\ e^{\alpha_1 L}, & e^{\alpha_2 L}, & e^{\alpha_3 L}, & e^{\alpha_4 L} \\ \alpha_1(1 - e^{\alpha_1 L}), & \alpha_2(1 - e^{\alpha_2 L}), & \alpha_3(1 - e^{\alpha_3 L}), & \alpha_4(1 - e^{\alpha_4 L}) \\ \alpha_1^2(1 - e^{\alpha_1 L}), & \alpha_2^2(1 - e^{\alpha_2 L}), & \alpha_3^2(1 - e^{\alpha_3 L}), & \alpha_4^2(1 - e^{\alpha_4 L}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{a}_1 \\ \bar{a}_2 \\ \bar{a}_3 \\ \bar{a}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{S^4 - \lambda^4} \\ \frac{1}{S^4 - \lambda^4} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

gdzie $\bar{a}_j = a_j e^{\alpha_j nL}$, $j = 1, 2, 3, 4$.

Rozwiązanie równania (2.38) w przypadku

$$(2.44) \quad \xi = X - n_1 L, \quad \xi \in \langle 0, L \rangle,$$

przyjmuje następującą postać:

$$(2.45) \quad \mathfrak{A}(\xi, \lambda) = \frac{A_1(\lambda)e^{iS\xi} + A_2(\lambda)e^{-iS\xi} + A_3(\lambda)e^{S\xi} + A_4(\lambda)e^{-S\xi} + e^{i\lambda\xi} D}{(\lambda^4 - S^4) D} e^{-i\lambda\xi},$$

gdzie

$$(2.46) \quad D = 2 [\cos \lambda L (\sin SL - \sinh SL) + \sinh SL \cos SL - \sin SL \cosh SL]$$

jest wyznacznikiem (2.43).

Wielkości $A_j = A_j(\lambda)$ występujące w równaniu (2.45) określone są następująco:

$$(2.47) \quad \begin{aligned} \mathfrak{A}_1 &= (\cosh SL - \cos \lambda L) [(\sin \lambda L + \sin SL) - i(\cos \lambda L - \cos SL)], \\ \mathfrak{A}_2 &= (\cosh SL - \cos \lambda L) [-(\sin \lambda L - \sin SL) + i(\cos \lambda L - \cos SL)], \\ \mathfrak{A}_3 &= (\cos SL - \cos \lambda L) [(e^{-SL} - \cos \lambda L) - i \sin \lambda L], \\ \mathfrak{A}_4 &= (\cos SL - \cos \lambda L) [-(e^{-SL} - \cos \lambda L) + i \sin \lambda L]. \end{aligned}$$

1.3.2. Rozwiązanie w przypadku układu sprężystego

Funkcja $A = A(\xi, \lambda)$ ma nieograniczoną liczbę biegunów na zespolonej płaszczyźnie λ , które spełniają zależność $D = 0$, gdzie D określone jest za pomocą wzoru (2.46). Całkowanie wyrażone za pomocą zależności (2.37) przeprowadzimy za pomocą twierdzenia Cauchy'ego, przy uwzględnieniu pewnej skończonej liczby biegunów. Zależność $D = 0$ w przypadku układu idealnie sprężystego może być spełniona przez rzeczywiste wartości λ . W tym przypadku należy rozstrzygnąć kwestię, czy odpowiadające tej wartości λ rozwiązanie występuje przed czy też za poruszającym się źródłem zaburzeń. Przynależność rozwiązania można określić za pomocą metody „małego tłumienia” ($N \approx 0$), bądź za pomocą metody energetycznej, którą omówimy w następnym punkcie pracy.

Oznaczając liczbę pierwiatków λ równania $D = 0$, które odpowiadają rozwiązaniu przed poruszającym się źródłem zaburzeń przez $K = K_R$, a za obciążeniem przez $K = K_L$, otrzymujemy funkcję przemieszczenia komórki $X \in \langle n_1 L, n_2 L \rangle$

$$(2.48) \quad W(X, \tau) = \sum_{k=1}^K Q_k [W_k(\bar{\eta}_k) e^{i\lambda_k(n_1 L - V\tau)} + W_k(\bar{\xi}_k) e^{i\lambda_k(n_2 L - V\tau)}] e^{i\Omega\tau}.$$

gdzie

$$(2.49) \quad Q_k = \frac{-\text{signum}[Im(\lambda_k)] 8i (\cosh S_k L - \cos \lambda_k L) (\cos S_k L - \cos \lambda_k L)}{(\lambda_k^4 - S_k^4) (\sin S_k L - \sinh S_k L) (-L \sin \lambda_k L + \frac{d(S_k)}{dS} \frac{dS_k}{d\Omega} V)}$$

$$(2.50) \quad W_k(\bullet) = Z_{1k} \sin(\bullet) + Z_{2k} \sinh(\bullet),$$

$$(2.51) \quad Z_{1k} = 1/(\cos S_k L - \cos \lambda_k L), \quad Z_{2k} = -1/(\cosh S_k L - \cos \lambda_k L),$$

$$(2.52) \quad \bar{\xi}_k = S_k \xi, \quad \bar{\eta}_k = S_k(L - \xi), \quad \xi = X - n_1 L.$$

Wielkość $S_k = S[\bar{\Omega}(\lambda_k)]$ w zależnościach (2.49)–(2.52) odpowiada liczbie λ_k i jest określona za pomocą relacji (2.39) w przypadku $N = 0$.

Bieguny funkcji $A = A(\xi, \lambda)$, określonej za pomocą relacji (2.45), odpowiadające warunkowi

$$(2.53) \quad \lambda^4 - S^4 = 0$$

są składnikami funkcji przemieszczeń komórki obciążonej poruszającym się źródłem zaburzeń. Równanie (2.53) jest relacją dyspersyjną fal bieżących w układzie (C), poddanym działaniu poruszającego się źródła zaburzeń [16]. Rozwiązanie w przypadku komórki $n_1 L \leq V\tau \leq n_2 L$ określone jest następująco:

$$(2.54) \quad W(\xi, \tau) = W_\lambda(\xi, \tau) + \sum_{j=1}^4 P_j \sin S_j^*(L - \xi) e^{iS_j^*(n_1 L - V\tau) + i\Omega\tau},$$

przy $\xi = X - n_1 L > V\tau$ oraz

$$(2.55) \quad W(\xi, \tau) = W_\lambda(\xi, \tau) - \sum_{j=1}^4 P_j \sin S_j^* \xi e^{iS_j^*(n_2 L - V\tau) + i\Omega\tau},$$

przy $\xi = X - n_1 L < V\tau$.

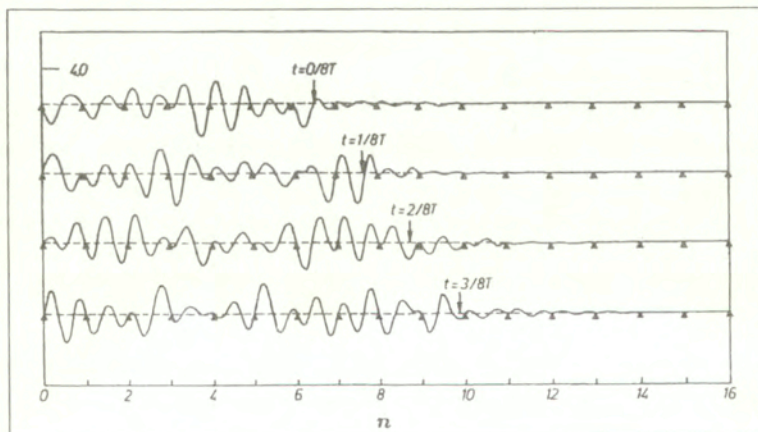
Wielkości $S_j^* = \lambda_j$, $j = 1, 2, 3, 4$, występujące w relacji (2.54) i (2.55), spełniają równanie (2.53), a współczynniki P_j określone są następująco:

$$(2.56) \quad P_j = \frac{i}{(4S_j^{*3} - 8S_j^*V^2 + 8V\Omega) \sin S_j^* L}, \quad j = 1, 2, 3, 4,$$

a funkcję $W_\lambda(\xi, \tau)$ zapiszemy w następującej postaci:

$$(2.57) \quad W_\lambda(\xi, \tau) = \left[\sum_{k=1}^{K_L} Q_k W_k(\bar{\eta}_k) e^{i\lambda_k(n_1 L - V\tau)} + \sum_{k=1}^{K_R} Q_k W_k(\bar{\xi}_k) e^{i\lambda_k(n_2 L - V\tau)} \right] e^{i\Omega\tau}.$$

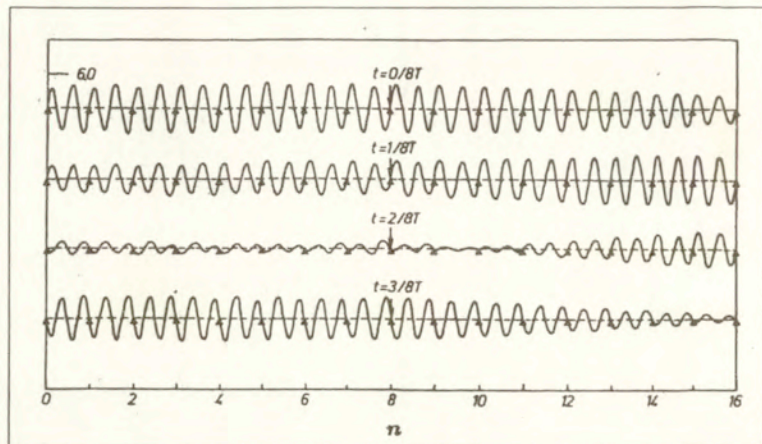
Odpowiedź dynamiczną układu (A) zilustrowano na rysunkach: 2.6 i 2.7, gdzie przedstawiono przemieszczenia w chwilach $t = 0, T/8, T/4, 3T/8, (T = 2\pi/\Omega)$, przy wybranych wartościach parametrów obciążenia.



Rysunek 2.6: Przemieszczenia układu (A) w wybranych chwilach przy $V = 0.9$ i $\Omega = 0.1$.

1.3.3. Dyskusja uzyskanego rozwiązania

Przedstawione rozwiązanie stanowi sumę fal bieżących propagujących się w strukturze periodycznej. Każdy ze składników sumy w relacji (2.48) ma postać podobną do wyrażenia (2.13)



Rysunek 2.7: Przesunięcia układu (A) w wybranych chwilach przy $V = 0.118$ i $\Omega = 2.0$.

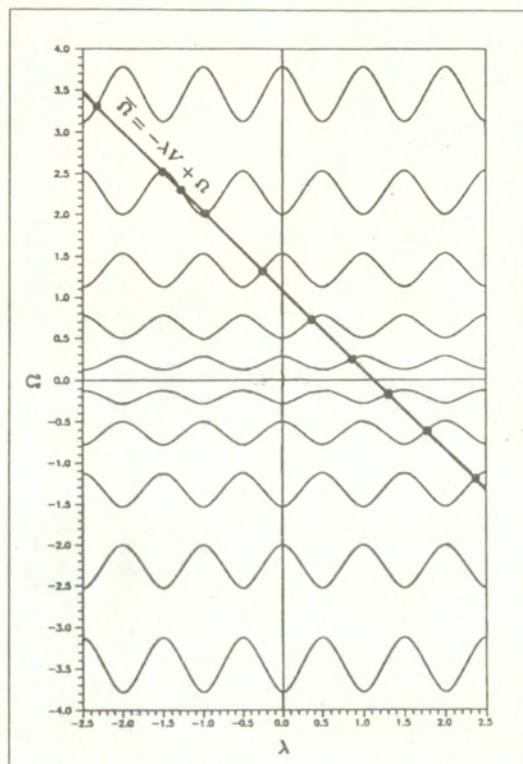
opisującego falę bieżącą w układzie swobodnym, za wyjątkiem amplitudy Q_k . W zależności od liczby falowej λ_k , amplituda fal jest stała lub maleje wraz ze wzrostem odległości od źródła zaburzeń. Równanie charakterystyczne $D = 0$ ma taką samą postać jak relacja dyspersyjna (2.15), z tą różnicą, że jest ono spełnione przy „wymuszonej” częstotliwości $\bar{\Omega} = -\lambda_k V + \Omega$ (porównaj równanie (2.39)). Z uwagi na omówione powyżej zależności, liczby falowe $\lambda_k = \beta_k$ fal o stałej amplitudzie można wyznaczyć za pomocą prostej metody graficznej. Polega ona na określeniu współrzędnych punktów przecięcia krzywych dyspersyjnych (2.15) z linią prostą o równaniu $\bar{\Omega} = -\beta_k V + \Omega$ na płaszczyźnie (Ω_0, λ) , przy czym należy wziąć pod uwagę wszystkie cztery ćwiartki tej płaszczyzny. Sposób wyznaczania rzeczywistych liczb β_k zilustrowano na rysunku 2.8.

Kwestia przypisania rozwiązania w przypadku $\lambda_k = \beta_k$ (przed czy za obciążeniem) rozstrzygniemy za pomocą rozważań energetycznych podanych poniżej.

Prędkość grupowa generowanej przez źródło zaburzeń fali

$$(2.58) \quad V_{GP} = v_0 \frac{d\Omega_0}{d\lambda} = \frac{L \sin \lambda L}{\frac{d(f(S))}{dS}} V_{GC},$$

powinna przyjmować wartość większą od prędkości ruchu obciążenia ($V_{GP} > V$), w przypadku fal przed poruszającym się źródłem zaburzeń i mniejszą ($V_{GP} < V$) w przypadku fal za obciążeniem. Z uwagi na fakt, że z geometrycznego punktu widzenia prędkość grupową V_{GP} (2.58) jest kątem nachylenia stycznej do krzywej dyspersyjnej $\Omega_0 = \Omega_0(\lambda)$, wystarczy zbadać



Rysunek 2.8: Ilustracja graficznej metody wyznaczania liczb falowych w przypadku układu (B).

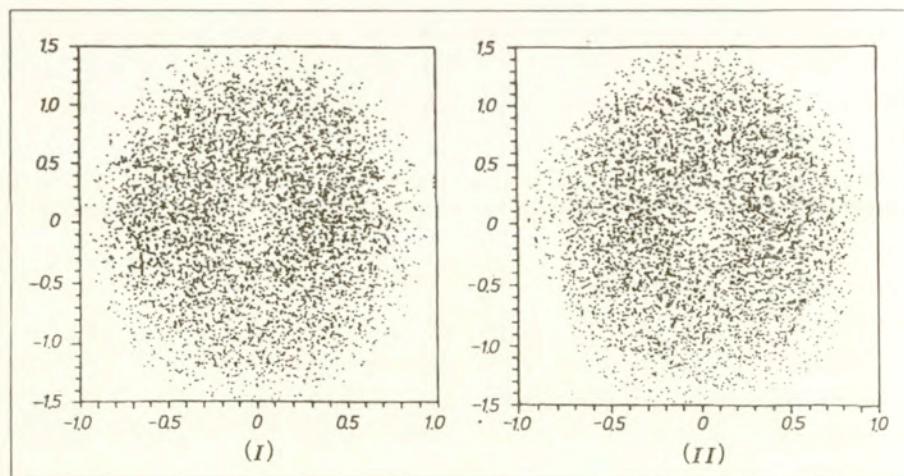
relację pomiędzy kątem nachylenia prostej o równaniu $\bar{\Omega} = -\beta_k V + \Omega$, a kątem stycznej do krzywej dyspersyjnej w punkcie przecięcia $(\bar{\Omega}_k, \beta_k)$.

Warunki powyższe dotyczą energii, która musi być wypromieniowana w kierunku od źródła zaburzeń. Wartości liczby falowej o postaci $\lambda_k = \beta_k \pm i\gamma_k$, spełniające zależność $D = 0$, występują jako zespolone liczby sprzężone i opisują rozwiązanie zarówno przed jak i za obciążeniem. Tym falom, którym nie towarzyszy dostarczanie energii do układu i jej wypromieniowanie, odpowiadają częstości z pasm zanikania, a także w niektórych przypadkach, pasm przenszenia.

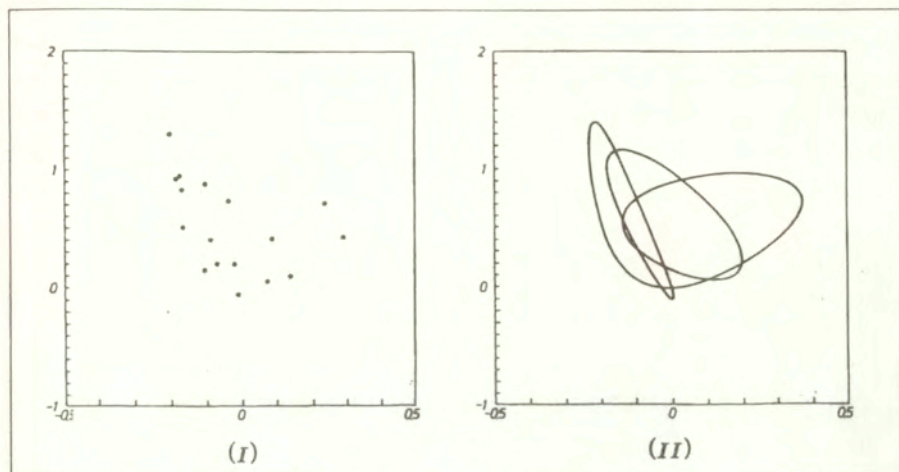
Uzyskane rozwiązanie ma charakter quasi-okresowy. Rozważając przemieszczenie i prędkość przemieszczenia ustalonego punktu układu można zauważyć, że jego odpowiedź dynamiczna na

obciążenie w postaci poruszającej się siły o harmonicznie zmiennej wartości ma nieregularny charakter. Zjawisko to jest zilustrowane na rysunku 2.9, gdzie przedstawiono płaszczyznę fazową w przypadku $X = 0.5L$ w układzie (A) oraz przy wybranych wartościach parametrów obciążenia (stosując współczynnik skalujący równy 0.5). Każdy punkt na rysunku 2.9 reprezentuje przemieszczenie i prędkość przemieszczenia określone w następujących chwilach: (I) – $-\tau = nL/V$, (II) – $-\tau = nT$, gdzie n jest liczbą naturalną. Przypadek (I) odpowiada częstości „prędkościowej“ $\Omega_V = 2\pi V/L$, a przypadek (II) częstości harmonicznej ($T = 2\pi/\Omega$). W obydwu przypadkach „początkowe” położenie obciążenia wynosiło $X = 10.5L$.

Płaszczyznę fazową określoną w przypadku niematerialnego punktu $X = VT$, t.j. pod poruszającym się źródłem zaburzeń, w chwilach $\tau = nT$ w układzie (A), zilustrowano na rysunku 2.10. W przypadku (a) przedstawionym na rysunku 2.10, iloraz częstości Ω_V/Ω jest liczbą naturalną M , co odpowiada występowaniu skończonej liczby M punktów na płaszczyźnie fazowej. W przypadku (b) przedstawionym na rysunku 2.10, iloraz częstości Ω_V/Ω nie jest liczbą naturalną, a na płaszczyźnie fazowej występują krzywe zamknięte.



Rysunek 2.9: Płaszczyzna fazowa w przypadku $X = 0.5L$ w układzie (A) i $V = 0.1$, $\Omega = 1.7$; (I) – w chwilach $\tau = nL/V$, (II) – w chwilach $\tau = nT$.



Rysunek 2.10: Płaszczyzna fazowa w przypadku $X = V\tau$ w układzie (A) oraz: (a) – $V = 0.1$, $\Omega = 1.7$ i (b) – $V = 0.111$, $\Omega = 1.7$, w chwilach $\tau = nT$.

1.3.4. Krytyczne parametry obciążenia

Przy pewnych wartościach prędkości i częstości zmian obciążenia uzyskane rozwiązanie dąży do nieskończoności. W tym przypadku amplituda jednej z fal propagujących się w układzie narasta nieograniczenie w czasie. Krytyczne parametry obciążenia odpowiadające temu wzrostowi można określić za pomocą następującego warunku:

$$(2.59) \quad Q_k \rightarrow \infty \Rightarrow -L \sin \lambda_k L + \frac{df(S_k)}{dS} \frac{dS_k}{d\Omega} V \rightarrow 0.$$

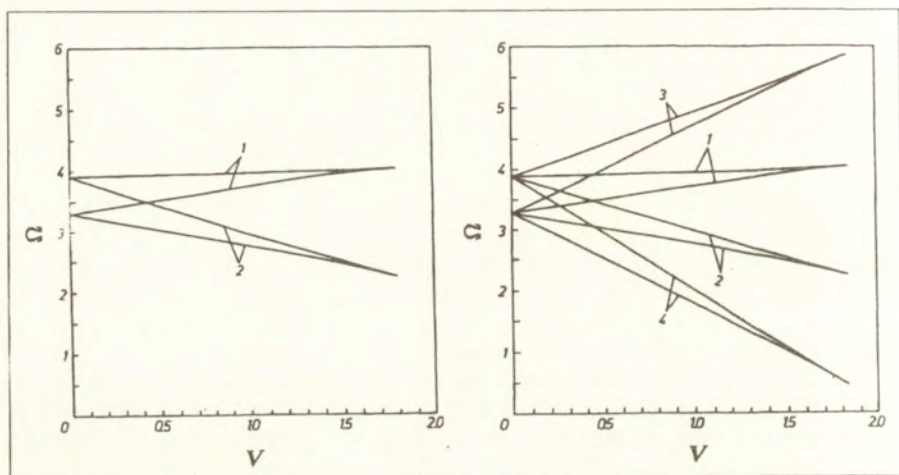
Powyższą zależność możemy również zapisać w następującej formie:

$$(2.60) \quad -L \sin \lambda L \left(1 - \frac{V}{V_{GP}}\right) \rightarrow 0,$$

co oznacza, że rozpatrywane zjawisko ma miejsce wtedy, gdy źródło zaburzeń porusza się z prędkością generowanej w układzie fali. W tym wypadku energia dostarczana do układu nie może być wypromieniowana i narasta nieograniczenie w czasie.

Krytyczne parametry obciążenia można określić za pomocą prostych rozważań geometrycznych. Relacja $V = V_{GP}$ odpowiada przypadkowi, gdy linia prosta o równaniu $\bar{\Omega} = -\lambda V + \Omega$ jest styczna do krzywej dyspersyjnej (2.15) na płaszczyźnie (Ω_0, λ) . Konfigurację krzywych krytycznych na płaszczyźnie (Ω, V) , odpowiadającą piątemu pasmu przenoszenia i wybranym strefom Brillouina, zilustrowano w przypadku układu (A) na rysunku 2.11. Jak wynika

z rezultatów przedstawionych na rysunku 2.11, liczba krzywych krytycznych na płaszczyźnie (Ω, V) rośnie wraz z liczbą uwzględnianych stref Brillouina, w przypadku których określone są krytyczne parametry obciążenia. Konfigurację krzywych krytycznych w przypadku układu (B), odpowiadającą pierwszym pięciu pasmom przenoszenia i pierwszym ośmiu strefom Brillouina zilustrowano na rysunku 2.12. Jak wynika z rezultatów przedstawionych na rysunkach: 2.11, 2.12, każdemu z pasm przenoszenia odpowiada pewna maksymalna wartość prędkości krytycznej.

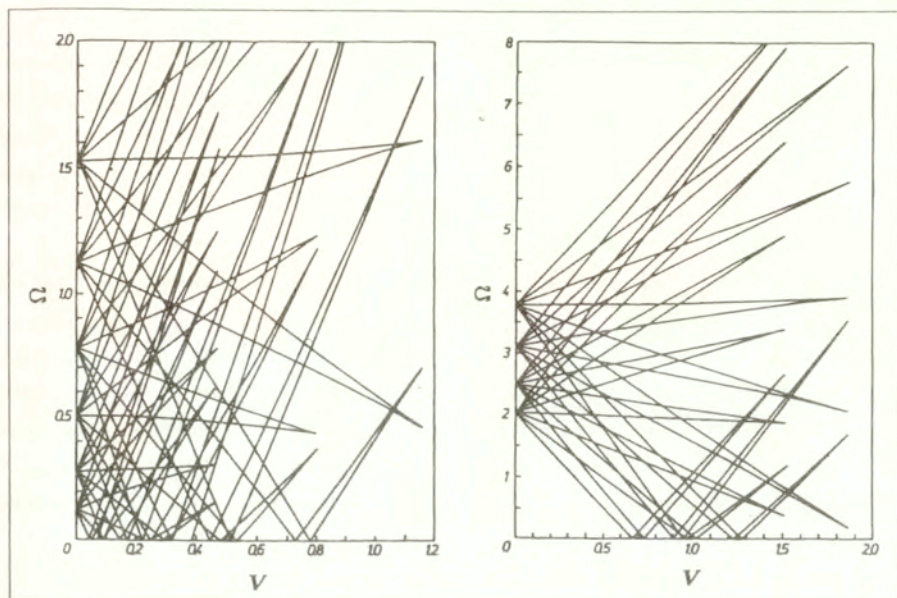


Rysunek 2.11: Konfiguracja krzywych krytycznych odpowiadająca piątemu pasmu przenoszenia i wybranym strefom Brillouina w przypadku układu (A).

Obciążenie układu w postaci poruszającej się siły skupionej o harmonicznie zmiennej wartości może być źródłem fal stojących w rozpatrywanym, nieograniczonym układzie. Parametry obciążenia odpowiadające temu przypadkowi mogą być określone za pomocą następującej relacji $\Omega_C = -\lambda_C V + \Omega$. Punkty (Ω_C, λ_C) na płaszczyźnie (Ω_0, λ) odpowiadają częstościom obciążenia, dyskutowanym w poprzednim punkcie pracy.

1.4. Najważniejsze wnioski

Poruszające się wzdłuż ciągłej struktury periodycznej obciążenie jest źródłem propagacji nieograniczonej liczby fal bieżących, o różnych liczbach falowych i częstościach. Z punktu widzenia zastosowanego aparatu matematycznego, występowanie nieograniczonej liczby fal zwi-



Rysunek 2.12: Konfiguracja krzywych krytycznych określona w przypadku układu (A).

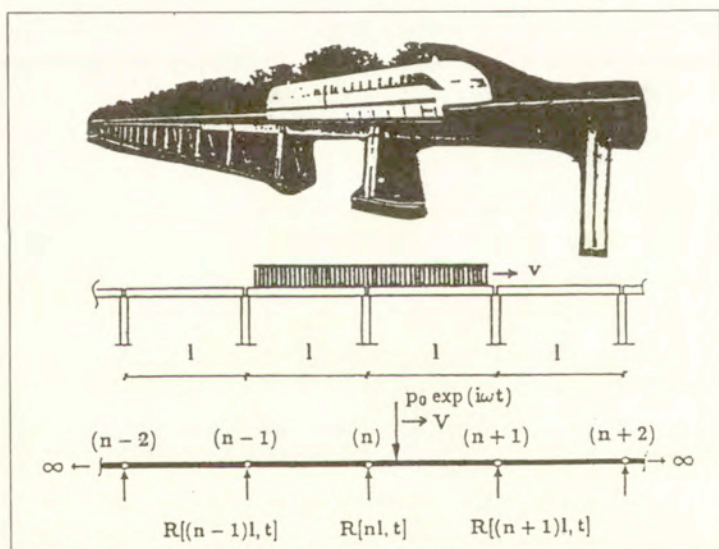
zane jest występowaniem nieograniczonej liczby biegunów funkcji $A = A(\xi, \lambda)$ na zespolonej płaszczyźnie λ . Z punktu widzenia mechaniki, występowanie nieograniczonej liczby fal w ciągłej strukturze periodycznej, poddanej działaniu poruszającego się źródła zaburzeń, związane jest z występowaniem nieograniczonej liczby pasm przenoszenia, pasm zanikania i stref Brillouina. Rozwiązanie przedstawione w niniejszej pracy stanowi sumę skończonej liczby fal bieżących. Jak wynika z przeprowadzonej analizy, w celu uzyskania rozwiązania o zadawalającej dokładności w przypadku układu lepkosprężystego, wystarczy uwzględnić jedynie kilka pierwszych pasm przenoszenia i zanikania oraz stref Brillouina.

Przeprowadzona analiza energetyczna pozwoliła na wyjaśnienie zjawiska nieograniczonego wzrostu amplitud fal. Każdemu pasmu przenoszenia można przyporządkować rodzinę krzywych krytycznych na płaszczyźnie (Ω, V) o maksymalnej wartości prędkości krytycznej. Liczba krzywych krytycznych w każdej rodzinie rośnie wraz ze wzrostem liczby uwzględnianych stref Brillouina. Prosta metoda geometryczna wyznaczania krytycznych parametrów obciążenia znajdzie również zastosowanie w przypadku innych układów periodycznych, które rozpatrywane są w następujących punktach niniejszej pracy.

2. Dynamika toru kolei unoszonej magnetycznie

Tor kolei unoszonej magnetycznie zbudowany jest z przęseł wykonanych ze sprężonego betonu lub stali, które oparte są na betonowych pilarach. Sposób zamontowania przęseł do pilarów pozwala na modelowanie przęseł jako belki swobodnie podpartej. Zwykle rozpiętość sąsiadujących przęseł jest jednakowa na znacznych odcinkach toru i układ taki stanowi ciągłą strukturę periodyczną. Rozważany układ i jego model mechaniczny przedstawiono na rysunku 2.13.

Dynamikę układu będziemy badać niezależnie w dwóch płaszczyznach; (x, y) i (x, z) , zakładając, że zginanie belki w w jednej płaszczyźnie można opisać w sposób niezależny od zginania w drugiej płaszczyźnie. Będziemy ją również nazywać odpowiednio: dynamiką poprzeczną i dynamiką boczną. Przęsła (podukłady ciągłe) modelować będziemy za pomocą belki Bernoulli'ego-Eulera, a pilary (podukłady dyskretne) jako lepko-sprężyste podparcia, które następnie zastąpimy nieznanymi siłami reakcji. Rozpatrywać będziemy zagadnienie propagacji fal bieżących w układzie swobodnym oraz problem drgań wymuszonych poruszającą się ze stałą prędkością siłą o harmonicznym zmiennym wartości.



Rysunek 2.13: Tor kolei unoszonej magnetycznie i jego model.

$X = x a_0$	$\tau = t \bar{\omega}_0$	$W(X, \tau) = w(x, t)/w_0$	$L = l a_0$	$\Omega_0 = \omega_0/\bar{\omega}_0$
$\Omega = \omega/\bar{\omega}$	$V = v/v_0$	$N = \eta/\eta_0$	$Q = q/E$	$\eta_0 = \sqrt{E\mu}$
$a_0 = \sqrt{1/I}$	$\bar{\omega}_0 = \sqrt{E/\mu}$	$w_0 = p_0 a_0/E$	$v_0 = \bar{\omega}_0/a_0$	

Tabela 2.3: Parametry rozważanego modelu.

2.1. Równanie ruchu i warunki brzegowe

Równanie ruchu układu przyjmiemy w postaci zależności (2.1), podanej w poprzednim punkcie pracy, gdzie η oznacza teraz współczynnik wewnętrzznego tłumienia materiału belki, a q współczynnik sprężystości fikcyjnego podłoża. Do dalszych rozważań przyjmiemy bezwymiarowe równanie ruchu o następującej postaci:

$$(2.61) \quad \frac{\partial^4 W}{\partial X^4} + \frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2} + D_1 \cdot W = P(X, \tau),$$

gdzie

$$(2.62) \quad D_1(\tau) = Q + N \frac{\partial}{\partial \tau}.$$

Bezwymiarowe równanie ruchu (2.61) otrzymano z równania (2.1) za pomocą zależności podanych w tabeli 2.3. Warunki brzegowe na funkcję przemieszczenia $W = W(X, \tau)$ w punktach $X = nL$, zapiszemy w następującej formie:

$$(2.63) \quad \begin{aligned} W(nL_-, \tau) &= W(nL_+, \tau), & \frac{\partial^2 W}{\partial X^2}(nL, \tau) &= 0, \\ \left[\frac{\partial^3 W}{\partial X^3}(nL_-, \tau) - \frac{\partial^3 W}{\partial X^3}(nL_+, \tau) \right] - R(nL, \tau) &= 0. \end{aligned}$$

Powyzsze zależności odpowiadają warunkom: ciągłości przemieszczeń, jednorodności momentu zginającego w przekroju poprzecznym belki oraz równowagi sił poprzecznych i reakcji R , które zapisano w przypadku n -tej podpory. Siła reakcji R zostanie określona w formie zależnej od rozpatrywanej płaszczyzny ruchu układu.

2.2. Fale bieżące w nieobciążonym torze

Rozwiązania równania (2.61), w przypadku $P(X, \tau) = 0$, poszukujemy w następującej postaci:

$$(2.64) \quad W(X, \tau) = A(X, \lambda) e^{i(\lambda X + \Omega_0 \tau)}.$$

Zakładamy, że funkcja $A = A(X, \lambda)$ opisuje dynamicznie dopuszczalne pole przemieszczeń układu i jest niezależna od wyboru komórki układu periodycznego

$$(2.65) \quad A(X + L, \lambda) = A(X, \lambda),$$

a wyrażenie $e^{i(\lambda X + \Omega_0 \tau)}$ opisuje zmianę fazy przemieszczenia w poszczególnych komórkach struktury.

Po podstawieniu zależności (2.54) do równania (2.61), w którym położono $P(X, \tau) = 0$, otrzymujemy następujące, zwyczajne równanie różniczkowe:

$$(2.66) \quad [D_A^4(X, \lambda) - \Omega_0^2 + \Delta_1(\Omega_0)] \cdot A(X, \lambda) = 0,$$

gdzie

$$(2.67) \quad D_A(X, \lambda) = i\lambda + \frac{\partial}{\partial X}, \quad \Delta_1(\Omega_0) = Q + iN\Omega_0.$$

Warunki nałożone na funkcję $A = A(X, \lambda)$, które wynikają z warunków brzegowych (2.63), przyjmują następującą postać:

$$(2.68) \quad A(\mathbf{n}_1 L) = A(\mathbf{n}_2 L), \quad D_A^2(X) \cdot A(\mathbf{n}_1 L) = D_A^2(X) \cdot A(\mathbf{n}_2 L) = 0, \\ D_A^3(X) \cdot [A(\mathbf{n}_1 L) - A(\mathbf{n}_2 L)] - \Delta_U(\Omega_0) \cdot A(\mathbf{n}_1 L) = 0, \quad \mathbf{n}_2 = \mathbf{n}_1 + 1.$$

Wielkość $\Delta_U(\Omega_0)$ w powyższych zależnościach będzie określana w zależności od płaszczyzny, w której rozpatrujemy ruch układu, za pomocą rozważań dotyczących siły reakcji

$$(2.69) \quad R(\mathbf{n}_1 L, \Omega_0) = \Delta_U(\Omega_0) \cdot W(\mathbf{n}_1 L, \Omega_0).$$

Do powyższej zależności podstawimy $\Delta_U(\Omega_0) = \Delta_{VER}(\Omega_0)$, w przypadku ruchu w płaszczyźnie (\mathbf{x}, \mathbf{y}) oraz $\Delta_U(\Omega_0) = \Delta_{LAT}(\Omega_0)$, w przypadku ruchu w płaszczyźnie (\mathbf{x}, \mathbf{z}) .

Rozwiązania równania (2.67) poszukujemy w następującej postaci:

$$(2.70) \quad A(X, \lambda) = \sum_{j=1}^4 a_j e^{a_j X}$$

gdzie

$$(2.71) \quad \alpha_{1,2} = -i(\lambda \mp S), \quad \alpha_{3,4} = -i(\lambda \mp iS).$$

$$(2.72) \quad S = S(\Omega_0) = \sqrt[4]{\Omega_0^2 - \Delta_1(\Omega_0)},$$

Po podstawieniu relacji (2.70) do warunków (2.68), otrzymujemy jednorodny układ równań z niewiadomymi współczynnikami a_j , $j = 1, 2, 3, 4$. Warunkiem istnienia niezerowych rozwiązań

tego układu jest następująca zależność:

$$(2.73) \quad f(\lambda, \Omega_0) = \cos \lambda L - \frac{\sin SL \cosh SL - \sinh SL \cos SL}{\sin SL - \sinh SL} + \\ - \frac{\Delta_U(\Omega_0)S}{\Omega_0^2 - \Delta_1(\Omega_0)} \cdot \frac{\sin SL \sinh SL}{\sin SL - \sinh SL} = 0 .$$

Funkcję przemieszczenia $W = W(X, \tau)$, spełniająca warunki brzegowe (2.63), zapiszemy w następującej postaci:

$$(2.74) \quad W(X, \tau) = \bar{A}(\xi, \lambda) e^{i(\lambda n_1 L + \Omega_0 \tau)},$$

gdzie

$$(2.75) \quad \bar{A}(\xi, \lambda) = [\sin S\xi e^{i\lambda L} + \sin S(L - \xi)] \sinh SL + \\ - [\sinh S\xi e^{i\lambda L} + \sinh S(L - \xi)] \sin SL,$$

$$(2.76) \quad \xi = X - nL, \quad \xi \in < 0, L > .$$

Uzyskane rozwiązanie jest falą bieżącą w strukturze periodycznej, której „kształt“ określony jest za pomocą relacji (2.75). Liczba falowa λ i częstość Ω_0 fali spełniają relację dyspersyjną określoną za pomocą zależności (2.73).

2.2.1. Dynamika układu w płaszczyźnie (x, y)

W tym przypadku zakładamy, że sztywność podłużna pila jest znacznie większa od sztywności giętej przęsła

$$(2.77) \quad (EA)_{\text{pilar}} \gg \frac{EI}{l^2},$$

co oznacza, że pilar może być modelowany za pomocą sztywnej masy skupionej.

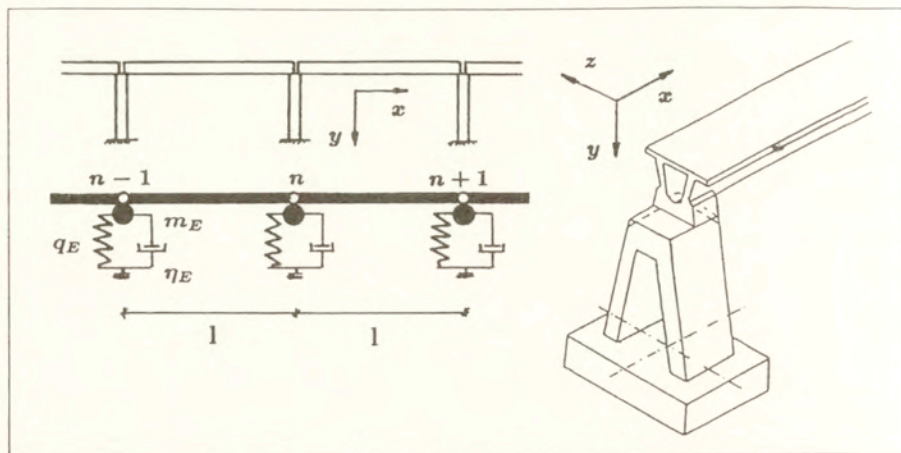
Do modelowania układu pilar-podłoże w niniejszej pracy adaptujemy metodę zaproponowaną w pracy [146], którą stosuje się w projektowaniu fundamentów obciążonych dynamicznie. W tym celu układ pilar-podłoże zastąpimy układem zastępczym, o parametrach wynikających ze ścisłego rozwiązania problemu półprzestrzeni sprężystej pod obciążeniem o harmonicznie zmiennej wartości. Model toru w przypadku jego dynamiki w płaszczyźnie (x, y) przedstawiono na rysunku 2.14.

Równanie ruchu układu zastępczego przyjmuje następującą postać:

$$(2.78) \quad m_E \cdot \ddot{w}_v(nl, t) + \eta_E \cdot \dot{w}_v(nl, t) + q_E w_v(nl, t) = R_{VER}(nl, t),$$

gdzie $w_v(nl, t)$ jest przemieszczeniem poprzecznym pila.

Ponadto w równaniu (2.78) oznaczono: m_E – masa zastępcza równa sumie masy pila, płyty



Rysunek 2.14: Model układu w przypadku dynamiki poprzecznej.

fundamentowej i podłoża, które drga wraz z fundamentem; q_E – współczynnik sprężystości podłoża; η_E – współczynnik tłumienia w podłożu równy sumie lepkiego tłumienia w gruncie i tłumienia „wypromieniowania”. Sztywność zastępczą Δ_{VER} określimy za pomocą następujących zależności :

$$(2.79) \quad \begin{aligned} R_{VER}(nL, \Omega_0) &= \Delta_{VER}(\Omega_0) \cdot W_V(nL, \Omega_0), \\ \Delta_{VER}(\Omega_0) &= \frac{a_0}{E} \cdot (q_E + i\omega_0\eta_E - \omega_0^2 m_E). \end{aligned}$$

Wartości liczbowe parametrów toru w przypadku jego dynamiki poprzecznej podano w tabeli 2.4. Parametry przęśla przyjęto na podstawie prac [57] i [13] i korespondencji z autorem pracy [13]. Przyjęta wielkość tłumienia odpowiada logarytmicznemu dekrementowi drgań równemu $\Lambda_p = 0.05$ przy częstotliwości pierwszej postaci drgań własnych, równej $\nu_1 = 6.03 \text{ Hz}$. W przypadku zastępczego modelu układu pilar-podłoże, założono występowanie „mocnego” gruntu. Przyjęta do obliczeń wartość współczynnika tłumienia η_E odpowiada logarytmicznemu dekrementowi drgań $\Lambda_E = 3.14$.

Relację dyspersyjną (2.73) w przypadku dynamiki poprzecznej układu zilustrowano na rysunku 2.15, na którym przedstawiono krzywe dyspersyjne na płaszczyźnie $(\nu_0, \bar{\lambda})$, gdzie

$$\nu_0 = \Omega_0 \cdot \bar{\omega}_0 / (2\pi), \quad \bar{\lambda} = \lambda_0 \cdot a_0.$$

Linią ciągłą na rysunku 2.15 oznaczono część rzeczywistą $\bar{\lambda}_R$ liczby falowej, a linią przerywaną

$E = 4.6 \cdot 10^{10} \frac{N}{m^2}$	$I = 0.5m^4$	$\mu = 4 \cdot 10^3 kg$
$q_E = 1.5 \cdot 10^9 \frac{N}{m}$	$\eta_E = 1.6 \cdot 10^7 \frac{N \cdot s}{m}$	$m_E = 1.8 \cdot 10^5 kg$
$q \rightarrow 0$	$\eta = 2.4 \cdot 10^3 \frac{N \cdot s}{m}$	$l = 25m$

Tabela 2.4: Parametry toru w przypadku dynamiki w płaszczyźnie (x, y) .

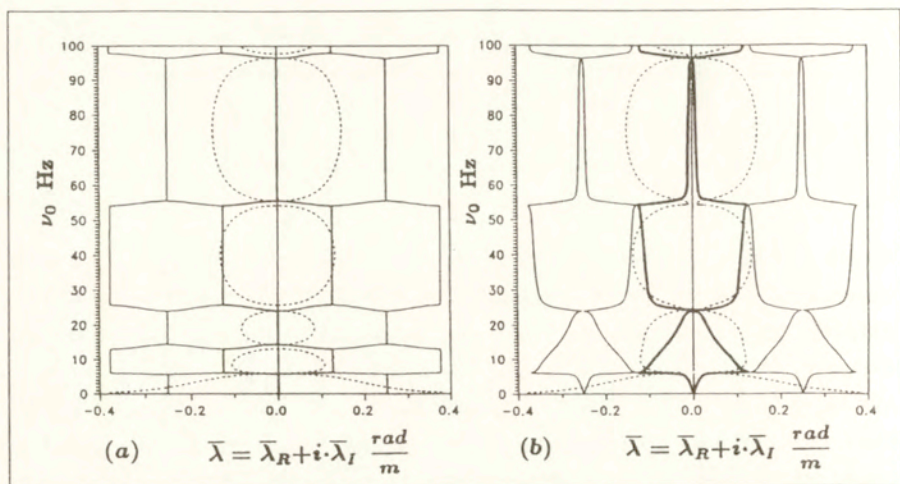
jej część urojoną $\bar{\lambda}_I$. Pierwsza strefa Brillouina (strefa propagacji), w przypadku $l = 25.0 m$ zawiera się w przedziale $\bar{\lambda}_R \in \langle -\pi/l, \pi/l \rangle \approx \langle -0.126 \text{ rad}/m, 0.126 \text{ rad}/m \rangle$. W przypadku czysto sprężystym ($\Delta_1(\Omega_0) = \text{const.}$, $\Delta_{VER}(\Omega_0) = \text{const.}$) można rozróżnić dwa przypadki. $\bar{\lambda}_R \neq 0$, $\bar{\lambda}_I = 0$, co odpowiada pasmom przenoszenia na płaszczyźnie $(\nu_0, \bar{\lambda})$ oraz $\bar{\lambda}_R = 0$, $\bar{\lambda}_I \neq 0$, co odpowiada pasmom zanikania na płaszczyźnie $(\nu_0, \bar{\lambda})$. Jak wynika z rezultatów ilustrujących przypadek układu bez tłumienia na rysunku 2.15, płaszczyzna $(\nu_0, \bar{\lambda})$ jest zdominowana przez pasma zanikania, a wąskie pasma przenoszenia występują w pobliżu częstości drgań własnych przęsła podpartego swobodnie na sztywnych podporach. Występowanie wąskich pasm przenoszenia związane jest ze słabym oddziaływaniem dynamicznym sąsiadujących komórek struktury periodycznej, które z kolei wynika z założenia „mocnego” gruntu pod pilarem.

W przypadku układu lepkosprężystego zanika pasmowa struktura płaszczyzny $(\nu_0, \bar{\lambda})$, a rozwiązaniami są fale bieżące i zanikające w przestrzeni. Jednakże jak wynika z rezultatów przedstawionych na rysunku 2.15, przy częstościach odpowiadających pasmom przenoszenia, dekrement fali $\bar{\lambda}_I$ przyjmuje wartości minimalne.

2.2.2. Dynamika układu w płaszczyźnie (x, z)

Również w tym przypadku zastosujemy zastępczy model podukładu pilar–podłoże, którego parametry wynikają ze ścisłego rozwiązania problemu półprzestrzeni sprężystej poddanej działaniu momentu sił o harmonicznie zmiennej wartości. Sztywną płytę fundamentową zastąpimy układem o jednym stopniu swobody zakładając, że może się ona obracać wokół osi \mathbf{x}' położonej na jej spodzie i równoległej do osi \mathbf{x} . Pilar modelujemy za pomocą belki Bernoulli’ego–Eulera z doczepioną masą skupioną reprezentującą rygiel. Model toru, w przypadku jego dynamiki w płaszczyźnie (\mathbf{x}, \mathbf{z}) , przedstawiono na rysunku 2.16.

Równania ruchu układu pilar–płyta fundamentowa–podłoże otrzymamy za pomocą równań Lagrange’a drugiego rodzaju, przyjmując jako współrzędne uogólnione: $\mathbf{w}_L = \mathbf{w}_L(nl, t)$ przemieszczenie najwyższego punktu pilara w kierunku osi \mathbf{z} , będące rezultatem jego zginania.



Rysunek 2.15: Konfiguracja płaszczyzny $(\nu_0, \bar{\lambda})$ w przypadku dynamiki poprzecznej; (a) – układ sprężysty, (b) – układ lepkościowy.

$\psi = \psi(\mathbf{n}l, t)$ – obrót płyty fundamentowej. Zakładamy, że pole przemieszczeń pila wynika z jego zginania odpowiada statycznemu polu przemieszczeń belki Bernoulli’ego-Eulera o długości h , sztywno zamocowanej w punkcie $\xi = h_1$ i swobodnej w punkcie $\xi = h_2$. Funkcję przemieszczenia pila zapiszemy w następującej formie:

$$(2.80) \quad w(\xi) = \psi \xi + \frac{\zeta - h_1}{2h} (3 - \frac{\zeta - h_1}{h}) w_L, \quad \xi > h_1.$$

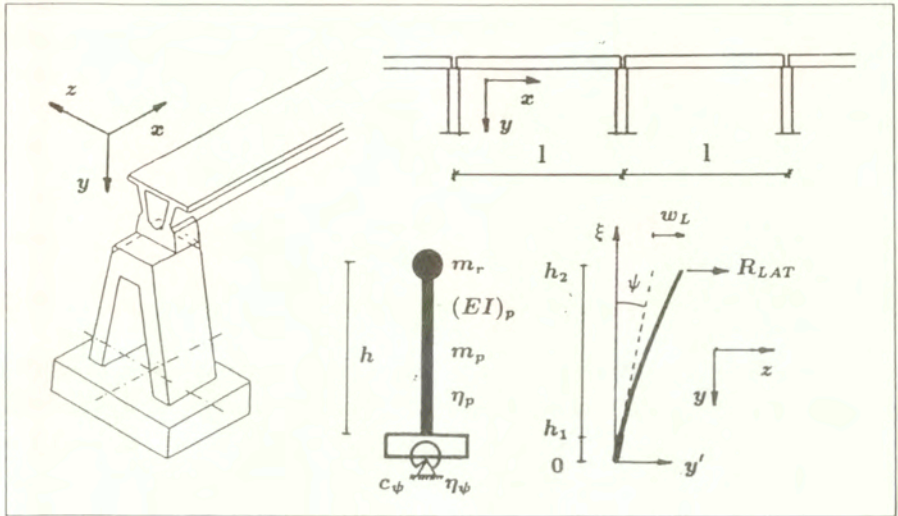
Równania ruchu rozważanego układu we współrzędnych uogólnionych w_L , ψ_L przyjmują następującą postać:

$$(2.81) \quad \begin{aligned} a_{11} \ddot{\psi} + a_{12} \ddot{w}_L + \eta_\psi \dot{\psi} + c_\psi \psi &= R_{lat}(\mathbf{n}l, t) h_2 \\ a_{12} \ddot{\psi} + a_{22} \ddot{w}_L + \eta_p \dot{w}_L + \frac{3(EI)_p}{h^3} w_L &= R_{lat}(\mathbf{n}l, t) \end{aligned}$$

gdzie

$$(2.82) \quad \begin{aligned} a_{11} &= \theta_\psi + m_r h_2^2 + \frac{1}{3} m_p (h_1^2 + h_2^2), \quad a_{22} = m_r + \frac{33}{140} m_p, \\ a_{12} &= m_r h_2 + m_p \left(\frac{11}{40} h + \frac{3}{8} h_1 \right). \end{aligned}$$

W równaniu (2.81) i (2.82) oznaczono: h – wysokość pila, h_1 – grubość płyty fundamentowej, m_r – masa rygla, m_p – masa pila, η_p – współczynnik lepkości, $(EI)_p$ – sztywność



Rysunek 2.16: Model układu w przypadku dynamiki bocznej.

giętna pionowa, θ_ψ – zastępczy moment bezwładności płyty fundamentowej i podłoża drgającego wraz z płytą, η_ψ – zastępcze tłumienie równe sumie tłumienia lepkiego w gruncie i tłumienia „wypromieniowania“, c_ψ – współczynnik sprężystości. Wartości liczbowe parametrów układu, w przypadku jego dynamiki w płaszczyźnie (x, z) , podano w tabeli 2.5. Należy nadmienić, że wartości parametrów: $(EI)_p$ i c_ψ zostały zaczerpnięte z wyników badań eksperymentalnych [13]. Siłę działającą na pion w punkcie $\xi = h_2$ możemy wyrazić za pomocą następującej zależności:

$$(2.83) \quad R_{LAT}(nl, t) = \Delta_{LAT}(t) \cdot [w_L(nl, t) + h_2 \cdot \psi(nl, t)].$$

$EI = 2.3 \cdot 10^{10} \text{ Nm}^2$	$\mu = 4 \cdot 10^3 \text{ kg}$	$\eta = 2.4 \cdot 10^3 \frac{\text{Ns}}{\text{m}}$
$q \rightarrow 0$	$l = 25 \text{ m}$	$m_r = 3.6 \cdot 10^3 \text{ kg}$
$h_1 = 1.2 \text{ m}$	$h_2 = 6.47 \text{ m}$	$h = 5.27 \text{ m}$
$m_p = 2.64 \cdot 10^4 \text{ kg}$	$(EI)_p = 1.5 \cdot 10^{10} \text{ Nm}^2$	$\eta_p = 2.16 \cdot 10^4 \frac{\text{Ns}}{\text{m}}$
$\theta_\psi = 3.48 \cdot 10^5 \frac{\text{kgm}^2}{\text{rad}}$	$c_\psi = 1.89 \cdot 10^{10} \frac{\text{Nm}}{\text{rad}}$	$\eta_\psi = 4.68 \cdot 10^7 \frac{\text{Nm s}}{\text{rad}}$

Tabela 2.5: Parametry toru w przypadku dynamiki w płaszczyźnie (x, z) .

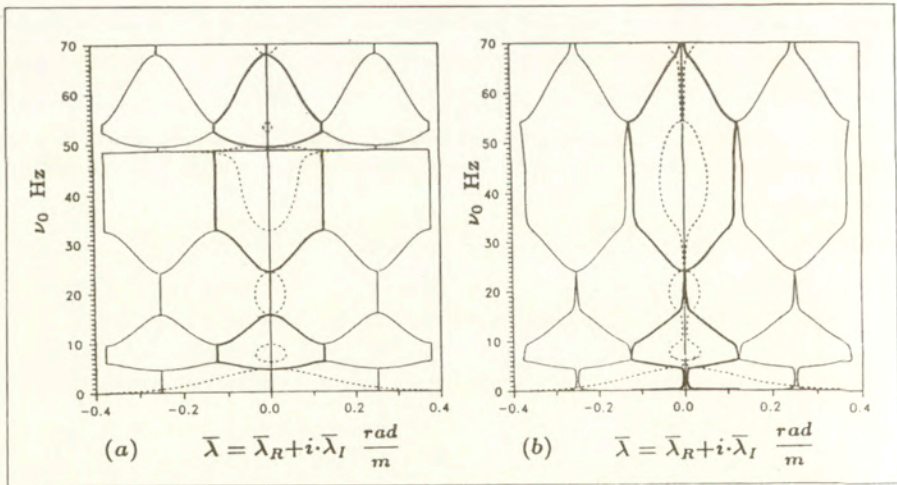
Zakładając stacjonarną postać ruchu, za pomocą zależności (2.81) i relacji (2.83), otrzymujemy

$$(2.84) \quad \begin{aligned} R_{LAT}(nL, \Omega_0) &= \Delta_{LAT}(\Omega_0) \cdot W_{LAT}(\xi = h_2, nL, \Omega_0), \\ \Delta_{LAT}(\Omega_0) &= \frac{a_0}{E} \cdot \frac{\bar{a}_{11} \cdot \bar{a}_{22} - \bar{a}_{12}^2}{\bar{a}_{22} h_2^2 + \bar{a}_{11} - 2\bar{a}_{12} h_2}, \end{aligned}$$

gdzie

$$(2.85) \quad \begin{aligned} \bar{a}_{11} &= -\omega_0^2 a_{11} + i\omega_0 \eta_\psi + c_\psi, & \bar{a}_{12} &= -\omega_0^2 a_{12}, \\ \bar{a}_{22} &= -\omega_0^2 a_{22} + i\omega_0 \eta_p + \frac{3EI}{h^3}. \end{aligned}$$

Relację dyspersyjną (2.73) w przypadku dynamiki bocznej układu zilustrowano na rysunku 2.17, gdzie linią ciągłą oznaczono część rzeczywistą $\bar{\lambda}_R$ liczby falowej, a linią przerywaną jej część urojona $\bar{\lambda}_I$. W przypadku czysto sprężystym ($\Delta_1(\Omega_0) = \text{const.}$, $\Delta_{LAT}(\Omega_0) = \text{const.}$), w rozpatrywanym zakresie częstości, płaszczyzna $(\nu_0, \bar{\lambda})$ jest zdominowana przez pasma przenoszenia. W przeciwieństwie do dynamiki układu w płaszczyźnie (x, y) , oddziaływanie dynamiczne sąsiadujących komórek struktury periodycznej jest silne i wynika z większej w tym przypadku podatności pilara.



Rysunek 2.17: Konfiguracja płaszczyzny $(\nu_0, \bar{\lambda})$ w przypadku dynamiki bocznej; (a) – układ czysto sprężysty, (b) – układ lepkosprężysty.

Jak wynika z rezultatów przedstawionych na rysunku 2.17, w przypadku układu lepko-sprężystego zanika pasmowa struktura płaszczyzny ($\nu_0, \bar{\lambda}$), lecz przy częstościach odpowiadających pasmom przenoszenia dekrement fali $\bar{\lambda}_I$ przyjmuje wartości minimalne.

2.3. Układ poddany działaniu ruchomego źródła zaburzeń

Równanie ruchu układu, poddanego działaniu poruszającego się ze stałą prędkością obciążenia o harmonicznie zmiennej wartości, zapiszemy w następującej bezwymiarowej postaci:

$$(2.86) \quad \frac{\partial^4 W}{\partial X^4} + \frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2} + D_1 \cdot W = \delta(X - V\tau) e^{i\Omega\tau}.$$

Stacjonarnego rozwiązania równania (2.86), spełniającego warunki (2.36), poszukujemy w następującej postaci:

$$(2.87) \quad W(X, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(X, \lambda) e^{i\lambda(X-V\tau)+i\Omega\tau} d\lambda,$$

$$\delta(X - V\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda(X-V\tau)} d\lambda$$

Po podstawieniu powyższych zależności do równania (2.86), otrzymujemy zwyczajne równanie różniczkowe o następującej postaci:

$$(2.88) \quad [D_A^4(X, \lambda) - \bar{\Omega}^2 + \Delta_1(\bar{\Omega})] \cdot A(X, \lambda) = 1,$$

gdzie

$$(2.89) \quad \bar{\Omega} = -\lambda V + \Omega.$$

Rozwiązań równania (2.88) poszukujemy w postaci określonej za pomocą zależności: (2.41), (2.42) i (2.72). Rozwiązanie rozważanego problemu uzyskano w sposób opisany szczegółowo w poprzednim punkcie pracy, w przypadku układu ciągłego na sztywnych podporach.

Funkcję przemieszczenia odpowiadającą komórce ($\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$), znajdującej się przed lub za poruszającym się źródłem zaburzeń, zapiszemy w postaci następującej sumy fal bieżących:

$$(2.90) \quad W(X, \tau) = \sum_{k=1}^K Q_k \bar{A}(\xi, \lambda_k) e^{i(\lambda_k n_1 L + \bar{\Omega}_k \tau)},$$

$$X \in \langle n_1 L, n_2 L \rangle, \quad \xi = X - n_1 L, \quad \xi \in \langle 0, L \rangle.$$

Funkcja kształtu fali $\bar{A} = \bar{A}(\xi, \lambda_k)$ określona jest za pomocą zależności (2.11), a liczba falowa λ_k i „wymuszona” częstość $\bar{\Omega}_k$ spełniają następującą zależność:

$$(2.91) \quad f(\lambda_k, \bar{\Omega}_k) = 0, \quad \bar{\Omega}_k = -\lambda_k V + \bar{\Omega}_k,$$

gdzie $f = 0$ jest relacją dyspersyjną określoną za pomocą równania (2.73).

Amplitudy fal zapiszemy w następującej postaci:

$$(2.92) \quad Q_k = \left\{ \frac{-\text{signum}[Im(\lambda)] \cdot \Delta_U(\bar{\Omega}) \cdot \left(1 + \frac{\lambda^2}{S^2}\right) + \lambda^2 S \cdot \frac{\cos \lambda L - \cosh SL}{\sinh SL}}{2(\lambda^4 - S^4)S^3 \cdot (\sin SL - \sinh SL) \cdot \frac{d f(\lambda, \bar{\Omega})}{d \lambda}} \right\}_{\lambda = \lambda_k}.$$

Rozwiązanie w przypadku $n_1 L \leq V\tau \leq n_2 L$ określone jest za pomocą zależności o postaci

(2.54) i (2.55), w których w przypadku rozważanego układu należy położyć

$$(2.93) \quad W_\lambda(\xi, \tau) = \sum_{k=1}^{K_L} Q_k W_k(L - \xi) e^{i\lambda_k(n_1 L + \bar{\Omega}_k \tau)} + \sum_{k=1}^{K_R} Q_k W_k(\xi) e^{i\lambda_k(n_2 L + \bar{\Omega}_k \tau)},$$

gdzie

$$(2.94) \quad \begin{aligned} W_k(L - \xi) &= \sin S_k(L - \xi) \sinh S_k L + \sinh S_k(L - \xi) \sin S_k L, \\ W_k(\xi) &= \sin S_k \xi \sinh S_k L + \sinh S_k \xi \sin S_k L, \\ S_k &= S(\bar{\Omega}_k), \end{aligned}$$

a amplitudy P_j określone są następująco:

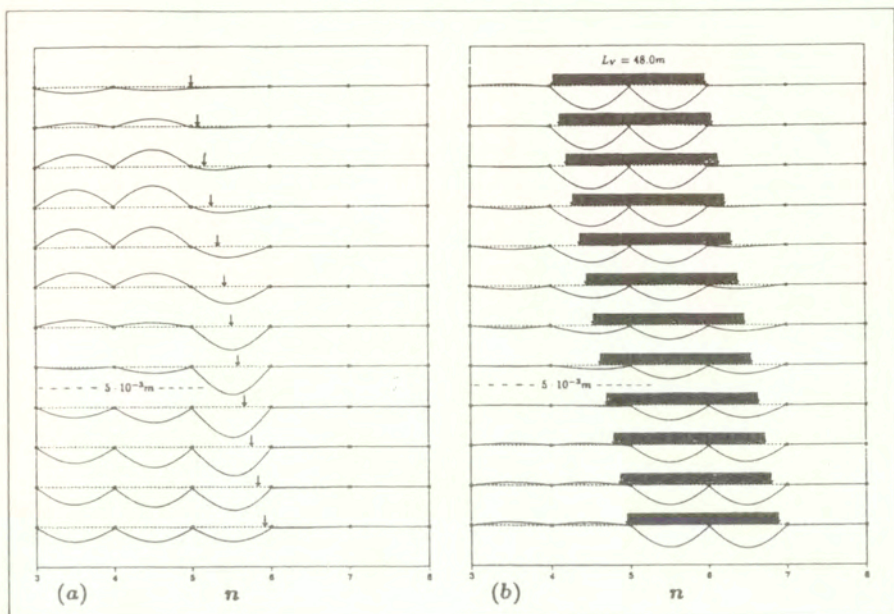
$$(2.95) \quad P_j = \frac{i}{(4S_j^3 - 2S_j^2 V^2 + 2V\Omega - iNV) \sin S_j^2 L}, \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

Wielkości $S_j^* = \lambda$, występujące w relacji (2.94), spełniają zależność, która stanowi relację dyspersyjną fal wzbudzanych w belce ciągłej (nieperiodycznej), poddanej działaniu poruszającego się źródła zaburzeń

$$(2.96) \quad \lambda^4 - S^4 = 0, \quad \lambda^4 - (-\lambda V + \Omega)^2 + iN(-\lambda V + \Omega) + Q = 0.$$

2.3.1. Przypadek obciążenia działającego w płaszczyźnie (x, y) .

Odpowiedź dynamiczną układu poddanego działaniu poruszającej się z prędkością $v = 150 \text{ m/s}$ siły skupionej $p_0 = 3.3 \cdot 10^5 \text{ N}$ oraz obciążenia stanowiącego sumę równomiernie rozłożonych 49. sił o łącznej amplitudzie 10^6 N , przedstawiono na rysunku 2.18. Przemieszczenia wybranych punktów układu poddanego działaniu poruszającej się z prędkością $v = 150 \text{ m/s}$ siły skupionej $p_0 = 3.3 \cdot 10^5 \text{ N}$, zilustrowano na rysunku 2.19. Przemieszczenia układu w przypadku przedstawionym na rysunku 2.19, określane były w czasie odpowiadającym przejazdowi siły od punktu $vt_1 = 0$ do punktu $vt_2 = 10 \text{ l}$. Linia pogrubioną oznaczono przemieszczenia w czasie obciążenia komórki, w której znajduje się obserwowany punkt. Przemieszczenia punktu $x = vt$ pod poruszającą się z prędkością $v = 150 \text{ m/s}$ siłą

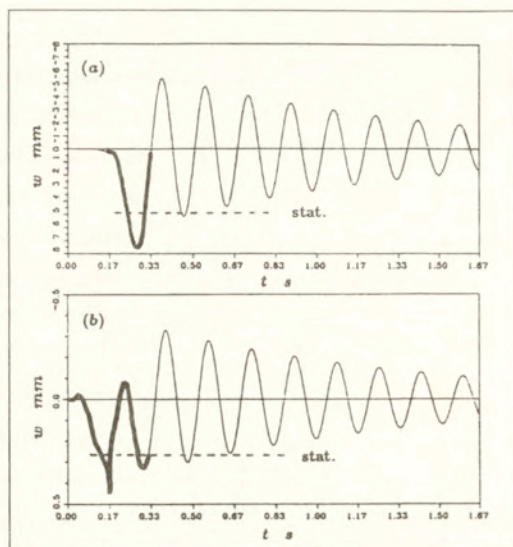


Rysunek 2.18: Obciążenie w płaszczyźnie (x, y) : przemieszczenia układu przy $v = 150 \text{ m/s}$, (a) - $p_0 = 3.3 \cdot 10^5 \text{ N}$, (b) - $p_0 = 49 \cdot 204081.6 \text{ N} = 10^6 \text{ N}$.

skupioną $p_0 = 3.3 \cdot 10^5 \text{ N}$, zilustrowano na rysunku 2.20. Na rysunku tym przedstawiono również porównanie uzyskanego rozwiązania z przypadkiem quasi-statycznym i z rozwiązaniem problemu belki swobodnie podpartej, obciążonej poruszającą się siłą, z zerowymi warunkami początkowymi, uzyskany za pomocą metody podanej w pracy [49]. Jak wynika z rezultatów przedstawionych na rysunku 2.20(b), w przypadku obciążenia w płaszczyźnie (x, y) , rozważany układ może być modelowany z wystarczającą dokładnością za pomocą szeregu nieoddziałujących ze sobą belek swobodnie podpartych.

2.3.2. Przypadek obciążenia działającego w płaszczyźnie (x, z) .

Odpowiedź dynamiczną układu poddanego działaniu poruszającej się z prędkością $v = 103 \text{ m/s}$ siły skupionej $p_0 = 3.3 \cdot 10^5 \text{ N}$ oraz obciążenia w postaci równomiernie rozłożonych o łącznej amplitudzie 10^6 N , przedstawiono na rysunku 2.21. Przemieszczenia wybranych punktów układu poddanego działaniu poruszającej się z prędkością $v = 103 \text{ m/s}$ siły sku-

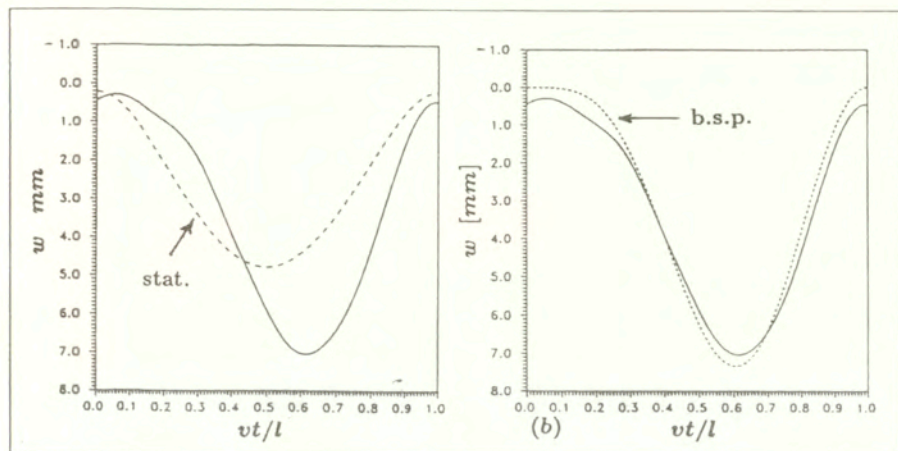


Rysunek 2.19: Obciążenie w płaszczyźnie (x, y) : $v = 150 \text{ m/s}$, $p_0 = 3.3 \cdot 10^5 \text{ N}$, przemieszczenia punktów: (a) – środek rozpiętości przęsła $x = 1.5 l$, (b) – pilar $x = 1 l$.

pionej $p_0 = 3.3 \cdot 10^5 \text{ N}$, zilustrowano na rysunku 2.22. Przemieszczenia układu w przypadku przedstawionym na rysunku 2.22, określane były w czasie odpowiadającym przejazdowi siły od punktu $vt_1 = 0$ do punktu $vt_2 = 10 l$. Linia pogrubioną oznaczono przemieszczenia w czasie obciążenia komórki, w której znajduje się obserwowany punkt. Przemieszczenia punktu $x = vt$ pod poruszającą się z prędkością $v = 103 \text{ m/s}$ siłą skupioną $p_0 = 3.3 \cdot 10^5 \text{ N}$ zilustrowano na rysunku 2.23. Na rysunku tym przedstawiono również porównanie uzyskanego rozwiązania z przypadkiem quasi-statycznym i z rozwiązaniem problemu belki swobodnie podpartej, obciążonej poruszającą się siłą, z zerowymi warunkami początkowymi. Jak wynika z rezultatów przedstawionych na rysunku 2.23(b), w przypadku obciążenia w płaszczyźnie (x, z) , rozważany układ należy modelować z uwzględnieniem okresowości jego struktury.

2.4. Krytyczne parametry obciążenia

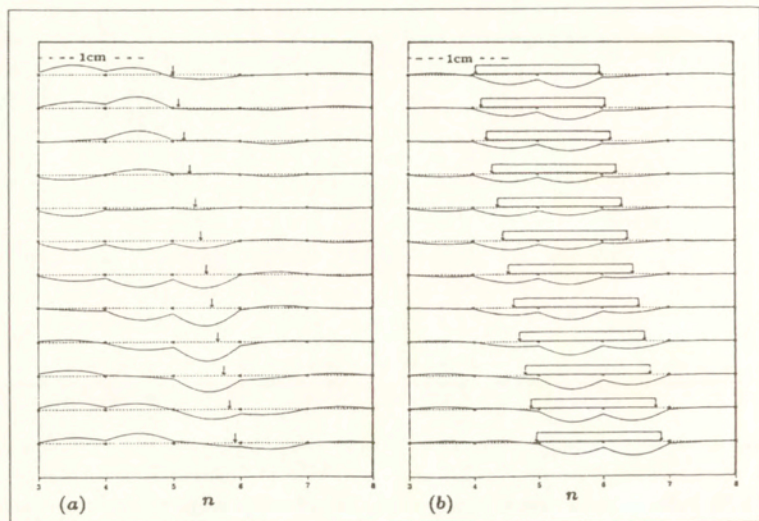
Krytyczne wartości prędkości i częstości zmian obciążenia działającego na układ idealnie sprężysty uzyskano za pomocą określenia parametrów prostej o równaniu $\bar{\Omega} = -V\lambda + \Omega$, która jest styczna do krzywych dyspersyjnych na płaszczyźnie (Ω_0, λ) , w sposób omówiony w po-



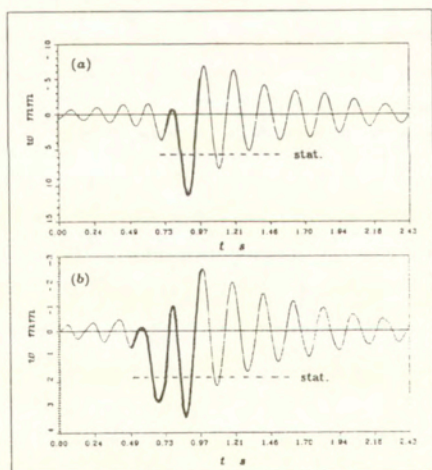
Rysunek 2.20: Obciążenie w płaszczyźnie (x, y) : przemieszczenie pod obciążeniem przy $v = 150 \text{ m/s}$, $p_0 = 3.3 \cdot 10^5 \text{ N}$, (a) – porównanie z rozwiązaniem quasi-statycznym, (b) – porównanie z rozwiązaniem problemu belki swobodnie podpartej (b.s.p.).

przednim punkcie pracy. Konfigurację krzywych krytycznych na płaszczyźnie $(v = Vv_0, \nu = \Omega\omega_0/(2\pi))$, w przypadku dynamiki poprzecznej układu, zilustrowano na rysunku 2.24. Jak wynika z rezultatów przedstawionych na rysunku 2.24, maksymalne prędkości krytyczne wynoszą: $v_{1max} \approx 21 \text{ m/s}$ w przypadku pierwszego pasma przenoszenia i $v_{2max} \approx 105 \text{ m/s}$ w przypadku drugiego pasma przenoszenia.

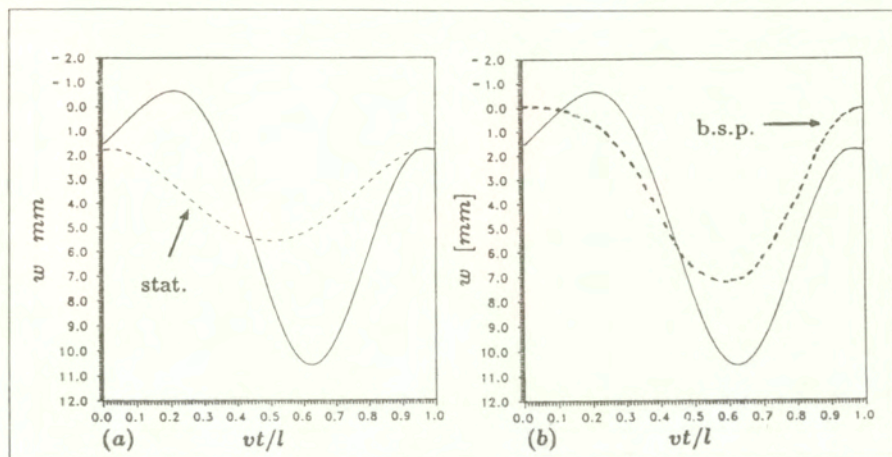
Konfigurację krzywych krytycznych na płaszczyźnie (v, ν) , w przypadku dynamiki bocznej układu, pokazano na rysunku 2.25(a), przyjmując $\theta_\psi = 3.48 \cdot 10^5 \frac{\text{kgm}^2}{\text{rad}}$, $c_\psi = 1.89 \cdot 10^{10} \frac{\text{Nm}}{\text{rad}}$, $\eta_\psi = 4.68 \cdot 10^7 \frac{\text{Nms}}{\text{rad}}$ i pozostałe parametry układu podane w tabeli 2.5. Sposób określania krytycznych parametrów obciążenia zilustrowano na rysunku 2.26, przy czym prędkości określane są następująco: $v = \left| \frac{\nu}{\lambda_R} \right| \cdot 2\pi$. Przy prędkości $v \approx 96.9 \text{ m/s}$ i $v \approx 102.1 \text{ m/s}$, amplitudy, które generowane są przez źródło zaburzeń w układzie czysto sprężystym, narasta nieograniczenie, co zilustrowano na rysunku 2.25(b). W otoczeniu prędkości krytycznych w układzie sprężystym, amplituda tej fali w układzie lepkosprężystym jest silnie tłumiona. Zjawisko to powodowane jest dużą wartością tłumienia „wypromieniowania“ w podłożu, na którym spoczywają pilary.



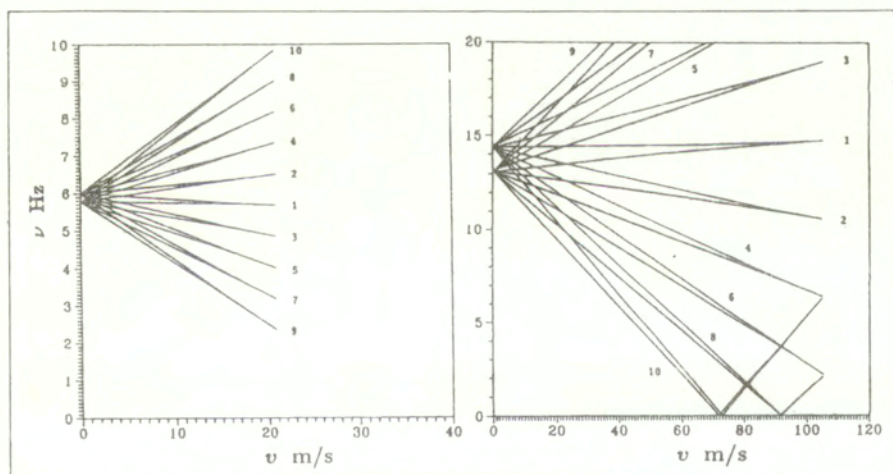
Rysunek 2.21: Obciążenie w płaszczyźnie (x, z) : przemieszczenia układu przy $v = 103 \text{ m/s}$, (a) $-p_0 = 3.3 \cdot 10^5 \text{ N}$, (b) $-p_0 = 49 \cdot 2.0408 \cdot 10^5 \text{ N} = 10^6 \text{ N}$.



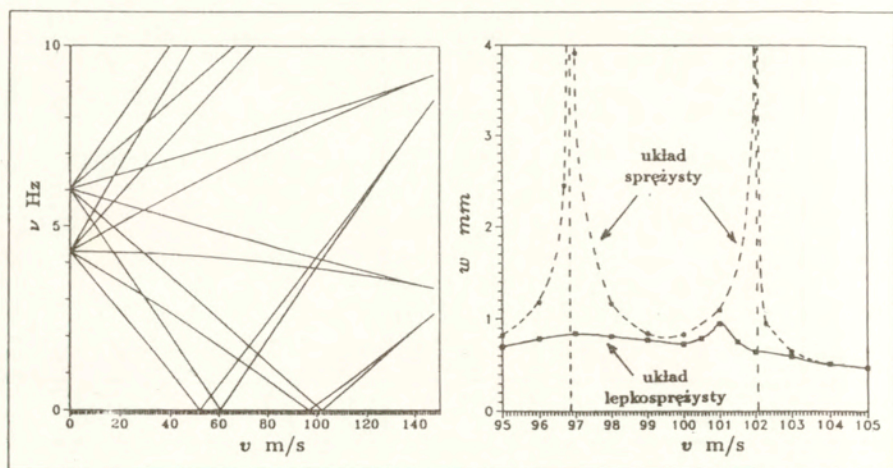
Rysunek 2.22: Obciążenie w płaszczyźnie (x, z) : $v = 103 \text{ m/s}$, $p_0 = 3.3 \cdot 10^5 \text{ N}$, przemieszczenia punktów: (a) – środek rozpiętości przęsa $x = 3.5 \text{ l}$, (b) – pilar $x = 3 \text{ l}$.



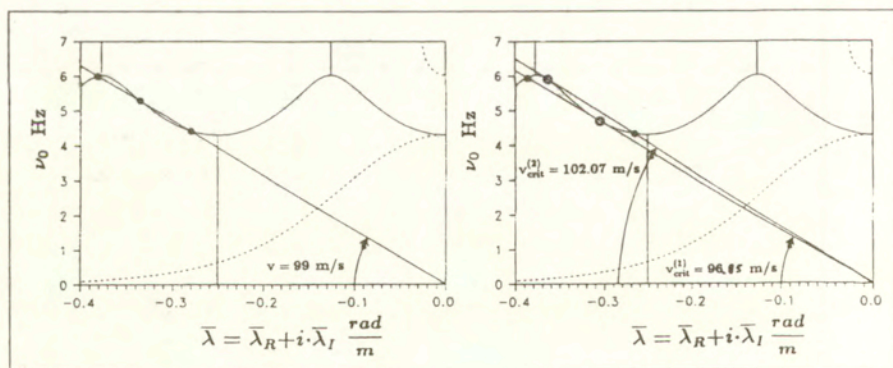
Rysunek 2.23: Obciążenie w płaszczyźnie (x, z) : przemieszczenie pod obciążeniem przy $v = 103 \text{ m/s}$, $p_0 = 3.3 \cdot 10^5 \text{ N}$. (a) – porównanie z rozwiązaniem quasi-statycznym, (b) – porównanie z rozwiązaniem problemu belki swobodnie podpartej (b.s.p.).



Rysunek 2.24: Dynamika układu w płaszczyźnie (x, y) : konfiguracja krzywych krytycznych określona w przypadku pierwszych dwóch pasm przenoszenia i stref Brillouina 1 – 10.



Rysunek 2.25: Dynamika układu w płaszczyźnie (x, z) : (a) – konfiguracja krzywych krytycznych określona w przypadku pierwszego pasma przenoszenia i stref Brillouina 1 – 6, (b) – amplituda fali w funkcji prędkości obciążenia.

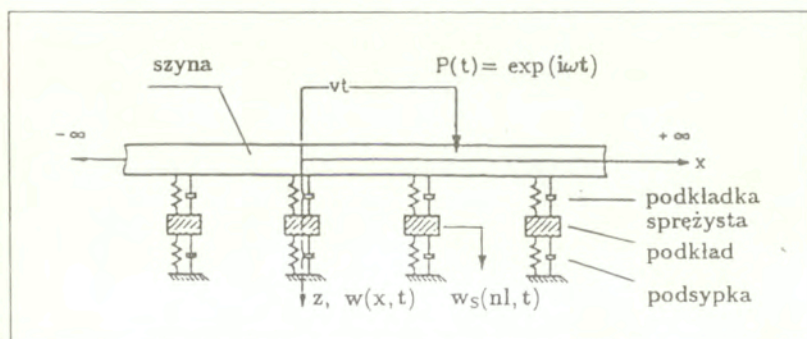


Rysunek 2.26: Dynamika układu w płaszczyźnie (x, z) : ilustracja graficznej metody wyznaczania krytycznych parametrów obciążenia.

3. Dynamika toru kolei konwencjonalnej

Konwencjonalny tor kolejowy składa się z szyn umocowanych za pomocą śrub do podkładów spoczywających na podsypce. Pomiędzy szyną a podkładem znajduje się warstwa (podkładka) sprężysto-tłumiąca zwana przekładką. Zakładając wysoką precyzję montowania, można układ taki uważać za złożony z powtarzalnych elementów. W rzeczywistości tor kolejowy jest typową strukturą periodyczną składającą się z identycznych komórek (sprężysta szyna) sprzęgniętych ze sobą w jednakowy sposób (za pomocą podkładów). W niniejszej pracy zakładamy, że tor jest symetryczny względem osi przebiegającej pomiędzy szynami i badać będziemy symetryczny przypadek obciążenia toru.

Jednym z najprostszych modeli toru kolejowego jest ciągła belka spoczywająca na okresowo rozłożonych elementach lepkosprężystych z masą skupioną. Układ taki umożliwi opisanie własności sprężystych szyny i podsypki oraz własności inercyjnych podkładów. Model rozważanego układu, składający się z belki Bernoulli'ego-Eulera o nieskończonej długości spoczywającej na podatnych, okresowo rozłożonych podporach, przedstawiono na rysunku 2.27. Zbadamy przypadek propagacji fal biegnących w nieobciążonym układzie oraz jego odpowiedź dynamiczną na działanie poruszającej się siły skupionej o harmonicznie zmiennej wartości.



Rysunek 2.27: Model toru kolejowego.

3.1. Sformułowanie problemu

Równanie ruchu belki na lepkosprężystym podłożu przyjęto w postaci określonej za pomocą zależności (2.61), przy oznaczeniach podanych w tabeli 2.3. Przestrzenna periodyczność

rozważanego układu opisana jest za pomocą następujących warunków brzegowych na funkcję $W = W(X, \tau)$:

$$(2.97) \quad \begin{aligned} W(nL_-, \tau) &= W(nL_+, \tau), & \frac{\partial W}{\partial X}(nL_-, \tau) &= \frac{\partial W}{\partial X}(nL_+, \tau), \\ \frac{\partial^2 W}{\partial X^2}(nL_-, \tau) &= \frac{\partial^2 W}{\partial X^2}(nL_+, \tau), \\ \left[\frac{\partial^3 W}{\partial X^3}(nL_-, \tau) - \frac{\partial^3 W}{\partial X^3}(nL_+, \tau) \right] - R(nL, \tau) &= 0, \end{aligned}$$

gdzie n jest kolejnym numerem podpory.

Zależności (2.97) przedstawiają warunki ciągłości: przemieszczenia, kąta obrotu przekroju poprzecznego belki i momentu zginającego oraz warunek równowagi sił poprzecznych, odpowiadające podporze o numerze n . W przypadku stacjonarnej postaci ruchu z częstością Ω_0 , siła reakcji $R = R(nL, \tau)$ określona następująco:

$$(2.98) \quad R(nL, \Omega_0) = \Delta(\Omega_0) \cdot W(nL, \Omega_0),$$

gdzie sztywność dynamiczna $\Delta = \Delta(\Omega_0)$ podatnej podpory zależna jest od współczynnika sprężystości przekładki q_P i podsypki q_B oraz od ich współczynników lepkości, odpowiednio η_P i η_B , i wynosi

$$(2.99) \quad \Delta(\Omega_0) = \frac{\omega_0}{\bar{\omega}} = \frac{a_0}{E} \cdot \frac{(q_P + i\omega_0\eta_P) \cdot (-\omega_0^2 m_S + q_B + i\omega_0\eta_B)}{-\omega_0^2 m_S + q_P + q_B + i\omega_0(\eta_P + \eta_B)}.$$

Wartości parametrów układu zastosowane w przykładach liczbowych, zaczerpnięte z pracy [62], podano w tabeli 2.6.

$E = 2.1 \cdot 10^{11} \frac{N}{m^2}$	$I = 3.052 \cdot 10^{-5} m^4$	$\mu = 60.31 \frac{kg}{m}$
$q_P = 2.6 \cdot 10^8 \frac{N}{m}$	$\eta_P = 6.3 \cdot 10^4 \frac{Ns}{m}$	$m_S = 145 kg$
$q_B = 1.8 \cdot 10^8 \frac{N}{m}$	$\eta_B = 8.2 \cdot 10^4 \frac{Ns}{m}$	$l = 0.6 m$
$q \rightarrow 0$	$\eta \rightarrow 0$	

Tabela 2.6: Wartości parametrów rozważanego układu.

3.2. Propagacja swobodnych fal bieżących

W przypadku problemu propagacji fal bieżących w nieobciążonym torze, rozwiązania równania (2.61) po położeniu w nim $P(X, \tau) = 0$, poszukujemy w postaci (2.64). Warunki nałożone na funkcję $A = A(X, \lambda)$, wynikające z warunków brzegowych na funkcję

przemieszczenia $W = W(X, \tau)$ (2.97), przyjmują następującą postać:

$$(2.100) \quad \begin{aligned} A(n_1 L) &= A(n_2 L), \quad D_A(X) \cdot A(n_1 L) = D_A(X) \cdot A(n_2 L), \\ D_A^2(X) \cdot A(n_1 L) &= D_A^2(X) \cdot A(n_2 L), \\ D_A^3(X) \cdot [A(n_1 L) - A(n_2 L)] + \Delta(\Omega_0) \cdot A(n_1 L) &= 0, \quad n_2 = n_1 + 1. \end{aligned}$$

Pole przemieszczeń układu, które spełnia powyższe warunki, przyjmuje następującą postać:

$$(2.101) \quad W(X, \tau) = \bar{A}(\xi, \lambda) \exp[i(\lambda n L + \Omega_0 \tau)],$$

gdzie

$$(2.102) \quad \begin{aligned} \bar{A}(\xi, \lambda) &= [\sin S \xi e^{i\lambda L} + \sin S(L - \xi)] \cdot (\cos \lambda L - \cosh SL) + \\ &- [\sinh S \xi e^{i\lambda L} + \sinh S(L - \xi)] \cdot (\cos \lambda L - \cos SL), \end{aligned}$$

w przypadku

$$(2.103) \quad X \in \langle n_1 L, n_2 L \rangle, \quad \xi = X - n_1 L, \quad \xi \in \langle 0, L \rangle.$$

Równanie (2.101) przedstawia falę bieżącą, rozprzestrzeniającą się w strukturze periodycznej, której kształt opisany jest za pomocą funkcji (2.102). Związki dyspersyjne, tzn. zależność „częstość Ω_0 - liczba falowa λ “, zapiszemy w następującej postaci:

$$(2.104) \quad \begin{aligned} f(\lambda, \Omega_0) &= \cos^2 \lambda L - \cos \lambda L \cdot [\cos SL + \cosh SL + \frac{\Delta(\Omega_0)}{4S^3} (\sin SL - \sinh SL)] \\ &+ \cos SL \cosh SL + \frac{\Delta(\Omega_0)}{4S^3} (\sin SL \cosh SL - \sinh SL \cos SL) = 0. \end{aligned}$$

Zależność (2.104), którą można również zapisać w następującej formie:

$$(2.105) \quad f(\lambda, \Omega_0) = [\cos \lambda L - f_1(\Omega_0)] \cdot [\cos \lambda L - f_2(\Omega_0)] = 0,$$

daje jako rozwiązanie dwie wartości liczby falowej λ , przy określonej częstości Ω_0 . W przypadku lepkosprężystym i w pewnych zakresach częstości w układzie czysto sprężystym, relacja dyspersyjna (2.105) jest spełniona przy zespolonych wartościach $\lambda = \lambda_R + i\lambda_I$, gdzie $\lambda_R = \text{Re}(\lambda)$ - liczba falowa, $\lambda_I = \text{Im}(\lambda)$ - współczynnik zanikania (dekrement). Funkcja przemieszczenia (2.101) może być zapisana w następującej formie:

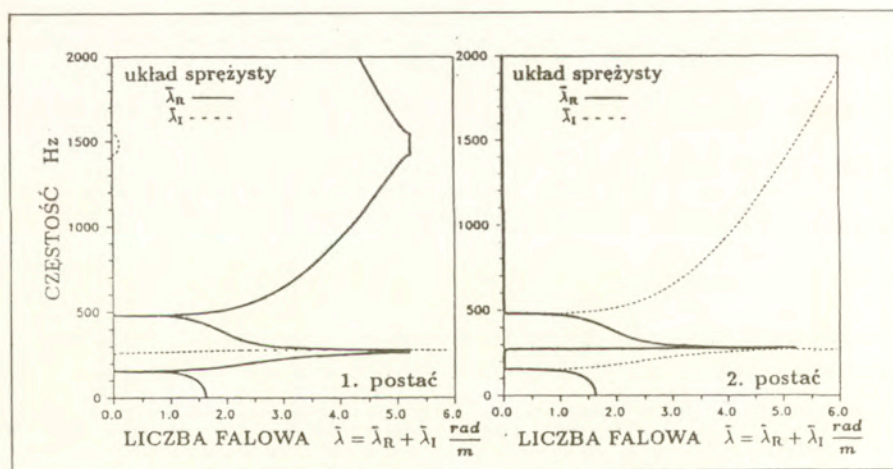
$$(2.106) \quad W(X, \tau) = \bar{A}(\xi, \lambda) e^{-\bar{\lambda}_I n l + i(\bar{\lambda}_R n l + 2\pi \nu_0 t)},$$

gdzie

$$\bar{\lambda}_R = \lambda_R a_0, \quad \bar{\lambda}_I = \lambda_I a_0, \quad \nu_0 = \Omega_0 \bar{\omega} / 2\pi.$$

W układzie czysto sprężystym ($\Delta(\Omega_0) = \text{const.}$) można rozróżnić trzy przypadki charakterystyczne. W przypadku, gdy $\bar{\lambda}_I = 0$, $\bar{\lambda}_R \neq 0$, fala bieżąca opisana zależnością (2.106) może propagować się w całym nieograniczonym układzie, co odpowiada pasmom przenoszenia na płaszczyźnie $(\nu_0, \bar{\lambda})$. W przypadku gdy $\bar{\lambda}_I \neq 0$, $\bar{\lambda}_R = 0$, rozwiązaniem jest fala zanikająca, której zanikanie w przestrzeni określone jest za pomocą czynnika $\exp(-\bar{\lambda}_I n l)$, co odpowiada pasmom zanikania na płaszczyźnie $(\nu_0, \bar{\lambda})$. W trzecim przypadku, gdy $\bar{\lambda}_I \neq 0$, $\bar{\lambda}_R \neq 0$, w układzie propaguje się fala bieżąca o zanikającej amplitudzie. Obszar na płaszczyźnie $(\nu_0, \bar{\lambda})$ odpowiadający tej fali jest również pasmem zanikania.

Zależności dyspersyjne (2.105), uzyskane w przypadku czysto sprężystym zilustrowano na rysunku 2.28. Krzywe reprezentujące współczynniki zanikania $\bar{\lambda}_I$ (linie przerywane) i liczby falowe $\bar{\lambda}_R$ (linie ciągłe) są symetryczne zarówno względem osi ν_0 jak i osi $\bar{\lambda}$. Pierwsza strefa Brillouina (strefa propagacji), w przypadku $l = 0.6 \text{ m}$ zawiera się w przedziale $\bar{\lambda}_R \in < -\pi/l, \pi/l > = < -5.24 \text{ rad/m}, 5.24 \text{ rad/m} >$. Rysunek 2.28 ilustruje przypadek fal odpowiadających pierwszej strefie Brillouina, które propagują się w kierunku przeciwnym do zwrotu osi X . Jak widać na rysunku 2.28, druga postać ruchu falowego jest postacią zanikającą ($\bar{\lambda}_I > 0$ przy dowolnej wartości częstotliwości ν_0). Podział płaszczyzny na zakresy, w



Rysunek 2.28: Zależności dyspersyjne w przypadku czysto sprężystym.

których występują pasma przenoszenia lub zanikania, w przypadku pierwszej postaci ruchu falowego, przedstawiono w tabeli 2.7.

Pasma przenoszenia	(156.2, 263.9)	(481.4, 1422.4)	(1547.1, 5690.0)
Pasma zanikania	(0, 156.2)	(263.7, 481.4)	(1422.4, 1547.1)

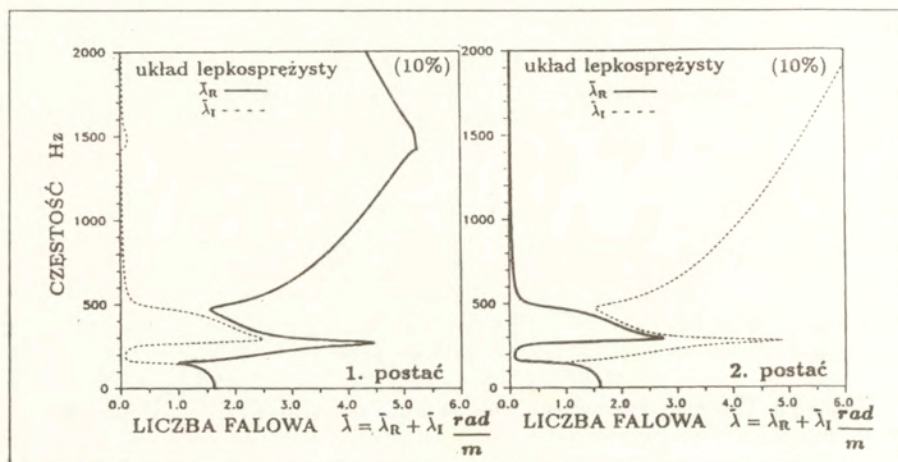
Tabela 2.7: Podział płaszczyzny ($\nu_0, \bar{\lambda}$) w wybranym zakresie częstotliwości ($H z$).

Częstotliwość ($H z$)	Szyna-podkład	Sąsiadujące podkłady
156.2	w fazie	w fazie
263.9	w fazie	w przeciwfazie
481.4	w przeciwfazie	w fazie
1547.1	w przeciwfazie	w przeciwfazie

Tabela 2.8: Charakterystyczne częstotliwości własne układu i odpowiadające im postaci ruchu.

Przy częstotliwości równej $277.0 H z$, która jest równa częstotliwości drgań własnych podkładu złożonego z przekładki, podkładu i podsypki, siła kontaktu w podkładce dąży do nieskończoności, a podatna podpora szyny staje się podporą sztywną. Sprawia to, że sąsiadujące ze sobą komórki struktury periodycznej nie oddziałują między sobą (dekrement $\bar{\lambda}_l$ dąży do nieskończoności). W zakresie częstotliwości ($277.0, 481.4$) $H z$, w przypadku obu postaci ruchu falowego otrzymujemy tzw. falę propagującą się i zanikającą („propagating and attenuating wave“), przy której $\bar{\lambda}_l = \bar{\lambda}_R$, patrz rysunek 2.28. Częstotliwości $1422.4 H z$ i $5690.0 H z$ są częstotliwościami własnymi belki swobodnie podpartej o takiej samej długości i identycznych pozostałych parametrach jak komórka rozważanej struktury periodycznej. Odpowiadająca tej częstotliwości postać ruchu falowego jest tzw. postacią „pinned-pinned“ [148], przy której węzły fali stojącej znajdują się w miejscach periodycznych podpór. Postaci ruchu rozważanej struktury periodycznej, odpowiadające pozostałym częstotliwościom charakterystycznym, zilustrowano w tabeli 2.7. W tabeli 2.7 przedstawiono zależności fazowe pomiędzy podkładem a punktem szyny nad tymże podkładem („szyna-podkład“) i zależności fazowe pomiędzy sąsiadującymi podkładami („sąsiadujące podkłady“). Związki dyspersyjne w przypadku małego tłumienia (10% wartości współczynników lepkości) oraz w pełnym przypadku lepko-sprężystym, zilustrowano odpowiednio na rysunkach: 2.29 i 2.30. Z uwagi na występowanie tłumienia w układzie, przy częstotliwości równej częstotliwości własnej podkładu „przekładka-podkład-podsypka“ siła w

przekładce, a zarazem dekrement $\bar{\lambda}_I$, przyjmują skończone wartości. Jak widać na rysunku 2.29 i 2.30, dekrement pierwszej postaci ruchu falowego przyjmuje wartość równą zero przy częstotliwości 1422.4 Hz , która odpowiada formie własnej „pinned-pinned“.



Rysunek 2.29: Zależności dyspersyjne w przypadku małego tłumienia.

3.3. Układ pod obciążeniem poruszającą się siłą harmoniczną

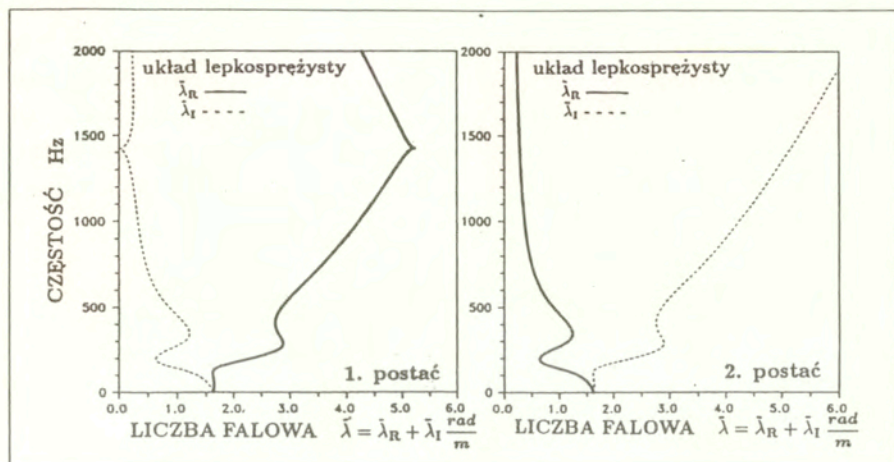
Równanie ruchu belki na lepko-sprężystym podłożu, poddanej działaniu poruszającego się obciążenia o harmonicznie zmiennej wartości, przyjęto w postaci określonej za pomocą zależności (2.86). Rozwiązania tego równania poszukujemy w postaci związków (2.87) z warunkami brzegowymi określonymi za pomocą relacji (2.97), i otrzymujemy

$$(2.107) \quad W(X, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Delta(\bar{\Omega}) \cdot \bar{A}(\xi, \lambda) \cdot e^{i(\lambda n L + \bar{\Omega} \tau)}}{4S^3(\lambda^4 - S^4) f(\lambda, \bar{\Omega})} d\lambda + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(\lambda X + \bar{\Omega} \tau)}}{\lambda^4 - S^4} d\lambda,$$

gdzie człony $\Delta(\bar{\Omega})$, $\bar{A}(\xi, \lambda)$ i $f(\lambda, \bar{\Omega})$ opisane są za pomocą zależności odpowiednio: (2.99), (2.102) i (2.104), które zależą w tym przypadku od „wymuszonej“ częstotliwości

$$(2.108) \quad \bar{\Omega} = -\lambda V + \Omega.$$

Po rozwiązaniu równania (2.107) za pomocą twierdzenia Cauchy'ego i uwzględnieniu pewnej skończonej liczby biegunów funkcji podcałkowej, otrzymujemy rozwiązanie odpowiadające



Rysunek 2.30: Zależności dyspersyjne w przypadku lepkosprężystym.

komórce (n_1, n_2) struktury periodycznej, znajdującej się przed lub za poruszającym się źródłem zaburzeń

$$(2.109) \quad W(X, \tau) = \sum_{M=1}^2 \sum_{k=1}^{K_M} Q_{Mk} \cdot \bar{A}_{Mk}(\xi, \lambda_{Mk}) \cdot e^{i(\lambda_{Mk} \cdot n_1 L + \bar{\Omega}_{Mk} \cdot \tau)},$$

w przypadku

$$X \in \langle n_1 L, n_2 L \rangle, \quad \xi = X - n_1 L, \quad \xi \in \langle 0, L \rangle.$$

Uzyskane rozwiązanie jest superpozycją fal biegnących rozprzestrzeniających się w strukturze periodycznej. Kształt pojedynczej fali, która należy do jednej z dwóch postaci ruchu falowego M , opisany jest za pomocą zależności (2.102). W relacji (2.109) mamy: Q_{Mk} – amplitudę fali, $K_M = K_{M(A)}$ – liczbę fal przed poruszającym się źródłem zaburzeń ($n_1 L \geq V\tau$), $K_M = K_{M(B)}$ – liczbę fal za poruszającym się źródłem zaburzeń ($n_2 L \leq V\tau$), w przypadku postaci M . Liczba falowa λ_{Mk} określona jest za pomocą następującej relacji:

$$(2.110) \quad f(\lambda_{Mk}, \bar{\Omega}_{Mk}) = 0, \quad \bar{\Omega}_{Mk} = -\lambda_{Mk} V + \Omega,$$

gdzie $f = 0$ jest relacją dyspersyjną (2.104).

Ampiltudy fal określone są następująco:

$$(2.111) \quad Q_{Mk} = \left\{ \frac{\text{signum}[Im(\lambda)] \Delta(\bar{\Omega})}{4S^3 (\lambda^4 - S^4) \frac{d(\lambda, \bar{\Omega})}{d\lambda}} \right\}_{|\lambda=\lambda_{Mk}}$$

Rozwiązanie odpowiadające obciążonej komórce ($n_1 L \leq V\tau \leq n_2 L$) składa się z członów zawierających liczby falowe λ , przy których spełnione jest równanie (2.104) oraz członów zawierających λ , przy których spełniona jest relacja dyspersyjna (2.96), w przypadku fal w nieograniczonej belce ciągłej poddanej działaniu poruszającego się źródła zaburzeń. Rozwiązanie odpowiadające obciążonej komórce (n_1, n_2) określone jest za pomocą zależności (2.54) i (2.55), w których wielkości P_j określone są za pomocą relacji (2.95), a funkcje $W_\lambda(\xi, \tau)$ przyjmują następującą postać:

$$(2.112) \quad W_\lambda(\xi, \tau) = \sum_{M=1}^2 \left[\sum_{k=1}^{K_L} Q_{Mk} W_{Mk}(L - \xi) e^{i\lambda_{Mk}(n_1 L + \bar{\Omega}_{Mk}\tau)} + \sum_{k=1}^{K_R} Q_{Mk} W_{Mk}(\xi) e^{i\lambda_{Mk}(n_2 L + \bar{\Omega}_{Mk}\tau)} \right],$$

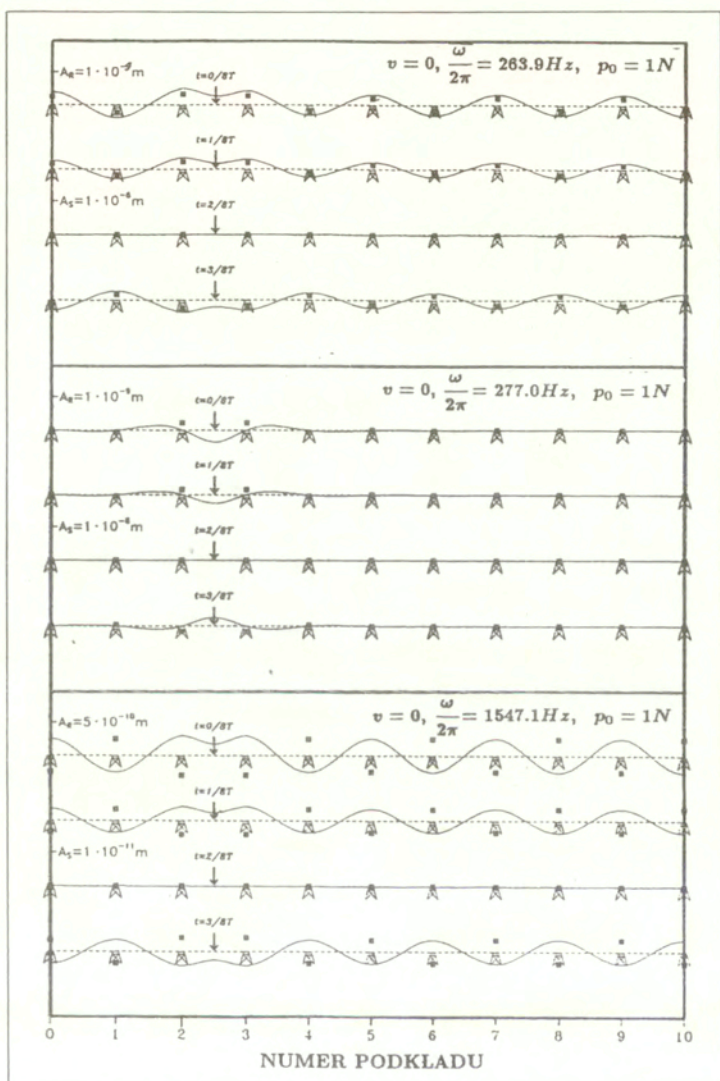
gdzie

$$(2.113) \quad \begin{aligned} W_{Mk}(L - \xi) &= \sin S_{Mk}(L - \xi) \cdot (\cos \lambda_{Mk}L - \cosh S_{Mk}L) + \\ &\quad - \sinh S_{Mk}(L - \xi) \cdot (\cos \lambda_{Mk}L - \cos S_{Mk}L), \\ W_{Mk}(\xi) &= \sin S_{Mk}(\xi) \cdot (\cos \lambda_{Mk}L - \cosh S_{Mk}L) + \\ &\quad - \sinh S_{Mk}(\xi) \cdot (\cos \lambda_{Mk}L - \cos S_{Mk}L), \\ S_{Mk} &= S(\bar{\Omega}_{Mk}). \end{aligned}$$

3.3.1. Przypadki szczególne

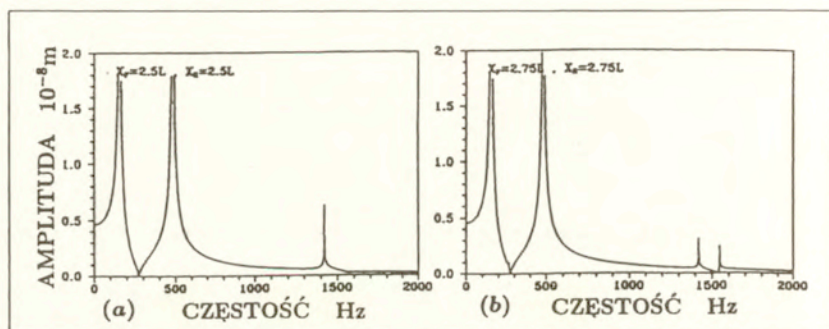
3.3.1.1. Cechy rozwiązania w przypadku $V = 0, \Omega \neq 0$

Z uwagi na fakt, że istnieje rozbieżność pomiędzy częstościami własnymi układu, które zidentyfikowano w niniejszej pracy, a częstościami prezentowanymi w literaturze problemu (np. [148, 62]), rezultaty uzyskane w granicznym przypadku $V = 0, \Omega \neq 0$ zostaną przedyskutowane bardziej szczegółowo. Przemieszczenia układu w wybranych chwilach i przy wybranych częstościach obciążenia w przypadku małego tłumienia, zilustrowano na rysunku 2.31, gdzie A_R i A_S oznaczają amplitudy odpowiednio szyny i podkładu.



Rysunek 2.31: Przemieszczenia układu w wybranych chwilach przy wybranych częstościach obciążenia ω i $v = 0$, w przypadku małego tłumienia, linia ciągła – szyna, ■ – podkład.

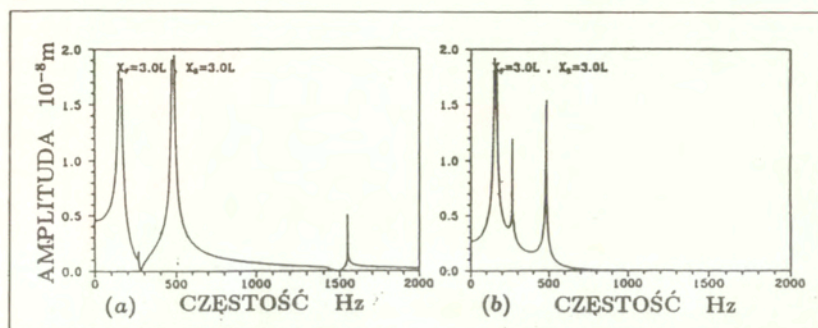
Rysunek 2.31 ilustruje przypadki charakterystycznych częstotliwości układu, dyskutowanych w poprzedniej części pracy: częstotliwości drgań własnych 263.9 Hz i 1547.1 Hz oraz częstotliwość drgań własnych podkładu „przekładka-podkład-podsypka” – 277.0 Hz (tabela 2.8). Przesunięcia szyny i podkładu w punkcie $x = x_R$, w funkcji częstotliwości wymuszenia Ω działającego w punkcie $x = x_F$, przedstawiono na rysunkach: 2.32, 2.33 i 2.34. Jak wynika z rezultatów przedstawionych na rysunku 2.32 i 2.33, maksymalne ugięcie układu występuje przy częstotściach obciążenia, które są równe częstotnościom własnym układu, zidentyfikowanym w niniejszej pracy. Wysokość piku rezonansowego zależy od relacji pomiędzy wielkościami x_R i x_F . W przypadku lepkosprężystym (rysunek 2.34) maksymalne ugięcie układu występuje przy następujących wartościach częstotliwości wymuszającej: 156.2 Hz , 481.4 Hz i 1422.4 Hz , co jest jakościowo zgodne z rezultatami prezentowanymi w pracach [148, 62].



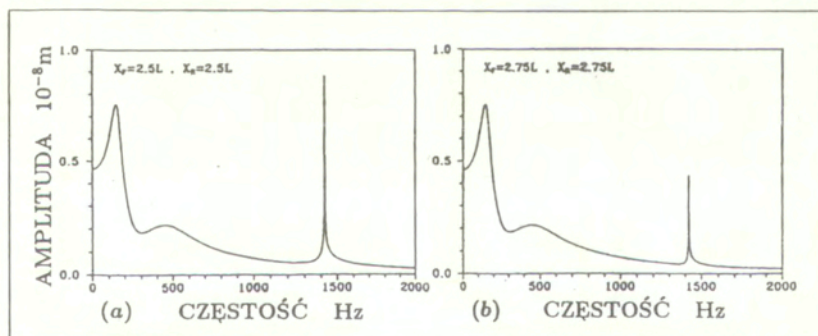
Rysunek 2.32: Ugięcie szyny w punkcie x_R , spowodowane siłą działającą w punkcie x_F , w przypadku małego tłumienia, (a) – $x_R = x_F = 2.5 l$, (b) – $x_R = x_F = 2.75 l$.

3.3.1.2. Cechy rozwiązania w przypadku $V \neq 0, \Omega = 0$

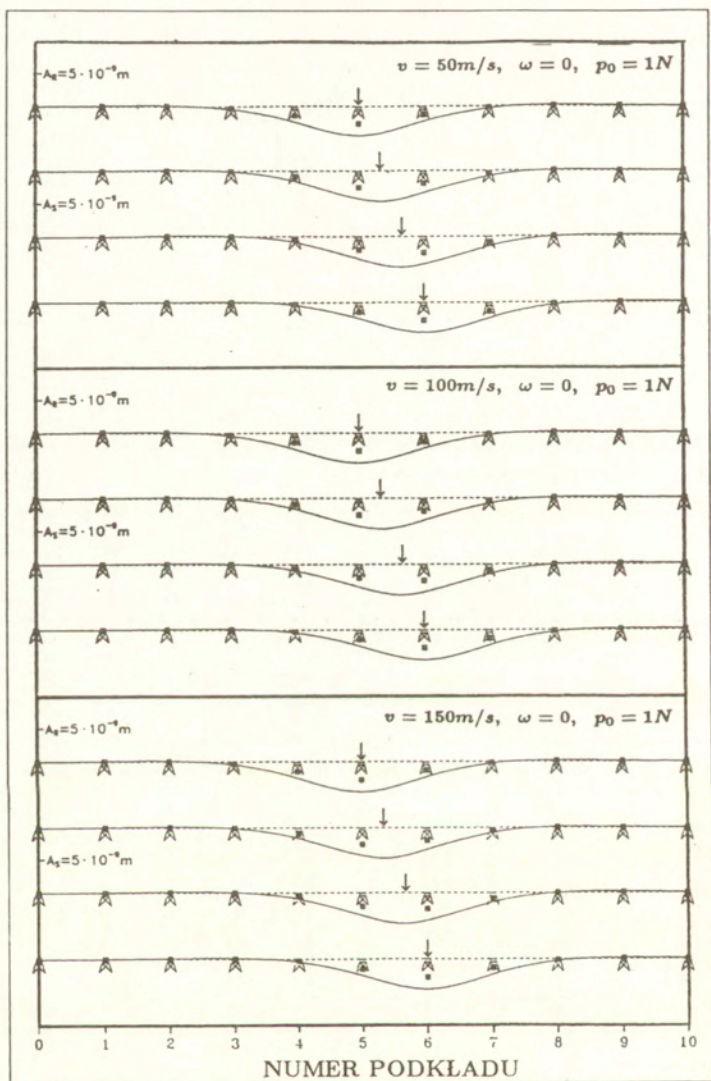
Obliczenia numeryczne w granicznym przypadku obciążenia $V \neq 0, \Omega = 0$ przeprowadzono przyjmując następujące wartości prędkości: $v = 50, 75, 100 \text{ m/s}$. Odpowiedź dynamiczną układu poddanego działaniu obciążenia poruszającego się z tymi prędkościami zilustrowano na rysunku 2.35.



Rysunek 2.33: Ugięcie szyny (a) i podkładu (b) w punkcie $x = x_R$ spowodowane siłą działającą w punkcie $x_F = 3\text{ l}$, w przypadku małego tłumienia.

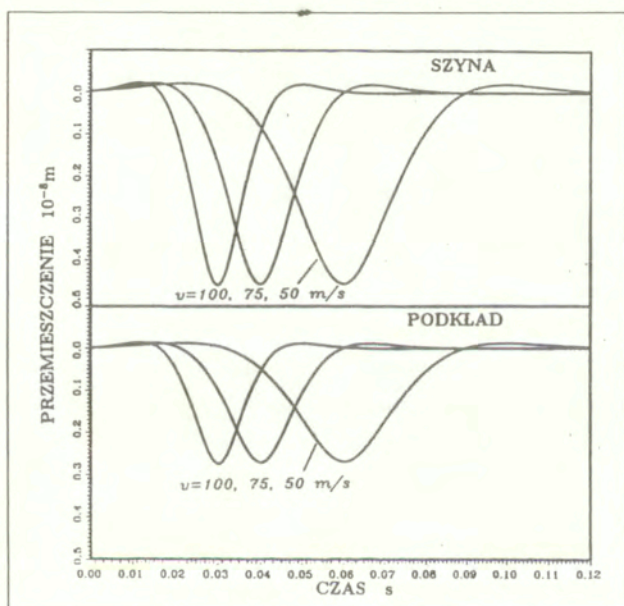


Rysunek 2.34: Ugięcie szyny w punkcie x_R , spowodowane siłą działającą w punkcie x_F , w przypadku lepkościowym, (a) - $x_R = x_F = 2.5\text{ l}$, (b) - $x_R = x_F = 2.75\text{ l}$.



Rysunek 2.35: Przemieszczenia układu w wybranych chwilach przy $v = 50, 75, 100 \text{ m/s}$ i $\omega = 0$. linia ciągła – szyna, ■ – podkład.

Jak wynika z rysunku 2.35 przy $v = 50 \text{ m/s}$, przemieszczenie układu jest zanikającą falą o długości $\approx 3.8 \text{ m}$, która rozprzestrzenia się z prędkością obciążenia, co odpowiada częstotliwości $\approx 26 \text{ Hz}$ w ustalonym punkcie układu. Ugięcie szyny i podkładu w punkcie $x = 5 \text{ l}$ wywołane siłą, której ruch obserwujemy, gdy znajduje się ona w punkcie $x = 0$, a następnie przemieszcza się w czasie $t = 0.12 \text{ s}$, przedstawiono na rysunku 2.36. Rysunek 2.37 ilustruje zmianę przemieszczenia szyny w punkcie przyłożenia poruszającego się źródła zaburzeń, w zależności od położenia w komórce. Jak wynika z porównania rezultatów przedstawionych na

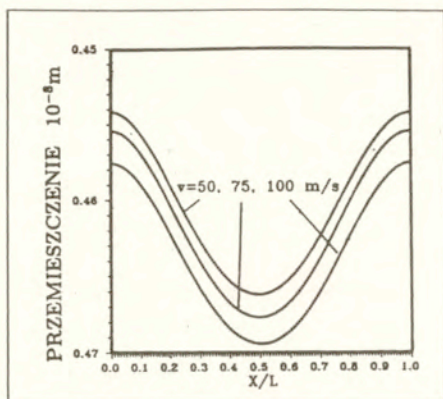


Rysunek 2.36: Ugięcie szyny i podkładu w punkcie $x = 5 \text{ l}$ przy wybranych wartościach prędkości obciążenia i $\omega = 0$

rysunkach: 2.35, 2.36 i 2.37, odpowiedzi dynamiczne układu przy różnych wartościach prędkości obciążenia nie różnią się jakościowo. Występują tylko różnice ilościowe.

3.3.2. Krytyczne parametry obciążenia

Jak wynika z rozważań przeprowadzonych w niniejszej pracy, przy pewnych wartościach prędkości i częstotliwości obciążenia odpowiedź dynamiczna układu lepkosprężystego przyjmuje

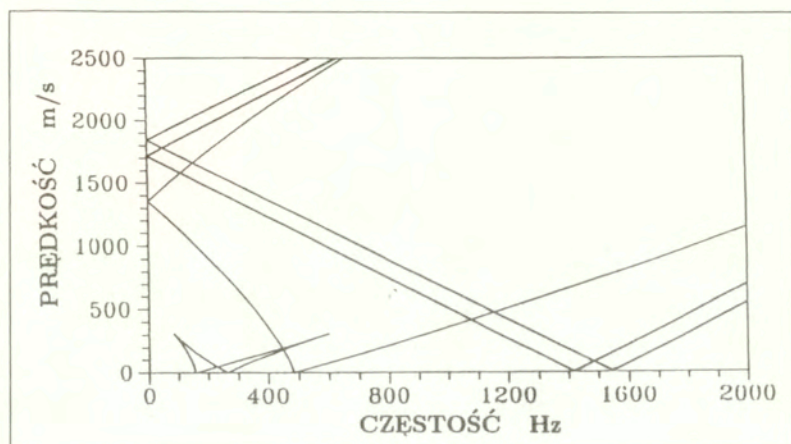


Rysunek 2.37: Ugięcie szyny w punkcie przyłożenia poruszającego się obciążenia przy wybranych wartościach prędkości obciążenia i $\omega = 0$

maksymalne wartości, a przemieszczenia układu idealnie sprężystego narastają nieograniczenie w czasie. Podobnie jak w przypadku belki ciągłej spoczywającej na okresowo rozłożonych sztywnych podporach, czy pręseł sprężyste podpartych np. toru kolei unoszonej magnetycznie, zjawisko to występuje, gdy obciążenie porusza się z prędkością fali, którą generuje. W przypadku idealnie sprężystym energia dostarczana do układu nie może być wypromieniowana, co powoduje nieograniczony wzrost amplitud fal. Jak wynika z równania (2.110), liczby falowe wzbudzanych fal λ wyznaczone są przez punkty przecięcia relacji dyspersyjnej $f(\lambda, \bar{\Omega}) = 0$ z liniami prostymi opisanymi zależnością $\bar{\Omega} = -\lambda V + \Omega$, na płaszczyźnie $(\bar{\Omega}_0, \lambda)$. Krytyczne parametry obciążenia określono za pomocą metody graficznej, omówionej szczegółowo w poprzednim punkcie pracy. Prędkość grupowa fali odpowiadającej pierwszej postaci ruchu falowego, o częstotliwości $\bar{\Omega}$ i liczbie falowej λ , jest określona kątem nachylenia stycznej do krzywej dyspersyjnej w paśmie przenoszenia w punkcie $(\bar{\Omega}, \lambda)$. Oznacza to, że w celu określenia krytycznych parametrów obciążenia należy wyznaczyć te wartości V i Ω , przy których prosta $\bar{\Omega} = -\lambda V + \Omega$ jest styczna do krzywej dyspersyjnej w paśmie przenoszenia pierwszej postaci ruchu falowego. Należy zauważyć, że przy krytycznych w przypadku układu sprężystego parametrach obciążenia, przemieszczenia układu lepkosprężystego osiągają maksymalne wartości.

Konfigurację krzywych krytycznych na płaszczyźnie (V, Ω) , odpowiadające dwóm pierwszym pasmom przenoszenia, dwóm pierwszym strefom Brillouina i pierwszej postaci ruchu falowego, przedstawiono na rysunku 2.38. Jak wynika z rysunku 2.39, liczba krzywych kry-

tycznych rośnie wraz ze wzrostem liczby rozpatrywanych stref Brillouina i pasm przenoszenia pierwszej postaci ruchu falowego.

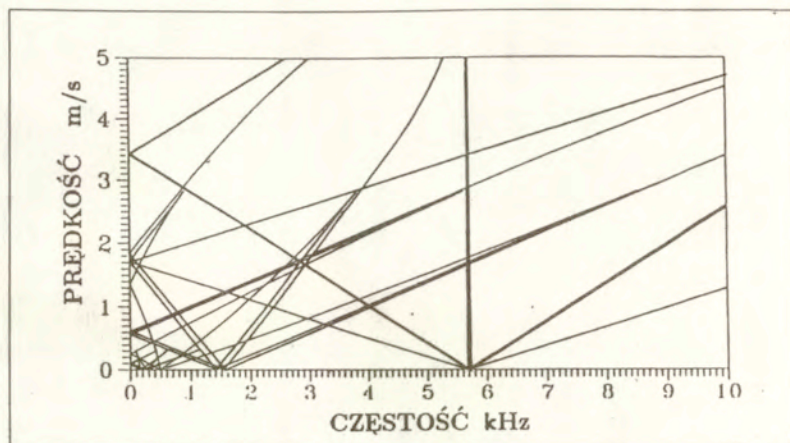


Rysunek 2.38: Krytyczne parametry obciążenia, dwa pasma przenoszenia, dwie strefy Brillouina.

4. Wnioski do rozdziału drugiego

Rozwiązań zagadnienia propagacji fal bieżących w nieobciążonych belkach na okresowo rozłożonych sztywnych podporach poszukiwano w formie podanej w pracy [103]. W przypadku toru kolei unoszonej magnetycznie i konwencjonalnej, opisanych różniczkowymi równaniami ruchu z okresowymi warunkami brzegowymi, rozwiązań poszukiwano w formie wynikającej z twierdzenia Floqueta. To drugie podejście, umożliwia zredukowanie problemu do rozwiązania równania różniczkowego o postaci niezależnej od wyboru komórki struktury. Jest ono naturalnym uogólnieniem „metody Floqueta” stosowanej w fizyce ciała stałego w przypadku modeli dyskretnych, [26], na układy ciągłe badane w mechanice. W przypadku układów ciągłych liczba występujących naprzemian pasm przenoszenia i zanikania jest nieograniczona, z uwagi na nieograniczoną liczbę stopni swobody w komórce.

Badanie struktur swobodnych (nieobciążonych) jest niezbędne do zidentyfikowania podstawowych własności rozważanych układów. Zarówno w przypadku periodycznych belek na sztywnych podporach, jak i toru kolei unoszonej magnetycznie, sąsiadujące komórki oddziałują



Rysunek 2.39: Krytyczne parametry obciążenia, trzy pasma przenoszenia, cztery strefy Brillouina.

między sobą za pomocą jednego „stopnia swobody“ (odpowiednio: kąta obrotu przekroju poprzecznego i przemieszczenia pila). Takiej budowie układów towarzyszy występowanie jednej postaci ruchu falowego. Z uwagi na występowanie w rozważanym modelu toru kolei konwencjonalnej „dwóch stopni swobody“, za pomocą których sąsiadujące komórki struktury periodycznej oddziałują między sobą (ugięcia i obroty przekroju poprzecznego szyny), otrzymujemy dwie postaci ruchu falowego. Jedna z postaci jest postacią zanikającą, a druga, w zależności od częstoty, postacią zanikającą lub niezanikającą. Za pomocą fal odpowiadającym tej drugiej postaci możliwe jest przekazywanie energii w całym nieograniczonym układzie.

Analiza konfiguracji pasm przenoszenia i zanikania na płaszczyźnie „częstota–liczba falowa“ oraz analiza zależności pomiędzy prędkością fazową i grupową fal bieżących dostarczają istotnych informacji o podstawowych własnościach rozważanej struktury periodycznej. Częstoty ograniczające pasma przenoszenia odpowiadają falom stojącym w układzie (postaciom drgań własnych). W przypadku toru kolei konwencjonalnej zidentyfikowano dwie nie opisane w literaturze przed ogłoszeniem pracy [74] częstoty drgań własnych. Wyniki uzyskane przez autora rozprawy były dyskutowane przez badaczy zajmujących się dynamiką toru kolejowego na spotkaniu naukowym organizowanym przez International Association of Vehicle Systems Dynamics w Herbertowie [74]. Pierwsza częstota z „nowych“ odpowiada postaci drgań, przy której podkład i oddziałująca z nim szyna drgają w fazie, a sąsiadujące podkłady w przeciwfazie. Druga częstota odpowiada postaci drgań, przy której zarówno podkład, szyna, jak i

sąsiadujące podkłady drgają w przeciwfazie. W rzeczywistym układzie lepko-sprężystym postaci te są silniej tłumione aniżeli pozostałe.

W zależności od położenia wewnątrz komórki wymuszającej stacjonarnej siły harmonicznej, określona postać może być wzbudzana z różną amplitudą, a w granicznych przypadkach może ona w ogóle nie być wzbudzana. Jest to ważna wskazówka, która powinna być wykorzystywana przez badaczy zajmujących się eksperymentalną identyfikacją parametrów ciągłych układów periodycznych.

W przypadku układów poddanych działaniu poruszającego się źródła zaburzeń, zaproponowano metodę, która pozwoliła na uzyskanie dokładnego rozwiązania analitycznego opisującego pole przemieszczeń w dowolnej komórce struktury periodycznej. W tym przypadku postać poszukiwanych rozwiązań jest podobna do przypadku propagacji fal swobodnych. Ruchowi siły harmonicznej wzdłuż rozważanej struktury periodycznej towarzyszy rozprzestrzenianie się nieograniczonej liczby fal bieżących, przy czym największe i decydujące znaczenie mają fale odpowiadające pierwszemu i drugiemu pasmu przenoszenia.

W rozważaniach przeprowadzonych w niniejszej pracy założono, że nie ma sprzężenia pomiędzy drganiami w obu płaszczyznach ruchu toru kolei unoszonej magnetycznie. W rzeczywistości takie sprzężenie istnieje, co będzie przedmiotem dalszych badań autora. Jak wynika z przedstawionych rezultatów, w przypadku dynamiki toru kolei unoszonej magnetycznie, rozpatrując drgania w płaszczyźnie (x, y) , można pominąć oddziaływanie sąsiadujących ze sobą pręseł. W przypadku dynamiki w płaszczyźnie (x, z) należy uwzględnić występowanie okresowości budowy tego układu.

Ważną własnością proponowanej metody rozwiązania problemu jest możliwość określenia krytycznych parametrów obciążenia bez konieczności uzyskania rozwiązania problemu drgań wymuszonych. W przypadku rozważanych struktur periodycznych istnieje teoretycznie nieskończona liczba krzywych krytycznych na płaszczyźnie „prędkość – częstość obciążenia“, które biorą swój początek na osi częstości przy wartościach równych częstościom drgań własnych układu, a na osi prędkości przy wartościach równych minimalnym prędkościom propagacji fal bieżących w układzie. W rzeczywistym układzie lepko-sprężystym współczynniki dynamiczne przyjmują maksymalne wartości przy krytycznych wartościach prędkości i częstości określonych w przypadku układu idealnie sprężystego. Niektóre ze stanów własnych układu są silnie tłumione, jednak w pewnych przypadkach przeprowadzona w pracy analiza stanów krytycznych może mieć duże znaczenie, np. w przypadku parametrów obciążenia wzbudzających w torze kolejowym postać „pinned-pinned“, która ze swej natury (węzły drgań nad podkładami) jest bardzo słabo tłumiona. Z uwagi na przyjęty model szyny (belka Bernoulli'ego - Eulera),

częstość odpowiadająca tej postaci różni się od mierzonych doświadczalnie [147].

Należy nadmienić, że podany w niniejszej pracy graficzny sposób określania krzywych krytycznych stanowi uogólnienie, na układy ciągłe i obciążenia o harmonicznie zmiennej wartości, metody przedstawionej przez Rogułę [149], stosowanej w przypadku dyskretnych struktur periodycznych poddanych działaniu poruszającego się źródła zaburzeń o stałej wartości.

W niniejszej pracy przyjęto do rozważań wędrujące obciążenia bezinercyjne. W przypadku uwzględnienia masy poruszających się obiektów i założenia sztywnego ich oddziaływania z periodycznym podkładem ciągłym, należy poszukiwać rozwiązań w innej postaci. W przypadku założenia lepkośćprężystego oddziaływania obciążeń inercyjnych ze strukturami periodycznymi, możliwe jest wykorzystanie przedstawionych w pracy rozwiązań do uzyskania odpowiedzi dynamicznych podukładów. Ponadto uzyskane rozwiązania umożliwiają badanie stateczności dynamicznego oddziaływania pojazdów, zarówno z torem kolei unoszonej magnetycznie, jak i z torem kolei konwencjonalnej.

Rozdział 3

Cykliczne układy periodyczne

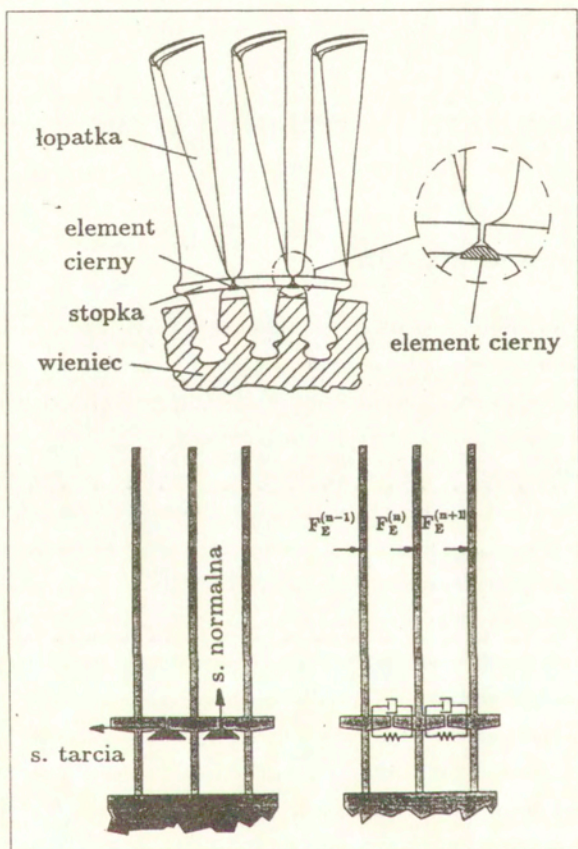
1. Modelowanie układu

Przedmiotem rozważań przedstawionych w niniejszej części pracy jest układ modelujący łopatki turbiny, których drgania tłumione są za pomocą elementów ciernych. Jest to nowoczesne rozwiązanie techniczne aktualnie wprowadzane do technologii turbin, a zarazem będące przedmiotem intensywnych badań licznych ośrodków naukowych. Zakładamy, że rozłożone w równych odstępach łopatki są sztywno zamocowane w wieniec. Elementy cierne, umiejscowione pomiędzy łopatkami, na skutek działania siły odśrodkowej powstającej w czasie ruchu obrotowego turbiny, wywierają nacisk na stopki łopatek. Siły docisku są źródłem powstawania zależnej od prędkości przemieszczenia względnego siły tarcia, która przyczynia się do tłumienia drgań układu. Rozważany układ i jego model mechaniczny przedstawiono na rysunku 3.1.

Jednym z najprostszych modeli ciągłych łopatki uwzględniającym jedynie jej drgania gięte jest belka ciągła o stałej sztywności, oddziaływanie pomiędzy sąsiadującymi łopatkami modelować można za pomocą elementu lepkosprężystego. W dalszej części pracy używać będziemy zamiennie następujących nazw: łopatka – podukład ciągły, element lepkosprężysty (element cierny) – podukład dyskretny, wieniec łopatek – cykliczny układ periodyczny złożony z rozłożonych okresowo podukładów ciągłych oddziałujących między sobą za pomocą podukładów dyskretnych.

1.1. Modelowanie podukładu ciągłego

Przyjęty do rozważań podukład ciągły, modelowany za pomocą belki Bernoulli'ego–Eulera z dodatkową masą skupioną reprezentującą stopkę łopatki, przedstawiono na rysunku 3.2.

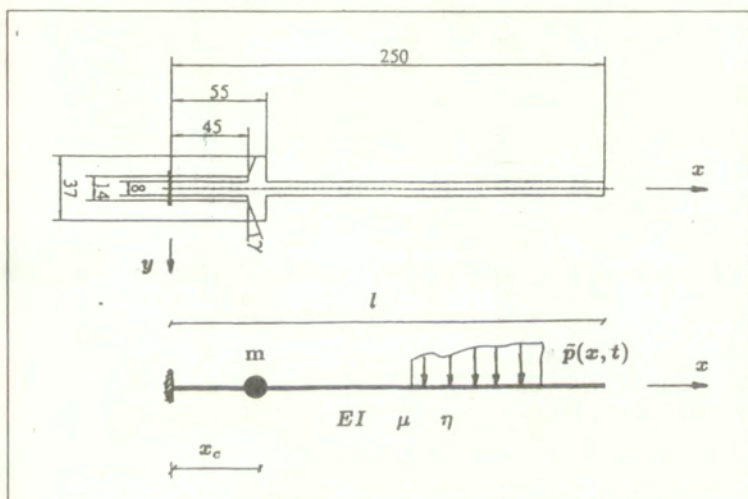


Rysunek 3.1: Rozważany układ i jego model.

Równanie ruchu belki przyjęto w następującej postaci:

$$(3.1) \quad EI \frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial x^4} + \mu \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial t^2} + \eta \frac{\partial \bar{w}}{\partial t} = \bar{p}(x, t) - m \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial t^2} \delta(x - x_c),$$

gdzie $\bar{w} = \bar{w}(x, t)$ jest przemieszczeniem belki w funkcji zmiennej przestrzennej x i czasu t . W równaniu (3.1) EI , μ i η oznaczają odpowiednio sztywność belki, jej masę na jednostkę długości i współczynnik wewnętrznego tłumienia. Prawa strona równania (3.1) opisuje obciążenie zewnętrzne $\bar{p}(x, t)$ i siłę bezwładności masy skupionej znajdującej się w punkcie $x = x_c$, gdzie $\delta(x - x_c)$ oznacza funkcję Diraca. Poszukujemy stacjonarnej odpowiedzi



Rysunek 3.2: Podukład ciągły i jego model.

dynamicznej układu poddanego działaniu obciążenia o harmonicznie zmiennej wartości

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \bar{p}(x, t) &= p(x) e^{i\omega t}, \\ \bar{w}(x, t) &= w(x) e^{i\omega t}. \end{aligned}$$

Po podstawieniu zależności (3.2) do równania (3.1) otrzymujemy

$$(3.3) \quad \frac{d^4 w}{dx^4} - s^4 w = \bar{p}(x),$$

gdzie

$$(3.4) \quad s^4 = \frac{\mu\omega^2 - i\omega\eta}{EI}, \quad \bar{p} = \frac{p(x) + m\omega^2 w}{EI} \delta(x - x_c)m.$$

$U_1(sx)$	$\frac{1}{2}[\cosh(sx) - \cos(sx)]$
$U_2(sx)$	$\frac{1}{2}[\sinh(sx) - \sin(sx)]$
$U_3(sx)$	$\frac{1}{2}[\cosh(sx) + \cos(sx)]$
$U_4(sx)$	$\frac{1}{2}[\sinh(sx) + \sin(sx)]$

Tabela 3.1: Definicja funkcji U_j .

Równanie (3.3) rozwiążemy w sposób klasyczny, za pomocą powszechnie znanej w literaturze transformacji Laplace'a określonej w następujący sposób:

$$(3.5) \quad \begin{aligned} \mathcal{L}[w(x)] &= \int_0^{\infty} w(x)e^{-sx} dx = w^*(\bar{s}), \\ \mathcal{L}^{-1}[w^*(\bar{s})] &= \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} w^*(\bar{s})e^{\bar{s}x} d\bar{s} = w(x). \end{aligned}$$

Z uwagi na jednorodne warunki brzegowe na ugięciu i kąt obrotu przekroju poprzecznego belki w punkcie $x = 0$

$$(3.6) \quad w(0) = 0, \quad w'(0) = 0,$$

rozwiązanie równania (3.3) przyjmuje następującą postać:

$$(3.7) \quad w(x) = \frac{1}{s^2} w''(0) U_1(sx) + \frac{1}{s^3} w'''(0) U_2(sx) + \frac{1}{s^3} \int_0^x \bar{p}(u) U_1[s(x-u)] du,$$

$$w^j = \frac{d^j w}{dx^j}, \quad j = 1, 2, 3,$$

a funkcje $U_j = U_j(sx)$, $j = 1, 2, 3, 4$ podano w tabeli 3.1.

Funkcję obciążenia $p(x)$ reprezentującą siłę wymuszającą F_e w punkcie $x = x_e$ i siłę oddziaływania pomiędzy sąsiadującymi podukładami ciągłymi F_c w punkcie $x = x_c$, można zapisać w następującej postaci:

$$(3.8) \quad p(x) = F_e \delta(x - x_e) + F_c \delta(x - x_c).$$

Rozwiązanie (3.7) przyjmuje następującą postać:

$$(3.9) \quad w(x) = \frac{1}{s^2} w''(0) U_1(sx) + \frac{1}{s^3} w'''(0) U_2(sx) + \\ + \frac{1}{s^3 EI} \{ F_e \cdot U_2[s(x - x_e)] \cdot H_e + [F_c + m\omega^2 w(x_c)] \cdot U_2[s(x - x_c)] \cdot H_c \},$$

gdzie

$$(3.10) \quad H_e = H(x - x_e), \quad H_c = H(x - x_c)$$

są funkcjami Heaviside'a.

Nieznanne stałe $w''(0)$, $w'''(0)$ i $w(x_c)$ wyznaczmy korzystając z jednorodnych warunków brzegowych na moment zginający i siłę poprzeczną w punkcie $x = l$ oraz warunku zgodności przemieszczeń w punkcie $x = x_c$

$$(3.11) \quad w''(x = l) = 0, \quad w'''(x = l) = 0, \quad w(x_c) = w(x = x_c).$$

Po podstawieniu zależności (3.9) do warunków (3.11) otrzymujemy

$$(3.12) \quad \underline{M}_1 \cdot \{ w''(0), w'''(0), w(x_c) \} = -(F_e \underline{\tilde{F}}_e + F_c \underline{\tilde{F}}_c),$$

gdzie

$$(3.13) \quad \underline{M}_1 = \begin{bmatrix} U_3(sl), & \frac{1}{s} U_4(sl), & \frac{m\omega^2}{sEI} U_4[s(l - x_c)] \\ sU_2(sl), & U_3(sl), & \frac{m\omega^2}{EI} U_3[s(l - x_c)] \\ \frac{1}{s^2} U_1(sx_c), & \frac{1}{s^3} U_2(sx_c), & -1 \end{bmatrix},$$

$$(3.14) \quad \underline{\tilde{F}}_e = \frac{1}{EI} \left\{ \frac{1}{s} U_4[s(l - x_e)], U_3[s(l - x_e)], 0 \right\}$$

$$(3.15) \quad \underline{\tilde{F}}_c = \frac{1}{EI} \left\{ \frac{1}{s} U_4[s(l - x_c)], U_3[s(l - x_c)], 0 \right\}$$

Częstości drgań własnych układu uzyskamy po przyjęciu $\eta = 0$, $F_e = 0$, $F_c = 0$ w równaniu (3.12) i przyrównaniu do zera wyznacznika macierzy M_1

$$(3.16) \quad \det(\underline{M}_1) = 0 \Rightarrow f_1(sl) + \frac{m}{\mu} s f_2(sx_c) = 0,$$

gdzie

$$(3.17) \quad f_1(sl) = -U_3(sl)U_3(sl) + U_4(sl)U_2(sl),$$

$$(3.18) \quad f_2(sx_c) = U_4[s(l - x_c)] \cdot [U_2(sl)U_2(sx_c) - U_3(sl)U_1(sx_c)] + \\ - U_3[s(l - x_c)] \cdot [U_3(sl)U_2(sx_c) - U_3(sl)U_1(sx_c)].$$

$EI = 566Nm^2$	$\mu = 3.78 \frac{kg}{m}$	$\eta = 14 \frac{Ns}{m}$	$m = 0.37kg$
$l = 0.25m$	$x_c = 0.048m$	$x_e = 0.168m$	$F_e = 2N$

Tabela 3.2: Parametry podukładu ciągłego.

Numer postaci	$m = 0$	$m = 0.37kg$
1	109.46	109.26
2	686.0	643.5
3	1920.8	1534.6
4	3764.0	3059.1

Tabela 3.3: Porównanie częstości drgań własnych układu (Hz).

Postaci drgań własnych określone za pomocą równań: (3.12), (3.9), zapisać można następująco:

$$(3.19) \quad w(x) = g_1(sx_c)U_1(sx) + g_2(sx_c)U_2(sx) + f_1(sl)U_2[s(x - x_c)] \cdot H_c,$$

gdzie

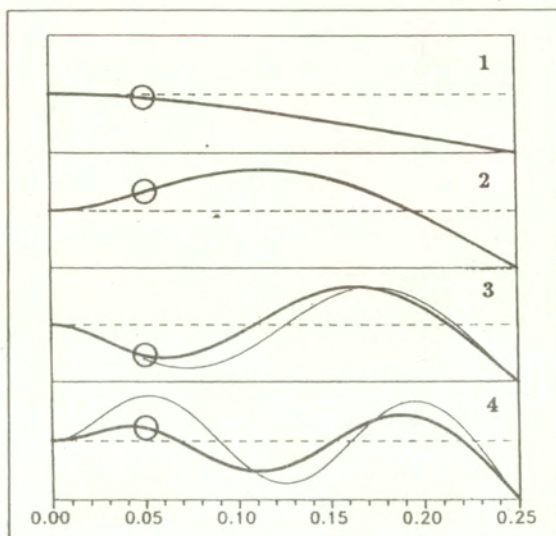
$$(3.20) \quad \begin{aligned} g_1(sx_c) &= U_4[s(l - x_c)] \cdot U_3(sl) - U_3[s(l - x_c)] \cdot U_4(sl) \\ g_2(sx_c) &= U_3[s(l - x_c)] \cdot U_3(sl) - U_4[s(l - x_c)] \cdot U_2(sl). \end{aligned}$$

Należy zauważyć, że częstości drgań własnych i odpowiadające im postaci drgań belki utwierdzonej bez skupionej masy, zapisane za pomocą notacji stosowanej w niniejszej pracy można określić następująco:

$$(3.21) \quad f_1(sl) = 0 \Rightarrow 1 + \cos(sl) \cosh(sl),$$

$$(3.22) \quad w(x) = U_4(sl)U_1(sx) - U_3(sl)U_2(sx).$$

Wartości liczbowe parametrów układu zastosowane w przykładach numerycznych przedstawiono w tabeli 3.2, przy czym przyjęta wartość tłumienia wewnętrznego η odpowiada logarytmicznemu dekrementowi pierwszej postaci drgań własnych równemu $\delta_1 = 1.7\%$. Porównanie częstości drgań własnych rozważanego układu i układu bez masy skupionej oraz odpowiadających im postaci ruchu przedstawiono odpowiednio: w tabeli 3.3 i na rysunku 3.3.



Rysunek 3.3: Postaci drgań własnych podukładu ciągłego.

1.2. Modelowanie podukładu dyskretnego

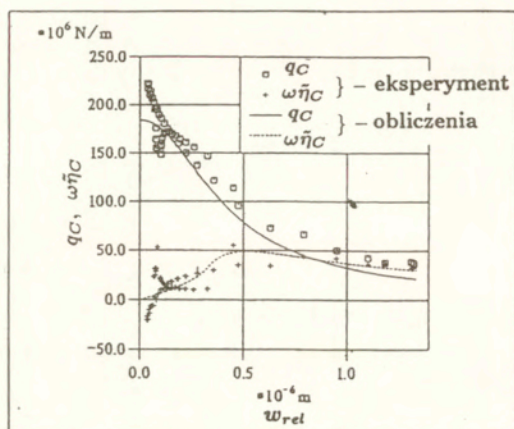
Modelowanie podukładu dyskretnego opierać będziemy na wynikach badań przedstawionych w pracy [10], gdzie rozpatrywano zastosowanie modelu tarcia Cattaneo-Mindlina do opisu oddziaływania pomiędzy łopatkami turbiny. Wynikające z tego modelu silnie nieliniowe oddziaływanie podukładów ciągłych linearyzowano za pomocą metody bilansu harmonicznych. W rezultacie uzyskano, zależną od przemieszczenia względnego między sąsiadującymi podukładami ciągłymi, charakterystykę elementu lepkosprężystego modelującego podukład dyskretny

$$\Delta(w_{rel}) = q_{c(n)}(w_{rel}) + i\omega\eta_{c(n)}(w_{rel}),$$

gdzie $q_{c(n)}(w_{rel})$ i $\eta_{c(n)}(w_{rel})$ są współczynnikami odpowiednio: sprężystości i lepkości, w_{rel} jest przemieszczeniem względnym, a ω jest częstotliwością drgań.

Charakter przebiegu powyższej zależności zilustrowano na rysunku (3.4), w przypadku siły normalnej wywieranej przez wirujący element cierny równej 200 N.

W niniejszej pracy założono stałą, niezależną od amplitudy przemieszczenia względnego i częstotliwości charakterystykę kontaktu. Wartości liczbowe stałych: q_c i $\eta_c = \omega\bar{\eta}_c$, odpowiadające $w_{rel} = 2.8 \cdot 10^{-7} m$ w układzie nieliniowym, podano w tabeli 3.4.



Rysunek 3.4: Nieliniowa charakterystyka podukładu dyskretnego uzyskana w pracy [10].

$q_c = 1.3 \cdot 10^6 \frac{N}{m}$	$\eta_c = 2.29 \cdot 10^7 \frac{N}{m}$	$w_{rel} = 2.8 \cdot 10^{-7} m$
------------------------------------	--	---------------------------------

Tabela 3.4: Parametry podukładu dyskretnego.

1.3. Konfiguracja układu

Rozważany układ cykliczny złożony z N oddziałujących wzajemnie podukładów ciągłych, o kącie $\phi_0 = \frac{2\pi}{N}$ pomiędzy sąsiadami, przedstawiono na rysunku 3.5. Dynamikę każdego z podukładów badamy w lokalnym układzie odniesienia (x_n, y_n) , a dynamikę całego układu w biegunowym (ϕ, r) lub globalnym (\bar{x}, \bar{y}) układzie odniesienia. Relację pomiędzy współrzędnymi w stanie nieodkształconym w układzie globalnym i biegunowym można zapisać w następującej postaci:

$$(3.23) \quad \bar{x}_n = r \sin(\phi_n - \alpha) + r_2, \quad \bar{y}_n = -r \cos(\phi_n - \alpha) + r_2,$$

gdzie $r \in \langle r_1, r_2 \rangle$, $\phi_n = \phi_0(n-1)$, $N = 1, 2, \dots, N$, $\alpha = \phi_0/2$.

W stanie odkształconym otrzymujemy

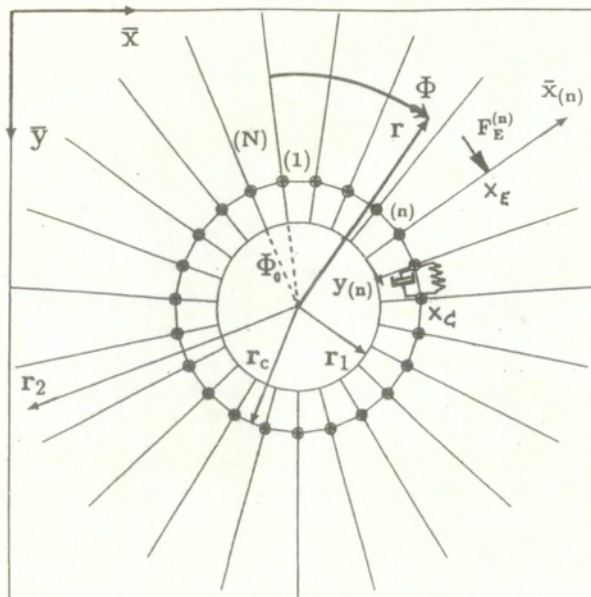
$$(3.24) \quad \bar{x} = r \sin(\phi_n + d\phi_n - \alpha) + r_2, \quad \bar{y} = -r \cos(\phi_n + d\phi_n - \alpha) + r_2,$$

$$d\phi_n = \arctan \frac{w(x_n, r)}{r}.$$

$N = 23$	$r_c = 0.148m$	$r_1 = 0.1m$	$r_2 = 0.35m$
----------	----------------	--------------	---------------

Tabela 3.5: Parametry opisujące konfigurację układu.

W tabeli 3.5 podano wartości liczbowe parametrów opisujących konfigurację, przy której przeprowadzono obliczenia numeryczne.



Rysunek 3.5: Konfiguracja układu.

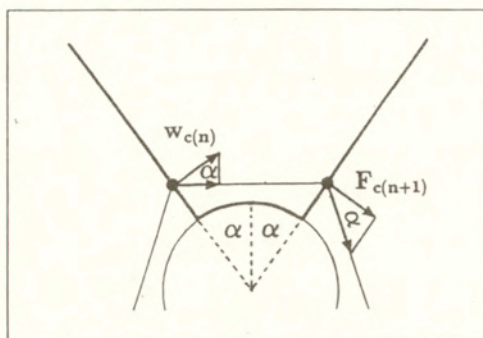
2. Drgania swobodne

2.1. Idealna struktura periodyczna

Z uwagi na geometrię układu (rysunek 3.6) odkształcenie podukładu dyskretnego określone jest następująco:

$$(3.25) \quad w_{rel(n)} = (w_{n+1} - w_n) \cos \alpha,$$

gdzie $w_n = w(x_n = x_c)$ jest przemieszczeniem n -tego podukładu ciągłego w punkcie kontaktu z podukładem dyskretnym.



Rysunek 3.6: Geometria kontaktu.

W przypadku rozpatrywanego liniowego oddziaływania, zespoloną sztywność elementu lepko-sprężystego można zapisać w następującej postaci zespolonej:

$$(3.26) \quad \Delta_n = q_{c(n)} + i\eta_{c(n)},$$

gdzie $q_{c(n)}$ jest współczynnikiem sprężystości, a $\eta_{c(n)}$ współczynnikiem lepkości n -tego elementu kontaktowego. Siła w podukładzie dyskretnym określona jest w następujący sposób:

$$(3.27) \quad F_{c(n)} = \Delta_n(w_{n+1} - w_n) \cos^2 \alpha + \Delta_{n-1}(w_{n-1} - w_n) \cos^2 \alpha.$$

W przypadku idealnej struktury periodycznej i układu bez tłumienia otrzymujemy

$$(3.28) \quad F_{c(n)} = q_c(w_{n+1} - 2w_n + w_{n-1}) \cos^2 \alpha.$$

2.1.1. Układ nieskończony

Przed przystąpieniem do analizy układu o skończonej liczbie elementów rozważymy nieskończony układ periodyczny zakładając $\phi \in (-\infty, \infty)$. Poszukujemy rozwiązań o następującej postaci:

$$(3.29) \quad w_n(x_c) = w_1(x_c)e^{i\lambda(n-1)\phi_0}, \quad w_n''(0) = w_1''(0)e^{i\lambda(n-1)\phi_0}, \quad w_n'''(0) = w_1'''(0)e^{i\lambda(n-1)\phi_0}.$$

Siła w podukładzie dyskretnym przyjmuje w tym przypadku następującą postać:

$$(3.30) \quad F_{c(n)} = 2q_c w_1 (\cos \lambda \phi_0 - 1) \cos^2 \alpha e^{i\lambda(n-1)\phi_0}.$$

Podstawiając zależności (3.29), (3.30) do równania 3.12 przy $F_e = 0$ otrzymujemy

$$(3.31) \quad \underline{M}_1^c \cdot \{w_1''(0), w_1'''(0), w_1(x_c)\} \cdot e^{i\lambda(n-1)\phi_0} = \underline{0},$$

gdzie

$$(3.32) \quad \underline{M}_1^c = \begin{bmatrix} U_3(sl), & \frac{1}{s}U_4(sl), & \frac{2(\cos \lambda \phi_0 - 1)q_c \cos^2 \alpha + m\omega^2}{sEI}U_4[s(l - x_c)] \\ sU_2(sl), & U_3(sl), & \frac{2(\cos \lambda \phi_0 - 1)q_c \cos^2 \alpha + m\omega^2}{EI}U_3[s(l - x_c)] \\ \frac{1}{s^2}U_1(sx_c), & \frac{1}{s}U_2(sx_c), & -1 \end{bmatrix}.$$

Zależność pomiędzy liczbą falową λ a częstotścią ω przyjmuje następującą postać:

$$(3.33) \quad |\underline{M}_1^c| = 0 \Rightarrow f_1(sl) + \left[\frac{2(\cos \lambda \phi_0 - 1)q_c \cos^2 \alpha}{\mu\omega^2} + \frac{m}{\mu} \right] s f_2(sx_c) = 0,$$

gdzie funkcje f_1 i f_2 określone są za pomocą relacji (3.17) i (3.18). Zależność dyspersyjną (3.33) zapiszemy w następującej postaci:

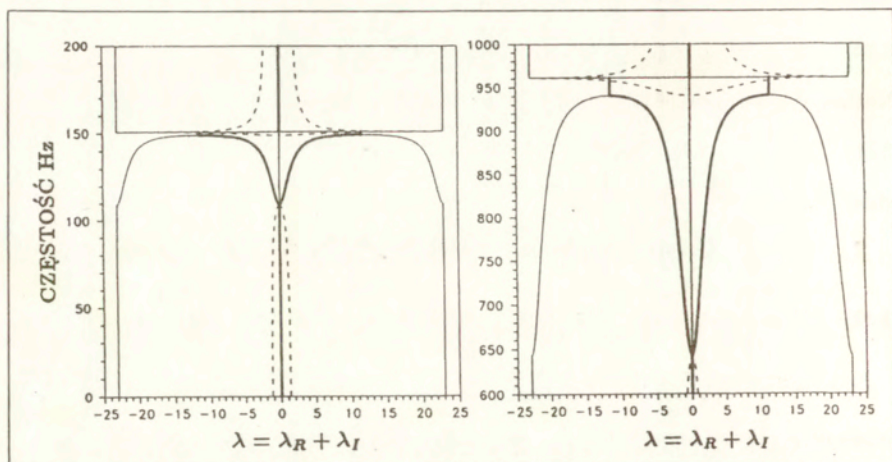
$$(3.34) \quad \cos \lambda \phi_0 = -\frac{f_1(sl)\mu\omega^2}{2f_2(sx_c)sq_c \cos^2 \alpha} - \frac{m\omega^2}{2q_c \cos^2 \alpha} + 1.$$

W przypadku, gdy prawa strona równania (3.34) przyjmuje wartości z przedziału $\langle -1, 1 \rangle$, otrzymujemy rzeczywiste wartości liczby falowej λ (pasma przenoszenia na płaszczyźnie (ω, λ)), a przypadku przeciwnym wartości zespolone (pasma zanikania na płaszczyźnie (ω, λ)).

Relację dyspersyjną (3.34) zilustrowano na rysunku 3.7, gdzie linią ciągłą oznaczono liczbę falową, a linią przerywaną stałą zanikania (dekrement). Na rysunku przedstawiono dwa pasma przenoszenia, każde z nich zawiera się pomiędzy częstotściami drgań „w fazie” i „w przeciwfazie”. Pierwsza strefa Brillouina zawarta jest w przedziale

$$(3.35) \quad \lambda \in \left\langle -\frac{\pi}{\phi_0}, \frac{\pi}{\phi_0} \right\rangle \Rightarrow \lambda \in \left\langle \frac{N}{2}, \frac{N}{2} \right\rangle.$$

W pasmach zanikania część rzeczywista liczby falowej przyjmuje wartość $\lambda_R = 0$ (drgania „w fazie”) lub $\lambda_R = \pm N/2$ (drgania „w przeciwfazie”). Przy pewnych wartościach częstotliwości ω część urojona liczby falowej λ_I dąży do nieskończoności, a λ_R skokowo zmienia swą wartość ($\pm \lambda_R \rightarrow 0$). Przy tej częstotliwości przemieszczenie podukładu ciągłego w punkcie $x = x_c$ przyjmuje wartość równą zero i zanika oddziaływanie pomiędzy sąsiadującymi komórkami struktury periodycznej.



Rysunek 3.7: Relacje dyspersyjne w przypadku układu nieskończonego.

2.1.2. Układ skończony złożony z N elementów

W przypadku rzeczywistej struktury złożonej z N elementów, liczba falowa λ przyjmuje wartości całkowite, które określimy w sposób podany poniżej. Przy założeniu, że przemieszczenie w_{n+1} można wyrazić w funkcji przemieszczenia w_n

$$(3.36) \quad w_{n+1} = \psi_n \cdot w_n,$$

otrzymujemy następującą relację:

$$(3.37) \quad \psi_1 \cdot \psi_2 \cdot \dots \cdot \psi_{N-1} \cdot \psi_N = 1.$$

W przypadku idealnej struktury periodycznej

$$(3.38) \quad \psi_1 = \psi_2 = \dots = \psi_{N-1} = \psi_N,$$

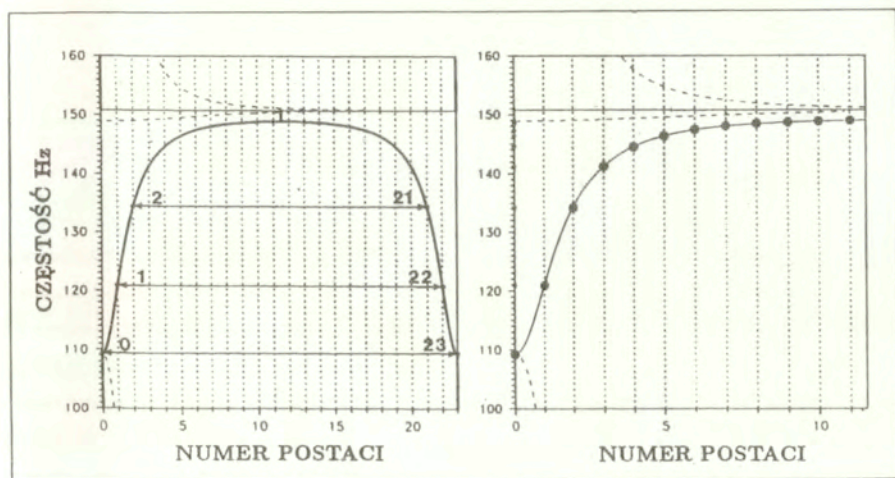
równanie (3.37) przyjmuje postać

$$(3.39) \quad (\psi)^N = 1,$$

a jego rozwiązanie zapisać można w następującej formie:

$$(3.40) \quad \begin{aligned} \psi &= \sqrt[N]{1} = \cos \frac{2\pi}{N}k + i \sin \frac{2\pi}{N}k = \\ &= \cos \phi_0 k + i \sin \phi_0 k, \end{aligned}$$

gdzie $k = 0, 1, 2, \dots, N-2, N-1$. Częstości drgań własnych mogą być oszacowane metodą graficzną, z wykorzystaniem krzywych reprezentujących pasma przenoszenia na płaszczyźnie (ω, λ) , w sposób zilustrowany na rysunku 3.8. Jak wynika z rysunku 3.8, wystarczy rozważyć jedynie połowę pierwszej strefy Brillouina. Należy zauważyć, że w podobny sposób można określić częstości własne układu złożonego z większej liczby podukładów ciągłych. W przypadku $N = 23$ mamy $\cos^2 \frac{\pi}{23} = 0.981$, zaś przy wzrastającej wartości N otrzymujemy $\cos^2 \frac{\pi}{N} \rightarrow 1$, przy czym kształt krzywej dyspersyjnej określonej równaniem (3.34) nie ulega zmianie. W celu oszacowania częstości drgań własnych układu złożonego z $\tilde{N} > N$ podukładów należy określić punkty przecięcia krzywych dyspersyjnych z rodziną \tilde{N} prostych równoległych do osi ω , w sposób zilustrowany na rysunku 3.8. Częstości drgań własnych wyzna-



Rysunek 3.8: Ilustracja sposobu wyznaczania częstości drgań własnych.

czyć można numerycznie za pomocą relacji (3.34) podstawiając $\lambda = k$ ($k = 0, 1, 2, \dots, \frac{N-1}{2}$ w przypadku nieparzystej liczby podukładów, $k = 0, 1, 2, \dots, \frac{N}{2}$ w przypadku parzystej ich liczby). Częstości układu złożonego z $N = 23$ podukładów podano w tabeli 3.6. Postaci drgań własnych, określone za pomocą równań: (3.31) i (3.9), zapisać można następująco:

$$w_n(x) = \{g_1(sx_c)U_1(sx) + g_2(sx_c)U_2(sx) + f_1(sl)U_2[s(x - x_c)]\} \cdot H_c \cdot e^{ik(n-1)\phi_0}. \quad (3.41)$$

Numer postaci ($k + 1$)	Częstość (Hz)	
	1. Pasma przenoszenia	2. Pasma przenoszenia
1	109.26	643.5
2	120.95	684.7
3	134.39	764.8
4	141.21	829.8
5	144.60	870.4
6	146.34	894.6
7	147.37	909.4
8	148.00	918.6
9	148.40	924.6
10	148.65	928.4
11	148.80	930.6
12	148.87	931.7

Tabela 3.6: Częstości drgań własnych układu idealnego.

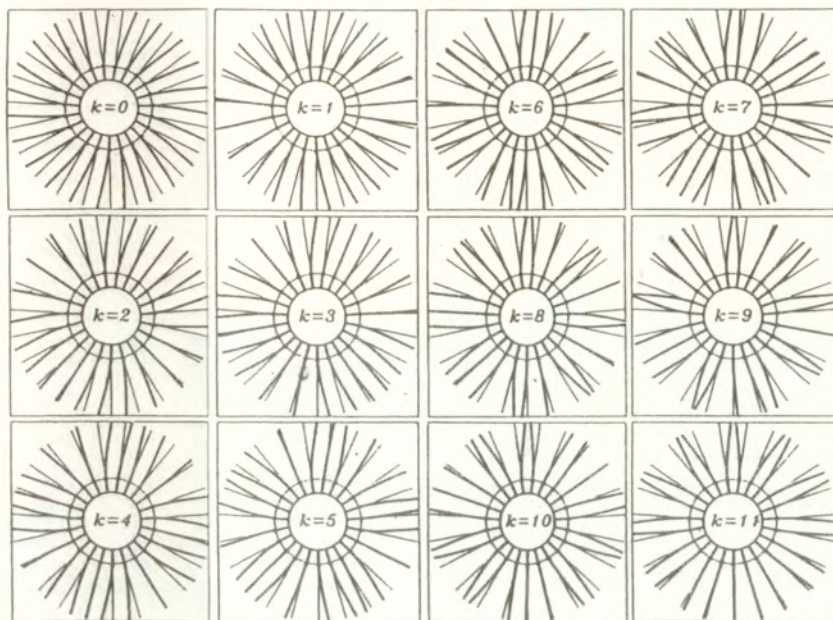
Postaci drgań własnych (3.41) odpowiadające częstościom z pierwszego pasma przenoszenia zilustrowano na rysunku (3.9), a postaci drugiego pasma – na rysunku 3.10. Przemieszczenia punktów kontaktu ($\mathbf{x} = \mathbf{x}_c$) odpowiadające wybranym postaciom drgań przedstawiono na rysunku 3.11. Jak wynika z rysunku 3.11, punkty reprezentujące przemieszczenia znajdują się na krzywej opisanej równaniem $w = \cos k\phi$. Minimalne różnice w przemieszczeniach sąsiadujących podukładów występują przy $k = 1$, a maksymalne przy $k = 11$. W dalszej części pracy liczbę k ($k + 1$ jest numerem postaci drgań własnych) nazywać będziemy rzędem postaci drgań.

2.2. Układ niedostrojony

W ogólnym przypadku układu niedostrojonego

$$EI_n \neq EI_{n+1}, \mu_n \neq \mu_{n+1}, \eta_n \neq \eta_{n+1}, m_n \neq m_{n+1}, \Delta_n \neq \Delta_{n+1}, n = 1, 2, \dots, N, \quad (3.42)$$

zarówno częstości drgań własnych podukładów ciągłych, jak i siły w podukładach dyskretnych różnią się od siebie. Z warunków brzegowych (3.11) otrzymujemy w tym przypadku N



Rysunek 3.9: Postaci drgań własnych układu idealnego (częstości z pierwszego pasma przenoszenia).

warunków o postaci (3.12)

$$(3.43) \quad \underline{M}_{1(n)} \cdot \{w''(0)_n, w'''(0)_n, w(x_c)_n\} = -[F_{e(n)} \underline{\tilde{F}}_{e(n)} + F_{c(n)} \underline{\tilde{F}}_{c(n)}].$$

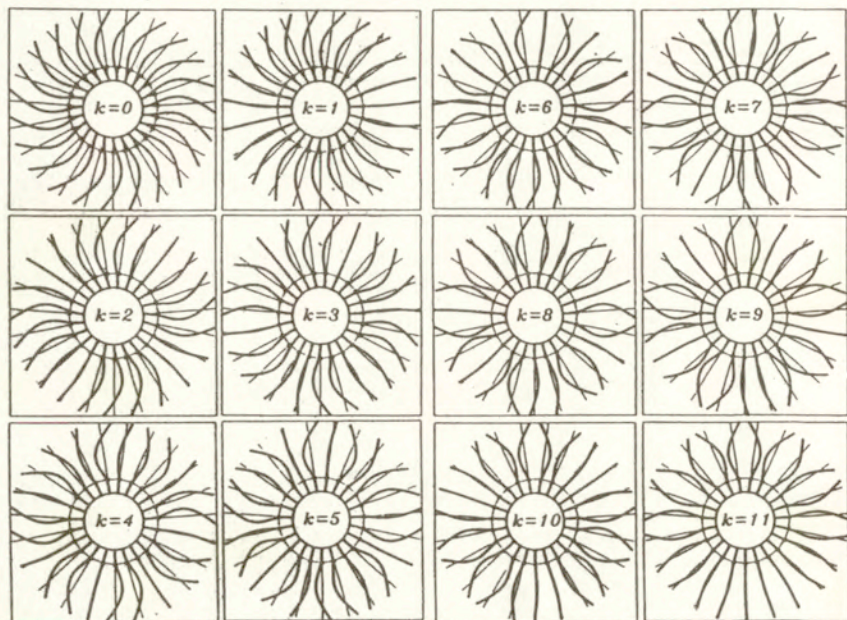
W równaniu (3.43) funkcje $\underline{M}_{1(n)}$, $\underline{\tilde{F}}_{e(n)}$ i $\underline{\tilde{F}}_{c(n)}$ mają postać określoną za pomocą zależności (3.13), (3.14) i (3.15), przy czym parametr s tam występujący przyjmuje następującą postać:

$$(3.44) \quad s_n = \sqrt{\frac{\mu_n \omega^2 - i \omega \eta_n}{EI_n}}.$$

W przypadku drgań swobodnych ($F_{e(n)} = 0$, $\eta = 0$, η_c) i struktury o idealnej geometrii, siła w podukładzie dyskretnym przyjmuje następującą postać:

$$(3.45) \quad F_{c(n)} = [q_{c(n)}(w_{n+1} - w_n) + q_{c(n-1)}(w_{n-1} - w_n)] \cos^2 \alpha.$$

W celu uzyskania równania charakterystycznego pozwalającego na określenie częstości i postaci drgań układu, rozwiązany równanie (3.43) ze względu na niewiadomą funkcję przemieszczenia



Rysunek 3.10: Postaci drgań własnych układu idealnego (częstości z drugiego pasma przenoszenia).

w punkcie kontaktu

$$(3.46) \quad w_n \cdot | \underline{M}_{1(n)} | + | \underline{M}_{2(n)} | = 0$$

gdzie

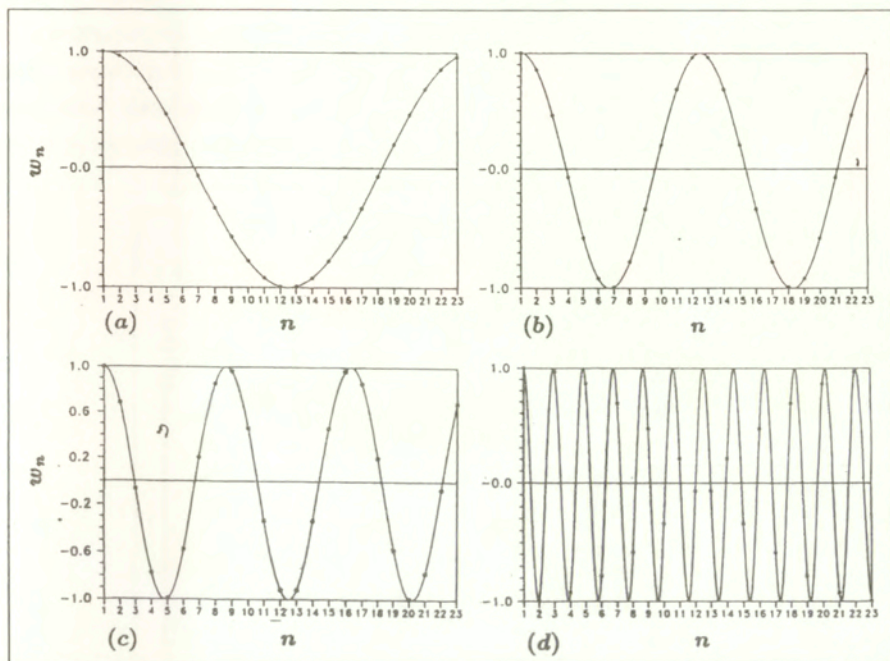
$$(3.47) \quad \underline{M}_{2(n)} = \begin{bmatrix} U_3(sl), & \frac{1}{s}U_4(sl), & \frac{F_c}{sEI}U_4[s(l-x_c)] \\ sU_2(sl), & U_3(sl), & \frac{F_c}{EI}U_3[s(l-x_c)] \\ \frac{1}{s^2}U_1(sx_c), & \frac{1}{s^3}U_2(sx_c), & 0 \end{bmatrix}_{(n)}$$

Zależność (3.46) może być zapisana w następującej postaci:

$$(3.48) \quad w_n [f_{1(n)} + \left(\frac{m}{\mu} s\right)_{(n)} f_{2(n)}] + F_{c(n)} \left(\frac{s}{\mu \omega^2}\right)_{(n)} f_{2(n)} = 0.$$

Podstawiając wyrażenie na siłę kontaktu (3.45) do zależności (3.48) otrzymujemy

$$(3.49) \quad \rho_{n-1} \cdot w_{n-1} + R_n \cdot w_n + \rho_n \cdot w_{n+1} = 0,$$



Rysunek 3.11: Przeszczenia punktów kontaktu: (a) - $k = 1$, (b) - $k = 2$, (c) - $k = 3$, (d) - $k = 11$.

gdzie

$$(3.50) \quad R_n = \frac{f_{1(n)} \mu_n \omega^2}{q_c s_n \cos^2 \alpha f_{2(n)}} + \frac{m_n \omega^2}{q_c \cos^2 \alpha} - \left(\frac{q_{c(n)}}{q_c} + \frac{q_{c(n-1)}}{q_c} \right), \quad \rho_n = \frac{q_{c(n)}}{q_c},$$

a q_c jest średnią (zaprojektowaną) wartością sztywności elementu kontaktowego.

Napisanie N równań o postaci (3.50) pozwala na otrzymanie następującego układu równań:

$$(3.51) \quad \underline{M} \cdot \underline{w} = 0,$$

gdzie

$$(3.52) \quad \underline{M} = \begin{bmatrix} \rho_N, & 0, & \dots & \dots & 0, & \rho_{N-1}, & R_N \\ R_1, & \rho_1, & 0, & \dots & \dots & 0, & \rho_N \\ \rho_1, & R_2, & \rho_2, & 0, & \dots & 0, & 0 \\ 0, & \rho_2, & R_3, & \rho_3, & 0, & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0, & 0, & \dots & \rho_{N-3}, & R_{N-2}, & \rho_{N-2}, & 0 \\ 0, & 0, & \dots & 0, & \rho_{N-2}, & R_{N-1}, & \rho_{N-1} \end{bmatrix},$$

$$(3.53) \quad \underline{w} = \{ w_1, w_2, w_3, \dots \dots w_{N-1} w_N \}.$$

Za pomocą operacji dokonanych na wierszach macierzy \underline{M} otrzymujemy

$$(3.54) \quad \underline{\tilde{M}} = \begin{bmatrix} \tilde{m}_{11}, & \tilde{m}_{12}, & 0, & \dots & \dots & 0, & 0 \\ \tilde{m}_{21}, & \tilde{m}_{22}, & 0, & \dots & \dots & 0, & 0 \\ \rho_1, & R_2, & \rho_2, & 0, & \dots & 0, & 0 \\ 0, & \rho_2, & R_3, & \rho_3, & 0, & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0, & 0, & \dots & \rho_{N-3}, & R_{N-2}, & \rho_{N-2}, & 0 \\ 0, & 0, & \dots & 0, & \rho_{N-2}, & R_{N-1}, & \rho_{N-1} \end{bmatrix},$$

$$(3.55) \quad |\underline{M}| = |\underline{\tilde{M}}| = (\tilde{m}_{11}\tilde{m}_{22} - \tilde{m}_{12}\tilde{m}_{21}) \cdot \prod_{n=2}^{N-1} \rho_n.$$

Z uwagi na fakt, że współczynniki $\rho_n > 0$, częstości drgań własnych układu wyznacza się za pomocą następującej zależności:

$$(3.56) \quad \mathcal{D}_M = \tilde{m}_{11}\tilde{m}_{22} - \tilde{m}_{12}\tilde{m}_{21} = 0.$$

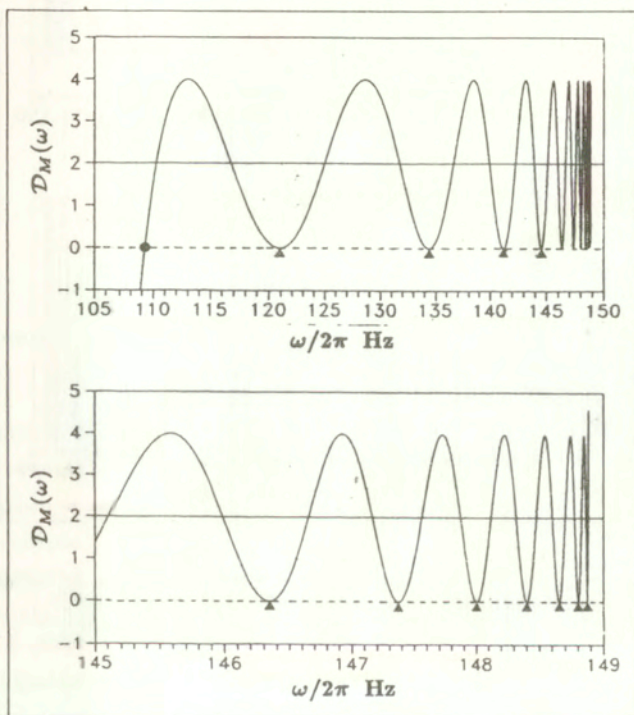
Postaci drgań określone są następująco:

$$(3.57) \quad w_n(x) = -\frac{w_n(x_c)}{f_{2(n)}} \cdot \{g_1(sx_c)U_1(sx) + g_2(sx_c)U_2(sx) + f_1(sl)U_2[s(x - x_c)] \cdot H_c\}_{(n)}.$$

Zależność (3.57) uzyskano po podstawieniu wyrażeni na funkcje $w_n''(0)$ i $w_n'''(0)$, obliczonych za pomocą relacji (3.43), do równania (3.9), a przemieszczenie w punkcie kontaktu $w_n(x_c)$ określono z równania (3.51).

Przed przystąpieniem do analizy układów niedostrojonych, za pomocą przedstawionych zależności zbadamy przypadek struktury idealnej, tzn. gdy $R_n = R_{n+1} = const.$ i $\rho_n = \rho_{n+1} = 1$. Zależność (3.56) odpowiadająca jednemu pasmu przenoszenia spełniona jest

przez 12 wartości częstotliwości zilustrowano na rysunku 3.12. Krzywa reprezentująca funkcję $\mathcal{D}_M = \mathcal{D}_M(\omega)$ przecina oś odciętych przy pierwszej częstotliwości (drgania „w fazie“), a w przypadku pozostałych częstotliwości funkcja \mathcal{D}_M osiąga minimum, które można interpretować jako „podwójny“ pierwiastek. Wartości częstotliwości, które można określić za pomocą rysunku 3.12, równe są wartościom przedstawionym w tabeli 3.6.

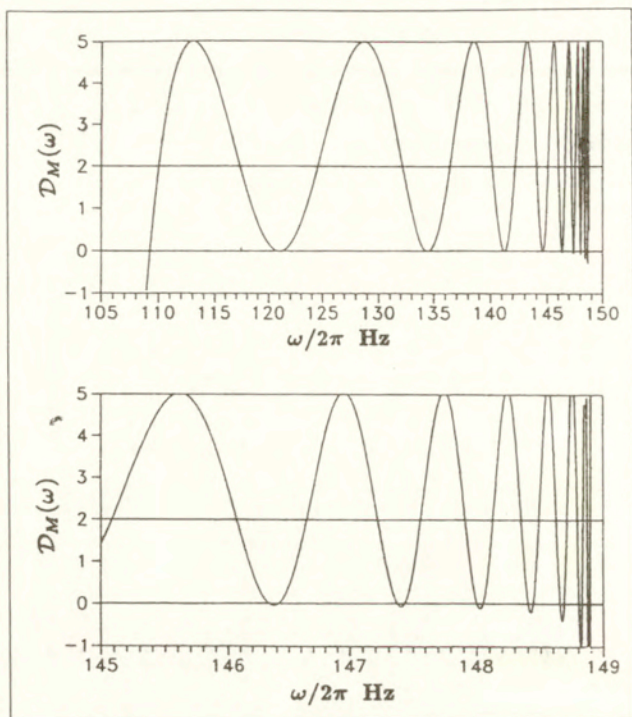


Rysunek 3.12: Funkcja $\mathcal{D}_M = \mathcal{D}_M(\omega)$ w przypadku struktury idealnej.

2.2.1. Niedostrojenie parametrów kontaktu

Rozważmy przypadek, gdy charakterystyka jednego z podukładów dyskretnych różni się od pozostałych w następujący sposób:

$$(3.58) \quad q_{c(23)} = 1.25 q_c, \quad q_{c(n)} = q_c, \quad n = 1, 2, \dots, 22.$$



Rysunek 3.13: Funkcja $\mathcal{D}_M = \mathcal{D}_M(\omega)$ w przypadku $q_{c(23)} = 1.25q_c$.

Krzywą reprezentującą funkcję $\mathcal{D}_M = \mathcal{D}_M(\omega)$ przedstawiono na rysunku 3.13. Jak widać na tym rysunku, w miejscu „podwójnych“ wartości częstości drgań struktury idealnej, otrzymujemy dwie różne wartości w przypadku układu niedostrojonego, których wartości liczbowe podano w tabeli 3.7. Pierwsza częstość w przypadku każdej z jedenastu par jest równa „podwójnej“ częstości układu idealnego. Postaci drgań własnych odpowiadające pierwszej parze częstości przedstawiono na rysunku 3.14 i 3.15. W przypadku układu idealnego nie występuje różnica pomiędzy postacią sinusową i kosinusową, natomiast w układzie niedostrojonym postaciom tym odpowiadają różne częstości drgań własnych.

Inną możliwą formą niedostrojenia jest okresowe niedostrojenie o postaci

$$(3.59) \quad q_{c(n)} = q_c[1 + \Delta_q \sin k_c(n-1)\phi_0].$$

Wielkość Δ_q nazywać będziemy stopniem niedostrojenia kontaktu, a wielkość k_c rzędem niedo-

1. częstość	109.26 Hz	
Numer pary	Częstość (Hz)	Częstość (Hz)
1	120.95	121.09
2	134.39	134.57
3	141.21	141.33
4	144.60	144.70
5	146.34	146.41
6	147.37	147.43
7	148.00	148.05
8	148.40	148.44
9	148.65	148.69
10	148.80	148.83
11	148.87	148.90

Tabela 3.7: Częstości drgań własnych układu niedostrojonego $q_{c(23)} = 1.25q_c$.

strojenia kontaktu. Przy $k_c = 1$ różnice pomiędzy sztywnościami sąsiadujących podukładów dyskretnych są najmniejsze, a przy $k_c = 11$ największe. Krzywą reprezentującą funkcję $\mathcal{D}_M = \mathcal{D}_M(\omega)$ w przypadku $\Delta_q = 25\%$ i $k_c = 11$ przedstawiono na rysunku 3.16. Przemieszczenia punktów kontaktu przy drugiej postaci drgań i $\Delta_q = 25\%$, $k_c = 1$, przedstawiono na rysunku 3.17, gdzie zilustrowano również przemieszczenia struktury idealnej. Jak wynika z rysunku 3.17, drugą postać drgań można w przybliżeniu opisać jako

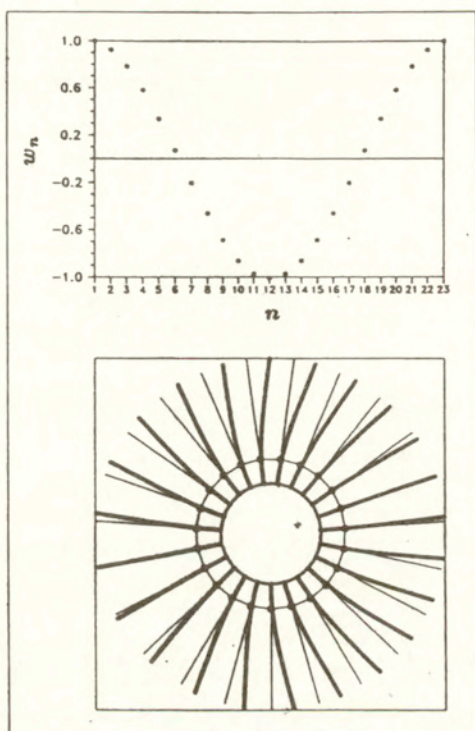
$$(3.60) \quad w_n = a_1 \cos k(n-1)\phi_0 + a_2 \sin k_c(n-1)\phi_0,$$

gdzie a_1 i a_2 są pewnymi stałymi, $k = 1$ jest kolejnym numerem pary częstości, a $k_c = 1$ rzędem niedostrojenia.

2.2.2. Niedostrojenie częstości drgań własnych podukładu ciągłego

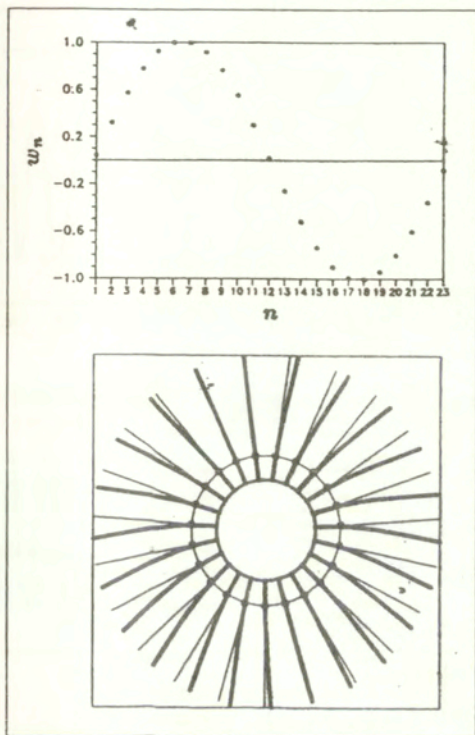
Rozważymy przypadek, gdy częstość drgań własnych pierwszej postaci drgań swobodnych jednego podukładu różni się od pozostałych w następujący sposób:

$$(3.61) \quad \omega_{0(23)} = d_\omega \cdot \omega_0 = d_\omega \cdot \frac{(1.875)^2}{2\pi l^2} \sqrt{\frac{EI}{\mu}}.$$



Rysunek 3.14: Postać drgań własnych układu niedostrojonego $q_c(23) = 1.25q_c$ przy częstotliwości $\omega = 120.95 \text{ Hz}$.

Częstości drgań własnych układu w przypadku $d_\omega = 1.025$, spełniające zależność (3.56) przedstawiono w tabeli 3.8. Jak wynika z rezultatów przedstawionych w tabeli 3.8, pierwsza częstość w przypadku każdej z jedenastu par jest równa „podwójnej” częstości układu idealnego. Zarówno krzywa reprezentująca funkcję $\mathcal{D}_M = \mathcal{D}_M(\omega)$, jak i postaci drgań własnych odpowiadające pierwszej parze częstości, mają charakter podobny do przypadku przedstawionego na rysunkach odpowiednio: 3.13, 3.14 i 3.15. Postać drgań występującą przy częstotliwości $\omega = 148.9 \text{ Hz}$ w niedostrojonym układzie $\omega_{0(23)} = 1.004 \cdot \omega_0$ przedstawiono na rysunku 3.18. Jak wynika z rezultatów przedstawionych na rysunku 3.18, przy stosunkowo małym niedostrojeniu układu występować może lokalizacja drgań w pobliżu podukładu niedostrojonego (w tym przypadku $n = 23$).



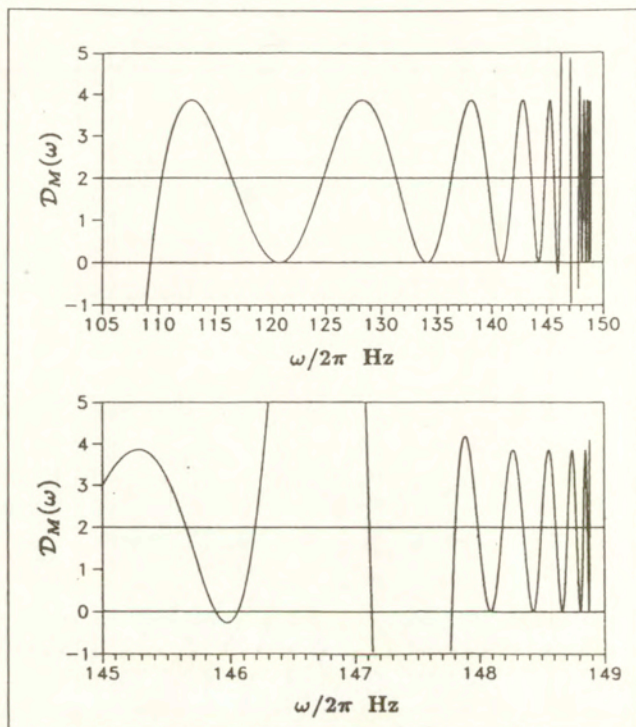
Rysunek 3.15: Postać drgań własnych układu niedostrojonego $q_{c(23)} = 1.25q_c$ przy częstotliwości $\omega = 121.09Hz$.

W przypadku okresowego niedostrojania zakładamy, że pierwsza częstotliwość drgań własnych łopatek zmienia się w następujący sposób:

$$(3.62) \quad \omega_{0(n)} = \omega_{0(0)}[1 + \Delta_\omega \sin k_f(n-1)\phi_0].$$

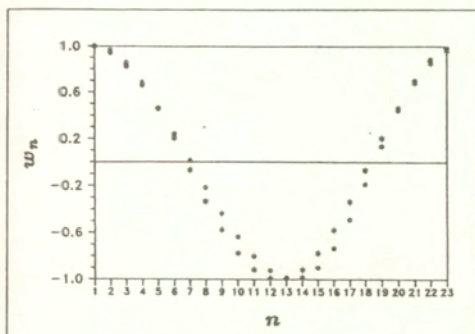
Wielkość Δ_ω nazywać będziemy stopniem niedostrojania częstotściowego, a wielkość k_f rzędem niedostrojania częstotściowego. Przy $k_f = 1$ różnice pomiędzy sztywnościami sąsiadujących łopatek są najmniejsze, a przy $k_f = 11$ największe. Wielkość $\sqrt{\frac{EI}{\mu}}$ używana we wzorach prezentowanych w niniejszej pracy przyjmuje następującą postać:

$$(3.63) \quad \left(\sqrt{\frac{EI}{\mu}}\right)_{(n)} = \left(\sqrt{\frac{EI}{\mu}}\right)_{(0)}[1 + \Delta_\omega \sin k_f(n-1)\phi_0].$$



Rysunek 3.16: Funkcja $\mathcal{D}_M = \mathcal{D}_M(\omega)$ w przypadku $\Delta_q = 25\%$ i $k_c = 11$.

Przemieszczenia punktów kontaktu przy pierwszej postaci drgań, która w układzie idealnym odpowiada drganiom „w fazie”, przedstawiono na rysunku 3.19. Podobnie jak w przypadku okresowego niedostrojenia parametrów kontaktu, również przy niedostrojeniu częstotściowym występuje nakładanie się składowej zależnej od rzędu niedostrojenia na postaci drgań układu (porównaj rysunek 3.17 i zależność (3.60)). Zależność wybranych częstotści drgań własnych układu od stopnia niedostrojenia Δ_ω przy rzędzie niedostrojenia $k_f = 1$ przedstawiono na rysunku 3.20. Rozstrzygnięcie kwestii podobieństwa krzywych na rysunku 3.20 do krzywych ilustrujących rozwiązanie równania Mathieu, będzie przedmiotem rozważań przedstawionych w dalszej części pracy.



Rysunek 3.17: Przesunięcia punktów kontaktu przy drugiej postaci drgań układu idealnego (*) i niedostrojonego (•) w przypadku $\Delta_q = 25\% i k_c = 1$.

3. Drgania wymuszone

W celu uzyskania zależności pozwalających na określenie odpowiedzi dynamicznej układu, rozwiążemy równanie (3.43) ze względu na niewiadomą funkcję przemieszczenia w punkcie kontaktu

$$(3.64) \quad w_n \cdot | \underline{M}_{1(n)} | + | \underline{M}_{3(n)} | = 0.$$

gdzie

$$(3.65) \quad \underline{M}_{3(n)} = \begin{bmatrix} U_3(sl), & \frac{1}{s} U_4(sl), & \frac{F_c U_4[s(t-x_c)] + F_e U_4[s(t-x_e)]}{sEI} \\ sU_2(sl), & U_3(sl), & \frac{F_c U_3[s(t-x_c)] + F_e U_3[s(t-x_e)]}{EI} \\ \frac{1}{s^2} U_1(sx_c), & \frac{1}{s^3} U_2(sx_c), & 0 \end{bmatrix}_{(n)}$$

Zależność (3.64) może być zapisana w następującej postaci:

$$(3.66) \quad w_n [f_1(n) + (\frac{m\omega^2}{\mu\omega^{*2}} s)_{(n)} f_2(n)] + [F_c(n) f_2(n) + F_e(n) f_3(n)] (\frac{s}{\mu\omega^{*2}})_{(n)} = 0,$$

gdzie

$$(3.67) \quad \omega^{*2} = \omega^2 - i \frac{\eta}{\mu} \omega,$$

$$(3.68) \quad \begin{aligned} f_3(sx_c) &= U_4[s(t-x_e)] \cdot [U_2(sl)U_2(sx_c) - U_3(sl)U_1(sx_c)] + \\ &- U_3[s(t-x_e)] \cdot [U_3(sl)U_2(sx_c) - U_3(sl)U_1(sx_c)]. \end{aligned}$$

1. częstość	109.37 Hz	
Numer pary	Częstość (Hz)	Częstość (Hz)
1	120.95	121.15
2	134.39	134.60
3	141.21	141.41
4	144.60	144.74
5	146.34	146.50
6	147.37	147.50
7	148.00	148.11
8	148.40	148.49
9	148.65	148.71
10	148.80	148.84
11	148.87	148.90

Tabela 3.8: Częstości drgań własnych układu niedostrojonego $\omega_{0(23)} = 1.025 \omega_0$.

Do dalszych rozważań przyjmujemy obciążenie w postaci fali bieżącej

$$(3.69) \quad F_{e(n)} = F_e e^{ik_e(n-1)\phi_0},$$

gdzie $k_e = 0, 1, 2, \dots, \frac{N-1}{2}$ przy nieparzystych N , $k_e = 0, 1, 2, \dots, \frac{N}{2}$ przy parzystych N , nazywać będziemy rzędem obciążenia.

Po podstawieniu wyrażenia na siłę w podukładzie dyskretnym (3.27) do równania (3.64) otrzymujemy

$$(3.70) \quad \bar{\rho}_{n-1} \cdot w_{n-1} + \bar{R}_n \cdot w_n + \bar{\rho}_n \cdot w_{n+1} = \bar{p}_n,$$

gdzie

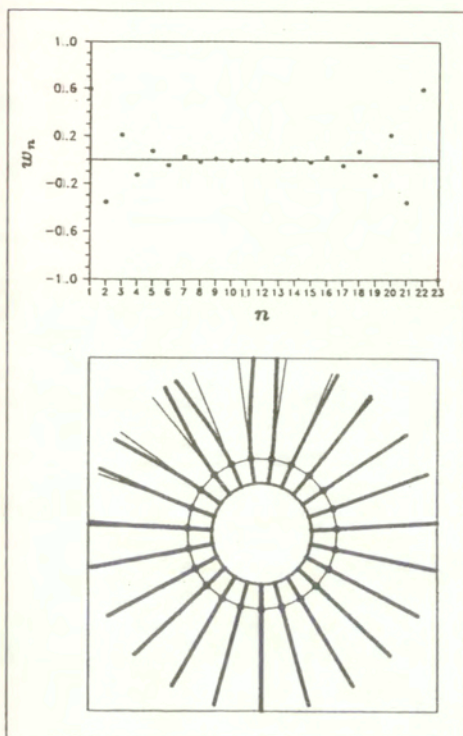
$$(3.71) \quad \bar{R}_n = f_{1(n)} + \left(\frac{m\omega^2}{\mu\omega^{*2}}\right)_{(n)} f_{2(n)} - \left(\frac{s}{\mu\omega^{*2}}\right)_{(n)} f_{2(n)} (\bar{\Delta}_n + \bar{\Delta}_{n-1}),$$

$$(3.72) \quad \bar{\rho}_n = \left(\frac{s}{\mu\omega^{*2}}\right)_{(n)} f_{2(n)} \bar{\Delta}_n, \quad \bar{\Delta}_n = (q_{c(n)} + i\eta_{c(n)}) \cos^2 \alpha,$$

$$(3.73) \quad \bar{p}_n = \left(\frac{s}{\mu\omega^{*2}}\right)_{(n)} f_{3(n)} F_{e(n)}.$$

Po napisaniu N równań o postaci (3.70) otrzymujemy

$$(3.74) \quad \bar{M} \cdot \underline{w} = \bar{p},$$



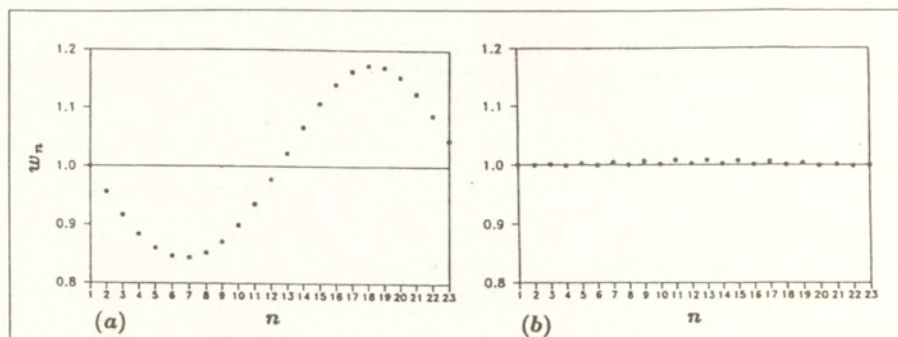
Rysunek 3.18: Postać drgań własnych układu niedostrojonego $\omega_{0(23)} = 1.004 \omega_0$.

gdzie macierz \bar{M} jest zbudowana podobnie jak macierz M w równaniu (3.51), a wektor obciążenia przyjmuje następującą postać:

$$(3.75) \quad \underline{w} = \{ \bar{p}_N, \bar{p}_1, \bar{p}_2, \dots \dots \bar{p}_{N-2} \bar{p}_{N-1} \}.$$

Przemieszczenia punktów kontaktu określimy rozwiązując równanie (3.74), a pole przemieszczeń układu za pomocą następującej zależności:

$$(3.76) \quad \begin{aligned} w_n(x) = & \frac{-F_{c(n)} w_n(x_c)}{F_{c(n)} f_{2(n)} + F_{e(n)} f_{3(n)}} \cdot \{ g_1(sx_c) U_1(sx) + \\ & + g_2(sx_c) U_2(sx) + f_1(sl) U_2[s(x - x_c)] \cdot H_c \}_{(n)} + \\ & + \frac{-F_{e(n)} w_n(x_c)}{F_{c(n)} f_{2(n)} + F_{e(n)} f_{3(n)}} \cdot \{ g_1(sx_e) U_1(sx) + g_2(sx_e) U_2(sx) + \end{aligned}$$



Rysunek 3.19: Przemieszczenia punktów kontaktu przy pierwszej postaci drgań układu niedostrojenego $\Delta\omega = 2.5\%$: (a) - $k_f = 1$, (b) - $k_f = 11$.

$$\begin{aligned}
 & + \frac{s m \omega^2}{\mu \omega^{*2}} g_3(s x_c, s x_e) \cdot [U_2(s x_c) U_1(s x) - U_1(s x_c) U_2(s x)]_{(n)} + \\
 & + \frac{s F_e(n)}{\mu \omega^{*2}} \cdot U_2[s(x - x_e)]_{(n)} \cdot H_e,
 \end{aligned}$$

którą uzyskano po podstawieniu zależności opisujących funkcje $w_n''(0)$ i $w_n'''(0)$, określonych za pomocą relacji (3.43), do równania (3.9). Funkcja $g_3 = g_3(s x_c, s x_e)$ w równaniu (3.76) określona jest następująco:

$$(3.77) \quad g_3(s x_c, s x_e) = U_4[s(l - x_e)] U_3[s(l - x_c)] - U_3[s(l - x_e)] U_4[s(l - x_c)].$$

W dalszej części niniejszego punktu pracy przedstawimy rezultaty określone za pomocą powyższego wzoru w przypadku $x = x_e$ i wybranych wartości rzędu obciążenia. Amplitudę i fazę przemieszczenia w punkcie przyłożenia obciążenia określimy w sposób podany poniżej. W przypadku, gdy $\eta \neq 0$, $\eta_c \neq 0$, zarówno macierz \bar{M} , wektor \bar{p} , jak i funkcje występujące we wzorze (3.77) są zespolonymi funkcjami częstości. Rozwiązanie można zapisać w następującej formie:

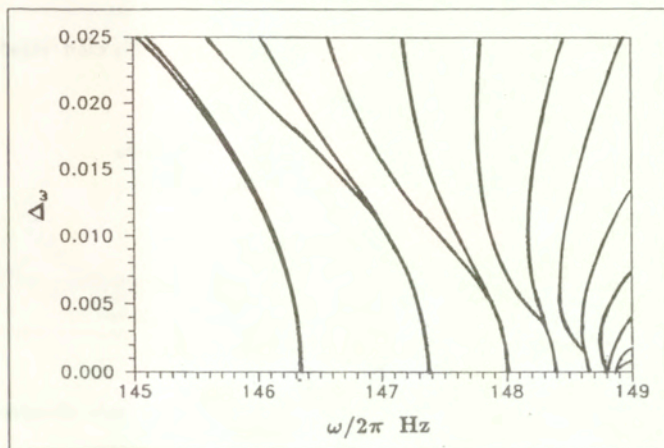
$$(3.78) \quad w_n = w_n^R + i w_n^I, \quad w_n^R = \text{Re}(w_n), \quad w_n^I = \text{Im}(w_n),$$

a część rzeczywista przemieszczenia w funkcji czasu przyjmuje następującą postać:

$$(3.79) \quad \bar{w}_n(t) = \text{Re}(w_n e^{i\omega t}) = w_n^R \cos \omega t - w_n^I \sin \omega t = A_n \cos(\omega t - \phi_n^*).$$

We wzorze (3.79) $\phi_n^* = \arctan(-w_n^R/w_n^I)$ jest fazą, a

$$(3.80) \quad A_n = \sqrt{(w_n^R)^2 + (w_n^I)^2}$$



Rysunek 3.20: Wybrane częstotliwości drgań własnych układu niedostrojonego $k_f = 1$ w funkcji stopnia niedostrojenia Δ_ω .

amplitudą drgań.

Część rzeczywistą odpowiedzi dynamicznej układu poddanego działaniu sił harmonicznym o następującym rozkładzie:

$$(3.81) \quad F_{e(n)}^*(k_e, \omega) = F_e e^{i[\omega t + k_e(n-1)\phi_0]},$$

zapiszemy w następującej formie:

$$(3.82) \quad \begin{aligned} \bar{w}_n(t) &= A_n \cos \{ \omega t - [\phi_n^* - k_e(n-1)\phi_0] \} = \\ &= A_n \cos [\phi_n^* - k_e(n-1)\phi_0] \cos \omega t + A_n \sin [\phi_n^* - k_e(n-1)\phi_0] \sin \omega t. \end{aligned}$$

Porównując powyższy wzór z zależnością (3.79) możemy napisać

$$(3.83) \quad \begin{bmatrix} \sin k_e(n-1)\phi_0 & \cos k_e(n-1)\phi_0 \\ \cos k_e(n-1)\phi_0 & -\sin k_e(n-1)\phi_0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_n \sin \phi_n^* \\ A_n \cos \phi_n^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_n^R \\ -w_n^I \end{bmatrix}.$$

Za pomocą układu równań (3.83) obliczymy funkcję $\sin \phi_n^*$ i $\cos \phi_n^*$, a fazę ϕ_n^* występującą we wzorze (3.82) za pomocą następującej zależności:

$$(3.84) \quad \phi_n^* = \arctan \frac{\sin \phi_n^*}{\cos \phi_n^*}.$$

3.1. Odpowiedź dynamiczna układu idealnego

Współczynniki macierzy w równaniu (3.74) przyjmują w przypadku układu idealnego następującą postać

$$(3.85) \quad \bar{R}_n = \bar{R} = f_1 + \frac{m\omega^2}{\mu\omega^*2} s f_2 - 2 \frac{s}{\mu\omega^*2} f_2 \bar{\Delta},$$

$$(3.86) \quad \bar{\rho}_n = \bar{\rho} = \frac{s}{\mu\omega^*2} f_2 \bar{\Delta},$$

$$(3.87) \quad \bar{p}_n = \frac{s}{\mu\omega^*2} f_3 F_e e^{ik_e(n-1)\phi_0},$$

gdzie

$$(3.88) \quad \bar{\Delta} = (q_c + i\eta_c) \cos^2 \alpha$$

Przemieszczenie i fazę punktów $\mathbf{x}_{(n)} = \mathbf{x}_{e(n)}$ i wybranych wartości rzędu obciążenia przedstawiono na rysunkach: 3.21 i 3.22. W przypadku struktury idealnej mamy

$$(3.89) \quad \mathbf{A}_n = \mathbf{A}_{n+1} = \mathbf{A}, \quad \phi_n^* = \phi_{n+1}^* = \phi^*.$$

Maksymalna amplituda przemieszczenia występuje gdy $\phi^* = \frac{\pi}{2}$, przy częstoci, przy której zachodzi następująca zależność:

$$(3.90) \quad k_e = k,$$

tnz. wtedy, gdy rząd obciążenia jest równy rzędowi postaci drgań (tabela 3.6). Przedstawione na rysunku 3.21 i 3.22 rezultaty można również uzyskać w inny sposób. Zakładając identyczną jak w przypadku obciążenia fazę przemieszczenia

$$(3.91) \quad w_{n+1} = w_n e^{ik_e \phi_0},$$

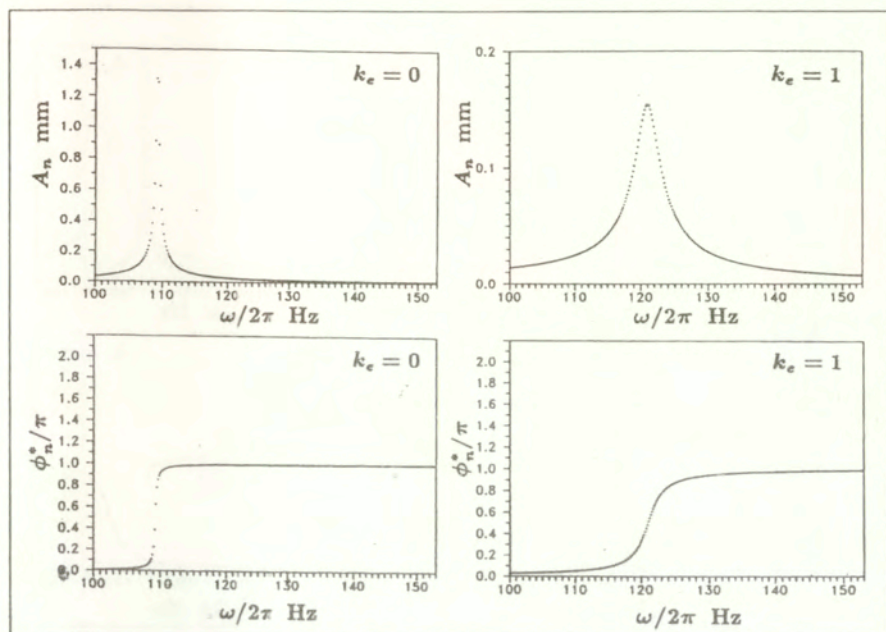
siłę w elemencie kontaktu możemy wyrazić w następujący sposób:

$$(3.92) \quad F_{c(n)} = 2\bar{\Delta} w_1 e^{ik_e(n-1)\phi_0} (\cos k_e \phi_0 - 1).$$

Podstawiając zależność (3.91), (3.92) i (3.69) do równania (3.66) otrzymujemy

$$(3.93) \quad w_n = - \frac{F_e f_3 \frac{s}{\mu\omega^*2} e^{ik_e(n-1)\phi_0}}{f_1 + \left[\frac{2(\cos k_e \phi_0 - 1)\bar{\Delta}}{\mu\omega^*2} + \frac{m\omega^2}{\mu\omega^*2} \right] s f_2}.$$

Jak wynika z porównania mianownika równania (3.93) z równaniem charakterystycznym (3.33), przemieszczenie osiąga maksimum przy częstoci równej częstoci drgań własnych układu, gdy $k_e = \lambda = k$.



Rysunek 3.21: Przemieszczenie i faza układu idealnego przy obciążeniu rzędu $k_e = 0$ oraz $k_e = 1$.

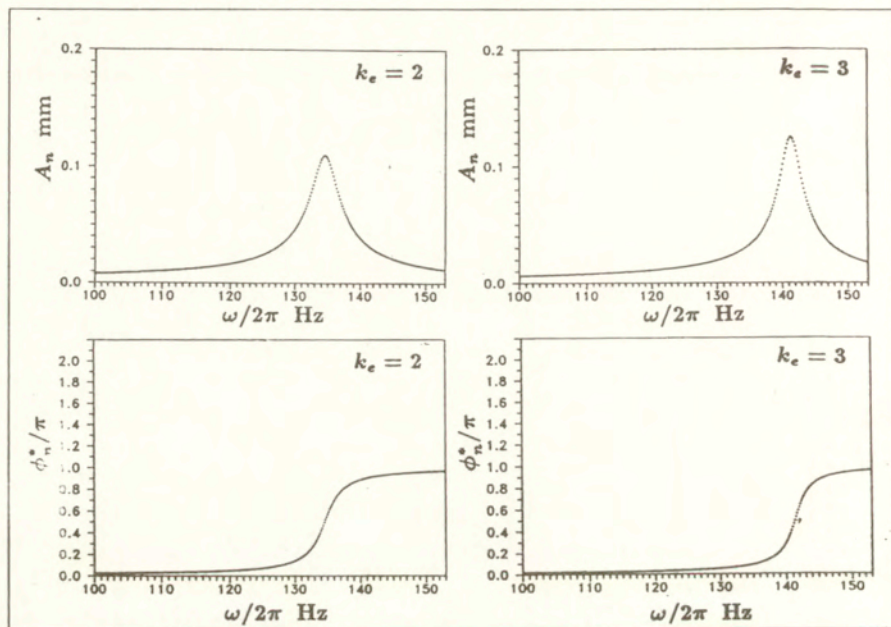
3.2. Układ o okresowym niedostrojeniu częstotściowym

Zbadamy przypadek okresowej zmiany częstości pierwszej postaci drgań własnych łopatki opisany za pomocą zależności (3.62) i (3.63), przy stopniu niedostrojenia $\Delta_\omega = 2.5\%$. Zakładamy stałą wartość współczynników η i μ , a modyfikować będziemy zmienną s w następujący sposób:

$$(3.94) \quad s_n = \sqrt{\left(\frac{\mu}{EI}\right)_n (\omega^2 - i\omega \frac{\eta}{\mu})} = \sqrt{\left(\frac{\mu}{EI}\right)_n \omega^2}.$$

Przemieszczenie i fazę układu niedostrojonego $k_f = 1$, przy wybranych wartościach rzędu obciążenia przedstawiono na rysunku 3.23 i 3.24 oraz 3.25, gdzie pokazano rezultaty w innej skali częstości.

Analizując uzyskane rezultaty będziemy mówić o wzbudzanych postaciach \mathcal{M}_n , \mathcal{M} , $n = 1, 2, \dots, \frac{N-1}{2}$ (lub $\frac{N}{2}$ przy parzystej liczbie łopatek) układu idealnego. Liczba n przyjmuje wartości równe rzędowi postaci drgań własnych k , np. postać $\mathcal{M}_0 = 0$ odpowiada drganiom

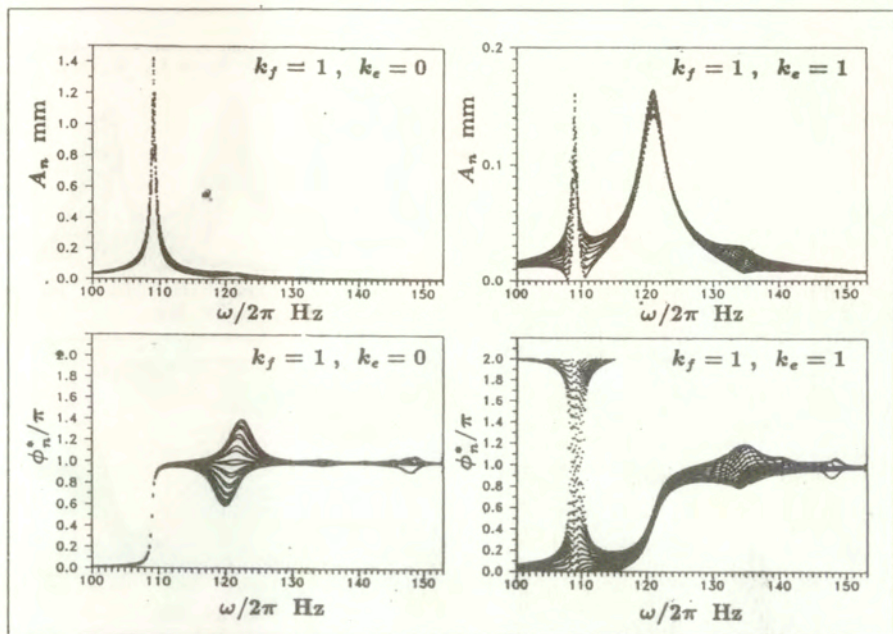


Rysunek 3.22: Przemieszczenie i faza układu idealnego przy obciążeniu rzędu $k_e = 2$ oraz $k_e = 3$.

„w fazie“ układu idealnego, $\mathcal{M}_1 = 1$ odpowiada drugiej postaci drgań własnych (por. rysunek 3.10, 3.12). Jak wynika z rezultatów przedstawionych na rysunku 3.23 i 3.24 oraz przeprowadzonej ich analizy, w każdym przypadku rozważanego rzędu obciążenia k_e wzbudzana jest postać $\mathcal{M} = k_e$ oraz inne postaci, które podano w tabeli 3.9. Jak wynika z rezultatów przedstawionych na rysunkach: 3.24, 3.25, przy częstotliwościach rezonansowych faza osiąga wartość $\frac{\pi}{2}$ lub do niej dąży, a w niektórych zakresach częstotliwości przyjmuje wartości z przedziału $2\pi < \phi_n^* < \pi$.

Rząd obciążenia	0	1	2	3
Wzbudzone postaci	0, 1	0, 1, 2	0, 1, 2, 3	0, 2, 3, 4

Tabela 3.9: Postaci wzbudzone w układzie niedostrojonym częstościowo $k_f = 1$.



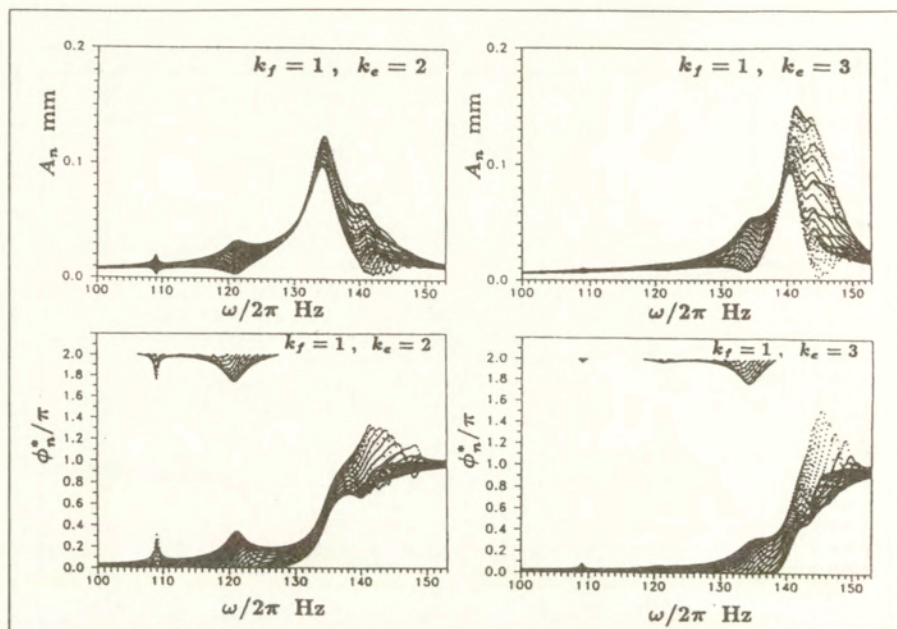
Rysunek 3.23: Przesunięcie i faza układu niedostrojonego częstotliwościowo $k_f = 1$, przy obciążeniu rzędu $k_e = 0$ oraz $k_e = 1$.

Całkowitą moc dostarczaną do układu można obliczyć za pomocą następującej zależności:

$$\begin{aligned}
 P_{total} &= \sum_{n=1}^N \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T \operatorname{Re}[F_{e(n)}] \cdot \operatorname{Re}\left[\frac{\partial w_n}{\partial t}\right] dt \right\} = \\
 &= \sum_{n=1}^N \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T F_e \cos[\omega t + k_e(n-1)\phi_0] \cdot \right. \\
 &\quad \left. (-A_n \omega) \sin[\omega t - \phi_n^* + k_e(n-1)\phi_0] dt \right\} = \\
 (3.95) \quad &= \frac{F_e \omega}{2} \sum_{n=1}^N A_n \sin \phi_n^*.
 \end{aligned}$$

gdzie $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Krzywe reprezentujące moc obliczoną za pomocą powyższego wzoru przedstawiono na rysunku 3.26. Maksima krzywych na rysunku 3.26 występują przy częstotliwości odpowiadającej obciążonej postaci $\mathcal{M} = k_e$. Przesunięcie i fazę układu niedostrojonego $k_f = 11$ i moc dostarczaną do układu przedstawiono na rysunkach: 3.27, 3.28 i 3.29, przy wybranych wartościach rzędu



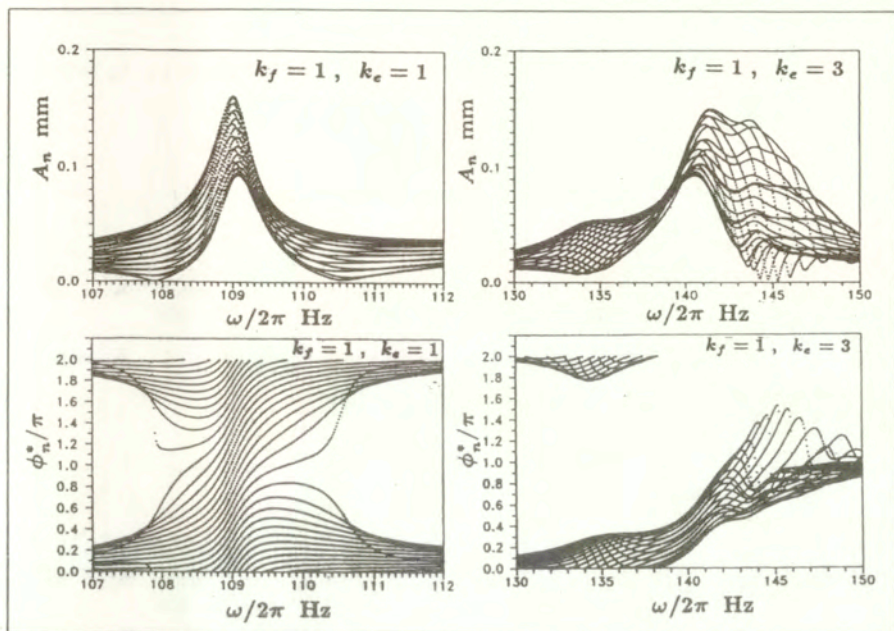
Rysunek 3.24: Przesunięcie i faza układu niedostrojonego częstościowo $k_f = 1$, przy obciążeniu rzędu $k_e = 2$ oraz $k_e = 3$.

obciążenia. Postaci wzbudzone w tym przypadku okresowego niedostrojzenia podano w tabeli 3.10.

Jak wynika z przeprowadzonej analizy rezultatów przedstawionych w tabelach: 3.9 i 3.10, w rozważanym przypadku okresowego niedostrojzenia częstościowego zachodzi następująca zależność pomiędzy wzbudzoną postacią \mathcal{M} , rzędem niedostrojzenia k_f i rzędem obciążenia k_e :

$$(3.96) \quad \mathcal{M} = 0, \quad \mathcal{M} = k_e, \quad \mathcal{M} = |k_e \pm k_f|.$$

Należy zauważyć, że wystarczy uwzględnić jedynie wartości \mathcal{M} z przedziału $\langle 0, \frac{N-1}{2} \rangle$, z uwagi na okresowość relacji dyspersyjnych zilustrowaną na rysunku 3.7.



Rysunek 3.25: Przeszczenie i faza układu niedostrojonego częstościowo $k_f = 1$, przy obciążeniu rzędu $k_e = 1$ oraz $k_e = 3$.

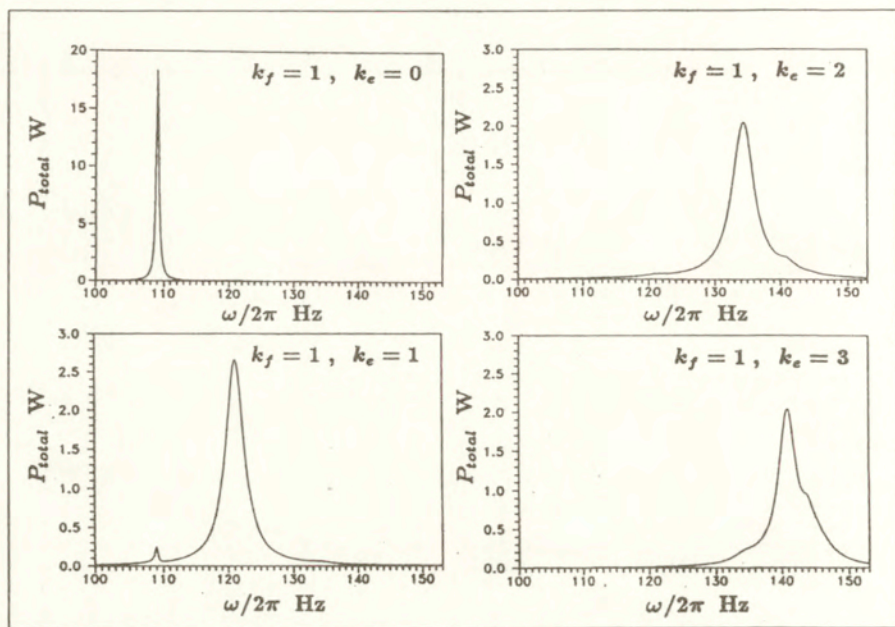
3.3. Układ o okresowym niedostrojeniu parametrów kontaktu

W tym przypadku zakładamy, że sztywność podkładu dyskretnego opisać można za pomocą następującej zależności:

$$(3.97) \quad \Delta_n \doteq q_c + i\eta_c + \Delta_c \cdot (q_c - i\eta_c) \cdot \sin k_c(n-1)\phi_0,$$

gdzie k_c jest rzędem, a Δ_c stopniem niedostrojenia kontaktu. Postać stopnia niedostrojenia $q_c - i\eta_c$ wynika z nieliniowej charakterystyki sztywności oddziaływania podkładów ciągłych. W rozpatrywanym przedziale przemieszczenia względnego pomiędzy łopatkami, wraz ze wzrostem współczynnika sprężystości q_c maleje współczynnik tłumienia η_c (rysunek 3.5). W układzie rzeczywistym zależność opisaną równaniem (3.97) można uzyskać w przypadku okresowego rozkładu mas elementów ciernych.

W przykładach przedstawionych w niniejszej pracy przyjęto $\Delta_c = 25\%$. Przeszczenie i fazę układu niedostrojonego $k_c = 1$ i $k_c = 11$ przy wybranych wartościach rzędu obciążenia

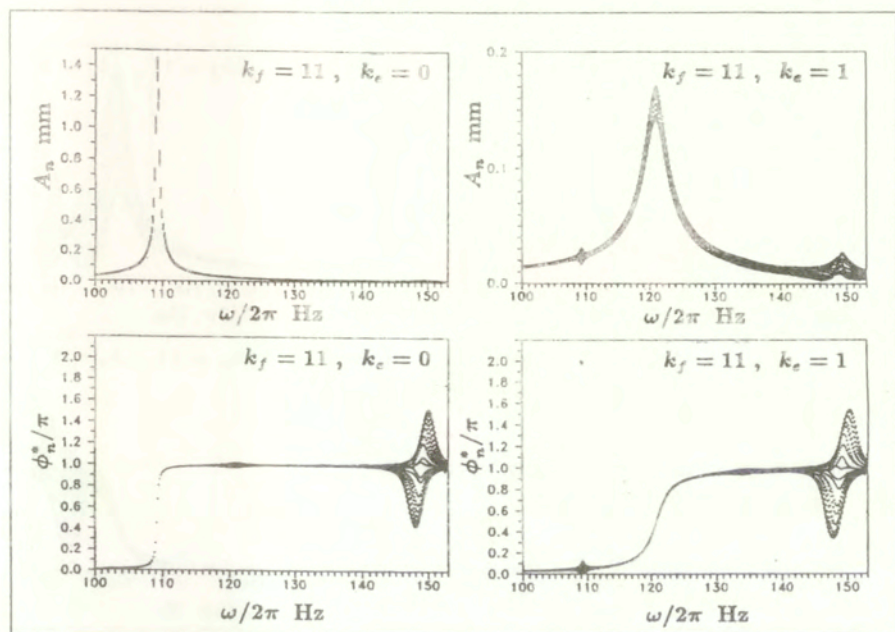


Rysunek 3.26: Moc dostarczana do układu niedostrojonego częstościowo $k_f = 1$, odpowiadające rzędów obciążenia: $k_e = 1, 2, 3$ oraz 4.

przedstawiono na rysunkach odpowiednio: 3.30 i 3.31. Jak wynika z przeprowadzonej analizy uzyskanych rezultatów, w rozważanym przypadku okresowego niedostrojenia parametrów kontaktu zachodzi następująca zależność pomiędzy wzbudzaną postacią \mathcal{M} , rzędem niedostrojenia k_f i rzędem obciążenia k_e :

$$(3.98) \quad \mathcal{M} = k_e, \quad \mathcal{M} = |k_e \pm k_f|.$$

Na zakończenie rozważań zawartych w niniejszym punkcie pracy przedstawimy rezultaty w przypadku okresowego niedostrojenia częstościowego i parametrów kontaktu. Na rysunku 3.32 przedstawiono przemieszczenie i fazę układu niedostrojonego $k_c = 1$ i $k_f = 11$ oraz układu $k_c = 11$ i $k_f = 1$ przy obciążeniu rzędu $k_e = 1$. Jak wynika z rezultatów przedstawionych na rysunku 3.32, również w tym przypadku odpowiedź dynamiczną układu charakteryzuje pewną regularność opisana za pomocą zależności (3.96) i (3.98).



Rysunek 3.27: Przeszczenie i faza układu niedostrojonego częstościowo $k_f = 11$, przy obciążeniu rzędu $k_e = 0$ oraz $k_e = 1$.

4. Przybliżona metoda analizy układów niedostrojonych

Równanie równowagi dynamicznej (3.66) ułożone w przypadku punktów kontaktu $x_{(n)} = x_{c(n)}$,

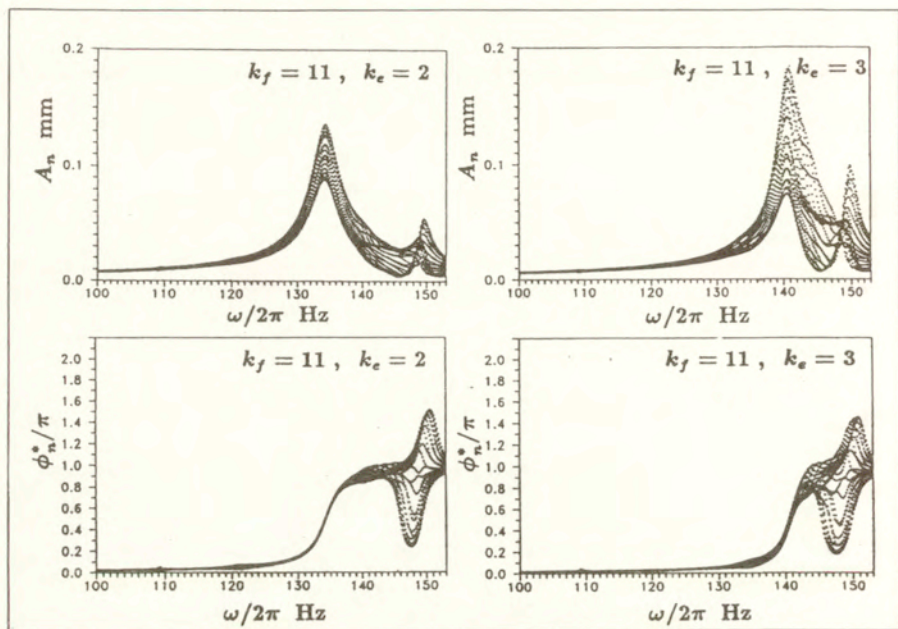
$$(3.99) \quad \left(f_1 \frac{\mu\omega^2}{s} + m\omega^2 f_2\right)_{(n)} \cdot w_n + f_{2(n)} \cdot F_{c(n)} = -f_{3(n)} \cdot F_{c(n)},$$

po podstawieniu wyrażenia na siłę w podukładzie dyskretnym (3.27), zapisać można w następującej postaci:

$$(3.100) \quad K_{B(n)} \cdot w_n + f_{2(n)} K_{C(n)} \cdot (w_{n+1} - w_n) + f_{2(n-1)} K_{C(n-1)} \cdot (w_{n-1} - w_n) = f_{3(n)} \cdot F_n.$$

W równaniu (3.100)

$$(3.101) \quad K_{B(n)} = -\left(f_1 \frac{\mu\omega^2}{s} + m\omega^2 f_2\right)_{(n)},$$



Rysunek 3.28: Przesunięcie i faza układu niedostrojonego częstościowo $k_f = 11$, przy obciążeniu rzędu $k_e = 2$ oraz $k_e = 3$.

jest sztywnością dynamiczną podukładu ciągłego w punkcie $\mathbf{x}(n) = \mathbf{x}_{c(n)}$, przez

$$(3.102) \quad K_{C(n)} = -(q_{c(n)} + \eta_{c(n)}) \cos^2 \alpha$$

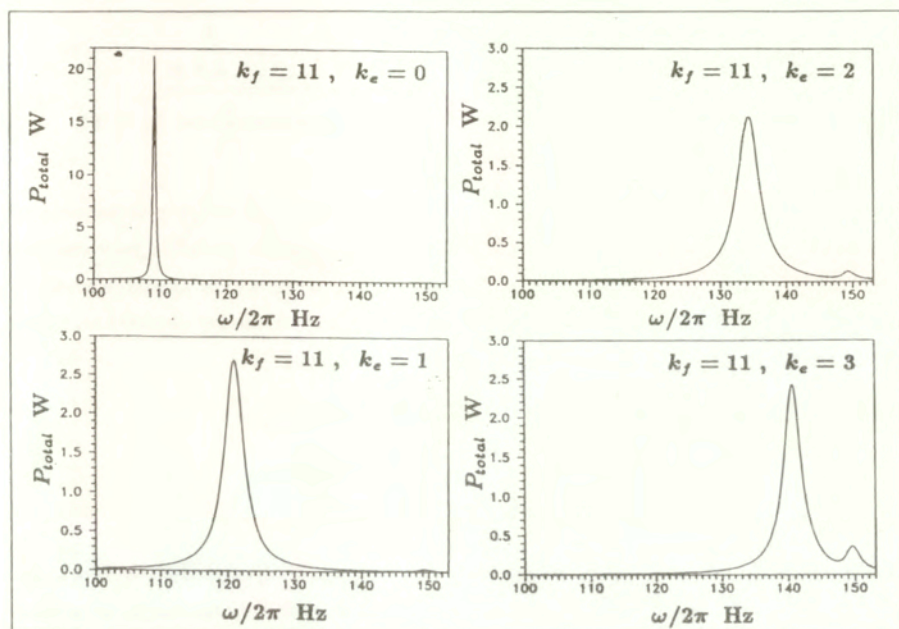
oznaczono sztywność podukładu dyskretnego, a $F_n = F_{e(n)}$ siłą działającą na n -ty podukład ciągły.

W przypadku N podukładów ciągłych otrzymujemy układ N równań o postaci (3.101). Zależność (3.101) zapiszemy w funkcji ciągłej zmiennej ϕ w następującej formie:

$$(3.103) \quad \begin{aligned} K_B(\phi) \cdot w(\phi) + f_2(\phi) K_C(\phi) \cdot [w(\phi + \phi_0) - w(\phi)] + \\ + f_2(\phi - \phi_0) K_C(\phi - \phi_0) \cdot [w(\phi - \phi_0) - w(\phi)] = f_3(\phi) \cdot F(\phi), \end{aligned}$$

gdzie ϕ_0 jest kątem pomiędzy sąsiadującymi podukładami ciągłymi.

W dalszych rozważaniach będziemy badać równanie (3.103), przy czym wartości liczbowe wielkości tam występujące będziemy mierzyć w skończonej liczbie punktów N . Z uwagi na



Rysunek 3.29: Moc dostarczana do układu niedostrojonego częstościowo $k_f = 11$, przy obciążeniu rzędu: $k_e = 1, 2, 3$ oraz 4.

okresowość rozważanego układu, zachodzą następujące zależności:

$$(3.104) \quad \begin{aligned} w(\phi) &= w(\phi + 2\pi), & K_B(\phi) &= K_B(\phi + 2\pi), & K_C(\phi) &= K_C(\phi + 2\pi), \\ F(\phi) &= F(\phi + 2\pi), & f_j(\phi) &= f_j(\phi + 2\pi), & j &= 2, 3. \end{aligned}$$

4.1. Układ o okresowym niedostrojeniu częstościowym

4.1.1. Zależność sztywności dynamicznej $K_B(\phi)$ od rzędu niedostrojenia

Rozważymy teraz przypadek okresowej zmiany pierwszej częstości drgań własnych podukładu ciągłego, którą opisać można za pomocą następującej relacji:

$$(3.105) \quad \omega_0(\phi) = \omega_{0(0)} \cdot (1 + \Delta_\omega \sin k_f \phi),$$

przyjmując do dalszych rozważań $\Delta_\omega = 2.5\%$.

Sztywność dynamiczną $K_B(\phi)$ w funkcji częstości ω układu czysto sprężystego ($\delta_l = 0$) i

Rząd obciążenia	0	1	2	3
Wzbudzone postaci	0, 11	0, 1, 11	0, 2, 9, 10	0, 3, 8, 9

Tabela 3.10: Postaci wzbudzone w układzie niedostrojonym częstościowo $k_f = 11$.

przypadku $k_f = 1$ przedstawiono na rysunku 3.33. Jak wynika z rezultatów przedstawionych na rysunku 3.33, sztywność dynamiczna $K_B(\phi)$ przyjmuje wartości dodatnie przy częstości mniejszej od częstości drgań własnych podukładu ciągłego $\omega < \omega_n$, a ujemne wartości w przypadku przeciwnym $\omega > \omega_n$. Funkcję $K_B = K_B(\phi)$ przy określonej częstości ω , można aproksymować za pomocą następującej zależności:

$$(3.106) \quad K_B(\phi) = K_{B(0)} \cdot (1 + \Delta_{K_B} \sin k_f \phi),$$

gdzie

$$(3.107) \quad \Delta_{K_B} = \frac{K_{B(max)} - K_{B(min)}}{2K_{B(0)}}.$$

W równaniu (3.106) $K_{B(0)}$ jest średnią wartością sztywności dynamicznej, a $K_{B(max)}$ i $K_{B(min)}$ odpowiednio jej maksymalną i minimalną wartością. Należy zauważyć, że wielkość K_B jest nie tylko funkcją kąta ϕ , lecz także częstości ω

$$(3.108) \quad K_B(\phi, \omega) = K_{B(0)}(\omega) \cdot [1 + \Delta_{K_B}(\omega) \sin k_f \phi],$$

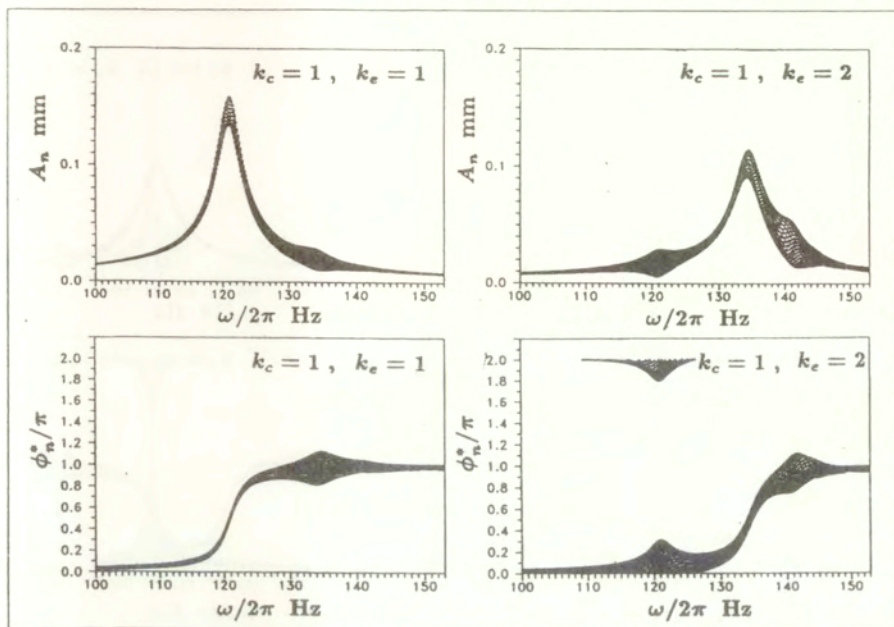
Sztywność dynamiczną i jej aproksymację (3.108) (linia ciągła) odpowiadającą wybranym częstościom ω przedstawiono na rysunku 3.34. W układzie lepkosprężystym $\delta_l > 0$ sztywność dynamiczna K_B przyjmuje zespolone wartości. Również w tym przypadku można ją aproksymować za pomocą relacji (3.108), co zilustrowano na rysunku 3.35. Jak wynika z przeprowadzonej analizy, w przypadku okresowego niedostrojenia częstościowego, przebieg funkcji $f_j(\phi)$, $j = 1, 2$, można również przybliżać za pomocą zależności o postaci (3.108) w następujący sposób:

$$(3.109) \quad f_j(\phi, \omega) = f_{j(0)}(\omega) \cdot [1 + \Delta_{f_j}(\omega) \sin k_f \phi],$$

gdzie

$$(3.110) \quad \Delta_{f_j}(\omega) = \frac{f_{j(max)}(\omega) - f_{j(min)}(\omega)}{2f_{j(0)}(\omega)}, \quad j = 2, 3.$$

Część rzeczywistą funkcji $f_{j(n)}$, $j = 2, 3$ i jej aproksymację $f_j(\phi)$ (linia ciągła) odpowiadającą wybranym częstościom ω przedstawiono na rysunku 3.36.



Rysunek 3.30: Przesunięcie i faza układu niedostrojonego $k_f = 1$, przy obciążeniu rzędu $k_e = 1$ oraz $k_e = 2$.

4.1.2. Uwagi o drganiach własnych układu o okresowym niedostrojeniu częstotściowym

W przypadku drgań swobodnych, przy założeniu $f_2(\phi) \approx \text{const.}$, równanie (3.103) można zapisać w następującej, przybliżonej postaci:

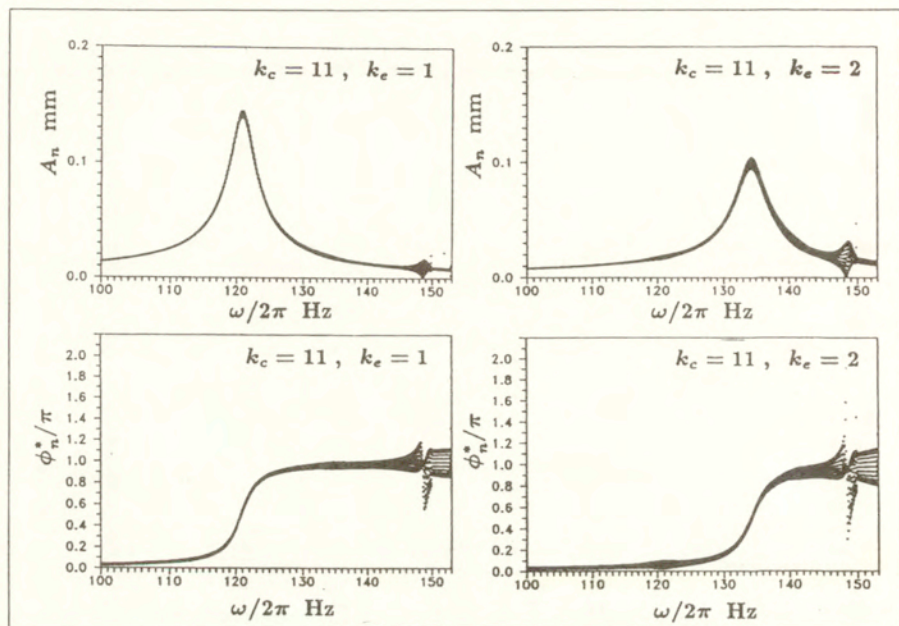
$$(3.111) \quad \frac{\Delta^2 w}{(\Delta\phi)^2} + \tilde{K}_B(\phi) w(\phi) = 0,$$

gdzie

$$(3.112) \quad \begin{aligned} \Delta^2 w &= w(\phi + \phi_0) - 2w(\phi) + w(\phi - \phi_0) \\ (\Delta\phi)^2 &= \phi_0^2, \quad \tilde{K}_B(\phi) = \frac{K_B(\phi)}{f_2 K_C}. \end{aligned}$$

W przypadku okresowej zmiany sztywności $K_B(\phi)$ otrzymujemy

$$(3.113) \quad \frac{\Delta^2 w}{(\Delta\phi)^2} + \tilde{K}_{B(0)} \cdot (1 + \Delta K_B \cos k_f \phi) \cdot w(\phi) = 0,$$



Rysunek 3.31: Przesunięcie i faza układu niedostrojonego $k_c = 11$, przy obciążeniu rzędu $k_e = 1$ oraz $k_e = 2$.

Zależność (3.113) może być interpretowana jako różnicowe równanie Mathieu (por. rysunek 3.20), którego rozwiązania można poszukiwać w następującej postaci [188]:

$$(3.114) \quad w(\phi) = \sum_{-\infty}^{\infty} w_n e^{in\phi}.$$

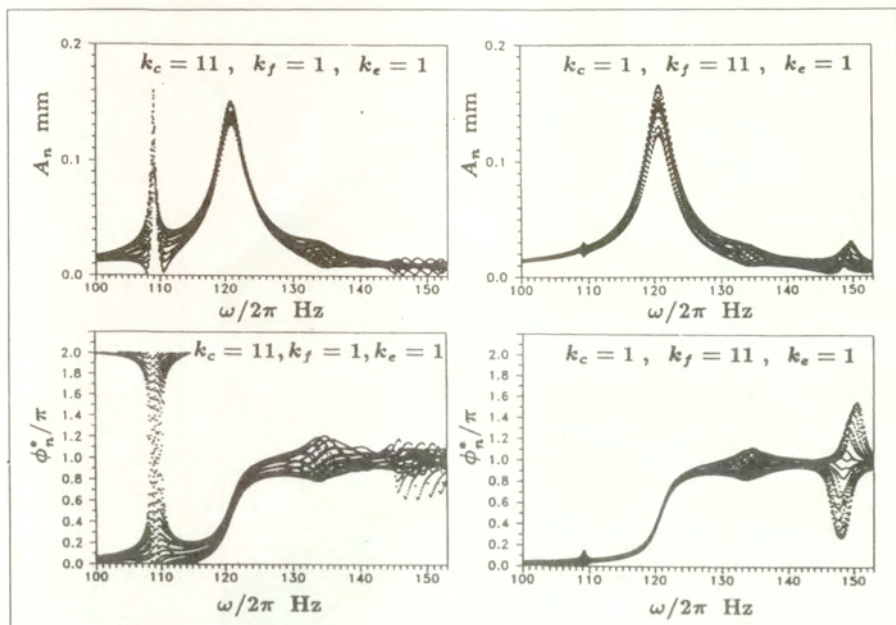
W rozważanym przypadku mierzymy przesunięcia $w(\phi)$ w N punktach, dlatego też wystarczy uwzględnić jedynie N wyrazów szeregu (3.114), gdyż przy $\bar{n} = n + N$ mamy

$$(3.115) \quad e^{in\phi} = e^{i\bar{n}m\phi_0} = e^{i\bar{n}m\frac{2\pi}{N}} = e^{i(n+N)m\frac{2\pi}{N}} = e^{inm\phi_0} \cdot e^{im2\pi} = e^{in\phi}.$$

4.1.3. Rozwiązanie za pomocą szeregów Fouriera

W przypadku skończonej liczby N podukładów ciągłych, rozkład częstotści pierwszej postaci drgań własnych przedstawić w następującej formie:

$$(3.116) \quad \omega_0(\phi) = \omega_0^{(0)} + \sum_{k_f=1}^M (\omega_0^{(k_f)} e^{ik_f\phi} + \bar{\omega}_0^{(k_f)} e^{-ik_f\phi}), \quad M = \frac{N-1}{2},$$



Rysunek 3.32: Przesunięcie i faza układu niedostrojonego $k_c = 1$ i $k_f = 11$ oraz układu $k_c = 11$ i $k_f = 1$, przy obciążeniu rzędu $k_e = 1$.

przy nieparzystej liczbie N oraz

$$(3.117) \quad \omega_0(\phi) = \omega_0^{(0)} + \omega_0^{(\frac{N}{2})} e^{i\frac{N}{2}\phi} + \sum_{k_f=1}^{M-1} (\omega_0^{(k_f)} e^{ik_f\phi} + \bar{\omega}_0^{(k_f)} e^{-ik_f\phi}), \quad M = \frac{N}{2},$$

przy parzystej liczbie N .

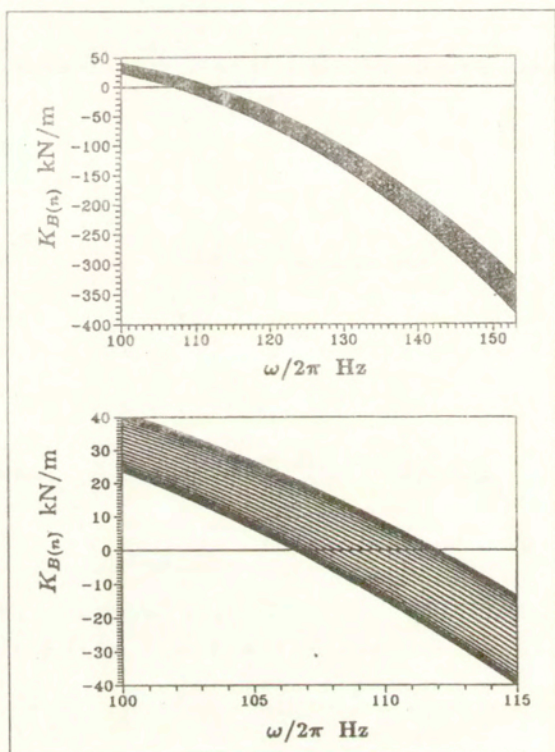
Zakładamy, że każdej częstotliwości ω , funkcje występujące w równaniu (3.103) można przedstawić w następującej postaci:

$$(3.118) \quad K_B(\phi) = K_B^{(0)} + \sum_{k_f=1}^M (K_B^{(k_f)} e^{ik_f\phi} + \bar{K}_B^{(k_f)} e^{-ik_f\phi}),$$

$$(3.119) \quad f_j(\phi) = f_j^{(0)} + \sum_{k_f=1}^M (f_j^{(k_f)} e^{ik_f\phi} + \bar{f}_j^{(k_f)} e^{-ik_f\phi}), \quad j = 2, 3,$$

przy nieparzystej liczbie N oraz

$$(3.120) \quad K_B(\phi) = K_B^{(0)} + K_B^{(\frac{N}{2})} e^{i\frac{N}{2}\phi} + \sum_{k_f=1}^{M-1} (K_B^{(k_f)} e^{ik_f\phi} + \bar{K}_B^{(k_f)} e^{-ik_f\phi}),$$



Rysunek 3.33: Sztywność dynamiczna $K_{B(n)}$ przy $k_f = 1$ i $\delta_t = 0$ w funkcji częstotliwości ω .

$$(3.121) \quad f_j(\phi) = f_j^{(0)} + f_j^{(\frac{N}{2})} e^{i\frac{N}{2}\phi} + \sum_{k_f=1}^{M-1} (f_j^{(k_f)} e^{ik_f\phi} + \bar{f}_j^{(k_f)} e^{-ik_f\phi}),$$

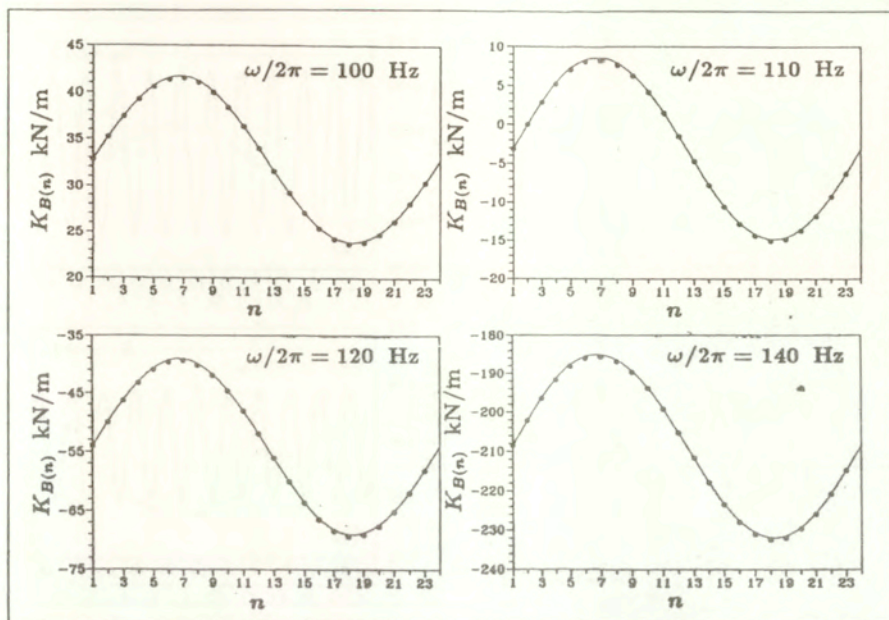
przy parzystej liczbie N .

W dalszych rozważaniach zakładamy, że obciążenie zewnętrzne składa się z sumy fal bieżących, a funkcję $F(\phi)$ można przedstawić w następującej formie:

$$(3.122) \quad F(\phi) = \sum_{k_e=-M}^M f^{*(k_e)} e^{ik_e\phi},$$

przy nieparzystej liczbie N oraz

$$(3.123) \quad F(\phi) = \sum_{k_e=-M+1}^M f^{*(k_e)} e^{ik_e\phi},$$



Rysunek 3.34: Sztywność dynamiczna $K_{B(n)}$ i jej aproksymacja $K_B(\phi)$ przy $k_f = 1$, $\delta_t = 0$ i wybranych częstotliwości ω .

przy parzystej liczbie N .

Rozwiązania równania (3.103) będziemy poszukiwać w następującej postaci:

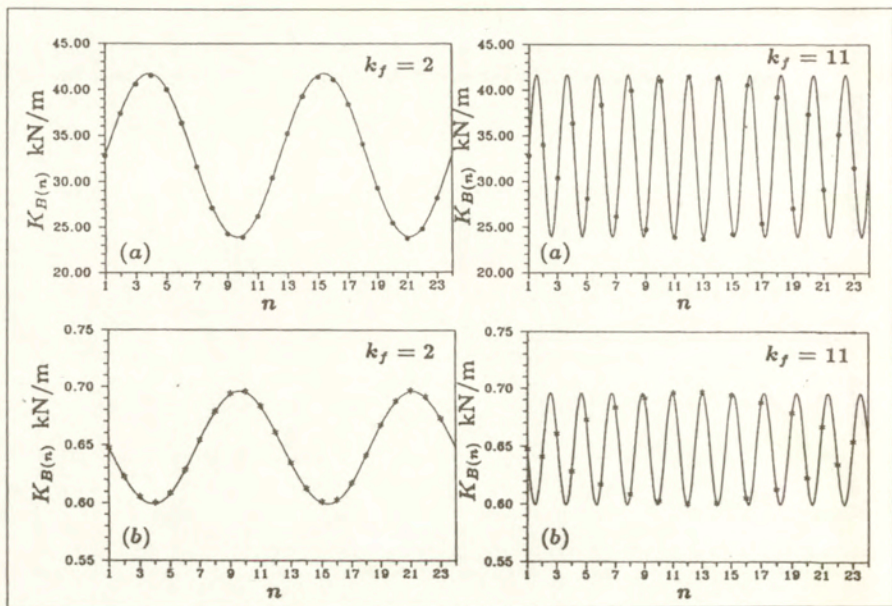
$$(3.124) \quad w(\phi) = \sum_{n=-M}^M w^{(n)} e^{in\phi},$$

przy nieparzystej liczbie N oraz

$$(3.125) \quad w(\phi) = \sum_{n=-M+1}^M w^{(n)} e^{in\phi},$$

przy parzystej liczbie N .

Rozwiązanie o postaci (3.124) lub (3.125) może być również interpretowane jako superpozycja fal bieżących w idealnej strukturze periodycznej (porównaj zależności: (3.40), (3.41)). Z uwagi na fakt, że zależność (3.124) lub (3.125) przedstawia sumę postaci drgań własnych układu idealnego, w dalszej części niniejszej pracy będziemy metodę przybliżoną określać określać mianem „metody modalnej“.



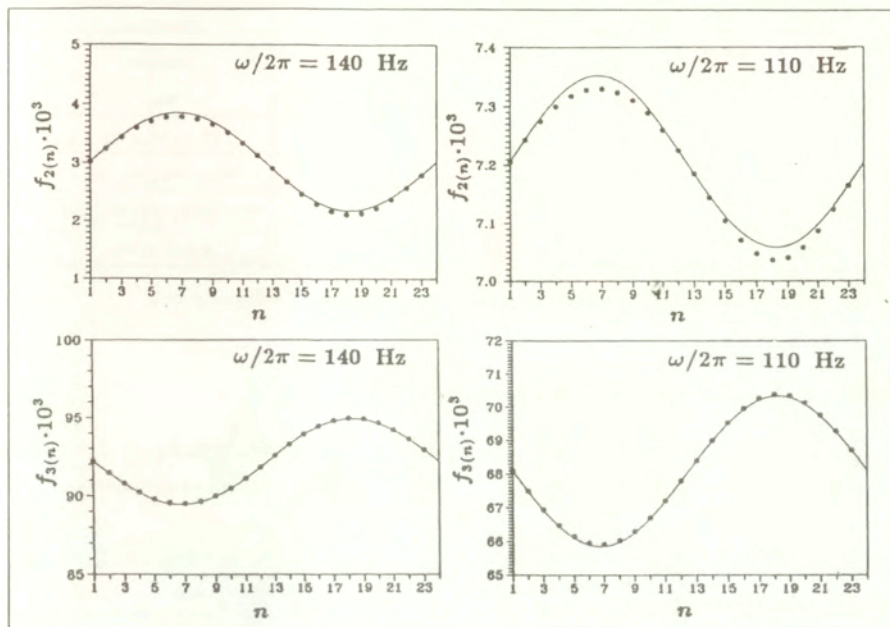
Rysunek 3.35: Sztywność dynamiczna $K_{B(n)}$ i jej aproksymacja $K_B(\phi)$ przy $k_f = 1$, $k_f = 11$ i częstotliwości $\omega/2\pi = 100$ Hz, (a) – część rzeczywista, (b) – część zespolona.

Po podstawieniu powyższych wyrażeń na funkcje występujące w równaniu (3.103) (w którym dodatkowo zakładamy $K_C(\phi) = K_C = \text{const.}$) i po przyrównaniu wyrażeń przy jednakowych potęgach funkcji ($e^{i\phi}$) $^m = e^{im\phi}$, otrzymujemy m następujących zależności:

$$\begin{aligned}
 & [K_B^{(0)} + 2f_2^{(0)} K_C (\cos n_0\phi_0 - 1)] \cdot w^{(m)} \cdot \delta_{n_0, m} + \\
 & + \sum_{k_f} [\gamma^{(k_f, m)} \cdot w^{(n_1)} \cdot \delta_{n_1, m-k_f} + \gamma^{(k_f, m)} \cdot w^{(n_2)} \cdot \delta_{n_2, m-k_f+N} + \\
 (3.126) \quad & + \bar{\gamma}^{(k_f, m)} \cdot w^{(n_3)} \cdot \delta_{n_3, m+k_f} + \bar{\gamma}^{(k_f, m)} \cdot w^{(n_4)} \cdot \delta_{n_4, m+k_f-N}] = f_3^{(0)} \cdot f^{*(m)} + \\
 & + \sum_{k_f} [f_3^{(k_f)} \cdot f^{*(n_1)} \cdot \delta_{n_1, m-k_f} + f_3^{(k_f)} \cdot f^{*(n_2)} \cdot \delta_{n_2, m-k_f+N} + \\
 & + \bar{f}_3^{(k_f)} \cdot f^{*(n_3)} \cdot \delta_{n_3, m+k_f} + \bar{f}_3^{(k_f)} \cdot f^{*(n_4)} \cdot \delta_{n_4, m+k_f-N}],
 \end{aligned}$$

gdzie

$$(3.127) \quad \delta_{a,b} = \begin{cases} 1 & \text{przy } a = b \\ 0 & \text{przy } a \neq b \end{cases}, \quad a, b \text{ liczby całkowite,}$$



Rysunek 3.36: Funkcje $f_{j(n)}(\phi)$, $j = 2, 3$ i ich aproksymacje $\bar{f}_j(\phi)$ przy $k_f = 1$ i wybranych częstotliwości ω .

$$(3.128) \quad \begin{aligned} m, n_j &\in \langle -M, M \rangle, & j &= 1, 2, 3, 4, \text{ przy nieparzystych } N, \\ m, n_j &\in \langle -M + 1, M \rangle, & j &= 1, 2, 3, 4, \text{ przy parzystych } N, \end{aligned}$$

$$(3.129) \quad \begin{aligned} \gamma^{(k_f, m)} &= K_B^{(k_f)} + f_2^{(k_f)} K_C \cdot (1 - e^{im\phi_0}) \cdot (e^{-im\phi_0} - e^{-ik_f\phi_0}), \\ \bar{\gamma}^{(k_f, m)} &= \bar{K}_B^{(k_f)} + \bar{f}_2^{(k_f)} K_C \cdot (1 - e^{im\phi_0}) \cdot (e^{-im\phi_0} - e^{ik_f\phi_0}). \end{aligned}$$

Jak wynika z postaci równania (3.126), poszukiwanie rozwiązań układu niedostrojonego w formie opisanej za pomocą zależności (3.124) lub (3.125), nie pozwala na uzyskanie niezależnych od siebie równań na współczynniki $w^{(n)}$, tak jak ma to miejsce w przypadku klasycznej metody analizy modalnej. Wynika to z faktu, że funkcje w zależnościach: (3.124) i (3.125) nie są postaciami drgań własnych układu niedostrojonego. Jednak równanie (3.129) dostarcza istotnych informacji o wzbudzanych postaciach w układzie niedostrojonym, co w pewnych przypadkach pozwala na zmniejszenie liczby równań, których rozwiązanie jest niezbędne do określenia odpowiedzi dynamicznej układu.

Rząd obciążenia k_e	niejednorodne równanie typu (3.126) przy m równym	liczba M rozwiązywanych równań typu (3.126)	określone postaci w_m
0	-1, 0, 1	3	w_{-1}, w_0, w_1
1	0, 1, 2	4	w_{-1}, w_0, w_1, w_2
2	1, 2, 3	5	$w_{-1}, w_0, w_1, w_2, w_3$
3	2, 3, 4	3	w_2, w_3, w_4

Tabela 3.11: Przybliżone rozwiązanie w przypadku układu $k_f = 1$.

4.1.4. Rozwiązania w przypadku układu $k_f = 1$

Rozważmy układ $N = 23$ o rzędzie niedostrojenia częstościowego $k_f = 1$ i stopniu niedostrojenia $\Delta_\omega = 2.5\%$. Po porównaniu zależności (3.108) i (3.118) otrzymujemy

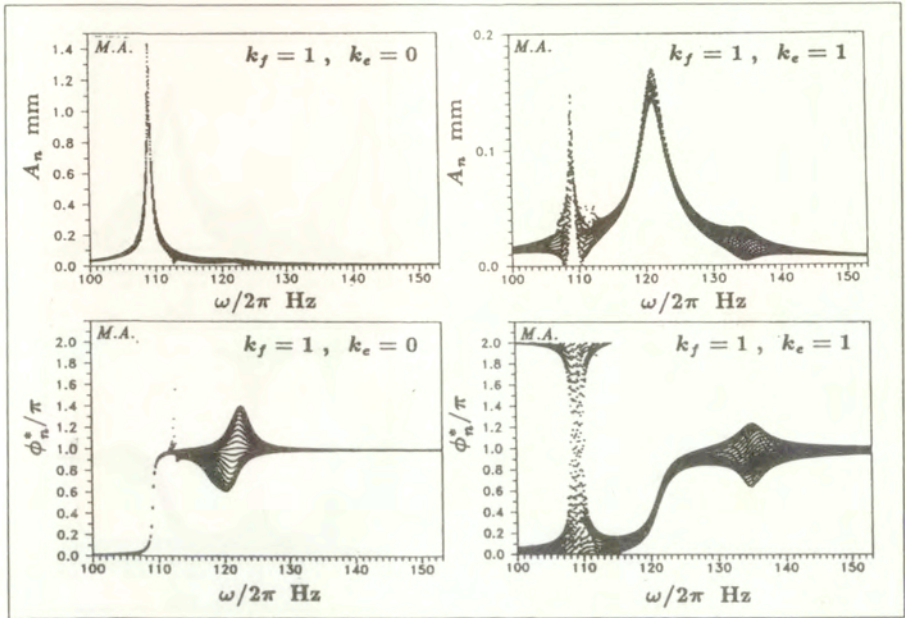
$$(3.130) \quad \begin{aligned} K_B(\phi) &= K_B^{(0)} + K_B^{(1)} e^{i\phi} + \bar{K}_B^{(1)} e^{-i\phi}, \\ K_B(\phi) &= K_B^{(0)} + K_B^{(0)} \frac{\Delta_\omega}{2i} e^{i\phi} + K_B^{(0)} \frac{\Delta_\omega}{2i} e^{-i\phi}. \end{aligned}$$

Sposób uzyskania przybliżonego rozwiązania przy wybranych wartościach rzędu obciążenia k_e zilustrowano w tabeli 3.11. Przemieszczenie i fazę w punktach $\mathbf{x}_{(n)} = \mathbf{x}_{e(n)}$ uzyskane za pomocą metody modalnej w przypadkach: $k_e = 0$ i $k_e = 1$, przedstawiono na rysunku 3.37. Jak wynika z porównania rezultatów przedstawionych na rysunkach: 3.23, 3.37, wyniki uzyskane za pomocą metody globalnej (za pomocą rozwiązania układu równań (3.74)) i metody modalnej są jakościowo podobne. Przemieszczenie i fazę w punktach $\mathbf{x}_{(n)} = \mathbf{x}_{c(n)}$, uzyskane za pomocą metody modalnej (M.A.) i globalnej (M.G.) przy obciążeniu rzędu $k_e = 2$ i $k_e = 3$, przedstawiono na rysunkach odpowiednio: 3.38 i 3.39. W przypadku $k_e = 3$, za pomocą metody modalnej nie określano postaci w_1, w_0, w_1 (tabela 3.11).

4.2. Układ o okresowym niedostrojeniu parametrów kontaktu

W tym przypadku zakładamy, że funkcję sztywności kontaktu $K_C = K_C(\phi)$, występującą w równaniu (3.103), można przedstawić w następującej postaci:

$$(3.131) \quad K_C(\phi) = K_C^{(0)} + \sum_{k_c=1}^M (K_C^{(k_c)} e^{ik_c\phi} + \bar{K}_C^{(k_c)} e^{-ik_c\phi}),$$



Rysunek 3.37: Przesunięcie i faza w punktach $x_{(n)} = x_{e(n)}$ w układzie $k_f = 1$, w przypadku $k_e = 0$ i $k_e = 1$, uzyskane za pomocą metody modalnej.

przy nieparzystej liczbie N oraz

$$(3.132) \quad K_C(\phi) = K_C^{(0)} + K_C^{(\frac{N}{2})} e^{i\frac{N}{2}\phi} + \sum_{k_c=1}^{M-1} (K_C^{(k_c)} e^{ik_c\phi} + \bar{K}_C^{(k_c)} e^{-ik_c\phi}),$$

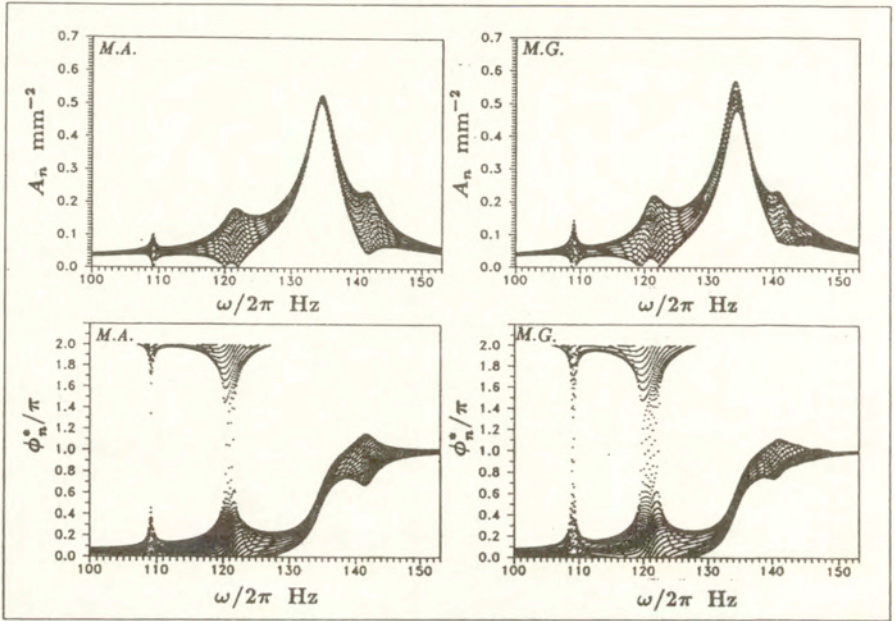
przy parzystej liczbie N .

Po podstawieniu powyższych zależności oraz relacji (3.122)-(3.125) do równania (3.103), w którym

$$(3.133) \quad K_B(\phi) = K_B = \text{const.}, \quad f_j(\phi) = f_j = \text{const.}, \quad j = 2, 3,$$

otrzymujemy

$$(3.134) \quad [K_B + 2f_2 K_C^{(0)} (\cos n_0\phi_0 - 1)] \cdot w^{(m)} \cdot \delta_{n_0,m} + \\ + \sum_{k_c} [\beta^{(k_c,m)} \cdot w^{(n_1)} \cdot \delta_{n_1,m-k_c} + \beta^{(k_c,m)} \cdot w^{(n_2)} \cdot \delta_{n_2,m-k_c+N} + \\ + \bar{\beta}^{(k_c,m)} \cdot w^{(n_3)} \cdot \delta_{n_3,m+k_f} + \bar{\beta}^{(k_c,m)} \cdot w^{(n_4)} \cdot \delta_{n_4,m+k_c-N}] = f_3 \cdot f^{*(m)},$$



Rysunek 3.38: Przemieszczenie i faza w punktach $x_{(n)} = x_{c(n)}$ w układzie $k_f = 1$, w przypadku $k_e = 2$, uzyskane za pomocą metody modalnej (M.A.) i metody globalnej (M.G.).

gdzie

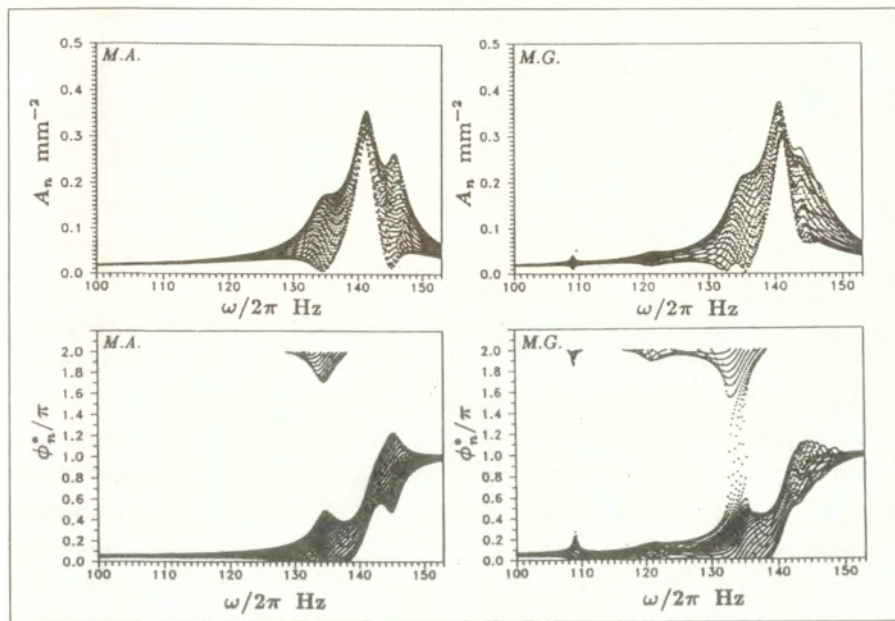
$$\begin{aligned}
 \beta^{(k_c, m)} &= f_2 K_C^{(k_c)} \cdot (1 - e^{im\phi_0}) \cdot (e^{-im\phi_0} - e^{-ik_c\phi_0}) \\
 \bar{\beta}^{(k_c, m)} &= f_2 \bar{K}_C^{(k_c)} \cdot (1 - e^{im\phi_0}) \cdot (e^{-im\phi_0} - e^{ik_c\phi_0}),
 \end{aligned}
 \tag{3.135}$$

przy czym wielkości $\delta_{a,b}$, m , n_j określone są za pomocą wzorów: (3.127), (3.128).

4.2.1. Rozwiązania w przypadku układu $k_c = 1$

Rozważmy układ $N = 23$ o rzędzie niedostrojenia $k_c = 1$ i stopniu niedostrojenia $\Delta_q = 25.0\%$. Po porównaniu zależności (3.97) i (3.131) otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 K_C(\phi) &= K_C^{(0)} + K_C^{(1)} e^{i\phi} + \bar{K}_C^{(1)} e^{-i\phi}, \\
 K_C(\phi) &= q_c + i\eta_c + \Delta_q \frac{q_c - i\eta_c}{2i} e^{i\phi} + \Delta_q \frac{q_c - i\eta_c}{2i} e^{-i\phi}.
 \end{aligned}
 \tag{3.136}$$



Rysunek 3.39: Przesunięcie i faza w punktach $\mathbf{x}_{(n)} = \mathbf{x}_{c(n)}$ w układzie $k_f = 1$ w przypadku $k_e = 3$, uzyskane za pomocą metody modalnej (M.A.) i metody globalnej (M.G.).

Sposób uzyskania przybliżonego rozwiązania odpowiadającego wybranym wartościom rzędu obciążenia k_e zilustrowano w tabeli 3.12. Przesunięcie i fazę w punktach $\mathbf{x}_{(n)} = \mathbf{x}_{c(n)}$, uzyskane za pomocą metody modalnej (M.A.) i globalnej (M.G.) w przypadkach: $k_e = 2$ i $k_e = 3$, przedstawiono na rysunkach odpowiednio: 3.40 i 3.41. Jak wynika z porównania rezultatów tam przedstawionych, wyniki uzyskane za pomocą metody globalnej (3.74) i metody modalnej są jakościowo podobne. W przypadku układu badanego za pomocą metody modalnej nie brano pod uwagę postaci w_0 (tabela 3.12).

5. Wnioski do rozdziału trzeciego

W drugim punkcie niniejszego rozdziału rozważono drgania swobodne układów idealnie sprężystych. Rozważania dotyczące układu nieskończonego pozwalają na oczacowanie zakresów częstości, w których występują częstości drgań własnych układu rzeczywistego. Występują one

Rząd obciążenia k_e	niejednorodne równanie typu (3.126) przy m równym	liczba M rozwiązywanych równań typu (3.126)	określone postaci w_m
2	2	3	w_1, w_2, w_3
3	3	3	w_2, w_3, w_4

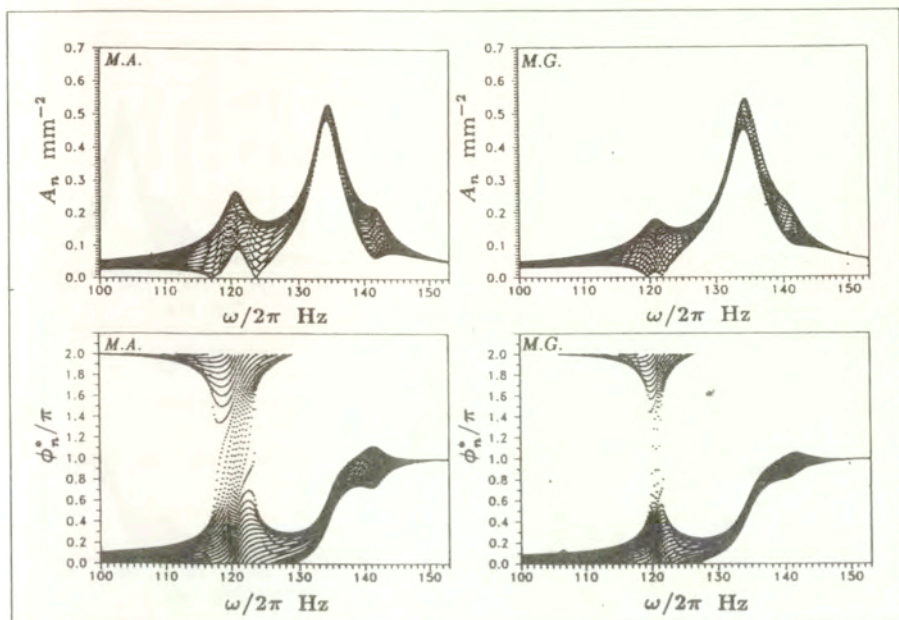
Tabela 3.12: Przybliżone rozwiązanie w przypadku układu $k_c = 1$.

w pasmach przenoszenia, a ich wartości można oszacować za pomocą przedstawionej metody graficznej, która w przypadku układów periodycznych rozmieszczonych wzdłuż prostej została omówiona w pracach [155, 114].

Częstości drgań własnych układu idealnie periodycznego obliczono dwoma sposobami. Pierwszy z nich, stosowany przez wielu autorów, polega na założeniu stałej wartości różnicy fazowej w przemieszczeniach sąsiadujących komórek i sprowadzeniu problemu do analizy jednej komórki. Za pomocą drugiego podejścia obliczono częstości z wyznacznika jednorodnego układu równań opisującego cały układ. Wyznacznik ten jest równy zeru w $\frac{N-1}{2}$ punktach, w których osiąga minimum, poza jednym punktem przy częstości odpowiadającej drganiom w fazie całego układu. Z uwagi na fakt, że w układzie o N stopniach swobody występuje N postaci drgań własnych (w jednym paśmie przenoszenia), punkty minimum można uważać za miejsce występowania podwójnych wartości częstości własnych. Wynika to z faktu, że w układzie idealnym nie występuje różnica pomiędzy postacią sinusową i cosinusową drgań własnych (występują one przy tej samej częstości). W układzie o małym niedostrojeniu w miejsce jednej „podwójnej“ częstości występują dwie różne co do wartości częstości drgań własnych.

W przypadku okresowego niedostrojenia, zarówno częstościowego jak i parametrów kontaktu, przy niektórych częstościach można zaobserwować nakładanie się postaci odpowiadającej rzędowi niedostrojenia na przemieszczenia odpowiadające postaci układu idealnego. W przypadku zaburzenia idealnej struktury pojedynczym elementem obcym (np. komórką o różnej od pozostałych częstości drgań własnych) możliwe jest występowanie lokalizacji drgań w pobliżu elementu obcego.

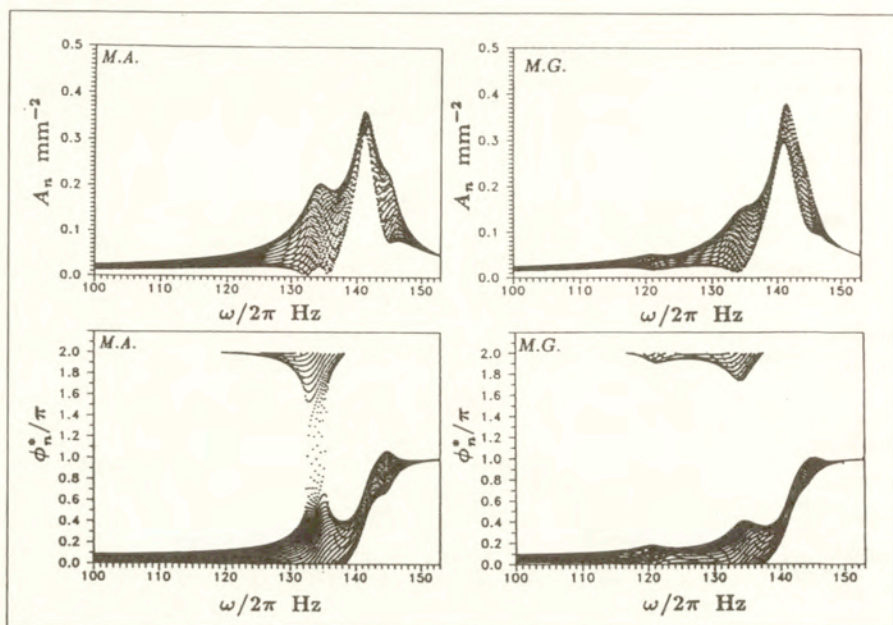
Drgania wymuszone rozpatrzono w przypadku układu idealnego oraz układów o okresowym niedostrojeniu parametrów. Odpowiedź dynamiczna układów o okresowym niedostrojeniu charakteryzuje pewna regularność. Polega ona na występowaniu zależności pomiędzy rzędem obciążenia i rzędem niedostrojenia a wzbudzonymi postaciami drgań. Należy zazna-



Rysunek 3.40: Przemieszczenie i faza w punktach $x_{(n)} = x_{c(n)}$ w układzie $k_c = 1$, w przypadku $k_c = 2$, uzyskane za pomocą metody modalnej (M.A.) i metody globalnej (M.G.).

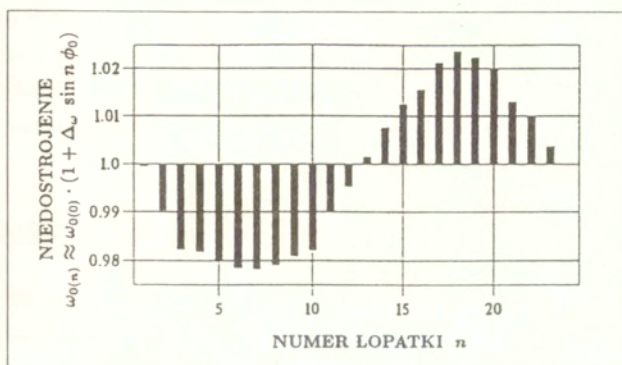
czyć, że ta własność układów niedostrojonych nie była opisana w literaturze przed ogłoszeniem pracy [77]. Przedstawiona w pracy przybliżona metoda analizy, polegająca na poszukiwaniu rozwiązań w postaci sumy postaci drgań własnych układu idealnego pozwala na zweryfikowanie zależności uzyskanych za pomocą metody globalnej. W układzie złożonym ze skończonej liczby N elementów, przy znanej jego konfiguracji, niedostrojenie można rozwinąć w szeregi Fouriera. Znając dominujące współczynniki rozkładu (rzędy niedostrojenia) można oszacować wartości wzbudanych częstości drgań własnych. Ponadto, gdy znane są wartości parametrów N elementów układu (na przykład częstości drgań własnych łopatek) można poszukiwać takiej konfiguracji elementów w układzie, która zapewni, że częstości rezonansowe będą różnić się w dostatecznie dużym stopniu od częstości wymuszenia (na przykład częstości ruchu obrotowego turbiny). Jest to ważny wniosek z punktu widzenia zastosowań praktycznych.

Przedstawiony w niejszej pracy cykliczny układ periodyczny zbudowany jest z komórek modelowanych liniowym układem ciągłym, które oddziałują ze sobą liniowo za pomocą ele-

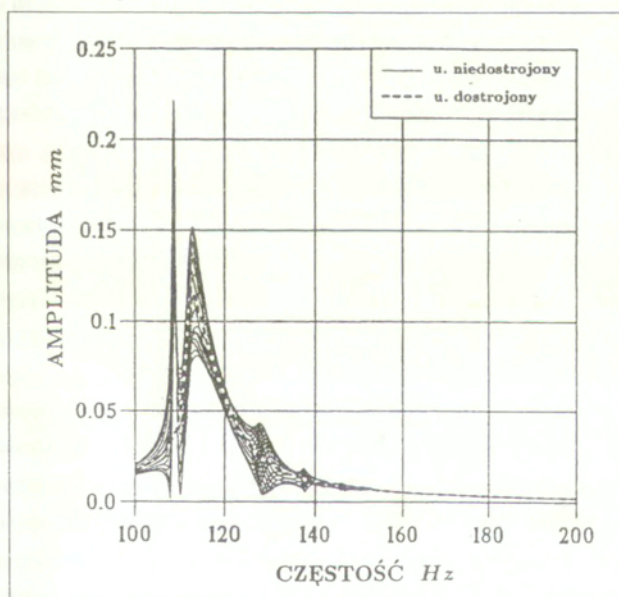


Rysunek 3.41: Przemieszczenie i faza w punktach $\mathbf{x}_{(n)} = \mathbf{x}_{c(n)}$ w układzie $\mathbf{k}_c = 1$, w przypadku $\mathbf{k}_e = 3$, uzyskane za pomocą metody modalnej (M.A.) i metody globalnej (M.G.).

mentów lepkosprężystych o zespolonej sztywności. Układ taki jedynie w przybliżeniu opisuje dynamikę turbiny, której drgania tłumione są za pomocą elementów ciernych. Układ o takiej samej konfiguracji, ale przy uwzględnieniu nieliniowych własności kontaktu (por. rysunek 3.4), był badany za pomocą MES (modelowanie łopatek) w pracy [10]. Rezultaty uzyskane w pracy [10] w przypadku niedostrojenia częstości drgań własnych łopatek, które zilustrowano na rysunku 3.42, przedstawiono na rysunku 3.43. Przykład zilustrowany na rysunkach: 3.42, 3.43, gdzie przedstawiono przemieszczenia punktów $\mathbf{x}_{(n)} = \mathbf{x}_{e(n)}$, odpowiada w przybliżeniu przypadkowi $\mathbf{k}_f = 1$, $\mathbf{k}_e = 1$ badanemu w niniejszej pracy. Jak wynika z porównania rezultatów uzyskanych przez Balmera w pracy [10] z wynikami przedstawionymi na rysunku 3.23, odpowiedź dynamiczna układu nieliniowego i jego liniowego przybliżenia są jakościowo podobne. Należy podkreślić, że spostrzeżenia dotyczące zależności pomiędzy rzędem obciążenia, rzędem niedostrojenia a rzędem wzbudzonej postaci drgań jest oryginalnym wkładem autora niniejszej pracy w teorii rozważanych układów cyklicznych.



Rysunek 3.42: Niedostrójenie częstotliwości drgań własnych łopatek rozpatrywane w pracy [10]



Rysunek 3.43: Przemieszczenia punktów $x_n = x_{(n)\epsilon}$ odpowiadające niedostrojeniu częstotściowemu zilustrowanemu na rysunku 3.42, uzyskane w pracy [10]

Rozdział 4

Zakończenie

1. Podsumowanie

Celem niniejszej rozprawy było zbadanie wybranych zagadnień dynamiki układów o periodycznych własnościach struktury i wzbudzenia. W części poświęconej ciągłym układom periodycznym rozmieszczonym wzdłuż prostej przedstawiono metodę analizy dynamicznej struktur periodycznych nieobciążonych oraz poddanych działaniu ruchomych źródeł zaburzeń. Zaproponowana metoda polega na poszukiwaniu rozwiązań równania różniczkowego ruchu układu ciągłego, w postaci wynikającej z twierdzenia Floqueta. Pozwoliło to na uzyskanie szeregu jakościowo nowych rezultatów. Otrzymano rozwiązania analityczne opisujące pole przemieszczeń wewnątrz komórek układu i na określenie krytycznych parametrów obciążenia. Podano interpretację fizyczną zjawiska narastania amplitud fal przy krytycznych parametrach obciążenia. Wykazano konieczność uwzględnienia oddziaływania sąsiadujących pręseł w przypadku analizy dynamiki bocznej toru kolei unoszonej magnetycznie. Zidentyfikowano dotychczas nie dyskutowane stany własne periodycznego toru kolei konwencjonalnej.

W części poświęconej cyklicznym strukturom periodycznym zbadano problem drgań swobodnych i wymuszonych układu modelującego dynamikę łopatek turbin, których drgania tłumione są za pomocą elementów ciernych. Wykazano istnienie pewnych regularności w stacjonarnej odpowiedzi dynamicznej układów niedostrojonych i zaproponowano uproszczoną metodę badania dynamiki tego typu układów. Pomimo faktu, że rozpatrzono liniowe przybliżenie, rezultaty i wnioski znajdują zastosowanie w przypadku układów, w których do rozważań przyjęto bliższe rzeczywistemu modele oddziaływania łopatek. Uzyskane w tej części rezultaty badania układów cyklicznych o okresowym niedostrojeniu parametrów są jakościowo nowe.

Niniejsza praca nie rozstrzyga wszystkich kwestii dotyczących problemu niedostrojenia w

cyklicznych układach periodycznych. Zagadnienie niedostrojenia w strukturach periodycznych rozmieszczonych wzdłuż prostej nie jest w pracy rozpatrywane, pomimo że, jak wynika z badań autora, w przypadku okresowego niedostrojenia otrzymuje się jakościowo podobne wyniki. Uzyskane i przedstawione w przedłożonej pracy rezultaty uzasadniają celowość dalszych badań nad dynamiką idealnych i niedostrojonych struktur periodycznych.

2. Perspektywy dalszych badań

Przedstawiony w niniejszej pracy algorytm rozwiązywania problemu propagacji fal bieżących w jednowymiarowych strukturach periodycznych, polegający na bezpośrednim rozwiązaniu różniczkowego równania ruchu z okresowymi warunkami brzegowymi, może być z powodzeniem zastosowany w przypadku dwu lub trójwymiarowych ośrodków ciągłych. Badania mające na celu określenie pasm przenoszenia i pasm zanikania układów warstwowych oraz płyt i powłok o okresowo usytuowanych usztywnieniach będą miały na celu analizę ich przydatności w zastosowaniu do zmniejszania emisji hałasu. Z uwagi na charakterystyczną własność układów periodycznych – pasmową strukturę widma częstości, mogłyby być one wykorzystane do tłumienia drgań o częstościach akustycznych, na przykład w celu eliminacji hałasu powodowanego ruchem pojazdów.

W przypadku toru kolei konwencjonalnej należy rozważyć model dwuwymiarowy umożliwiający uwzględnienie ruchu w przeciwności (przesunięcie o pół długości fali w szynach), jak również uwzględnienie inercyjności wędrującego obciążenia. Uzyskane rozwiązania umożliwią badanie stabilności ruchu układu dyskretnego (modelującego zestaw kołowy) wzdłuż struktury periodycznej. Z uwagi na okresowość zmiany sztywności układu ciągłego pod poruszającym się układem dyskretnym, jego ruch opisany jest za pomocą równań różniczkowych o okresowo zmiennych współczynnikach. W tym przypadku należy spodziewać się wielu jakościowo nowych rezultatów, które mogą przyczynić się do lepszego zrozumienia powstawania zjawiska korugacji szyn. Zbadanie wpływu niedostrojenia parametrów tego typu układu na możliwą lokalizację drgań jest konieczne z uwagi na występujące w praktyce imperfekcje spowodowane błędami wykonania lub montażu. Przykładem niedostrojenia jest nierównomierna degradacja podsypki pod podkładami kolejowymi, która powoduje zaburzenie idealnej okresowości struktury, jak również nierównomierny rozkład podkładów. Zjawisko niedostrojenia w tego typu układach należy badać zarówno metodami deterministycznymi jak i statystycznymi. Podukład ciągły (szynę) należałoby modelować za pomocą modeli falowych, np. za pomocą belki Timoshenki.

W przypadku układów opisujących dynamikę wirników o łopatkach, których drgania tłu-

mione są za pomocą elementów ciernych, należałoby przeprowadzić badania za pomocą modelu o liniowych cyklicznie periodycznych komórkach i nieliniowym oddziaływaniu pomiędzy nimi. Przykładem cyklicznej struktury periodycznej o nieliniowych własnościach komórek i liniowym oddziaływaniu są układy modelujące anteny o dużych rozmiarach służące do obserwacji astronomicznych lub łączności satelitarnej. Zjawisko niedostrojenia (spowodowane np. nierównomiernym nagrzewaniem układu) prowadzić może do obserwowanej w praktyce lokalizacji drgań i uszkodzenia kosztownej konstrukcji. Ze względów aplikacyjnych celowe jest zbadanie zarówno stanów ustalonych, jak i nieustalonych za pomocą symulacji numerycznej. Celowe wydaje się również opracowanie metody określania optymalnego rozkładu komórek o niedostrojonych własnościach w strukturze periodycznej z uwagi na minimalizację niekorzystnego wpływu zjawiska niedostrojenia.

Rozważaniom teoretycznym powinno towarzyszyć doświadczalne badanie propagacji fal niedostrojenia i lokalizacji drgań w strukturach periodycznych. Badania takie, zdaniem autora niniejszej pracy, można przeprowadzić za pomocą stanowiska badawczego, którego zasada działania oparta jest na analogiach pomiędzy dynamiką periodycznej struny a układami cyklicznymi występującymi w praktyce i stanowiącymi przedmiot badań. Przeprowadzenie badań eksperymentalnych pozwoliłoby na weryfikację doświadczalną modeli układów o niedostrojonych parametrach.

Dodatek A

English summary

Dr. Tomasz Krzyżyński
Laboratory of Dynamics and Stability
of Machines and Vehicles,
Institute of Fundamental Technological Research
of the Polish Academy of Sciences

STEADY-STATE DYNAMICS OF CONTINUOUS PERIODIC STRUCTURES

SUMMARY

Ideal periodic structures consist of a number of identical elements which are coupled together in an identical way to form the complete system. They can be extended along a straight line of infinite or finite length, or they can form rotational (cyclic) periodic structures. For example, a conventional railway track, a guideway for magnetically levitated vehicles (MAGLEV), a fuselage, outer space stations or high buildings composed of repetitive units, friction damped bladed disks assemblies, telecommunication wrap-rib dish antenna, are examples of applications of such systems in engineering.

The present thesis consists of an introduction followed by two main parts and conclusions. The first part presented in chapter No. 2 deals with linear extended periodic structures. The

aim of this part is to develop an efficient method for the dynamical analysis of continuous periodic systems under travelling disturbance sources. The approach proposed consists in the solution of a differential equation of motion of a system with periodic boundary conditions in a form which follows from Floquet's theorem. The second part of the thesis presented in chapter No. 3 deals with cyclic periodic structures. The aim of this part is to show certain regularities in the dynamics response of systems with periodic mistuning of the parameters and propose a simplified method for the dynamical analysis of mistuned periodic structures.

In the first section of the second chapter infinite beams resting on periodically spaced rigid supports are considered. In this section some fundamental considerations concerning passing bands and stopping bands and with respect to the energy flow are presented. The solution method for the periodic structures under travelling disturbance sources and the method of determination of critical load parameters are discussed in detail. The next model considered in the second chapter is a guideway for MAGLEV, which is modeled as a chain of interacting simply supported beams. The configuration of the passing bands and stopping bands in the 'frequency-wavenumber' plane and the dynamic system response to travelling disturbance sources in the form of one or many moving harmonic forces are investigated, for the case of vertical and lateral system dynamics, respectively. The third model of linear extended period structures under consideration is a periodic railway track. In order to compare the system modes identified in the present thesis, the problem of wave propagation in elastic periodic structure is investigated in details. The solution for the system under moving disturbance sources is presented and the discussion is carried out in two limiting cases: for the stationary harmonic force and for the moving force of constant magnitude.

The third chapter of the thesis deals with cyclic periodic structures like bladed disk assemblies of blades with damping friction elements for vibration damping. These elements placed between adjacent blades reduce the vibration amplitudes by means of dry friction resulting from centrifugal forces acting on the elements and relative displacement of the blades. However, the application of these friction elements results in an additional dynamical coupling which together with mistuning of some system parameters (e.g. blade eigenfrequency or contact parameters) may cause localization of vibration. In the present thesis a linear approximation of such a system is investigated. The structure composed of cyclic periodic cells modeled each as a clamped-free beam interacting with each other by means of viscoelastic elements of complex stiffness is applied for dynamic system analysis. In case of free vibrations as well as in case of steady-state dynamic response to a harmonic pressure field, a perfect periodic structure and the structures with periodically mistuned parameters (blade eigenfrequencies and contact parameters) are studied. Additionally, in case of free vibrations the problem of vibration localization is analyzed by means of a model with a single mistuned element in an otherwise perfect periodic structure. Results in case of forced vibrations are obtained by means of different methods: a 'global' method consisting in solving the system equations for the whole structure and a 'modal' method. The main point in the 'modal' method presented here is to reduce the number

of equations and solve it by means of considering only a few eigenforms of the corresponding perfect periodic structure.

In the following some fundamental results and conclusions obtained in the present thesis are summarized. In the part dealing with linear extended continuous periodic structures a method for the dynamic analysis of free and forced systems is presented. The main point of the method is to look for solution in the form which follows from Floquet's theorem originally given for differential equations with periodic coefficients. This makes it possible to reduce the problem of solving a differential equation with an infinite number of periodic boundary conditions to the analysis of one cell of the periodic structure. The application of such a solution method have made it possible to obtain a number of qualitatively new results. For example, the analytical solutions describing the displacement field in a cell of the continuous periodic structures have been found. Critical load parameters have been obtained by means of a simple graphical method and a physical interpretation of the increasing vibration amplitudes due to these parameters has been presented. It also has been shown that analyzing the lateral dynamics of MAGLEV guideways it is necessary to consider the dynamical coupling between adjacent bays. Some modes of a periodic railway track have been identified, which have not been known in the literature have been identified. In the part dealing with cyclic periodic structures some regularities in the dynamic response of the systems with mistuning have been noticed. A simplified 'modal' method of dynamic analysis of mistuned structures has been presented. Despite the fact that only a linear approximation has been used, the results and conclusions can be applied for models which describe the blade interaction in a nonlinear way. The results concerning the dynamics of cyclic periodic structures with periodic mistuning of the parameters are qualitatively new.

ACKNOWLEDGEMENTS

Some of the results presented in the thesis have been obtained during my stay at the Institute of Mechanics, University of Hannover, 1991-1993 as a research fellow of the Alexander von Humboldt Foundation, and in 1995 in the framework of the project 'Dynamics of Periodic Structures with Mistuning' supported by the Volkswagen Foundation Hannover, Germany. I have worked there under the scientific supervision of Professor Karl Popp. The present thesis by itself has been originated in the Laboratory of Dynamics and Stability of Machines and Vehicles of the Institute of Fundamental Technological Research in Warsaw, under the scientific supervision of Professor Roman Bogacz. These persons and institutions I express my thanks for their hospitality and support.

Tomasz Krzyżyński

Literatura

- [1] A. Y. A. ABDEL-RHMAN, M. PETYT. Free and forced wave propagation in two-dimensional periodic systems using matrix techniques. W: *Proc. Int. Conf. Recent Advances in Struct. Dyn.*, strony 361-373, Southampton, 1980.
- [2] H. ABRAMOVICH, I. ELISHAKOFF. Application of the Krein's method for determination of natural frequencies of periodically supported beams based on simplified Bresse-Timoshenko equations. *Acta Mechanica*, 66:39-59, 1987.
- [3] M. L. ACCORSI, M. S. BENNETT. A finite element based method for the analysis of free wave propagation in stiffened cylinders. *J. Sound Vib.*, 148(2):279-292, 1991.
- [4] D. AFOLABI. The eigenvalue spectrum of a mistuned disk. W: R. E. KIELB, N. F. RIEGER, wydawcy, *Vibrations of Blades and Bladed Disk Assemblies*, strony 23-29, New York, 1985. ASME.
- [5] D. AFOLABI. The frequency response of mistuned bladed disk assemblies. W: R. E. KIELB, N. F. RIEGER, wydawcy, *Vibrations of Blades and Bladed Disk Assemblies*, strony 14-21, New York, 1985. ASME.
- [6] D. AFOLABI. Vibration amplitudes of mistuned blades. *ASME Journal of Turbomachinery*, 110:251-257, 1988.
- [7] M. S. ANDERSON, F. W. WILLIAMNS. BUNVIS-RG: Exact frame buckling and vibration program, with repetitive geometry and substructuring. *J. Spacecraft*, 24(4):353-361, 1987.
- [8] S. T. ARIARATNAM, W.-C. XIE. Wave localization in randomly disordered nearly periodic long beams. *J. Sound Vib.*, 181(1):7-22, 1995.
- [9] B. A. AULD. Waves and vibrations in periodic piezoelectric composite materials. *Mater. Sci. & Engng.*, A122(1):65-70, 1989.

- [10] B. BALMER. *Erhöhung der Dämpfung von Turbinenschaufeln durch Reibelemente*. Rozprawa doktorska, Universität Hannover, 1993. W: VDI-Fortschrittsberichte, Reihe 11, Nr. 211, 1993.
- [11] A. S. BANSAL. Free wave motion in periodic systems with multiple disorders. *J. Sound Vib.*, 60:389–400, 1978.
- [12] H. BARVINCH, H. A. DIETERMAN. Wave propagation in a train. Raport, TU Delft, Report 03.21.1.22.14, 1994.
- [13] T. BAUMANN, D. HILLIGES. Elevated Guideways of Systems for Tracked Transport. W: *Bridges: Interaction between Construction Technology and Design, Proc. IABSE Symposium*, strony 469–474, Leningrad, 1991.
- [14] O. O. BENDIKSEN. Mode localization phenomena in large space structures. *AIAA Journal*, 25(9):1241–1248, 1987.
- [15] N.C. BHANDARI, B.L. JUNEJA, K.K. PUJARA. Free vibration and transient forced response of integrally stiffened skew plates on irregularly spaced elastic supports. *J. Sound Vib.*, 64(4):475–495, 1979.
- [16] R. BOGACZ, T. KRZYŻYŃSKI, K. POPP. Influence of beam models on the solutions of the generalized Mathews' problem. *Z. angew. Math. Mech.*, 69(5):T320–T321, 1989.
- [17] R. BOGACZ, T. KRZYŻYŃSKI, K. POPP. On the generalization of Mathews' problem of the vibrations of a beam on elastic foundation. *Z. angew. Math. Mech.*, 69(8):243–252, 1989.
- [18] R. BOGACZ, T. KRZYŻYŃSKI, K. POPP. On the group–phase velocities relations for continuous systems under moving loads. *Z. angew. Math. Mech.*, 70(4):T202–T203, 1990.
- [19] R. BOGACZ, T. KRZYŻYŃSKI, K. POPP. On the dynamics of a system modelling continuous and periodic guideways for high–speed vehicles. W: *Dynamical Problems in Mechanical Systems, Proc. 2nd German–Polish Workshop*, Paderborn, marzec 1991.
- [20] R. BOGACZ, T. KRZYŻYŃSKI, K. POPP. Influence of Shear Deformation and Rotatory Inertia on the Solutions of the Generalized Mathews' Problem. *Z. angew. Math. Mech.*, 73(1):5–13, 1993.
- [21] R. BOGACZ, T. KRZYŻYŃSKI, K. POPP. On dynamics of systems modelling continuous and periodic guideways. *Archives of Mechanics*, 45(5):575–593, 1993.

- [22] R. BOGACZ, T. KRZYŻYŃSKI, K. POPP. On the vertical and lateral dynamics periodic guideways for Maglev vehicle. W: *Dynamical Problems in Mechanical Systems, Proc. 3rd German-Polish Workshop*, strony 219-232, Wierzba, Poland, lipiec 1993.
- [23] R. BOGACZ, T. KRZYŻYŃSKI, K. POPP. Application of Floquet's theorem to high-speed train/track dynamics. W: *5th Symposium on Advanced Automotive Technologies, DSC-Vol. 56, DE-Vol. 86*, strony 55-61, San Francisco, listopad 1995. 1995 ASME Int. Mechanical Engineering Congress and Exposition.
- [24] R. BOGACZ, T. KRZYŻYŃSKI, K. POPP. On the dynamics of cyclic and linear extended periodic structures with mistuning. W: *Minisymposium on Dynamics of Periodic Structures*, Hamburg, lipiec 1995. Int. Congres Industr. and Appl. Math. (w druku w Z. angew. Math. Mech.).
- [25] A. YA. BOMASH, R. F. NAGAEV. The structure of the characteristic equation of a linear mechanical chain system. *Leningrad Univ. Mechanics Bull.*, 2:36-39, 1988.
- [26] L. BRILLOUIN. *Wave Propagation in Periodic Structures*. Dover Publications, 1953.
- [27] C. W. CAI, Y. K. CHEUNG, H. C. CHAN. Transverse vibration analysis of plane trusses by analytical method. *J. Sound Vib.*, 133(1):139-150, 1989.
- [28] C. W. CAI, Y. K. CHEUNG, H. C. CHAN. Mode localization phenomena in nearly periodic systems. *ASME J. Appl. Mech.*, 62(1):141-149, 1995.
- [29] C.W. CAI, Y.K. CHEUNG, H.C CHAN. Dynamic response of infinite continuous beams subjected to a moving force - an exact method. *J. Sound Vib.*, 123(3):461-472, 1988.
- [30] G. Q. CAI, Y. K. LIN. Localization of wave propagation in disordered periodic structures. *AIAA Journal*, 29(3):450-456, 1991.
- [31] G. Q. CAI, Y. K. LIN. Statistical distribution of frequency response of disordered periodic structures. *AIAA Journal*, 30(5):1400-1407, 1991.
- [32] P. D. CHA, C. PIERRE. Eigensolution of periodic assemblies of multi-mode component systems. *J. Sound Vib.*, 129(1):168-174, 1989.
- [33] T. CHARNLEY, R. PERRIN, V. MOHANAN, H. BANU. Vibrations of thin rings of rectangular cross-section. *J. Sound Vib.*, 134(3):455-488, 1989.
- [34] Y. K. CHEUNG, H. C. CHAN, C. W. CAI. Exact method for static analysis of periodic structures. *J. Engng. Mech.*, 115(2):415-434, 1989.

- [35] Y. I. CHUNG, J. GENIN. Stability of a vehicle on a multispan simply supported guideway. *ASME J. Dyn. Syst. Meas. Control*, 100(4):326-332, 1978.
- [36] N. CORTES-COMERER. Will MAGLEV ever get off the ground in the U.S. *Mechanical Engng.*, strony 58-63, październik 1988.
- [37] L. CREMER, H.O. LEILICH. Zur Theorie der Biegekettenteiler. *Arch. d. elektr. Übertr.*, 7(6):261, 1953.
- [38] J. M. CUSCHIERI. Vibration transmission through periodic structures using a mobility power flow approach. *J. Sound Vib.*, 143(1):65-74, 1990.
- [39] P. DEAN, M. D. BACON. The nature of vibrational modes in disordered systems. *Proc. Phys. Soc. (London)*, 81:642-647, 1963.
- [40] H. A. DIETERMAN, A. METRIKINE. Eigenfrequencies and simplified models of semi-infinite cascades with variable boundary mass. Raport, TU Delft, Report 03.21.0.22.14, 1995.
- [41] A. L. DORAN, D. L. MINGORI. Periodic motion of vehicles on flexible guideways. *ASME J. Dyn. Syst. Meas. Control*, 99(4):268-276, 1977.
- [42] M. DRAWINSKI. Wave propagation in a plate with periodic structure: Antiplane strain model. *ASME J. Appl. Mech.*, 47(3):660-662, 1980.
- [43] A. EL-BAHRAWY. Stopbands and passbands for asymmetric Rayleigh-Lamb modes in a plate with corrugated surfaces. *J. Sound Vib.*, 170(2):145-160, 1994.
- [44] CH. ELACHI. Waves in active and passive periodic structures: A review. *Proc. IEEE*, 64(12):1666-1698, 1976.
- [45] R. C. ENGELS. Response of infinite periodic structures. *J. Sound Vib.*, 69(2):181-197, 1980.
- [46] R. C. ENGELS, L. MEIROVITCH. Response of periodic structures by modal analysis. *J. Sound Vib.*, 56(4):481-493, 1978.
- [47] I. FAYÉ, W. KORTÜM, W. SCHWARTZ. Modeling, control design, and performance evaluation of high speed ground vehicle dynamics. *Mech. Struct. & Mach.*, 17(2):259-281, 1989.
- [48] A. H. von FLOTOW. Disturbance propagation in periodic networks. *J. Sound Vib.*, 106(3):433-450, 1986.

- [49] L. FRYBÁ. *Vibration of Solids and Structures under Moving Loads*. Academia, 1970.
- [50] J. GENIN, Y. I. CHUNG. Response of a continuous guideway on equally spaced supports traversed by a moving vehicle. *J. Sound Vib.*, 67(2):245-251; 1979.
- [51] H. P. W. GOTTLIEB. Vibrations of a closed string. *J. Sound Vib.*, 135(1):79-83, 1989.
- [52] S. L. GRASSIE, R. W. GREGORY, D. HARRISON, K. L. JOHNSON. The dynamic response of railway track to high frequency vertical excitation. *J. Mech. Engng. Sci.*, 24(2):77-90, 1982.
- [53] B. V. R. GUPTA, S. NARAYANAN, N. GANESAN. Receptance method for bi-coupled periodic structures. *J. Sound Vib.*, 106(1):173-177, 1986.
- [54] P. HAGEDORN, S. SPARSCHUH. Experimental modal analysis vs. power flow measurement, some recent developments. W: *Proc. 6th Int. Modal Analysis Conference*, stony 666-672, Florida, luty 1988.
- [55] M. HART, D. S. WHITEHEAD. A design method for two-dimensional cascades of turbomachinery blades. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 7:1363-1381, 1987.
- [56] M. HECKL. Investigations on the vibrations of grillages and other simple beam structures. *J. Acoust. Soc. Amer.*, 36(7):1335-1343, 1964.
- [57] KL. HEINRICH, L. KRETZSCHMAR, wydawcy. *Magnetbahn Transrapid; Die neue Dimension des Reisens*. Hestra-Verlag, Darmstadt, 1989.
- [58] R. HENRY, G. FERRARIS. Substructuring and wave propagation: An efficient technique for impeller dynamic analysis. *ASME J. Engng. Gas Turbines and Power*, 106:2-10, January 1984.
- [59] C. S. HSU. On approximating a general linear periodic system. *J. Math. Analysis and Applications*, 45(1):234-251, 1974.
- [60] X.L. HUANG. An algorithm for lower eigenvalues of symmetric structures under group Cn. *J. Sound Vib.*, 152(2):343-350, 1992.
- [61] F.M. HUTTO, C.B. BURROUGHS, W.J. HUGHES. Wave-number frequency response of beams to an array of point drivers. *J. Acoust. Soc. Am.*, 89(5):2303-2316, 1991.
- [62] H. ILIAS, KL. KNOTHE. Ein diskret-kontinuierliches Gleismodell unter Einfluß schnell bewegter, harmonisch schwankender Wanderlasten. Raport, VDI-Fortschrittsberichte, Reihe 12, Nr. 171, 1992.

- [63] H. JAMSHIDIAT, G. SENGUPTA. Dynamics of periodic structures interacting with an enclosed fluid medium. *J. Sound Vib.*, 148(1):103–115, 1991.
- [64] L. JEZEQUEL. Analysis of critical speeds of a moving load on an infinite periodically supported beam. *J. Sound Vib.*, 73(4):606–610, 1980.
- [65] L. JEZEQUEL. Response of periodic systems to a moving load. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 48(3):613–618, 1981.
- [66] L. JIANG, R. J. ROGERS. Effects of spatial discretization on dispersion and spurious oscillations in elastic wave propagation. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 29:1205–1218, 1990.
- [67] J. J. KALKER. A railway rail on irregular, discrete supports. Report, TU Delft, Report 94–11, 1994.
- [68] R. K. KAUL, G. HERMANN. Free torsional vibrations of an elastic cylinder with laminated periodic structure. *Int. J. Solids Struct.*, 12:449–466, 1976.
- [69] A. J. KEANE, W. G. PRICE. On the vibrations of mono-coupled periodic and near-periodic structures. *J. Sound Vib.*, 128(3):423–450, 1989.
- [70] K. S. KIM, R. L. PIZALI. Harmonic wave propagation in materials with periodic beam-structure. *J. Sound Vib.*, 107(1):59–70, 1986.
- [71] Y. K. KINRA, E. KER. An experimental investigation of pass bands and stop bands in two periodic particulate composites. *Int. J. Solids Struct.*, 19(5):393–410, 1983.
- [72] J. KISIŁOWSKI, B. SOWIŃSKI, Z. STRZYŻAKOWSKI. Application of discrete-continuous model in investigating dynamics of wheelset-track system vertical dynamics. *Z. angew. Math. Mech.*, 68(4):T70–T71, 1988.
- [73] W. KORTÜM, D. N. WORMLEY. Dynamic interaction between travelling vehicles and guideway systems. *Vehicle System Dynamics*, 10:285–317, 1981.
- [74] T. KRZYŻYŃSKI. On continuous subsystem modelling in the dynamic interaction problem of a train-track-system. *Supplement to Vehicle System Dynamics*, 24:311–324, 1995.
- [75] T. KRZYŻYŃSKI. On energy flow in a certain class of periodic structures. *Z. angew. Math. Mech.*, 72(4):T35–T38, 1992.
- [76] T. KRZYŻYŃSKI. The influence of viscous damping on the dynamics of periodic structures. *Z. angew. Math. Mech.*, 73(4):T111–T114, 1993.

- [77] T. KRZYŻYŃSKI, B. BALMER, K. POPP. On Dynamics of Bladed Disk Assemblies with Mistuning. *Z. angew. Math. Mech.*, 75(4):SI53-SI54, 1995.
- [78] T. KRZYŻYŃSKI, K. POPP. On the travelling wave approach for discrete-continuous structures under moving loads. W: *Minisymposium on Discretely Supported Structures under Moving Loads*, Hamburg, lipiec 1995. Int. Congres Industr. and Appl. Math. (w druku w *Z. angew. Math. Mech.*).
- [79] R. S. LANGLEY. A variational principle for periodic structures. *J. Sound Vib.*, 135(1):135-142, 1989.
- [80] R. S. LANGLEY. Analysis of power flow in beams and frameworks using the direct-dynamic stiffness method. *J. Sound Vib.*, 136(3):439-452, 1990.
- [81] R. S. LANGLEY. An elastic wave technique for the free vibration analysis of plate assemblies. *J. Sound Vib.*, 145(2):261-271, 1991.
- [82] R. S. LANGLEY. On the modal density and energy flow characteristics of periodic structures. *J. Sound Vib.*, 172(4):491-511, 1994.
- [83] S. M. LEE. On application of the cyclic boundary condition to mechanical vibrating systems. *J. Sound Vib.*, 38(2):272-274, 1975.
- [84] S. Y. LEE, M. J. KAO. Flexural waves in beams with periodic, but piecewise constant, impedance. *Anal. Exp. Modal. Analysis*, 4(4):124-130, 1989.
- [85] S. Y. LEE, W. F. YEEN. Free coupled longitudinal and flexural waves of a periodically supported beam. *J. Sound Vib.*, 142(2):203-211, 1990.
- [86] U. LEE. Dynamic continuum modeling of beamlike space structures using finite-element matrices. *AIAA Journal*, 28(4):725-731, 1990.
- [87] U. LEE. Dynamic continuum modeling of beamlike space structures using finite-element matrices. *AIAA Journal*, 28(4):725-731, 1990.
- [88] A. Y.-T. LEUNG. Dynamic analysis of periodic structures. *J. Sound Vib.*, 72(4):451-467. 1980.
- [89] Y. K. LIN. Free vibrations of a continuous beam on elastic supports. *Int. J. Mech. Sci.*, 4:409-423, 1962.
- [90] Y. K. LIN. Random vibration of periodic and almost periodic structures. *Mechanics Today*, Pergamon Press, 3:93-124, 1975.

- [91] Y. K. LIN, T. J. MCDANIEL. Dynamics of beam-type periodic structures. *ASME J. Engng. for Industry*, 91:1133-1141, 1969.
- [92] Y. K. LIN, J.W. YANG. Free vibration of a disordered periodic beam. *ASME J. Appl. Mech.*, 41(2):383-391, 1974.
- [93] A. LUONGO. Mode localization by structural imperfections in one-dimensional continuous systems. *J. Sound Vib.*, 155(2):249-271, 1992.
- [94] B.R. MACE. Periodically stiffened fluid-loaded plates, I: Response to convected harmonic pressure and free wave propagation. *J. Sound Vib.*, 73(4):473-486, 1980.
- [95] B.R. MACE. Periodically stiffened fluid-loaded plates, II: Response to line and point forces. *J. Sound Vib.*, 73(4):487-504, 1980.
- [96] A. K. MALLIK, D. J. MEAD. Free vibration of thin circular rings on periodic radial supports. *J. Sound Vib.*, 54(1):13-27, 1977.
- [97] J.F. MAYER. Zur Berechnung des Eigenschwingungsverhaltens gekoppelter Beschau-felungen axialer Turbomaschinen. Raport, Mitteilungen des Instituts für Thermische Strömungsmaschinen und Maschinenlaboratorium der Universität Stuttgart, Nr. 25, 1987.
- [98] T. J. MCDANIEL, M. J. CARROLL. Dynamics of bi-periodic structures. *J. Sound Vib.*, 81(3):311-335, 1982.
- [99] D. J. MEAD. Free wave propagation in periodically supported infinite beams. *J. Sound Vib.*, 11(2):181-197, 1970.
- [100] D. J. MEAD. Vibration response and wave propagation in periodic structures. *ASME J. Engng. for Industry*, 93(3):783-792, 1971.
- [101] D. J. MEAD. Wave propagation and natural modes in periodic systems: 1. Mono-coupled systems. *J. Sound Vib.*, 40(1):1-18, 1975.
- [102] D. J. MEAD. Wave propagation and natural modes in periodic systems: 2. Multi-coupled systems. *J. Sound Vib.*, 40(1):19-39, 1975.
- [103] D. J. MEAD. A new method of analyzing wave propagation in periodic structures; Applications to periodic Timoshenko beams and stiffened plates. *J. Sound Vib.*, 104(1):9-27, 1986.
- [104] D. J. MEAD, N. S. BARDELL. Free vibration of a thin cylindrical shell with periodic circumferential stiffeners. *J. Sound Vib.*, 115(3):499-520, 1987.

- [105] D. J. MEAD, S. M. LEE. Receptance methods and the dynamics of one-dimensional lattices. *J. Sound Vib.*, 92(3):427-455, 1984.
- [106] D. J. MEAD, A. K. MALIK. An approximate method of predicting the response of periodically supported beams subjected to random convected loading. *J. Sound Vib.*, 47(4):457-471, 1976.
- [107] D. J. MEAD, S. MARCUS. Coupled flexural-longitudinal wave motion in a periodic beam. *J. Sound Vib.*, 90(1):1-24, 1983.
- [108] D. J. MEAD, S. PARTHAN. Free wave propagation in two-dimensional periodic plates. *J. Sound Vib.*, 64(3):325-348, 1979.
- [109] D. J. MEAD, K. K. PUJARA. Space-harmonic analysis of periodically supported beams: Response to convected random loading. *J. Sound Vib.*, 14(4):525-541, 1971.
- [110] D. J. MEAD, E. F. WILBY. The random vibration of a multi-supported heavily-damped beam. *Shock Vib. Bull.*, 35(Part 3):45-54, 1966.
- [111] D. J. MEAD, Y. YAMAN. The harmonic response of uniform beams on multiple linear supports: A flexural wave analysis. *J. Sound Vib.*, 141(3):465-484, 1990.
- [112] D. J. MEAD, Y. YAMAN. The response of infinite periodic beams to point harmonic forces: A flexural wave analysis. *J. Sound Vib.*, 144(3):507-530, 1991.
- [113] D. J. MEAD, D. C. ZHU, N. S. BARDELL. Free vibration of an orthogonally stiffened flat plate. *J. Sound Vib.*, 127(1):19-48, 1988.
- [114] D. J. MEAD. Waves and modes in finite beams: Application of the phase-closure principle. *J. Sound Vib.*, 171(5):695-702, 1994.
- [115] L. MEIROVITCH, R. C. ENGELS. Response of almost periodic structures. *Journal de Mécanique appliquée*, 2(2):197-210, 1978.
- [116] L. MEIROVITCH, A. L. HALE. On the substructure synthesis method. W: *Proc. Int. Conf. Recent Advances in Struct. Dyn.*, strony 3-22, Southampton, 1980.
- [117] J.W. MILES. Vibration of beams on many supports. *Proc. Am. Soc. Civil Engrs*, 82(EMI):1, 1956.
- [118] R. N. MILES. An approximate method for modal analysis of finite periodic structures. *J. Sound Vib.*, 134(1):165-174, 1989.

- [119] D. W. MILLER, A. von FLOTOW. A travelling wave approach to power flow in structural networks. *J. Sound Vib.*, 128(1):145-162, 1989.
- [120] D.W. MILLER, S.R. HALL, A.H. von Flotow. Optimal control of power flow at structural junctions. *J. Sound Vib.*, 140(3):475-479, 1990.
- [121] S. MÜLLER. Comparison of semi-analytical methods to analyse periodic structures under a moving load. *Supplement to Vehicle System Dynamics*, 24:311-324, 1995.
- [122] M. L. MUNJAL, M. HECKL. Response of a periodically supported infinite beam to a harmonic transverse point force. *Acustica*, 50(3):230-232, 1982.
- [123] M. L. MUNJAL, M. HECKL. Vibrations of a periodic rail-sleeper system excited by an oscillating stationary transverse force. *J. Sound Vib.*, 81(4):491-500, 1982.
- [124] A. MUSZYNSKA, D. I. G. JONES. A parametric study of a discrete model of turbomachinery bladed disk. *ASME Paper 81-GT-137*, 1981.
- [125] A. MUSZYNSKA, D. I. G. JONES. On tuned bladed disk dynamics: Some aspects of friction related mistuning. *J. Sound Vibr.*, 86(1):107-128, 1983.
- [126] A. MUSZYNSKA, D. I. G. JONES, T. LAGNESE, L. WHITFORD. On nonlinear response of multiple blade systems. *Shock Vib. Bull.*, 51(3):89-110, 1981.
- [127] R. J. NAGEM, JR. J. H. WILLIAMS. Dynamic analysis of large space structures using transfer matrices and joint coupling matrices. *Mech. Struct. & Mach.*, 17(3):349-371, 1989.
- [128] J. L. NOWINSKI. On the wave propagation in elastic multilayered periodic media with nonlocal interactions. *J. Appl. Mech.*, 57(4):937-940, 1990.
- [129] M. OHLRICH. Forced vibration and wave propagation in mono-coupled periodic structures. *J. Sound Vib.*, 107(3):411-434, 1986.
- [130] R. M. ORRIS, M. PETYT. A finite element study of harmonic wave propagation in periodic structures. *J. Sound Vib.*, 33(2):223-236, 1974.
- [131] J. KORB P. MNICH, H.J. SCHNEIDER. Systemdynamik aufgeständerter Fahrbahnen für elektromagnetische Schnellbahnsysteme. *AET*, 37:31-35, 1982.
- [132] R. PERRIN, G. M. SWALLOWE. Zero eigenfrequencies in the vibrating polygon. *J. Sound Vibr.*, 174(2):181-189, 1994.

- [133] C. PIERRE. Mode localization and eigenvalue loci veering phenomena in disordered structures. *J. Sound Vib.*, 126(3):485-502, 1988.
- [134] C. PIERRE. Weak and strong vibration localization in disordered structures: A statistical investigation. *J. Sound Vib.*, 139(1):111-132, 1990.
- [135] C. PIERRE, PH. D. CHA. Strong mode localization in nearly periodic disordered structures. *AIAA Journal*, 27(2):227-241, 1989.
- [136] C. PIERRE, D. M. TANG, E. H. DOWELL. Localized vibrations of disordered multispan beams: Theory and experiment. *AIAA Journal*, 25(9):1249-1257, 1987.
- [137] K. POPP. Contributions to the dynamic analysis of Maglev vehicles on elevated guideways. *Shock Vib. Bull.*, 50, Part 3:39-61, 1980.
- [138] K. POPP. Stochastic and elastic guideway models. W: W. O. SCHIEHLEN, wydawca, *Dynamics of High-Speed Vehicles*, strony 13-38. CISM Courses and Lectures No. 274, Springer-Verlag, 1982.
- [139] K. POPP, A. KRAUS, T. HEISS. Dynamical analysis of a simple vehicle on a periodic guideway. *Vehicle System Dynamics*, 11:107-120, 1982.
- [140] K. POPP, P. C. MÜLLER. On the Stability of Interactive Multibody Systems with an Application to Maglev-Vehicle-Guideways Control Systems. W: K. MAGNUS, wydawca, *Dynamics of Multibody Systems*, strony 260-273. IUTAM Symp., Monachium, 1977, Springer-Verlag, 1978.
- [141] K. POPP, W. SCHIEHLEN. Dynamics of magnetically levitated vehicles on flexible guideways. W: *The dynamics of vehicle on roads and on railway tracks*, strony 479-503. IUTAM Symp. Delft, sierpień 1975, Swets & Zeitlinger, 1976.
- [142] K. K. PUJARA. The cyclic condition in periodic structures and the natural frequencies of multi-supported beams. *J. Sound Vib.*, 13(1):103-104, 1970.
- [143] J. RAKOWSKI. Statyka i dynamika belki nieskończenie długiej na dyskretnym podłożu sprężystym. *Engineering Transactions*, 29(4):565-579, 1981.
- [144] J. RAKOWSKI. Schwingungen von unendlichen diskreten Seil- und Stabnetzen. *Z. angew. Math. Mech.*, 67(4):T130-T132, 1987.
- [145] H. H. RICHARDSON, D. N. WORMLEY. Transportation vehicle/beam - elevated guideway interactions: A state of the art review. *ASME J. Dyn. Syst. Meas. Control*, strony 169-179, czerwiec 1974.

- [146] F. E. RICHART, J. R. HALL, R. D. WOODS. *Vibrations of soils and foundations*. Prentice-Hall, 1970.
- [147] B. RIPKE. *Hochfrequente Gleismodellierung und Simulation der Fahrzeug-Gleis-Dynamik unter Verwendung einer nichtlinearen Kontaktmechanik*. Rozprawa doktorska, TU Berlin, 1995. W: VDI-Fortschrittsberichte, Reihe 12, Nr. 211, 1995.
- [148] B. RIPKE, KL. KNOTHE. Die unendlich lange Schiene auf diskreten Schwellen bei harmonischer Einzellasterregung. Raport, VDI-Fortschrittsberichte, Reihe 11, Nr. 155, 1991.
- [149] D. ROGULA. Kinematic resonances in periodic structures. *Proc. Vibration Problems*, 8(3):215-238, 1967.
- [150] D. ROGULA. Rezonanse kinematyczne w strukturach periodycznych. *Biuletyn WAT*, 16(7):9-33, 1967.
- [151] A. K. ROY, R. PLUNKETT. Wave attenuation in periodic structures. *J. Sound Vib.*, 104(3):395-410, 1986.
- [152] R. RZĄDKOWSKI. The general model of free vibrations of mistuned bladed disc, part I: Theory. *J. Sound Vib.*, 173(3):377-393, 1994.
- [153] R. RZĄDKOWSKI. The general model of free vibrations of mistuned bladed disc, part II: Numerical results. *J. Sound Vib.*, 173(3):395-413, 1994.
- [154] R. RZĄDKOWSKI. The partial admission of tuned and mistuned bladed discs. *J. Sound Vib.*, 171(2):201-217, 1994.
- [155] G. SENGUPTA. Natural frequencies and the normal modes of periodically supported beams and plates. *J. Sound Vib.*, 13(1):89-101, 1970.
- [156] G. SENGUPTA. Current developments in interior noise and sonic fatigue research. *Shock Vib. Dig.*, 7(10):3-20, 1975.
- [157] G. SENGUPTA. Vibration of periodic structures. *Shock Vib. Dig.*, 12:17-31, 1980.
- [158] S. SGUBINI, F. GRAZIANI, A. AGNENI. Elastic waves propagation in bounded periodic structures. *Acta Astronautica*, 15(11):913-917, 1987.
- [159] A. H. SHAH, S. K. DATTA. Harmonic waves in a periodically laminated medium. *Int. J. Solids Struct.*, 18:397-410, 1982.

- [160] S. W. SHAW, C. PIERRE. Non-linear normal modes and invariant manifolds. *J. Sound Vib.*, 150(1):170-173, 1991.
- [161] I. Y. SHEN. Vibration of rotationally periodic structures. *J. Sound Vib.*, 172(4):459-470, 1994.
- [162] Z. S. SIBAEI. *Vertikale Gleisdynamik beim Abrollen eines Radsatzes - Behandlung im Frequenzbereich*. Rozprawa doktorska, TU Berlin, 1992. W: VDI-Fortschrittsberichte, Reihe 11, Nr. 165, 1992.
- [163] J. SIGNORELLI, A. H. von Flotow. Wave propagation, power flow, and resonance in a truss beam. *J. Sound Vib.*, 126(1):127-144, 1988. 31.
- [164] K. SINGH, A. K. MALIK. Wave propagation and vibration response of a periodically supported pipe conveying fluid. *J. Sound Vib.*, 54(1):55-66, 1977.
- [165] K. SINGH, A.K. MALIK. Parametric instabilities of a periodically supported pipe conveying fluid. *J. Sound Vib.*, 62(3):379-397, 1979.
- [166] S. C. SINHA, D.-H. WU. An efficient computational scheme for the analysis of periodic systems. *J. Sound Vib.*, 151(1):91-117, 1991.
- [167] C. C. SMITH, A. J. GILCHRIST, D. N. WORMLEY. Multiple and continuous span elevated guideway - vehicle dynamic performance. *ASME J. Dyn. Syst. Meas. Control*, 97(1):30-40, 1975.
- [168] C. C. SMITH, D. N. WORMLEY. Response of continuous periodically supported guideway beams to travelling vehicle loads. *ASME J. Dyn. Syst. Meas. Control*, 97(1):21-29, 1975.
- [169] T. T. SOONG, J. L. BOGDANOFF. On the natural frequencies of a disordered linear chain of N degrees of freedom. *Int. J. Mech. Sci.*, 5:237-265, 1963.
- [170] T. T. SOONG, J. L. BOGDANOFF. On the impulsive admittance and frequency response of a disordered linear chain of N degrees of freedom. *Int. J. Mech. Sci.*, 6:225-237, 1964.
- [171] E. TASSILLY. Propagation of bending waves in a periodic beam. *Int. J. Engng. Sci.*, 25(1):85-94, 1987.
- [172] M. TOURATIER. Floquet waves in a body with slender periodic structure. *Wave Motion*, 8(5):485-495, 1986.

- [173] A. F. VAKAKIS. Dynamics of a nonlinear structure with cyclic symmetry. *Acta Mechanica*, 95:197-226, 1992.
- [174] A. F. VAKAKIS. A multiple-scales analysis of nonlinear, localized modes in a cyclic periodic system. *ASME J. Appl. Mech.*, 60:388-397, 1993.
- [175] A. F. VAKAKIS, M. E. RAHEB, C. CETINKAYA. Free and forced dynamics of a class of periodic elastic systems. *J. Sound Vibr.*, 172(1):23-46, 1994.
- [176] A. I. VESNITSKII, A. METRIKINE. Parametric instability in the oscillations of a body moving uniformly in a periodically inhomogeneous system. *J. Appl. Mech. and Tech. Phys.*, 34(2):266-271, 1993.
- [177] A. I. VESNITSKII, A. METRIKINE. Transient radiation in a periodically nonuniform elastic guide. *Izv. RAN. Mekhanika Tverdogo Tela*, 28(6):158-162, 1994.
- [178] R. VICHNEVETSKY. A quantum-like theory of wave propagation in periodic structures. *Computers Math. Applic.*, 19(8/9):59-75, 1990.
- [179] L. F. WAGNER. A continuous analog model for grouped-blade vibration. *J. Sound Vibr.*, 165(3):421-438, 1993.
- [180] O. WALLRAPP. Elastic vehicle guideway structures. W: A. D. DE PATER, H. B. PACEJKA, wydawcy, *Advanced Vehicle System Dynamics*, strony 215-232. ICTS Int. School Appl. Dyn., 1987. Supplement to Vehicle System Dynamics, Vol. 16.
- [181] J. H. WANG, W. L. SHIEH. The influence of a variable friction coefficient on the dynamic behavior of a blade with a friction damper. *J. Sound Vib.*, 149(1):137-145, 1991.
- [182] S.-T. WEI, C. PIERRE. Localization phenomena in mistuned assemblies with cyclic symmetry, Part 1: Free vibrations. *ASME J. Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design*, 110:429-438, 1988.
- [183] S.-T. WEI, C. PIERRE. Localization phenomena in mistuned assemblies with cyclic symmetry, Part 2: Forced vibrations. *ASME J. Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design*, 110:439-449, 1988.
- [184] Z. WESOŁOWSKI. Algebra of the transfer matrix for layered elastic material. *Archives of Mechanics*, 45(2):191-210, 1993.
- [185] Z. WESOŁOWSKI. Eigenfrequencies of a system of elastic layers. *Archives of Mechanics*, 45(2):251-266, 1993.

- [186] Z. WESOŁOWSKI. Harmonic waves in random system of elastic layers. *Bull. Acad. Polon. Sci., Technical Sciences*, 41(4):329-336, 1993.
- [187] Z. WESOŁOWSKI. Transfer matrix for random system of elastic layers. *Archives of Mechanics*, 45(6):679-688, 1993.
- [188] E.T. WHITTAKER, G.N. WATSON. *A Course of Modern Analysis*. Cambridge University Press, 1950.
- [189] F. W. WILLIAMS. A general algorithm for computing natural frequencies of elastic structures. *Quart. Journ. Mech. and Applied Math.*, XXIV(Pt. 3):263-284, 1971.
- [190] F. W. WILLIAMS. Natural frequencies of repetitive structures. *Quart. Journ. Mech. and Applied Math.*, XXIV(Pt. 3):285-310, 1971.
- [191] F. W. WILLIAMS. An algorithm for exact eigenvalue calculations for rotationally periodic structures. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 23:609-622, 1986.
- [192] J. WOLF, T. D. K. NGOC, R. KILLE, W. G. MAYER. Investigation of Lamb waves having a negative group velocity. *J. Acoust. Soc. Amer.*, 83(1):122-126, 1988.
- [193] S. XIAO-HUANG, W. XIN-ZHI. Free vibration of a class of Hill's equation having a small parameter. *Appl. Math. & Mech.*, 11(4):355-361, 1990. English Edition of Chinese Journal.
- [194] W.-C. XIE, S. T. ARIARATNAM. Numerical Computation of wave localization in large disordered beam-like lattice trusses. *AIAA Journal*, 32(8):1724-1732, 1994.
- [195] J. N. YANG, Y. K. LIN. Frequency response functions of a disordered periodic beam. *J. Sound Vib.*, 38(3):317-340, 1975.
- [196] Y. YONG, Y. K. LIN. Propagation of decaying waves in periodic structures of finite length. *J. Sound Vib.*, 129(2):99-118, 1989.
- [197] Y. YONG, Y.K. LIN. Dynamics of complex truss-type space structures. *AIAA Journal*, 28(7):1250-1258, 1990.
- [198] X. M. ZHANG, W. H. ZHANG. The reduction of vibrational energy flow in a periodically supported beam. *J. Sound Vib.*, 151(1):1-7, 1991.



56572