O klasyfikacji ciągów liczbowych.

W wykładzie elementarnym mówimy przeważnie o ciągach i szeregach zbieżnych, nie analizując bliżej stanów sprzecznych z warunkami zbieżności. Tymczasem rozpatrzenie możliwie wyczerpujące rozmaitych możliwości, rozmaitych, że się tak wyrażę, rodzajów konstrukcji dowolnego ciągu lub szeregu, podnieść może znacznie stopień opanowania przez nauczyciela i jasność ujęcia omawianego zagadnienia, a zdoła też zainteresować i ucznia, mającego żywsze do matematyki zamiłowanie. Oprzeć się trzeba przytym na podstawach teorji mnogości, co uczynię poniżej w zastosowaniu głównie do ciągów liczbowych, unikając starannie nadmiaru określeń i szczegółów.

Rozważać będziemy ciąg nieskończony.

[1] $$a_1,\ a_2,\ a_3 \dots a_n, \dots\dots$$

Każda liczba ciągu, podług znanej umowy, może być oznaczona zapomocą punktu na prostej nieograniczonej. Mamy tedy nieskończoną liczbę punktów:

[2] $$A_1,\ A_2,\ A_3 \dots\dots A_n \dots\dots$$

stanowiących t. zw. mnogość nieskończoną[1]) punktów. Ogólnie mnogością punktów zowiemy wszelki ich zbiór (słowo, stanowiące przekład dosłowny francuskiej nazwy mnogości: „ensemble"; w języku niemieckim mamy: Menge — mnogość, Punktmenge — mnogość punktów) na prostej lub innej linji, w płaszczyźnie, wreszcie w przestrzeni o do-

[1]) Przeliczalną t. j. dającą się „podporządkować ciągowi liczb naturalnych; 1, 2, 3, 4...n,... w ten sposób, iż każdemu punktowi mnogości odpowiada jedna z tych liczb jako wskaźnik i nawzajem każdej z nich odpowiada jeden tylko punkt mnogości.

wolnej liczbie wymiarów, ograniczonej lub nieograniczonej. Rozważać będziemy dalej tylko zbiory punktów, leżących na prostej.

P u n k t e m s k u p i e n i a mnogości nazywamy taki punkt, należący do niej lub nie, który posiada w dowolnie blizkim sąsiedztwie punkty danej mnogości. Inaczej: A jest punktem skupienia, jeżeli przy dowolnie małym ε istnieje przynajmniej jeden punkt A_{n_1}, należący do mnogości, i taki, iż długość odcinka AA_{n_1} czyli wartość bezwzględna różnicy odpowiednich liczb a i a_{n_1} jest mniejsza niż ε (ale w i ę k s z a niż 0):

$$AA_{n_1} < \varepsilon\text{: czyli } (a - a_{n_1}) < \varepsilon\ .$$

Wynika stąd bezpośrednio[2]), iż w dowolnie małym „otoczeniu“ punktu A leży n i e s k o ń c z e n i e w i e l e punktów mnogości. Istotnie, na odcinku, równym 2ε, którego środek stanowi A, leży przynajmniej jeden punkt mnogości A_{n_1}; oznaczmy przez ε_1 jego odległość od A, t. j. $AA_{n_1} = \varepsilon_1$. Oczywiście $\varepsilon_1 < \varepsilon$. Na odcinku długości $2\varepsilon_1$, o środku w A, leży znowuż na zasadzie określenia przynajmniej jeden punkt mnogości danej A_{n_2}. Załóżmy, że $AA_{n_2} = \varepsilon_2$. Znajdziemy znów punkt A_{n_3} taki, iż $AA_{n_3} < \varepsilon_2$ i t. d. nieograniczenie. Ostatecznie, na odcinku równym 2ε, którego środkiem jest punkt A, znajduje się nieskończenie wiele punktów mnogości, *c. b. d. d.*

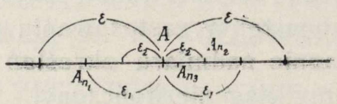


Fig. 1.

Uważajmy jeszcze za dowiedzione znane twierdzenie:

[*A*] Mnogość nieskończona punktów, leżących na odcinku s k o ń c z o n y m prostej (lub zamkniętych w o g r a n i c z o n y m obszarze

---

[2]) Usuwam rozmyślnie z niniejszego wykładu rozpatrywanie takich ciągów (i odpowiadających im mnogości punktowych), w których ta sama liczba (wzgl. ten sam punkt) powtarza się skończoną lub nieskończoną liczbę razy, z różnemi wskaźnikami porządkowemi, co np. zachodzi w ciągu:

$$(-1)^1,\ (-1)^2,\ (-1)^3 \ldots\ (-1)^n \ldots$$

$$n_1 = n_3 = n_5 = \ldots n_{2k+1} = -1\ ;\ n_2 = n_4 = \ldots n_{2k} = +1\ .$$

Punkty oznaczajace $+1$ i -1, możnaby uważać za punkty skupienia, biorąc za treść odpowiedniego określenia nie obecność j e d n e g o punktu w dowołnie małym otoczeniu, lecz obecność n i e s k o ń c z o n e j l i c z b y punktów (w danym wypadku pokrywających się wzajemnie) w takim otoczeniu. Warunek: $|a - a_n| > 0$ odrzucilibyśmy w tym wypadku.

przestrzeni o dowolnej liczbie wymiarów) posiada przynajmniej jeden punkt skupienia.

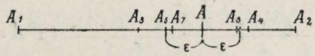
Wreszcie uprzytomnić sobie należy wyraźnie, iż wyrazy ciągu ogólnego [1] lub punkty odpowiedniej mnogości [2] mogą być uporządkowane w dwojaki sposób:

1) na zasadzie porządku wskaźników,

2) na zasadzie wielkości samych wyrazów, t. j. kolejnego następstwa odpowiednich punktów na prostej.

Po tych omówieniach przystąpmy do klasyfikacji ciągów na zasadzie własności odpowiednich zbiorów punktów.

Kategorja I-a. Wszystkie punkty mnogości [2] leżą na ograniczonym odcinku prostej i posiadają tylko jeden punkt skupienia A. Odpowiednią liczbę a nazwiemy granicą (w ściślejszym znaczeniu tego wyrazu) ciągu [1], a ciąg sam — zbieżnym. Zbadajmy własności tej liczby i poczyńmy jeszcze pewne odróżnienia. Z określenia punktu skupienia i z twierdzenia [A] wynika, iż, jeżeli wyłączymy wszystkie punkty, leżące wewnątrz odcinka czyli „przedziału“, równego



$$[a_1=0;\ a_2=1\tfrac{1}{2};\ a_3=\tfrac{2}{3};\ a_4=1\tfrac{1}{4};\ a_5=\tfrac{4}{5};\ a_6=1\tfrac{1}{6};\ a_7=\tfrac{6}{7};\ldots\ \varepsilon=\tfrac{1}{5};\ n'=5;]$$

Fig. 2.

2ε (ε dowolnie małe) i posiadającego środek w punkcie A, to pozostanie tylko pewna liczba skończona punktów mnogości, w przeciwnym razie bowiem istniałby co najmniej jeden jeszcze punkt skupienia poza przedziałem 2ε, zawierającym A (lub na jego krańcu), co byłoby sprzeczne z założeniem, iż mnogość posiada tylko ten jedyny punkt skupienia. Wśród owej skończonej liczby punktów pozostałych jeden będzie posiadał wskaźnik największy, równy, przypuśćmy, n'. Wszystkie punkty o wskaźniku większym niż n', należą do grupy wyłączonej i leżą wewnątrz przedziału 2ε (którego środkiem jest punkt A).

Otrzymujemy znany warunek zbieżności:

Warunek [a]: Przy dowolnie małym ε (>0) możemy znaleźć takie n', iż dla wszelkiego $n>n'$ zachodzi nierówność:

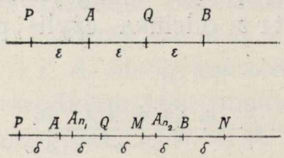
$$|a_n-a|<\varepsilon.$$

Ponieważ odległość pomiędzy dwoma punktami, leżącemi w przedziale 2ε (wewnątrz), jest $<2\varepsilon$, przeto warunek wyłuszczony można zastąpić innym:

Warunek [b]. *Przy dowolnie małym* δ ($=2\varepsilon$ z poprzedniego rozumowania, a więc równie dowolnym, jak ε), *można znaleźć* takie n', *iż dla* $n>n'$ i $p=1, 2, 3...$ *zachodzi nierówność*:

$$|a_{n+p}-a_n|<\delta .$$

Oba te warunki znaleźliśmy jako *konieczne*; łatwo dowieść, że są *wystarczające*, t. j. że mnogość [2] posiada, przy zachowaniu jednego z nich, tylko jeden punkt skupienia. Istotnie, gdyby istniały 2 takie punkty: A i B, to dla okazania dostateczności pierwszego warunku wypadłoby za ε wziąć długość $\frac{AB}{2}$, dla okazania dostateczności drugiego za δ długość $\frac{AB}{3}$.



$(PA=AQ=QM=MB=BN=\delta)$

Fig. 3.

Otrzymalibyśmy w 1-ym przypadku: ponieważ A spełnia warunek $|a-a_n|<\varepsilon$, (czyli $AA_n<\varepsilon$) przy $n>$ od odpowiedniej wartości n', przeto poza otoczeniem $PQ=2\varepsilon$ punktu A (i na jego granicy) istnieje tylko liczba skończona ($\leqslant n'$) punktów mnogości; B tedy nie jest punktem skupienia, co przeczy założeniu. W 2-im zaś wypadku 2 punkty, z których jeden leży wewnątrz otoczenia PQ punktu A, drugi zaś wewnątrz otoczenia MN (punktu B), byłyby w odległości $<\delta$, a że punkty te mogą posiadać wskaźniki dowolnie wielkie, przeto odnalezienie n', odpowiadającego warunkowi [b], byłoby niemożliwe.

Jako przykład ciągu zbieżnego o postaci możliwie ogólnej weźmiemy ciąg, którego n-ty wyraz:

[Przykład 1]. $a_n=1+(-1)^n.\frac{1}{n}$

($a_1=0$; $a_2=1\frac{1}{2}$; $a_3=\frac{2}{3}$; $a_4=1\frac{1}{4}$ i t. d. p. fig. 2).

Punktem skupienia będzie punkt A, oznaczający $+1$. Punkty mnogości znajdują się w liczbie nieskończonej z obu stron punktu A—nazwiemy taki punkt skupienia *obustronnym*. Ciąg o wyrazie ogólnym: $a_n = 1 + \frac{1}{n}$ odpowiadałby mnogości, w której liczba nieskończona punktów (wszystkie nawet w tym razie) leżałyby tylko z prawej strony punktu A. Nazwiemy taki punkt punktem skupienia lewostronnym—mnogość, oznaczająca ciąg o wyrazie ogólnym: $a_n = 1 - \frac{1}{n}$ posiadałaby wtym samym miejscu punkt skupienia prawostronny. Weźmy jeszcze dla przykładu ciąg:

[Przykład 2]: $-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}, \frac{13}{16}, \frac{15}{16} \ldots$

$$\left(a_{2n-1} = \frac{2^n - 3}{2^n},\ a_{2n} = \frac{2^n - 1}{2^n} \right).$$

Ciąg ten dąży również do 1 przez wartości mniejsze niż 1 (punkt skupienia prawostronny), różni się jednak od ciągu poprzedniego tym, iż wyrazy jego nie wzrastają stale, lecz przeciwnie różnica $a_n - a_{n-1}$ wciąż zmienia znak. Mamy tedy nowe rozróżnienia:

1) $a_n - a_{n-1} > 0$ przy wszelkim n, lub też przynajmniej przy $n >$ od pewnego n'; ciąg nazwiemy ciągiem rosnącym (poczynając od pewnej wartości wskaźnika).

2) $a_n - a_{n-1} < 0$ i t. d. — ciąg malejący.

3) żaden z tych warunków nie jest zachowany — ciąg możnaby nazwać ciągiem falistym (zbieżnym).

Rozróżnienia te, napozór banalne, powtarzam tutaj ze względu na ich wartość dydaktyczną. Jest rzeczą pożyteczną okazać uczniowi, iż np. ciąg wcale nie musi być koniecznie rosnącym (w ścisłym znaczeniu tego słowa), aby posiadał granicę „prawostronną" i t. d. Można również zwrócić uwagę, że każdy ciąg, posiadający granicę prawostronną, może być jednak uporządkowany w inny sposób tak, iż stanie się ciągiem rosnącym (przynajmniej poczynając od pewnego wskaźnika); że przeróbka analogiczna da się zastosować do ciągu o granicy lewostronnej; że atoli ciąg o granicy obustronnej nie może być uporządkowany podług kolejnego następstwa odpowiednich puuktów (na prostej). Można go natomiast rozdzielić na dwa ciągi: jeden rosnący, drugi malejący, rozdzielając odpowiednią mnogość punktów na dwie mnogości, z których jedna zawierać będzie wszystkie punkty, leżące z lewej strony punktu skupienia, druga — wszystkie punkty z prawej strony (dołączając do jednej z nich sam punkt skupienia, jeżeli należy do danej mnogości) i porządkując potym wyrazy ciągów podług następstwa punktów [3]).

[3]) Z wyjątkiem punktu skupienia, który może otrzymać numer porządkowy dowolny.

Zanim przejdziemy do kategorji II-ej, określimy jeszcze, co nazywamy punktami krańcowemi czyli krańcami (lewym i prawym) [4]) mnogości. Otóż, lewy kraniec stanowi taki punkt, należący do mnogości lub stanowiący jej punkt skupienia, z którego lewej strony niema żadnego punktu mnogości, podobnież prawy kraniec stanowi i t. d. Tak w przykładzie 1-ym kraniec lewy stanowi punkt, oznaczający 0, kraniec prawy — punkt, oznaczający $+1\frac{1}{2}$. Te same nazwy zastosujemy do ciągu, mówiąc o jego lewym i prawym krańcu.

Kategorja II. Mnogość [2]

$$A_1, A_2 \dots A_n \dots$$

nie posiada żadnego punktu skupienia (w odległości skończonej). Możliwe są trzy ewentualności:

1) Mnogość [2] posiada tylko lewy kraniec (istnienie obu krańców pociągałoby za sobą należenie do kategorji I-ej). Analitycznie: jakkolwiek wielkie m obierzemy, zawsze znaleźć można taką liczbę n', iż dla $n > n' : a_n > m$ (ponieważ z lewej strony punktu M leży tylko liczba skończona punktów mnogości, $\leqq n'$). Możemy to oznaczyć symbolicznie:

$$\lim_{n=\infty} a_n = +\infty \ .$$

2) To samo ze zmianą kierunków i znaków:

$$\lim_{n=\infty} a_n = -\infty \ .$$

3) Niema ani punktu krańcowego z prawej strony, ani punktu krańcowego z lewej. Inaczej: istnieją punkty mnogości, leżące w odległości dowolnie wielkiej od punktu, oznaczającego zero, z obu jego stron. Przy dowolnym m, można znaleźć taką liczbę n', iż dla $n > n'$: $|a_n| > m$ i ponadto istnieje zawsze przynajmniej jedno (a więc i nieskończona liczba) $n_1 > n'$ takie, iż: $a_{n_1} > 0$ i $n_2 > n'$ takie, iż: $a_{n_2} < 0$.

Przykład: ciąg, którego n-ty wyraz:

[przykład 3] $$a_n = n \cos \frac{\pi n}{3} \ .$$

Dwa pierwsze wypadki bywają zwykle podciągane pod nazwę rozbieżności, w ściślejszym znaczeniu tego słowa. Natomiast ciągi, czyniące zadość warunkom, wymienionym w 3), należą już raczej do kategorji, która obejmuje wszystkie pozostałe możliwości — do kategorji ciągów oscylujących, podług terminologji d-ra Böttchera (Zasady algiebry, str. 607). Określenia ciągów rosnących (ewentual-

[4]) Albo: „dolnym“ i „górnym“—modyfikacja bez znaczenia.

ność możliwa w wypadku 1-ym) i malejących (w wypadku 2) pozostają takie same jak w zastosowaniu do ciągów kategorji I-ej, zbieżnych.

Kategorja III. Mnogość [2] składa się z punktów, leżących na skończonym odcinku prostej (oba krańce istnieją) i posiada więcej niż jeden punkt skupienia. Oznaczmy owe punkty skupienia:

$$A', A'', \dots A^{(k)} \dots \quad ^{5})$$

Odpowiednie liczby $a', a'', \dots a^{(k)} \dots$ nazwiemy granicami (w luźniejszym znaczeniu tego słowa) ciągu

[1] $$a_1, a_2, a_3 \dots a_n \dots$$

W dowolnym otoczeniu każdego z tych punktów leży nieskończenie wiele punktów mnogości — żaden z nich tedy nie może posiadać wskaźnika, większego od innych. Stąd wynika bezpośrednio:

Warunek [aa]: Przy dowolnie małym ε i dowolnie wielkim n' można znaleźć jedną przynajmniej taką wartość $n_1 > n$ (a więc i nieskończoną liczbę takich wartości [6]), iż:

$$|a' - a_{n_1}| < \varepsilon$$

jedną przynajmniej (a więc i nieskończenie wiełe) wartość $n_2 > n'$, taką, iż:

$$|a'' - a_{n_2}| < \varepsilon$$

jedno (a więc i nieskończenie wiele) $n_3 > n'$, takie iż:

$$|a''' - a_{n_3}| < \varepsilon$$

i t. d. dla wszystkich punktów skupienia $a^{(k)}$.

Niech każdy punkt skupienia $A^{(k)}$ stanowi środek przedziału mniejszego niż 2ε — w takim razie wewnątrz pozostałych przedziałów prostej (i na ich krańcach) leży liczba skończona punktów mnogości (podług twierdzenia [A]); któryś z nich ma wskaźnik największy n_0. Punkty, należące do przedziałów, otaczających punkty skupienia, mają wskaźniki większe niż n_0. Otrzymujemy tedy:

Warunek [ab]: Przy dowolnie małym ε można znaleźć taką wartość n_0, iż dla każdego $n > n_0$ zachodzi jedna (przynajmniej) z nierówności:

$$|a^{(k)} - a_n| < \varepsilon .$$

Analogje z warunkiem [a] zbieżności są widoczne; oba warunki

---

[5]) Liczba ich może zresztą nie być przeliczalna, t. j. nie czynić zadość warunkowi, wymienionemu w odsyłaczu 1-ym.

[6]) Ponieważ po znalezieniu n_1 bierzemy je za n' i szukamy nowej wartości $n_1 > n'$ i t. d. nieograniczenie.

[aa] i [ab] są konieczne do tego, by ciąg należał do kategorji III-ej i posiadał jako granice liczby a', a'', a'''...$a^{(k)}$ ....

Warunek [aa] pociąga za sobą istnienie wszystkich wymienionych w nim punktów skupienia, t. j. wystarcza do tego, by wnioskować, iż a', a''.... $a^{(k)}$ ... są granicami ciągu; łącznie z warunkiem [ab] świadczy, iż ciąg posiada, jako granice: a', a'' i t. d. i że innych granic nie ma. Rozwijając dalej porównanie, można wywnioskować:

Warunek [ba]: Przy istnieniu dwu lub więcej punktów skupienia dla dowolnego δ i dowolnego n' istnieją takie wartości n'', n''', ... $n^{(i)}$.... większe od n' i w liczbie nieskończonej, iż:

$$\left|a_{n^{(i)}} - a_{n^{(l)}}\right| < \delta \ ,$$

(gdzie $n^{(i)}$, $n^{(l)}$ stanowią dwa dowolne wyrazy z ciągu: n'', n''', ... $n^{(i)}$).

Warunek [bb]. Przy dowolnym δ można znaleźć takie n_0, iż dla każdego $n > n_0$ istnieje przynajmniej jedno (a więc i nieskończenie wiele) p z ciągu: 1, 2,.... i.... takie, iż:

$$|a_{n+p} - a_n| < \delta \ .$$

Rzecz oczywista, że spełnianie się tych warunków (koniecznych) [ba] i [bb] świadczy tylko o istnieniu jednego co najmniej punktu skupienia, ale nie o istnieniu określonych punktów a', a''.... $a^{(k)}$.... ani o ich liczbie. Analogiczna uwaga może być zresztą zastosowana do odpowiedniego warunku [b] zbieżności: świadomość, że można znaleźć n' takie, iż dla $n > n'$

$$|a_{p+n} - a_n| < \text{niż dowolnie małe } \delta \ (p = 1,\ 2,\ 3....)$$

nie daje jeszcze bezpośrednio oznaczenia liczbowego samej granicy a.

Mnogość punktów skupienia posiada w rozważanym wypadku oba krańce: lewy i prawy. Pomijając dowód, wynikający bezpośrednio z twierdzenia, iż mnogość punktów skupienia jest zawsze zamknięta, t. j. zawiera swoje punkty skupienia, stwierdzimy tylko, że każdy z tych krańców musi być punktem skupienia mnogości danej [1]. Ciąg tedy, należący do kategorji III, posiada wśród swych granic największą („la plus grande limite“) i najmniejszą; pojęcia te mają ważne zastosowanie w teorji funkcji. Określenie klasyczne granicy największej brzmi jak następuje:

Przy dowolnie małym ε można znaleźć takie n', iż dla każdego $n > n'$ zachodzi nierówność:

$$a_n - a < \varepsilon \ ;$$

oprócz tego istnieje przynajmniej jedna (a więc i nieskończona ich liczba) wartość n taka, iż:

$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

Pomijając dowód, odsyłam do załączonego rysunku (fig. 4).

Ciągi rozważanego typu mogą być tworzone sztucznie przez łączenie dwuch lub kilku ciągów zbieżnych. Tak np. 2 ciągi:

$$\tfrac{1}{3},\ \tfrac{1}{4},\ \tfrac{1}{5},\ \ldots \frac{1}{n} \ldots$$

$$\tfrac{2}{3},\ \tfrac{3}{4},\ \tfrac{4}{5},\ \ldots \frac{n-1}{n} \ldots \qquad \text{[przykład 4].}$$

łączymy w jeden, pisząc po każdym wyrazie pierwszego odpowiedni wyraz drugiego:

$$\tfrac{1}{3},\ \tfrac{2}{3},\ \tfrac{1}{4},\ \tfrac{3}{4},\ \tfrac{1}{5},\ \tfrac{4}{5} \ldots \frac{1}{n},\ \frac{n-1}{n},\ \ldots$$

Ciąg taki posiada dwie granice: g r a n i c ę n a j w i ę k s z ą równą 1 i g r a n i c ę n a j m n i e j s z ą $=0$. Możemy też otrzymać ciąg o nieskończonej liczbie wartości granicznych, łącząc nieskończoną (przeliczalną) liczbę ciągów zbieżnych.

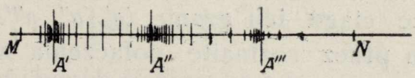


Fig. 4. [7])

Będziemy przytym porządkowali wyrazy podług linji zygzakowatych, wskazanych na jednej lub drugiej tablicy:

TABLICA 1.

	granice:
$a_{11},\ a_{12},\ a_{13},\ a_{14} \ldots$	a'
$a_{21},\ a_{22},\ a_{23},\ \ldots$	a''
$a_{31},\ a_{32},\ a_{33},\ \ldots$	a'''
$a_{41},\ \ldots$	$a^{(4)}$
$\ldots\ldots$	
$a_{n1},\ a_{n2},\ \ldots$	$a^{(n)}$
$\ldots\ldots$	

[7]) Wyjaśnienie fig. 4: M — kraniec lewy danej mnogości, N — kraniec prawy, A' — oznacza granicę najmniejszą a', A''' — granicę największą a'''. (Rysunek należy uzupełnić w myśli, pamiętając, że w sąsiedztwie każdego punktu skupienia leży istotnie n i e s k o ń c z e n i e w i e l e punktów mnogości).

TABLICA 2.

$$
\begin{array}{l}
a_{11},\ a_{12},\ a_{13},\ a_{14}\ \ldots\ldots \\
a_{21},\ a_{22},\ a_{23},\ a_{24},\ \ldots\ldots \\
a_{31},\ a_{32},\ a_{33},\ \ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{n1},\ a_{n2},\ a_{n3}\ \ldots\ldots
\end{array}
$$

Otrzymamy:

z tabl. 1): $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{31}, a_{22}, a_{13} \ldots\ldots$

z tabl. 2): $a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_{21}, a_{31}, a_{32} \ldots\ldots$

W każdym wypadku można odpowiednie prawo sformułować arytmetycznie. Należy zwrócić uwagę na to, że oprócz granic a', a'',... ...$a^{(k)}$..., ciąg złożony, otrzymany w podobny sposób, może posiadać jeszcze inne granice, które n i e b y ł y granicami ciągów pierwotnych, lecz stanowią granice ciągu ich granic (a', a'', a'''... $a^{(k)}$...) lub granice ciągów, otrzymanych przez rozmaite połączenia wyrazów r ó ż n y c h ciągów danych.

Zagadnienie odwrotne: rozkład danego ciągu, posiadającego wiele wartości granicznych, czy też, jeśli kto woli, oscylującego dokoła tych wartości, na ciągi zbieżne, t. j. innemi słowy, rozkład mnogości o wielu punktach skupienia na mnogości, posiadające po jednym takim punkcie, jest r ó w n i e ż z a w s z e m o ż l i w e. Łatwo je rozwiązać przy skończonej liczbie punktów skupienia — przy liczbie nieskończo-

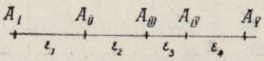


Fig. 5.

nej zacząć można od tego, by wyodrębnić wśród nich pewien ciąg m a l e j ą c y lub r o s n ą c y.

$$a_{\rm I},\ a_{\rm II},\ \ldots\ a_N \ldots$$

Załóżmy:

$$|a_{\rm II} - a_{\rm I}| = \varepsilon_1$$

$$|a_{\rm III} - a_{\rm II}| = \varepsilon_2$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$|a_{N+\rm I} - a_N| = \varepsilon_n .$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

Utwórzmy teraz z ciągu:

[1] $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n \ldots$

ciągi w sposób następujący:

Do pierwszego weźmiemy za pierwszy wyraz, wyraz a_1 ciągu [1], za drugi — pierwszy (po a_1) a_2', wyraz ciągu [1] taki, iż $|a_1 - a_2'| < \frac{\varepsilon_1}{2}$, za trzeci — pierwszy a_3', z następnych wyrazów taki iż:

$$|a_1 - a_3'| < \frac{\varepsilon_1}{4} \text{ etc... wogóle:}$$

$$|a_1 - a_n'| < \frac{\varepsilon_1}{2^{n-1}}.$$

Pierwszy ciąg:

$$a_1, a_2', a_3', \ldots a_n', \ldots$$

Do drugiego ciągu: za pierwszy wyraz: a_2 (o ile ten wyraz nie został już wzięty do poprzedniego ciągu), za drugi: pierwszy (po a_2) z wyrazów ciągu [1] a_2'' taki iż:

$$|a_{II} - a_2''| < \frac{\varepsilon_{(2)}}{2}.$$

($\varepsilon_{(2)}$ — mniejsza z dwuch liczb: ε_1 i ε_2).

potym: $$|a_{II} - a_3''| < \frac{\varepsilon_{(2)}}{4}$$

i wogóle: $$|a_{II} - a_n''| < \frac{\varepsilon_{(2)}}{2^{n-1}}.$$

Ciąg drugi:

$$(a_2), a_2'', a_3'', \ldots a_n'', \ldots$$

Ogólnie wyrazy ciągu l-go: [8])

$$(a_l), a_{2(l)}, a_{3(l)} \ldots a_{n(l)} \ldots$$

czynią zadość warunkom

$$|a_L - a_{n(l)}| < \frac{\varepsilon_{(l)}}{2^{n-1}}$$

($\varepsilon_{(l)}$ — mniejsza z dwuch liczb: ε_{l-1} i ε_l).

W ten sposób:

1) rozdzielamy pomiędzy nowe ciągi wszystkie wyrazy ciągu danego;

---

[8]) Oprócz, być może, pierwszego, za który bierzemy a_l, o ile ten wyraz nie został już wzięty do którego z poprzednich ciągów. $a_{2(l)}$ — wyraz pierwszy po a_l, spełniający warunek: $|a_L - a_{2(l)}| < \frac{\varepsilon_{(l)}}{2}$ i t. d.

2) żaden wyraz jednego ciągu nie może równocześnie być zaliczony do innego, ponieważ (prócz ewentualnie pierwszych wyrazów nowych ciągów, co do których została dana zupełnie wyraźna umowa), z każdym punktem granicznym A_N kojarzymy tylko te punkty, które leżą bliżej tego punktu, niż punktów sąsiednich:

$$A_{N-1} \text{ i } A_{N+1}\ .$$

8) każdy ciąg jest istotnie ciągiem nieskończonym i ma za granicę (jedyną odpowiednią wartość a_N, ponieważ inaczej punkty A_N nie byłyby istotnie punktami skupienia mnogości [2]. *c. b. d. d.*

Ponieważ dalej każdy ciąg zbieżny może być rozłożony (ew. ze zmianą sposobu uporządkowania) na dwa ciągi: malejący i rosnący (lub zastąpiony jednym tylko: malejącym lub rosnącym), przeto zasadniczemi elementami każdego ciągu kategorji III są ciągi rosnące i malejące. Obeznani z teorją mnogości łatwo nawiążą ten fakt do nauki o liczbach nieskończonych porządkowych.

Jako przykład, weźmy ciąg:

[przykład 5] $$\sin 1,\ \sin 2,\ \sin 3, \ldots \sin n \ldots$$ [9])

Każda z liczb w przedziale (—1, +1) stanowi dlań wartość graniczną. Granica największa: +1, najmniejsza: —1. Wszystkie te wartości graniczne stanowią zbiór nieprzeliczalny — gdybyśmy je chcieli ponumerować, t. j. podporządkować ciągowi liczb naturalnych, to nie moglibyśmy znaleźć żadnego takiego prawa, któreby wyznaczyło dla każdej danej, określonej liczby tego zbioru, równie określone miejsce (skończony wskaźnik). Mówimy o takiej mnogości, iż moc jej jest wyższa, niż moc mnogości przeliczalnych – w danym wypadku jest to moc „continuum". Mimo to wyrazy ciągu, na zasadzie naszego twierdzenia, można uporządkować w nowych ciągach, zbieżnych, w liczbie nieskończonej przeliczalnej. To samo się stosuje do ciągu wszystkich liczb ułamkowych pomiędzy 0 a 1, uporządkowanego podług mianowników, a przy równych mianownikach, podług liczników, z wyłączeniem ułamków, dających się skrócić:

[przykł. 6] $$\tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{3},\ \tfrac{2}{3},\ \tfrac{1}{4},\ \tfrac{3}{4},\ \tfrac{1}{5},\ \tfrac{2}{5},\ \tfrac{3}{5},\ \tfrac{4}{5},\ \tfrac{1}{6},\ \tfrac{5}{6},\ \tfrac{1}{7}\ldots$$

Granice zajmują przedział: (0,1).

---

[9]) Ł. Böttcher. Zasady algiebry, str. 607. Został tam podany przykład ogólniejszy:

$$\sin \alpha,\ \sin 2\alpha,\ \sin 3\alpha\ \ \sin n\alpha \ldots$$

Kategorja IV. Mnogość

[2] $$A_1,\ A_2,\ A_3 \ldots A_n \ldots$$

posiada punkty skupienia w odległości skończonej, ale jednocześnie nie ma krańca lewego, prawego lub obu. Jest to połączenie poprzedniego przypadku z jednym z 3-ch, obejmowanych przez kategorję II. Zmian, jakie należałoby wprowadzić do warunków [*aa*], [*bb*] etc. (kategorja III) nie będę tu wyłuszczał, wobec danego już powyżej materjału djalektycznego. Co do rozkładu na ciągi zbieżne, można go uskuteeznić zapomocą wskazanego sposobu, jeżeli liczba punktów skupienia jest nieskończona — jeżeli jest skończona, to ciąg się rozpadnie na tyleż ciągów zbieżnych i oprócz tego na jeden lub 2 ciągi rozbieżne, ułożone z wyrazów, pozostałych po zamknięciu w odpowiednich przedziałach punktów skupienia.

Szeregowi:

$$u_1 + u_2 + \ldots.$$

odpowiada ciąg sum:

$$s_1,\ s_2,\ s_3 \ldots.$$

$$s_1 = u_1;\ s_2 = u_1 + u_2; \ldots.\ s_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots. u_n,\ \ldots.$$

i odwrotnie:

$$\begin{aligned} u_1 &= s_1 \\ u_2 &= s_2 - s_1 \qquad\qquad u_n = s_n - s_{n-1} \\ u_3 &= s_3 - s_2 \\ &\ldots\ldots \end{aligned}$$

Szereg dany a priori mógł powstać w ten sposób z dowolnego ciągu, a więc ciąg jego sum może należeć do każdej z rozpatrzonych kategorji. Szereg nazywamy zbieżnym, o ile ten ciąg jest zbieżny. Szereg o wyrazach wyłącznie dodatnich lub ujemnych daje ciąg sum rosnący lub malejący ($s_2 - s_1$ ma znak stały) – a więc zbieżny lub rozbieżny, ale nigdy nie oscylujący (kategorja II 3), kategorja III, IV). Szereg naprzemienny (o wyrazach kolejno dodatnich i ujemnych) podlega takim samym ewentualnościom, co i szereg dowolny. Istotnie, utwórzmy z dowolnego ciągu: s_1, $s_2 \ldots$ szereg $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$

Jeżeli w tym szeregu mamy dwa następujące po sobie wyrazy dodatnie u_n, u_{n+1}, to umieścimy pomiędzy niemi wyraz u_N dowolny ujemny, a wyraz u_{n+1} zastąpimy przez wyraz $=u_{n+1}+|u_N|$; stosując podobną czynność do dwu następujących po sobie wyrazów ujemnych, otrzymamy ostatecznie szereg naprzemienny, który w ciągu swych sum posiada oprócz sum:

$$s_1,\ s_2,\ s_3 \ldots . s_n \ldots .$$

jeszcze inne liczby, powstałe dzięki wyrazom wstawionym, a więc podlega jeszcze większej liczbie ewentualności, jest jeszcze bardziej złożony.

W calym powyższym wykładzie rozmyślnie odwoływałem się jak najbardziej do intuicji gieometrycznej. Użycie rysunków, na których są oznaczone punkty, odpowiadające wyrazom danego ciągu, stanowi

$\varepsilon=0{,}02$

$y=0{,}7$

$|a_{16}-y|>\varepsilon$ ponieważ $a_{16}-y=\frac{5}{7}-\frac{7}{10}=\frac{1}{70}$.

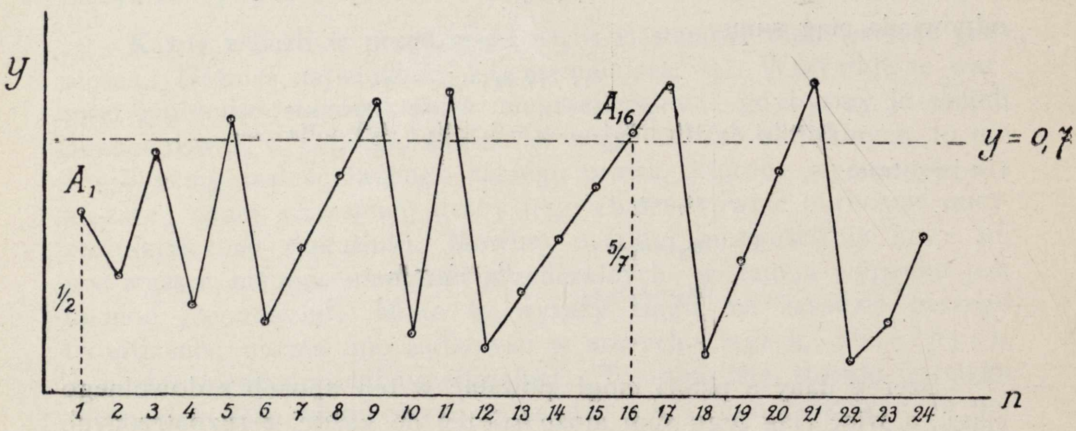


Fig. 6 (Odcięte w skali 10 razy mniejszej niż rzędne).

ilustrację niezbędną, nasuwając, przy dobrej interpretacji, pomysły do najściślejszych dowodów analitycznych. Drugi sposób uzmysłowienia polega na wykreślaniu djagramów, w których wyrazy ciągu są rzędnemi, wskaźniki — odciętemi. W ten sposób, w przeciwstawieniu do pierwszego, uwydatniamy drugą zasadę uporządkowania wyrazów: podług wskaźników (nie zaś wielkości wyrazów). Łatwo wtedy okazać, jak punkty reprezentacyjne, wraz z łączącą je linją łamaną zbliżają się coraz bardziej do pewnej prostej, równoległej do osi odciętych, której punkty mają za rzędną granicę ciągu zbieżnego; różnice pomiędzy ciągami zbieżnemi: rosnącemi, malejącemi i falistemi, ciągami rozbieżnemi i oscylującemi uzmysłowią się nader dobitnie. Na fig. 6-ej załączam wykres ciągu, który stanowił przykład 6. Łatwo się przekonać przy dostatecznej liczbie punktów reprezentacyjnych, iż istnieją punkty, leżące dowolnie blizko k a ż d e j równoległej do osi odciętych (o równaniu: $y=\alpha$; $0<\alpha<1$). Można także, łącząc punkty reprezentacyjne nowemi linjami łamanemi, odpowiednio dobranemi, uplastycznić rozkład ciągu na ciągi zbieżne.

Tadeusz Łazowski.