Przyczynek do teoryi fal wodnych niewirowych

przez

M. P. Rudzkiego.

Rzecz, przedstawiona na posiedz. Wydz. mat.-przyr. d. 1 czerwca 1896 r.; referent członek Natanson.

Mniej więcej przed rokiem zamieściłem w Rozprawach Akademii Umiejętności krótką uwagę, tyczącą się teoryi fal wodnych niewirowych. Ponieważ sposób, w jaki tę kwestyę wówczas traktowałem, wydał mi się niezupełnie zadawalający, więc postanowiłem wrócić do niej po raz drugi. Jednakże niezależne odemnie okoliczności nie pozwoliły mi wykonać rychło tego zamiaru tak, że dopiero dziś pozwalam sobie przedłożyć niniejszą krótką pracę.

Teoryą fal wodnych niewirowych trwałych zajmował się przed kilku laty Helmholtz [1]). W roku zeszłym pojawiła się praca Dra Wien'a [2]), poświęcona tym falom, praca, którą można do pewnego stopnia uważać za uzupełnienie i dalszy ciąg prac Helmholtza. Dr. Wien podaje cały szereg *przybliżonych* analitycznych wzorów, przedstawiających fale rozmaitego kształtu i wielkości, prócz tego wyprowadza roz-

[1]) Sitzb. Acad. Wiss. Berl. 1889 r. str. 761—780. — Sitzb. Acad. Wiss. Berl. 1890 r. str. 853—872.

[2]) Wied. Ann. 1895, tom 56 str. 100—130. Przedtem Dr. Wien ogłosił część swych poszukiwań w Berlińskich Sitzb. Praca Dra Wiena zawiera też poprawki niektórych błędów w rozprawach Helmholtza.

maite wnioski, — odnoszące się do wzajemnego stosunku między prędkością wiatru z jednej, a prędkością fal z drugiej strony i t. d.

Niniejsza praca ma, jak się to zaraz okaże, nieco inny cel.

Rozważamy wraz z Helmholtzem fale wodne niewirowe o rozmiarach skończonych.

Załóżmy, że falująca ciecz (lub ciecze) jest nieściśliwa, że zajmuje część przestrzeni, ograniczoną tylko w jednym (pionowym) kierunku tak, że fale idą w nieskończoność.

Załóżmy dalej, że ruch cieczy zależy tylko od dwóch współrzędnych, n. p. x i y, oraz że prędkość rozchodzenia się fal jest stała. Nakoniec załóżmy, że rozpatrywane przez nas fale należą do kategoryi fal trwałych t. j., że: dodając do poziomej prędkości pewną stałą prędkość, co do wielkości równą, a co do kierunku przeciwną prędkości rozchodzenia się fal, otrzymamy w każdym punkcie przestrzeni ruch trwały t. j. od czasu niezależny. Zauważymy też mimochodem, że Helmholtz i Dr. Wien rozważają jednocześnie dwie falujące ciecze, lżejszą górną i cięższą dolną.

Załóżmy więc, żeśmy już dodali ową stałą poziomą prędkość, co do wielkości równą, zaś co do kierunku przeciwną prędkości rozchodzenia się fal i oznaczmy ją przez c. — Pomimo dodania tej prędkości ruch cieczy pozostanie niewirowy.

Ruch przez nas rozważany będzie pewnem niewirowem płynieniem wzdłuż falistych linij prądu: — fale stoją nieruchomo, podczas gdy ciecz pod niemi przepływa. Prędkości zależą wedle założenia tylko od dwóch zmiennych x i y i nie zależą od czasu.

Oznaczmy potencyał prędkości przez φ, zaś funkcyę prądu przez ψ. Obie te funkcye czynią zadość równaniu różniczkowemu:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=o \qquad \mathrm{I}$$

Zakładając, że oś x-ów ma kierunek poziomy, a oś y-ów pionowy, otrzymamy na prędkość poziomą:

$$u=\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial\psi}{\partial y}$$

na pionową:

$$v=\frac{\partial\varphi}{\partial y}=-\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

Przestrzeń, w której funkcye φ i ψ muszą czynić zadość równaniu I jest ograniczona z jednej strony pewną falistą linią prądu, dajmy na to linią:

$$\psi=o$$

zaś z drugiej strony pewną prostoliniową linią prądu, przedstawiającą dno, dajmy na to linią:

$$\psi = h$$

która może też znajdować się w nieskończoności. Lecz wiadomo, że, skoro funkcye φ i ψ są harmonicznemi funkcyami zmiennych x i y, to nawzajem x i y są harmonicznemi funkcyami φ i ψ. Zauważmy przytem, że w danym razie φ i ψ są jednowartościowemi funkcyami x i y, jak również x i y są jednowartościowemi funkcyami φ i ψ. Wynika to ze samych warunków zadania.

Ponieważ rozważana przez nas przestrzeń w płaszczyźnie zmiennych φ i ψ przedstawia się jako pas ograniczony dwiema równoległemi prostemi [$\psi = o$ i $\psi = h$] zatem dogodniej będzie uważać x i y za funkcye φ i ψ.

Ruch cieczy w płaszczyźnie x, y jest płynieniem wzdłuż falistych linij prądu. Funkcya φ musi posiadać kształt:

$$\varphi = cx + F(x, y)$$

gdzie F oznacza funkcyę peryodyczną względem x. Poprowadźmy w płaszczyźnie x, y linie:

$$\varphi = \text{stałej} \quad \psi = \text{stałej}$$

następnie wyobraźmy sobie, żeśmy odkształcili płaszczyznę x, y w taki sposób, aby krzywe:

$$\psi = \text{stałej}$$

stały się poziomemi prostemi, zaś krzywe:

$$\varphi = \text{stałej}$$

stały się pionowemi prostemi. Załóżmy dalej, że to odkształcenie odbywa się w taki sposób, że linie

$$x = \text{stałej} \quad \text{i} \quad y = \text{stałej}$$

choć z prostych stały się krzywemi, tem niemniej i teraz tworzą sieć prostokątną i izotermiczną. Takie odkształcenie jest zawsze możebne, jestto tak zwana „conforme Deformation“. Oczywiście po odkształceniu krzywe

$$y = \text{stałej}$$

będą to krzywe faliste. Niektóre z tych krzywych będą przecinać prostą:

$$\psi = o$$

i sasiadujące z nią proste :

$$\psi = \text{stałej}$$

Można powiedzieć, że i w płaszczyznie φ, ψ mamy do czynienia z pewnem płynieniem cieczy wzdłuż falistych linij prądu (y = stałej) przyczem ciecz w niektórych miejscach wypływa, a w innych wchodzi do przestrzeni, zawartej między prostemi:

$$\psi = o$$
$$\text{i} \quad \psi = h$$

A zatem musi być:

$$x = \frac{\varphi}{c} + F_1(\varphi, \psi)$$

gdzie F_1, oznacza pewną funkcyą peryodyczną względem φ. Ale harmoniczna peryodyczna funkcya, istniejąca w pewnym nieograniczonym pasie, zawartym między dwoma równoległemi prostemi, daje się zawsze przedstawić pod kształtem szeregu, złożonego z całych dodatnich i odjemnych potęg funkcyi:

$$e^{k(\varphi + i\psi)}$$

gdzie k oznacza pewną stałą. A zatem najogólniejszym kształtem funkcyi x będzie następujący:

$$\text{II} \qquad x = \frac{\varphi}{c} + \sum_{1}^{\infty} A_n \left(e^{n\psi} \pm e^{-n\psi}\right) \begin{matrix} \cos n\varphi \\ \sin n\varphi \end{matrix}$$

Dla prostoty założyliśmy, że peryod funkcyi F_1 równa się 2π (tj. położyliśmy stałą $k = 1$). Takie założenie jest zawsze dozwolone, albowiem trzeba tylko za każdym razem obrać jednostkę długości w płaszczyźnie x, y w taki sposób, aby długość fali wynosiła:

$$\frac{2\pi}{c}.$$

Ze wzoru II widzimy, że, gdy φ wzrasta o 2π, to x wzrasta o $\frac{2\pi}{c}$ t. j.

$$x_{\varphi + 2\pi} - x_{\varphi} = \frac{2\pi}{c}$$

przyczem ta różnica jest stała w całym pasie między.

$$\psi = o \quad \text{i} \quad \psi = h$$

Weźmy teraz na uwagę wielkość: $\frac{d\varphi}{dt}$. Ponieważ φ nie zależy wyraźnie od czasu, przeto:

$$\frac{d\varphi}{dt}=u\frac{\partial\varphi}{\partial x}+v\frac{\partial\varphi}{\partial y}$$

Ale ponieważ:

$$u=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\quad v=\frac{\partial\varphi}{\partial y}$$

przeto

$$\frac{d\varphi}{dt}=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 \tag{III}$$

Ale wedlę znanych własności harmonicznych funkcyi:

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2=\frac{1}{\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial\psi}\right)^2}$$

a zatem równanie III może być napisane pod kształtem:

$$\left[\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial\psi}\right)^2\right]\frac{d\varphi}{dt}=1$$

Lecz, gdy weźmiemy: $\frac{\partial x}{\partial\varphi}$ i $\frac{\partial x}{\partial\psi}$ ze wzoru II i gdy następnie utworzymy wyraz:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial\psi}\right)^2$$

to otrzymamy:

$$\left[\frac{1}{c^2}+\frac{2}{c}\cdot f_1+f_1^2+f_2^2\right]\frac{d\varphi}{dt}=1 \tag{III bis}$$

gdzie f_1 i f_2 są to szeregi[1]) kształtu:

$$\Sigma B_n\left(e^{n\psi}\pm e^{-n\psi}\right)\begin{matrix}\cos n\varphi\\ \sin n\varphi\end{matrix}$$

Utwórzmy teraz sumę kwadratów:

$$f_1^2+f_2^2$$

---

[1]) Naturalnie zakładamy, że te szeregi są bezwzględnie zbieżne.

otrzymamy zawsze rezultat kształtu:

$$S_1+S_2$$

gdzie S_1 będzie funkcyą zależną tylko od ψ zaś zupełnie niezależną od φ, podczas gdy S_2 będzie zależne od obu zmiennych φ i ψ a przytem peryodyczne względem zmiennej φ.

Rozdzielając teraz zmienne w równaniu III bis i całkując, otrzymamy najpierw:

$$\left[\frac{1}{c^2}+S_1+\frac{2}{c}f_1+S_2\right]d\varphi=dt$$

a następnie

$$\left(\frac{1}{c^2}+S_1\right)\varphi+\int\left(\frac{2}{c}f_1+S_2\right)d\varphi=t-M$$

gdzie M jest pewną dowolną funkcyą zmiennej ψ. Całka:

$$\int\left(\frac{2}{c}f_1+S_2\right)d\varphi$$

jestto funkcya φ i ψ, peryodyczna względem φ, o peryodzie też równym 2π.

Utwórzmy teraz różnicę:

$$t_{\varphi+2\pi}-t_\varphi=\left(\frac{1}{c^2}+S_1\right)2\pi$$

Widzimy, że ta różnica nie jest stała, ale zależna od ψ.

Znaczenie tego wyniku jest bardzo proste. Długość fali [w ruchu względnym przy nieruchomych falach] jest stała we wszystkich głębokościach i wynosi: $\frac{2\pi}{c}$, [przypominamy, że obraliśmy taką jednostkę długości, aby długość fali wynosiła właśnie $\frac{2\pi}{c}$] ale cząsteczki cieczy na różnych głębokościach, czy też raczej na różnych liniach prądu przebiegają drogę, odpowiadającą jednej fali, w czasach niejednakowych.

Funkcya S_1 jest summą kwadratów, a zatem jestto funkcya zawsze dodatnia, zmniejsza się ona stale od powierzchni, gdzie $\psi=o$, aż do dna, gdzie $\psi=h$. Przy nieskończonej głębokości szereg II zawiera tylko odjemne potęgi zaś S_1 znika zupełnie na dnie, t. j. dla $\psi=\infty$, $S_1=o$.

Weźmy teraz iloraz

$$\frac{x_{\varphi+2\pi}-x_{\varphi}}{t_{\varphi+2\pi}-t_{\varphi}}=\frac{c}{1+c^2 S_1}$$

który wyraża nic innego, jak średnią poziomą [1]) prędkość, z którą cząsteczki cieczy przebywają we względnym ruchu przy nieruchomych falach drogi odpowiadające długości jednej fali. Prędkość ta wzrasta od powierzchni aż do dna, przy nieskończonej głębokości staje się ona na dnie równą prędkości c, jak to było zresztą do przewidzenia.

Przejdźmy teraz od ruchu względnego do bezwzględnego. Ponieważ ruch względny powstał z bezwzględnego przez dodanie stałej prędkości c, więc:

$$\frac{c}{1+c^2 S_1}-c=-\frac{cm}{1+m}$$

gdzie

$$m=c^2 S_1$$

jestto ta średnia pozioma [2]) prędkość, z którą cząsteczki cieczy posuwają się w ruchu bezwzględnym.

Prędkość ta posiada znak przeciwny znakowi prędkości c, ponieważ zaś wedle założenia prędkość rozchodzenia się fal była: $-c$, a zatem ten ruch postępowy odbywa się w tym samym kierunku, w którym posuwają się fale. Nietrudno przekonać się, że ta prędkość zmniejsza się od powierzchni aż do dna, a w wypadku nieskończonej głębokości staje się na dnie równą zeru.

A zatem ruch ten w porównaniu z wirowemi falami Gerstnera nie przedstawia się jako ruch czysto falisty.

Aby otrzymać ruch wyłącznie falisty musielibyśmy założyć, że mamy wszędzie:

$$S_1=o$$

Atoli S_1 jest summą kwadratów kształtu:

$$A_n^2\, e^{2n\psi}$$

a zatem musielibyśmy założyć, że:

$$A_1=A_2=\ldots=A_n-\text{in inf.}=o$$

---

[1]) Ta pozioma prędkość ma tę samą wartość dla wszystkich cząstek płynących wzdłuż tej samej linii prądu, ale różną dla różnych linij prądu.

[2]) I ta pozioma prędkość jest jedna i ta sama na tej samej linii prądu, zaś różna dla różnych linij prądu.

zkąd znowu

$$x=\frac{\varphi}{c}$$

przez co nasz ruch niewirowy względny zredukowałby się do prostoliniowego płynienia, a ruch bezwzględny do absolutnego spoczynku. Inaczej mówiąc ruch falisty niewirowy taki, przy którym każda cząsteczka po upływie pewnego czasu, zwanego okresem fali powraca do swego poprzedniego położenia, jest niemożliwy [1]). Falom niewirowym towarzyszy zawsze pewien prąd, dążący w tym samym kierunku, w którym posuwają się fale. Prąd ten jest silniejszy ku powierzchni, zaś coraz słabszy w miarę powiększania się głębokości.

Fale niewirowe, acz niemożliwe w przyrodzie są więc pod pewnym względem podobne do fal wzbudzanych przez wiatr, którym stale towarzyszy prąd, skierowany w tym samym kierunku, w którym zdąża wiatr i fale. Jednakże owa własność fal niewirowych, dzięki której nie mogą się one obejść bez jednoczesnego prądu, nie stoi wcale w związku z warunkami granicznymi t. j. ze sposobem, w jaki wiatr działa na zewnętrzną powierzchnię [2]).

DODATEK.

Wyprowadzimy jeszcze parę wzorów przy pomocy tak zwanych hydrodynamicznych równań ruchu Lagrangea.

Równania te mają kształt następujący:

$$\text{IV} \quad \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2}\cdot\frac{\partial x}{\partial\xi}+\frac{d^2y}{dt^2}\cdot\frac{\partial y}{\partial\xi}&=\frac{\partial(v-P)}{\partial\xi} \\ \frac{d^2x}{dt^2}\cdot\frac{\partial x}{\partial\eta}+\frac{d^2y}{dt^2}\cdot\frac{\partial y}{\partial\eta}&=\frac{\partial(v-P)}{\partial\eta} \end{aligned}$$

x i y są to współrzędne danego elementu cieczy ξ i η są to pewne parametry, jednowartościowo charakteryzujące każdy oddzielny element

---

[1]) Zauważmy, że skoro droga cząsteczki jest krzywą zamkniętą, to wewnątrz tej drogi muszą znajdować się wiry.

[2]) Już po oddaniu niniejszej pracy do Akademii spostrzegłem, że lord Rayleigh jeszcze w 1876 r. (Phil. Magaz. kwietniowy zeszyt) znalazł to samo twierdzenie. Ponieważ jednak jego dowód jest zgoła inny, więc druku niniejszej pracy nie wstrzymałem.

cieczy, V oznacza potencyał zewnętrznych sił, $P=\frac{p}{\rho}$ gdzie p oznacza ciśnienie a ρ (stała) gęstość.

Prócz równań IV mamy jeszcze równanie ciągłości, które dla cieczy nieściśliwych przedstawia się w kształcie:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\eta)}\right]=o \tag{V}$$

Zauważywszy, że ξ, η i t są to zmienne wzajemnie od siebie niezależne, że zatem

$$\frac{dx}{dt}=\frac{\partial x}{\partial t} \text{ i t. d.}$$

różniczkujmy pierwsze z pomiędzy równań IV względem η, drugie względem ξ i odejmijmy jedno od drugiego. Po łatwych przekształceniach znajdziemy równanie:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial(x,u)}{\partial(\xi,\eta)}+\frac{\partial(y,v)}{\partial(\xi,\eta)}\right]=o \tag{VI}$$

gdzie

$$u=\frac{dx}{dt}=\frac{\partial x}{\partial t},\quad v=\frac{dy}{dt}=\frac{\partial y}{\partial t}$$

Ale jeżeli oznaczymy prędkość kątową ruchu wirowego przez ω, to, jak wiadomo,

$$\frac{\partial(x,u)}{\partial(\xi,\eta)}+\frac{\partial(y,v)}{\partial(\xi,\eta)}+2\omega\frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\eta)}=o$$

Ponieważ wedle założenia:

$$\omega=o$$

zaś:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\eta)}$$

ma zawsze skończoną wartość, więc musi być

$$\frac{\partial(x,u)}{\partial(\xi,\eta)}+\frac{\partial(y,v)}{\partial(\xi,\eta)}=o \tag{VII}$$

co naturalnie jednocześnie zadość czyni równaniu VI.

W ten sposób w przypadku ruchu niewirowego mamy dwa równania różniczkowe: VII i V. Te ostatnie można też napisać pod kształtem:

$$\frac{\partial(x,v)}{\partial(\xi,\eta)}-\frac{\partial(y,u)}{\partial(\xi,\eta)}=o \tag{V bis}$$

Można połączyć równania VII i U bis w jedno przy pomocy symbolu:

$$i=\sqrt{-1}$$

otrzymamy w ten sposób równanie:

$$\frac{\partial\,(x+i\,y,\,u-i\,v)}{\partial\,(\xi,\,\eta)}=o$$

Pomnożywszy je przez:

$$\frac{\partial\,(x-i\,y)}{\partial\eta}$$

otrzymamy znowu:

$$\text{VIII} \qquad \left(\frac{\partial u}{\partial\eta}-i\,\frac{\partial v}{\partial\eta}\right)(F-iH)=G\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}-i\,\frac{\partial v}{\partial\xi}\right)$$

gdzie:

$$F=\frac{\partial x}{\partial\xi}\cdot\frac{\partial x}{\partial\eta}+\frac{\partial y}{\partial\xi}\cdot\frac{\partial y}{\partial\eta}$$

$$H=\frac{\partial x}{\partial\xi}\cdot\frac{\partial y}{\partial\eta}-\frac{\partial y}{\partial\xi}\cdot\frac{\partial x}{\partial\eta}$$

$$G=\left(\frac{\partial x}{\partial\eta}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\eta}\right)^2$$

Prócz tego napotkamy jeszcze:

$$E=\left(\frac{\partial x}{\partial\xi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\xi}\right)^2$$

przyczem między E, G, H i F istnieje tożsamościowy związek:

$$EG=F^2+H^2$$

Równanie VIII rozpada się na dwa równania:

$$H\,\frac{\partial u}{\partial\eta}=G\,.\,\frac{\partial v}{\partial\xi}-F\,\frac{\partial v}{\partial\eta}$$

$$H\,\frac{\partial v}{\partial\eta}=-\,G\,.\,\frac{\partial u}{\partial\xi}+F\,\frac{\partial u}{\partial\eta}$$

Łatwo też otrzymać równania:

$$H\,\frac{\partial u}{\partial\xi}=F\,\frac{\partial v}{\partial\xi}-E\,\frac{\partial v}{\partial\eta}$$

$$H\,\frac{\partial v}{\partial\xi}=-\,F\,\frac{\partial u}{\partial\xi}+E\,\frac{\partial u}{\partial\eta}$$

które zresztą wprost wynikają z poprzednich dwóch równań. — Ze wszystkich czterech powyżej napisanych równań otrzymamy równanie różniczkowe:

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\frac{G\dfrac{\partial u}{\partial\xi}-F\dfrac{\partial u}{\partial\eta}}{H}\right]+\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\frac{-F\dfrac{\partial u}{\partial\xi}+E\dfrac{\partial u}{\partial\eta}}{H}\right]=o \qquad \text{IX}$$

i takież same równanie na v. — Równanie IX jestto znane równanie Beltrami'ego z którego widać, że w płaszczyźnie zmiennych ξ i η krzywe:

$$u=\text{stałej} \quad \text{i} \quad v=\text{stałej}$$

tworzą prostokątną i izotermiczną sieć. Można też otrzymać na x i y takie same równania jak IX na u i v. W tym celu dość jest pomnożyć równanie:

$$\frac{\partial\,(x+iy,\,u-iv)}{\partial\,(\xi,\,\eta)}=o$$

Zamiast przez

$$\frac{\partial\,(x-iy)}{\partial\eta}$$

przez:

$$\frac{\partial\,(u+iv)}{\partial\eta}$$

Innemi słowy powyższe przekształcenia prowadzą do tego samego analitycznego zadania, które wynika wprost z hydrodynamicznych równań Eulera.