

O prawach zjawisk nieodwracalnych.

Przez

Władysława Natansona.

Rzecz przedłożona na posiedzeniu Wydziału mat.-przyr. z dnia 2. marca 1896 r.



Treść. Wstęp. Część I. — §. 1. Określenia. — §. 2. Zasada ogólna. — §. 3. Równania Lagrange'a. — §. 4. Zasada zachowania energii. — §. 5. O energii swobodnej. — §. 6. Dynamika odwracalna. — §. 7. Zjawiska elektromagnetyczne nieodwracalne. — §. 8. Termodynamika odwracalna. — §. 9. Dynamika nieodwracalna. — §. 10. Hydrodynamika nieodwracalna. — §. 11. Dyfuzya. — §. 12. Przewodzenie ciepła. — §. 13. Rozpraszanie się energii elektromagnetycznej. — Część II. §. 14. Funkcja dysypacyjna. Koercya. — §. 15. Hydrodynamika nieodwracalna. — §. 16. Dyfuzya. — §. 17. Rozpraszanie się energii elektromagnetycznej. — §. 18. Dynamika nieodwracalna. — §. 19. Funkcja dysypacyjna przewodnictwa ciepła. — §. 20. Związki pomiędzy okresami zwalniania.

Nauka o rozpraszaniu się energii jest dotychczas mało rozwinięta. Znamy wprawdzie prawa zjawisk odwracalnych, ale w tych zjawiskach energia nie jest rozpraszana; o zjawiskach zaś nieodwracalnych mamy tylko jakościową wiadomość, że energia jest w nich rozpraszana. Nie znamy bynajmniej dotychczas ilościowych praw rozpraszania się energii w zjawiskach nieodwracalnych.

Wydaje się przecieź, iż istnieje pewna ogólna; nad nieodwracalnymi zjawiskami panująca zasada. Wynika ona łatwo z uogólnienia

zasady Hamiltona. Lord Rayleigh ¹⁾, G. Kirchhoff ²⁾, von Helmholtz ³⁾, P. Duhem ⁴⁾, wygłosili ją ⁵⁾ w rozmaitych kształtach i w rozmaitym stopniu ogólności. Twierdzeniom, odkrytym przez tych uczonych, można nadać postać prostego prawa, które sprawdza się powszechnie w zjawiskach fizycznych. Pragnęlibyśmy, ażeby zwrócono uwagę na obszerność i wagę tej zasadniczej formuły; ponadto sądzimy, że wskazuje ona drogę do znalezienia praw ilościowych rozpraszania się energii.

CZEŚĆ I.

§ 1. Określenia.

Uważajmy pewien układ, który może być bądź niezależnym układem, bądź skończoną lub nieskończoną małą częścią innego obszerniejszego układu. Przypuśćmy, iż stan układu uważanego jest (w chwili t) określony przez wartości pewnych zmiennych niezależnych q_i (gdzie i jest wskaźnikiem) oraz przez wartości pochodnych $s_i = dq_i/dt$ zmiennych q_i względem czasu. Przypuśćmy, że całkowita energia układu da się rozdzielić na dwie części: 1) na część T , zależną od q_i i s_i , która jest funkcją zmiennych s_i jednorodną stopnia drugiego; 2) na drugą część U , zależną jedynie od zmiennych q_i . Niechaj będzie ϑ temperaturą bezwzględną układu; ϑ ma być bądź jedną z pomiędzy zmiennych q_i , bądź określoną funkcją niektórych lub wszystkich q_i . Przypuśćmy, że nadaliśmy zmiennym q_i , s_i dowolne zmiany nieskończenie małe δq_i , δs_i ; energie T i U zmieniają się wówczas o δT i δU ; siły zewnętrzne wykonują na układzie pracę $\sum P_i \delta q_i$ w sposób odwracalny; ilość ciepła δQ albo $\sum R_i \delta q_i$ zostanie przez układ z zewnątrz pochłonięta. Zatem P_i jest uogólnioną Lagrange'a „siłą“, wywieraną z zewnątrz w „kierunku“ q_i ; R_i jest „spółczynnikami cieplnym“ (według Duhema) lub „zdolnością cieplną“ układu względem zmiennej q_i . (Porówn. Rozprawy W. M. P. Ak. Um., tom XXIV, str. 137—138).

¹⁾ *Proceedings of the London Mathematical Society*, June 1873. *The Theory of Sound*, Vol. I, p. 78. 1877.

²⁾ *Vorlesungen über Mathematische Physik; Mechanik*, 1876. Vorlesung XI.

³⁾ *Borchardt-Crelle's Journal für Mathematik*, Bd. 100, 1886. *Wissenschaftliche Abhandlungen*, Bd. III, S. 203. Zob. też *Wiss. Abh.*, II, 958 i III, 119.

⁴⁾ *Journal de Mathématiques de Liouville - Jordan* (4) Tome VIII, p. 269, 1892; Tome IX, p. 293, 1893; Tome X, p. 207, 1894.

⁵⁾ Stanowisko J. J. Thomsona w książce *Applications of Dynamics to Physics and Chemistry*, London, 1888, jest również zbliżone do naszego; głównym przedmiotem tych badań była wszakże teoria zjawisk odwracalnych.

Doświadczenie uczy, że można wystawiać sobie ilość δQ jako złożoną z dwóch części, w sposób następujący. Przypuśćmy, że, uczyniwszy każdą δq_i równą odpowiedniej $dq_i = s_i dt$, przywiedliśmy zmienne q_i od wartości q_i do nowych wartości $q_i + dq_i$. Energie T i U zmieniają się o dT i dU , ilość pracy $\Sigma P_i dq_i$, ilość ciepła dQ lub $\Sigma R_i dq_i$ zostanie pochłonięta z zewnątrz przez układ. Cofnijmy teraz zmienne od nowych wartości $q_i + dq_i$ do dawnych q_i . Energie T i U zmieniają się o $-dT$ i $-dU$, praca z zewnątrz wykonana wyniesie $-\Sigma P_i dq_i$, lecz ciepło pochłonięte nie wyniesie, ogólnie mówiąc, $-dQ$, lecz inną ilość, powiedzmy $-d_1 Q$. Założmy

$$2 \quad d'Q = +dQ - d_1 Q \quad \text{i} \quad (1)$$

$$+d^0 Q = +dQ - d'Q; \quad \text{zatem} \quad (2)$$

$$-d^0 Q = -d_1 Q - d'Q. \quad (3)$$

Będziemy mieli:

$$+dQ = +d^0 Q + d'Q; \quad (4)$$

$$-d_1 Q = -d^0 Q + d'Q; \quad (5)$$

zdać widać, że $d^0 Q$ jest częścią odwracalną, $d'Q$ zaś częścią zupełnie nieodwracalną ilości ciepła dQ . Przypuśćmy, iż mamy

$$d^0 Q = \Sigma R_i dq_i; \quad d'Q = \Sigma R'_i dq_i; \quad (6)$$

założmy

$$\delta^0 Q = \Sigma R_i \delta q_i; \quad \delta'Q = \Sigma R'_i \delta q_i; \quad (7)$$

będziemy mieli

$$\delta Q = \delta^0 Q + \delta'Q. \quad (8)$$

Ogólnie powiemy: otrzymamy zawsze wyrazy

$$\delta Q, \quad \delta^0 Q, \quad \delta'Q \quad (9)$$

wstawiając waryacje δq_i zamiast różniczek dq_i , do wyrazów (które przypuszczamy, że znane są empirycznie):

$$dQ, \quad d^0 Q, \quad d'Q, \quad (10)$$

w jakimkolwiek kształcie byłyby te ostatnie wyrazy. W wyrazach dQ i $d'Q$ liczba zmiennych będzie oczywiście zazwyczaj znaczniejsza, niż liczba ich w $d^0 Q$; niektóre z pomiędzy współczynników R_i będą wówczas równe zeru, co się również może stosować i do niektórych lub wszystkich z pomiędzy wyrazów:

$$P_i, \quad \frac{\partial T}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial T}{\partial s_i} \quad \text{oraz} \quad \frac{\partial U}{\partial q_i}. \quad (11)$$

§ 2. Zasada ogólna.

Uważajmy pewien przeciąg czasu, np. od $t = t_0$ do $t = t_1$. Utwórzmy, według reguł § 1-go, waryacje δq_i , δs_i , δT , δU , $\Sigma P_i \delta q_i$, oraz towarzyszące im δQ , $\delta^0 Q$ i $\delta^1 Q$. Waryacje te mają być określone, ulegającymi różniczkowaniu funkcjami czasu pomiędzy chwilami $t = t_0$ a $t = t_1$, w samych zaś chwilach $t = t_0$ i $t = t_1$ mają znikać.

Twierdzimy wówczas, że pomiędzy $t = t_0$ a $t = t_1$ zjawiska odbywają się tak, iż warunek

$$(I) \quad \int_{t_0}^{t_1} dt \{ \delta T - \delta U + \Sigma P_i \delta q_i + \delta Q \} = 0$$

jest spełniony. Twierdzenie to będziemy nazywali dla krótkości zasadą termokinetyczną.

§ 3. Równania Lagrange'a.

Z równania (I)-go, na mocy założeń, uczynionych co do T , U , oraz co do waryacji δq_i i δs_i , otrzymujemy w sposób znany równania

$$(II) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial s_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} - P_i - R_i = 0$$

czyli uogólnione termokinetycznie równania Lagrange'a. Równania te implicite podał już Helmholtz, explicite wygłasza je Duhem. Lord Rayleigh znalazł je pierwszy w przypadku szczególnym § 9-go.

§ 4. Zasada zachowania energii.

Pomnóżmy każde z pomiędzy równań (II) przez odpowiednią $s_i dt$ i dodajmy do siebie równania odpowiednimi stronami. Na mocy uczynionych założeń

$$(1) \quad dt \sum s_i \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial s_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} \right\} = dT,$$

otrzymujemy więc

$$(2) \quad dT + dU = \Sigma P_i dq_i + dQ$$

t. j. otrzymujemy stosującą się do zmian rzeczywistych zasadę zachowania energii, w jej rozumieniu najbardziej ogólnem.

Oczywistą jest rzeczą, że, podczas gdy zasada zachowania energii wynika z zasady termokinetycznej, zasada ta, przeciwnie, nie wynika

bynajmniej z zasady zachowania energii. Jeśli zatem zasada termokinetyczna stosuje się do ogółu zjawisk fizycznych, jak to sądzimy, winniśmy upatrywać w niej w takim razie jak gdyby pewne zacieśnienie w sposobie stosowania prawa zachowania energii do zjawisk natury.

§ 5. O energii swobodnej.

Obierzmy temperaturę układu \mathfrak{S} za jedną z pomiędzy zmiennych niezależnych. Oznaczajmy odtąd przez q_i wszystkie inne zmienne niezależne, prócz temperatury. Doświadczenie uczy, że sama przez się zmiana temperatury układu nie jest połączona z wykonywaniem pracy; zatem mamy znowu $\sum P_i \delta q_i$, jako wartość pracy, z zewnątrz wykonanej w przekształceniu elementarnem, w nowem (zmienionem) znaczeniu liter q_i . Takim układem zmiennych posługiwał się już Lord Kelvin w r. 1855; Helmholtz, Duhem i inni wprowadzali go do rachunków termodynamicznych ogólnych; zob. Rozprawy Wydz. M. P. Ak. Um., tom XXIV, str. 150. Duhem nadał mu nazwę układu zmiennych normalnych.

Przypuścmy, że zmienne \mathfrak{S} , q_i są „normalne“; załóżmy

$$\sum \frac{\partial U}{\partial q_i} \delta q_i - \sum R_i \delta q_i = \sum \frac{\partial V}{\partial q_i} \delta q_i. \quad (1)$$

Będziemy nazywali funkcją V , o ile V będzie istniała, energią swobodną układu. Zobaczymy w § 8-ym, że w termodynamice odwracalnej można utworzyć istotnie funkcją V zgodnie ze zwykłą „energią swobodną“ Helmholtza. Napiszemy teraz zasadę (I), z § 2-go, jak następuje:

$$\int_{t_0}^{t_1} dt \left\{ \delta T - \sum \frac{\partial V}{\partial q_i} \delta q_i + \sum P_i \delta q_i - \left(\frac{\partial U}{\partial \mathfrak{S}} - R_{\mathfrak{S}}^0 \right) \delta \mathfrak{S} + \delta' Q \right\} = 0. \quad (2)$$

Nie znamy dotychczas przypadku, w którym energia T zależałaby bądź od \mathfrak{S} , bądź od $d\mathfrak{S}/dt$; przypuścmy przeto

$$\frac{\partial T}{\partial \mathfrak{S}} = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial \frac{d\mathfrak{S}}{dt}} = 0; \quad (3)$$

a nadto uczynmy jeszcze hipotezę, iż $\delta' Q$ nie zawiera wyrazu, zależnego od $\delta \mathfrak{S}$. W tym względzie por. § 12. Równanie (2) rozpada się teraz na

$$\frac{\partial U}{\partial \mathfrak{S}} - R_{\mathfrak{S}}^0 = 0 \quad (4)$$

oraz na

$$(III) \quad \int_{t_0}^{t_1} dt \left\{ \delta T - \sum \frac{\partial V}{\partial q_i} \delta q_i + \sum P_i \delta q_i + \delta' Q \right\} = 0.$$

Równanie to jest analogiczne do zasadniczego równania (I). Jest ono zazwyczaj bardziej pożyteczne i nadaje się łatwiej do zastosowań, niż zasadnicze równanie; lecz abstrakcyjna jego ogólność jest oczywiście nieporównanie szczuplejsza.

§ 6. Dynamika odwracalna.

Zjawiska idealne ruchu, roztrząsane w dynamice właściwej, czyli odwracalnej, stanowią przykład stosowania się zmiennych „normalnych”. W nauce tej, nie biorąc wcale względu na pojęcie temperatury, mówimy o funkcji V , zależnej tylko od zmiennych q_i , która (jak to już zauważył Duhem) w dynamice punktów i ciał sztywnych różni się tylko o stałą od „energii potencjalnej” U , natomiast w hydrodynamice i w aerodynamice różni się od U o ilość zmienną, zależną od ściślności badanego ośrodka; zob. § 10.

Ze względu na odwracalność idealnych zjawisk ruchu otrzymujemy z równania (III)

$$(1) \quad \int_{t_0}^{t_1} dt \left\{ \delta T - \sum \frac{\partial V}{\partial q_i} \delta q_i + \sum P_i \delta q_i \right\} = 0.$$

Wiadomo oddawna, że prawa dynamiki odwracalnej są zawarte w tem twierdzeniu.

§. 7. Zjawiska elektromagnetyczne nieodwracalne.

Eter, oddając materji energią, oddaje ją pod postacią ciepła, i, o ile wiadomo, w sposób nieodwracalny. W zjawiskach elektromagnetycznych nieodwracalnych mamy zatem

$$(1) \quad R_i^e = 0 \quad \text{zatem} \quad \frac{\partial U}{\partial q_i} = \frac{\partial V}{\partial q_i};$$

zasada (I) lub (III) przybiera postać

$$(2) \quad \int_{t_0}^{t_1} dt \left\{ \delta T - \delta U + \sum P_i \delta q_i + \delta' Q \right\} = 0.$$

Pozostawiamy do § 13-go roztrząśnienie szczególnego przypadku, należącego do tej dziedziny.

§ 8. Termodynamika odwracalna.

Właściwym przedmiotem zwykłej, klasycznej termodynamiki (w dzisiejszym stanie tej nauki) jest badanie stanów równowagi. Dla tego zjawiska roztrząsane w termodynamice polegają na przekształcaniu się wirtualnym odwracalnym pewnych stanów równowagi na inne. Obierzmy zmienne „normalne”. Część energii, którą oznaczyliśmy przez T , jest wielkością stałą, tak iż zmienne s_i stają się niepotrzebne. Wyraz $\delta'Q$ jest równy zeru ze względu na odwracalność zjawisk. Nareszcie wyraz δ^0Q ma kształt

$$\mathfrak{z} \frac{\partial S}{\partial \mathfrak{z}} \delta \mathfrak{z} + \mathfrak{z} \sum \frac{\partial S}{\partial q_i} \delta q_i, \quad (1)$$

gdzie oznaczamy przez S pewną określoną funkcją zmiennych \mathfrak{z} oraz q_i , zwaną „entropią” układu. A zatem prawa termodynamiki zwykłej powinny być zawarte w równaniach:

$$\frac{\partial U}{\partial \mathfrak{z}} - \mathfrak{z} \frac{\partial S}{\partial \mathfrak{z}} = 0 \quad (2)$$

oraz

$$\int_{t_0}^{t_1} dt \left\{ - \sum \frac{\partial V}{\partial q_i} \delta q_i + \sum P_i \delta q_i \right\} = 0 \quad (3)$$

gdzie

$$\frac{\partial V}{\partial q_i} = \frac{\partial U}{\partial q_i} - \mathfrak{z} \frac{\partial S}{\partial q_i}. \quad (4)$$

Ponieważ zmienne są normalne, możemy przeto obrać, w tym szczególnym przypadku, wielkość

$$U - \mathfrak{z} S \quad (5)$$

za wartość energii swobodnej V , określonej ogólnie w § 5-ym; wówczas

$$\frac{\partial V}{\partial q_i} = P_i; \quad (6)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \mathfrak{z}} = - S; \quad (7)$$

otrzymujemy więc zwykle termodynamiczne twierdzenia, w kształcie, który nadali im Massieu, Gibbs, Helmholtz, Duhem i inni,

§ 9. Dynamika nieodwracalna.

Uważajmy zjawiska, podobne do zjawisk dynamicznych właściwych pod wszelkimi względami, prócz pod tym, iż ilość $d'Q$ nie jest w nich równa zeru. Możemy założyć dla znacznej klasy takich zjawisk „pseudodynamicznych“, że

$$(1) \quad d'Q = -2Fdt,$$

gdzie F jest funkcją zmiennych (normalnych) q_i , s_i , jednorodną stopnia drugiego względem zmiennych s_i . Funkcją tę odkrył w r. 1873-im Lord Rayleigh i nazwał ją „funkcją dysypacyjną“. Przypuszczamy zatem, że

$$(2) \quad d'Q = -dt \sum s_i \frac{\partial F}{\partial s_i} = -\sum \frac{\partial F}{\partial s_i} dq_i$$

albo jeszcze, innemi słowy, przypuszczamy, że

$$(3) \quad R'_i = -\frac{\partial F}{\partial s_i}.$$

A zatem, według reguł § 1-go, powinniśmy założyć

$$(4) \quad \delta'Q = -\sum \frac{\partial F}{\partial s_i} \delta q_i.$$

Z twierdzenia (III) wynika wówczas, co następuje:

$$(5) \quad \int_{t_0}^{t_1} dt \left\{ \delta T - \sum \frac{\partial V}{\partial q_i} \delta q_i + \sum P_i \delta q_i - \sum \frac{\partial F}{\partial s_i} \delta q_i \right\} = 0$$

a ztąd otrzymamy

$$(6) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial s_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} - P_i + \frac{\partial F}{\partial s_i} = 0.$$

Są to te same równania, jakie podał Lord Rayleigh, z tą jedynie różnicą, że funkcya V zastępuje w nich funkcją U .

§ 10. Hydrodynamika nieodwracalna.

Uważajmy płyn lepki, w którym (innemi słowy) jest tarcie wewnętrzne. Oznaczmy przez μ stałą tarcia wewnętrznego; kładąc $\mu = 0$, przejdziemy od hydrodynamiki nieodwracalnej do idealnej, czyli odwracalnej. Ruch płynu roztrząsamy w hydrodynamice w założeniu, że temperatura pozostaje stała. Przypuścmy zatem, że w ciągu ruchu od-

bieramy lub doprowadzamy każdemu elementowi płynu ilość ciepła, równą tej, jaka się w nim tworzy lub jaka w nim zanika, dzięki ściśliwości, w sposób odwracalny; oraz, że podobnie odbieramy mu ilość ciepła, równą tej, jaka wytwarza się w nim, w sposób nieodwracalny, dzięki lepkości. Oznaczamy przez ρ gęstość płynu w miejscu (x, y, z) ; uważamy masę płynu $\iiint dx dy dz \rho$, dowolnie wyciętą z większej masy płynu. Niechaj będzie p zwykłym średnim ciśnieniem, w chwili t , w miejscu (x, y, z) ; niechaj u, v, w oznaczają składowe prędkości w tem miejscu, X, Y, Z przyspieszenia sił obcych, działających z odległości. Równania ruchu, według Naviera, Poissona, Stokesa i Maxwella, są następujące:

$$-\rho \frac{du}{dt} + \rho X - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \nabla^2 u + \frac{1}{3} \mu \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0 \text{ i t. d.} \quad (1)$$

gdzie założono

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}; \quad \theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}. \quad (2)$$

Oznaczmy przez n kierunek normalnej wewnętrznej. Na element dS powierzchni, ograniczającej objętość masy uważanej, działają w kierunkach osi x, y, z ciśnienia $p_x dS, p_y dS$ oraz $p_z dS$, gdzie

$$p_x = \left\{ p - 2\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{3} \theta \right) \right\} \cos(nx) - \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \cos(ny) - \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \cos(nz) \quad (3)$$

$$p_y = -\mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \cos(nx) + \left\{ p - 2\mu \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{3} \theta \right) \right\} \cos(ny) - \mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \cos(nz) \quad (4)$$

$$p_z = -\mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \cos(nx) - \mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \cos(ny) + \left\{ p - 2\mu \left(\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{1}{3} \theta \right) \right\} \cos(nz). \quad (5)$$

Przypuśćmy układ wirtualnych nieskończenie małych przemieszczeń $\delta x, \delta y, \delta z$, narzucony płynowi. Praca zewnętrzna $\sum P_i \delta q_i$ wyniesie

$$\iint dS [p_x \delta x + p_y \delta y + p_z \delta z] + \iiint dx dy dz \rho (X \delta x + Y \delta y + Z \delta z). \quad (6)$$

Energia T jest energia kinetyczna, która zmieni się o

$$\delta T = \iiint dx dy dz \rho (u \delta u + v \delta v + w \delta w); \quad (7)$$

energia swobodna V , którą przyzwyczajono się niesłusznie nazywać „wewnętrzna” energią w hydrodynamice ¹⁾, zmieni się o

$$(8) \quad \delta V = - \iiint dx dy dz p \left(\frac{\partial \delta x}{\partial x} + \frac{\partial \delta y}{\partial y} + \frac{\partial \delta z}{\partial z} \right);$$

nareszcie, jak wynika z równań ruchu, i jak to pierwszy obliczył Stokes, ilość ciepła $d'Q$, pochłaniana (w znaczeniu algebraicznym) przez płyn, a równa tej, jaka powstaje skutkiem wewnętrznego tarcia, wyniesie, w czasie dt ,

$$(9) \quad d'Q = - \iiint dx dy dz 2\mu dt \left\{ \begin{aligned} & \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 - \frac{1}{3} \theta^2 + \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \end{aligned} \right\}$$

$$= - \iiint dx dy dz 2\mu \left\{ \begin{aligned} & \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{3} \theta \right) \frac{\partial dx}{\partial x} + \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{3} \theta \right) \frac{\partial dy}{\partial y} + \left(\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{1}{3} \theta \right) \frac{\partial dz}{\partial z} + \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial dz}{\partial y} + \frac{\partial dy}{\partial z} \right) + \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial dx}{\partial z} + \frac{\partial dz}{\partial x} \right) + \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial dy}{\partial x} + \frac{\partial dx}{\partial y} \right). \end{aligned} \right\}$$

Na mocy tego wzoru, który uznajemy za dany empirycznie, kładziemy, według § 1-go,

$$(10) \quad \delta'Q = - \iiint dx dy dz 2\mu \left\{ \begin{aligned} & \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{3} \theta \right) \frac{\partial \delta x}{\partial x} + \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{3} \theta \right) \frac{\partial \delta y}{\partial y} + \\ & + \left(\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{1}{3} \theta \right) \frac{\partial \delta z}{\partial z} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial \delta z}{\partial y} + \frac{\partial \delta y}{\partial z} \right) + \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \delta x}{\partial z} + \frac{\partial \delta z}{\partial x} \right) + \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \delta y}{\partial x} + \frac{\partial \delta x}{\partial y} \right). \end{aligned} \right\}$$

¹⁾ Np Lamb, w doskonałej zresztą swej *Hydrodynamics*, 1895, na str. 11-12, 469, 517 nazywa ją *intrinsic energy*. Tymczasem mamy tu do czynienia z energią swobodną V , nie zaś bynajmniej z wewnętrzną U .

Sprawdzamy teraz, czy równania ruchu zgadzają się z ogólną zasadą termodynamiczną. Z równań tych (1) tworzymy:

$$\int_{t_0}^{t_1} dt \iiint dxdydz \left\{ \begin{aligned} & \left[-\rho \frac{du}{dt} + \rho X - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \nabla^2 u + \frac{1}{3} \mu \frac{\partial \theta}{\partial x} \right] \delta x + \\ & + [\dots] \delta y + [\dots] \delta z \end{aligned} \right\} = 0. \quad (11)$$

Zauważmy, że np.

$$\nabla^2 u + \frac{1}{3} \frac{\partial \theta}{\partial x} = 2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{3} \theta \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (12)$$

i t. d. A zatem, według (8), (10) i (12), następnie zaś według (3), (4), (5):

$$\begin{aligned} & \iiint dxdydz \left\{ \left[-\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \nabla^2 u + \frac{1}{3} \mu \frac{\partial \theta}{\partial x} \right] \delta x + [\dots] \delta y + [\dots] \delta z \right\} = \\ & = -\delta V + \delta' Q - \iiint dxdydz \left[\frac{\partial}{\partial x} (p \delta x) + \frac{\partial}{\partial y} (p \delta y) + \frac{\partial}{\partial z} (p \delta z) \right] + \\ & + \iiint dxdydz 2\mu \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{3} \theta \right) \delta x \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{3} \theta \right) \delta y \right] + \right. \\ & \quad \left. + \frac{\partial}{\partial z} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{1}{3} \theta \right) \delta z \right] \right\} + \\ & + \iiint dxdydz \mu \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \delta z \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \delta y \right] + \\ & + \frac{\partial}{\partial z} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \delta x \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \delta z \right] + \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \delta y \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \delta x \right] \end{aligned} \right\} \\ & = -\delta V + \delta' Q + \iint dS (p_x \delta x + p_y \delta y + p_z \delta z). \quad (13) \end{aligned}$$

Nadto, ponieważ $dxdydz \rho$ nie ulega zmianie, przeto

$$- \int_{t_0}^{t_1} dt \iiint dxdydz \rho \left\{ \frac{du}{dt} \delta x + \frac{dv}{dt} \delta y + \frac{dw}{dt} \delta z \right\} = \int_{t_0}^{t_1} dt \delta T \quad (14)$$

i z równania (11) ostatecznie wynika

$$(15) \quad \int_{t_0}^{t_1} dt \{ \delta T - \delta V + \Sigma P_i \delta q_i + \delta' Q \} = 0,$$

gdzie δT , δV , $\Sigma P_i \delta q_i$, $\delta' Q$ mają wartości, określone przez równania (7), (8), (6) i (10).

§ 11. Dyfuzya.

Przypuśćmy, że przenikają się nawzajem dwa gazy: pierwszy o masie $\iiint dx_1 dy_1 dz_1 \rho_1$ zajmuje objętość, ograniczoną przez powierzchnię S_1 ; drugi, o masie $\iiint dx_2 dy_2 dz_2 \rho_2$, objętość, ograniczoną przez S_2 . Ruchowi gazów towarzyszą trzy zjawiska nieodwracalne: tarcie wewnętrzne w pierwszym gazie, tarcie wewnętrzne w drugim, dyfuzya wzajemna dwóch gazów. Odrywamy uwagę od dwóch pierwszych zjawisk. Przyjmujemy oznaczenia analogiczne do tych, któremi posługiwaliśmy się w artykule poprzednim: $u_1, v_1, w_1, u_2, v_2, w_2$ mają oznaczać składowe prędkości; $X_1, Y_1, Z_1, X_2, Y_2, Z_2$ składowe zewnętrznych przyspieszeń; p_1 i p_2 ciśnienia średnie i t. d., wszystko w chwili t i w określonym miejscu przestrzeni, w którym znajdują się jednocześnie elementy $dx_1 dy_1 dz_1$ i $dx_2 dy_2 dz_2$. Po upływie nieskończenie krótkiego czasu elementy te, czy to w rzeczywistym, czy też w wirtualnym ruchu płynu, rozejdą się; tak iż u_1 i u_2, v_1 i v_2, w_1 i w_2 , a podobnie δx_1 i $\delta x_2, \delta y_1$ i $\delta y_2, \delta z_1$ i δz_2 są to wielkości zgoła rozmaite. Napiszmy

$$(1) \quad \int_{t_0}^{t_1} dt \{ \delta T - \delta V + \Sigma P_i \delta q_i + \delta' Q \} = 0,$$

gdzie zakładamy:

$$(2) \quad \delta T = \delta T_1 + \delta T_2;$$

$$(3) \quad \delta V = \delta V_1 + \delta V_2;$$

$$(4) \quad T_1 = \frac{1}{2} \iiint dx_1 dy_1 dz_1 \rho_1 (u_1^2 + v_1^2 + w_1^2);$$

$$(5) \quad T_2 = \frac{1}{2} \iiint dx_2 dy_2 dz_2 \rho_2 (u_2^2 + v_2^2 + w_2^2);$$

$$(6) \quad \delta V_1 = - \iiint dx_1 dy_1 dz_1 p_1 \left(\frac{\partial \delta x_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \delta y_1}{\partial y_1} + \frac{\partial \delta z_1}{\partial z_1} \right)$$

$$\delta V_2 = - \iiint dx_2 dy_2 dz_2 p_2 \left(\frac{\partial \delta x_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \delta y_2}{\partial y_2} + \frac{\partial \delta z_2}{\partial z_2} \right) \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \Sigma P_i \delta q_i = & \iiint dx_1 dy_1 dz_1 \rho_1 (X_1 \delta x_1 + Y_1 \delta y_1 + Z_1 \delta z_1) + \\ & + \iiint dx_2 dy_2 dz_2 \rho_2 (X_2 \delta x_2 + Y_2 \delta y_2 + Z_2 \delta z_2) + \\ & + \iint dS_1 p_1 \{ \cos(n_1 x) \delta x_1 + \cos(n_1 y) \delta y_1 + \cos(n_1 z) \delta z_1 \} + \\ & + \iint dS_2 p_2 \{ \cos(n_2 x) \delta x_2 + \cos(n_2 y) \delta y_2 + \cos(n_2 z) \delta z_2 \}. \quad (8) \end{aligned}$$

Ciepło $\delta'Q$ tworzymy według reguł § 1-go. Ilość ciepła, jaka wytwarza się w czasie dt w sposób nieodwracalny dzięki dyfuzji, wynosi w ruchu rzeczywistym

$$\iiint dx dy dz A \rho_1 \rho_2 \{ (u_2 - u_1) (dx_2 - dx_1) + (v_2 - v_1)(dy_2 - dy_1) + (w_2 - w_1) (dz_2 - dz_1) \}, \quad (9)$$

gdzie przez $dx dy dz$ należy rozumieć bądź $dx_1 dy_1 dz_1$, bądź $dx_2 dy_2 dz_2$, A zaś oznacza pewną stałą, związaną z t. zw. współczynnikiem dyfuzji. Ponieważ, dla utrzymania temperatury stałej, trzeba ciepło to odbierać, przeto

$$\delta'Q = - \iiint dx dy dz A \rho_1 \rho_2 \{ (u_2 - u_1)(\delta x_2 - \delta x_1) + (v_2 - v_1)(\delta y_2 - \delta y_1) + (w_2 - w_1)(\delta z_2 - \delta z_1) \}. \quad (10)$$

Wstawiając wielkości (2), (3), ... (8) oraz (10) do równania (1), otrzymamy

$$\int_{t_0}^{t_1} dt \iiint dx dy dz \left\{ \begin{aligned} & \left[-\rho_1 \frac{du_1}{dt} - \frac{\partial p_1}{\partial x_1} + \rho_1 X_1 + A \rho_1 \rho_2 (u_2 - u_1) \right] \delta x_1 + \\ & \quad + [\dots] \delta y_1 + [\dots] \delta z_1 + \\ & \left[-\rho_2 \frac{du_2}{dt} - \frac{\partial p_2}{\partial x_2} + \rho_2 X_2 + A \rho_2 \rho_1 (u_1 - u_2) \right] \delta x_2 + \\ & \quad + [\dots] \delta y_2 + [\dots] \delta z_2 \end{aligned} \right\} = 0 \quad (11)$$

a ztąd wynikają równania ruchu

$$\rho_1 \frac{du_1}{dt} + \frac{\partial p_1}{\partial x_1} = \rho_1 X_1 + A \rho_1 \rho_2 (u_2 - u_1) \text{ i t. d.} \quad (12)$$

$$(13) \quad \rho_2 \frac{du_2}{dt} + \frac{\partial p_2}{\partial x_2} = \rho_2 X_2 + A \rho_2 \rho_1 (u_1 - u_2) \text{ i t. d.,}$$

ustanowione oddawna przez Maxwella i Stefana.

§ 12. Przewodzenie ciepła.

Idealne zjawisko przewodzenia ciepła odbywa się, gdy temperatury różnych elementów ciała są rozmaite, w stanie spoczynku i bez udziału sił lub ciśnień zewnętrznych. Równanie Fouriera, które wyraża przybliżone prawo tego zjawiska, zdaje się być postacią, jaką przybiera w tym razie zasada zachowania energii. Nie posługujemy się z początku zmiennymi normalnymi. Kładziemy

$$(1) \quad \delta T = 0; \quad \Sigma P \delta q_i = 0; \quad d^0 Q = 0;$$

zatem $\delta U = \delta V$ oraz

$$(2) \quad \int_{t_0}^{t_1} dt \{ -\delta U + \delta' Q \} = 0;$$

więc

$$(3) \quad -\frac{\partial U}{\partial q_i} + R'_i = 0.$$

Mnożąc każde z pomiędzy równań (3) przez odpowiednią s_i i dodając, otrzymujemy

$$(4) \quad -\frac{dU}{dt} + \frac{d'Q}{dt} = 0$$

lub jeszcze, przechodząc teraz do zmiennych normalnych:

$$(5) \quad \frac{\partial U}{\partial \vartheta} \cdot \frac{d\vartheta}{dt} = - \sum \frac{\partial U}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} + \frac{d'Q}{dt}.$$

Równanie Fouriera należy do tego typu. Zakłada się w niem, że w elemencie $dx dy dz$, gdzie ρ jest gęstością a c_v znanem ciepłem właściwym,

$$(6) \quad \frac{\partial U}{\partial \vartheta} = dx dy dz \rho c_v$$

dla wszystkich zaś pozostałych q_i ma być

$$(7) \quad \frac{\partial U}{\partial q_i} = 0.$$

Podaliśmy odmienny, nieco bardziej oderwany sposób wyrażenia nieodwracalności w zjawisku przewodzenia ciepła w *Rozprawach* W. M. P. Ak. Um., tom XXVII, str. 273. Zob. poniżej § 19.

§ 13. Rozpraszanie się energii elektromagnetycznej.

Helmholtz, w rozprawie „Das Princip der kleinsten Wirkung in der Elektrodynamik“¹⁾, udowodnił, że zasada termokinetyczna stosuje się również do zjawisk elektromagnetycznych. Dla zupełności, a po części i dla późniejszego zastosowania, zajmiemy się tu pokrótce przypadkiem najprostszym, typowym i dla nas najważniejszym. Uważamy ciała przewodzące, izotropowe, znajdujące się w spoczynku. Stajemy na stanowisku zwykłej, klasycznej teorii Maxwella. Obieramy elementy eteru za uważane układy; za jedyne możliwe zjawisko nieodwracalne uznajemy (zaniedbując wszelkie inne) przenoszenie się energii z eteru do materii w postaci ciepła Joule'a. Oznaczamy składowe natężenia lub „siły“ elektrycznej, w miejscu (x, y, z) , przez E_x, E_y, E_z ; dalej przez F_x, F_y, F_z składowe obcych, zewnętrznych, sił elektromotorycznych; przez H_x, H_y, H_z składowe siły magnetycznej w (x, y, z) . Przez C, K, μ oznaczamy: stałą przewodnictwa, stałą dielektrycznej i stałą magnetycznej indukcji, które mogą być funkcjami x, y, z , skończonemi i ciągłemi. Załóżmy

$$E_x = - \frac{dA_x}{dt}; E_y = - \frac{dA_y}{dt}; E_z = - \frac{dA_z}{dt}; \quad (1)$$

wektor A , którego składowe wynoszą A_x, A_y, A_z , możemy uważać za „moment elektromagnetyczny“ w miejscu x, y, z . Przypuszczamy, iż stosują się znane równania:

$$\begin{aligned} 4\pi C(E_x - F_x) + K \frac{dE_x}{dt} &= \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \\ 4\pi C(E_y - F_y) + K \frac{dE_y}{dt} &= \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \\ 4\pi C(E_z - F_z) + K \frac{dE_z}{dt} &= \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \end{aligned} \quad (2)$$

¹⁾ Sitzb. Berl. Akad. v. 12 Mai 1892. Wiss. Abh., Bd. III., S. 476. Zob. także Boltzmann's Vorlesungen über Maxwell's Theorie, Bd. II., S. 7.

$$(3) \quad \begin{aligned} \mu H_x &= \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \mu H_y &= \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \mu H_z &= \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}. \end{aligned}$$

Jak wiadomo, Heaviside i Hertz obrali za podstawę teorii równania (2) oraz te, które wynikają z (1) i (3). Za zmienne niezależne obierzmy A_x , A_y , A_z , jak to już (implicite lub explicite) czynili Lord Kelvin, Boltzmann i wielu innych, szukając analogij dynamicznych do zjawisk elektromagnetycznych. Częścią energii T , zależną od dA_x/dt , dA_y/dt oraz dA_z/dt , będzie wówczas energia elektryczna

$$(4) \quad T = \frac{1}{8\pi} \iiint dx dy dz K (E_x^2 + E_y^2 + E_z^2);$$

częścią U , albo V , zależną od rozkładu samych A_x , A_y , A_z w przestrzeni, będzie energia magnetyczna

$$(5) \quad U = \frac{1}{8\pi} \iiint dx dy dz \mu (H_x^2 + H_y^2 + H_z^2).$$

Rozumiejąc przez δA_x , δA_y , δA_z zwykłe waryacje, które nie mają zmieniać ani $dx dy dz$, ani K , μ , ani C , piszemy na mocy (2)

$$(6) \quad \frac{1}{4\pi} \int_{t_0}^{t_1} dt \iiint dx dy dz \left\{ \begin{aligned} & \left[K \frac{dE_x}{dt} - \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) - 4\pi C F_x + 4\pi C E_x \right] \delta A_x + \\ & + [\dots] \delta A_y + [\dots] \delta A_z \end{aligned} \right\} = 0.$$

Widzimy, że

$$(7) \quad \frac{1}{4\pi} \int_{t_0}^{t_1} dt \iiint dx dy dz K \left(\frac{dE_x}{dt} \delta A_x + \frac{dE_y}{dt} \delta A_y + \frac{dE_z}{dt} \delta A_z \right) = \\ = \int_{t_0}^{t_1} dt \delta T$$

$$(8) \quad - \int_{t_0}^{t_1} dt \iiint dx dy dz C (F_x \delta A_x + F_y \delta A_y + F_z \delta A_z) = \int_{t_0}^{t_1} dt \Sigma P_i \delta q_i$$

Dalej mamy, stosownie do równań (3), oraz według znanej zasady, według której wolno, na granicy różnych ośrodków, przypuszczać zmianę ciągłą własności materji,

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{4\pi} \int_{t_0}^{t_1} dt \iiint dx dy dz \left\{ \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) \delta A_x + \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \delta A_y + \right. \\
 & \quad \left. + \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \delta A_z \right\} = \\
 & = \frac{1}{4\pi} \int_{t_0}^{t_1} dt \iiint dx dy dz \frac{1}{\mu} \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \frac{\partial \delta A_x}{\partial y} - \\ - \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \frac{\partial \delta A_x}{\partial z} + \\ + \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \frac{\partial \delta A_y}{\partial z} - \\ - \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \frac{\partial \delta A_y}{\partial x} + \\ + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \frac{\partial \delta A_z}{\partial x} - \\ - \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \frac{\partial \delta A_z}{\partial y} \end{array} \right\} = \\
 & = - \int_{t_0}^{t_1} dt \delta U. \tag{9}
 \end{aligned}$$

A zatem wyrazy pozostałe w równaniu (6), wyrazy, które zawierają $4\pi CE_x$ i t. d., powinny dawać rezultat

$$+ \int_{t_0}^{t_1} dt \delta' Q, \tag{10}$$

jeśli ogólna zasada ma tu być spełniona. Owóż, ciepło Joule'a, wytwarzane w ciągu czasu dt , wynosi, jak wiadomo,

$$- \iiint dx dy dz C (E_x dA_x + E_y dA_y + E_z dA_z); \tag{11}$$

a że to równa się $-d'Q$, więc

$$(12) \quad \delta'Q = \iiint dx dy dz C (E_x \delta A_x + E_y \delta A_y + E_z \delta A_z),$$

a przeto wyrazy, pozostałe w równaniu (6), dają istotnie rezultat (10) i zasada ogólna jest spełniona.

CZEŚĆ II.

§ 14. Funkcja dysypacyjna. Koercya.

Samo przez się nasuwa się teraz pytanie: czy nieskończenie małe wyrazy $\delta'Q$ i $d'Q$, które znaleźliśmy kolejno w różnych szczególnych przypadkach, nie są poddane pewnym prawom wspólnym? Wydaje nam się, że istnienie takich praw jest bardzo prawdopodobne. Przypuszczenie jednak, które poniżej podamy, nie ma być niczem innym, niż pierwszym, tymczasowym i przybliżonym domniemaniem.

W każdym przypadku szczególnym utwórmy wyraz

$$(IV) \quad \frac{d'Q}{dt} = -2F.$$

Wielkość ta F będzie, w przypadku dynamiki nieodwracalnej § 9-go, Lorda Rayleigh „funkcją dysypacyjną“; proponujemy przeto nazywać wogóle „funkcją dysypacyjną“ funkcją F , określoną przez (IV), w każdym przypadku, do którego rozciąga się ważność tego równania.

Uważajmy pewien układ, który jest materyalny, lub przynajmniej zawiera materyę. Przypuśćmy, iż układ ten jest zakłócony; t. j., że znajduje się w stanie nierównowagi; i że pozostawiliśmy go, od pewnej chwili, samemu sobie. Wyobraźmy sobie, że możemy każdej chwili zmierzyć i wyrazić ilościowo zaburzenia, które stan jego zmienny cechują; i śledźmy los tych zaburzeń. Wiemy z codziennego doświadczenia, że zaburzenia poczną ostatecznie zanikać i uspakając się stopniowo i że, prędzej lub powolniej, dążą do zniknięcia. Ogólne to zachowywanie się nazywamy koercją zakłóceń, w przeciwstawieniu do zachowywania się, jakie w dynamice nazywamy inercją, czyli bezwładnością; zob. Rozprawy W. M. P. Ak. Um., tom XXVII, str. 273. Wyobraźmy sobie, dla określoności, ciało ciągłe. Niechaj element $dx dy dz$ ciała posiada masę $dx dy dz \rho$ i funkcją dysypacyjną $dx dy dz \rho f$; tak iż funkcja dysypacyjna F masy pewnej skończonej i niezmiennej $\iiint dx dy dz \rho$

wynosi $\iiint dx dy dz \rho f$. Zmiana zupełna tej wielkości, czyli dF/dt , będzie, wogóle mówiąc, składała się z trzech wyrazów:

1) z całki powierzchniowej, wyrażającej działania, wywierane z zewnątrz lub na zewnątrz przez powierzchnię graniczną;

2) z całki objętościowej, wyrażającej działanie, czynne z odległości (lub przynajmniej pozornie z odległości) pomiędzy ciałem a jego otoczeniem;

3) z całki objętościowej, wyrażającej koercyę, t. j. wyrażającej wpływ, na wartość funkcji F , owego wewnętrznego, właściwego materii działania, które dąży do uspakajania wszelkich zakłóceń, które je zgładza w istocie, gdy nie są podsypane działaniem zewnętrznym, a którego prawdziwa istota jest (i pozostanie zapewne) zupełnie nieznaną.

Nie byłoby trudno wyrazić symbolicznie to, co powiedzieliśmy. Przyjmując naprzykład teorię molekularną „kinematyczną“ Maxwella (jak ją nazwaliśmy dawniej), która nie wymaga żadnych specjalnych molekularnych założeń, oznaczmy przez $u + \xi$, $v + \eta$, $w + \zeta$ indywidualne prędkości cząsteczek, przez f pewną funkcję tych prędkości, przez \bar{f} przeciętną wartość funkcji f , utworzoną dla elementu $dx dy dz$, przez D/Dt szybkość koercyi. Mamy

$$\rho \frac{d\bar{f}}{dt} = - \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (\rho \bar{\xi} f) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho \bar{\eta} f) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho \bar{\zeta} f) \right\} + \\ + \rho (X \frac{\partial \bar{f}}{\partial u} + Y \frac{\partial \bar{f}}{\partial v} + Z \frac{\partial \bar{f}}{\partial w}) + \rho \frac{D\bar{f}}{Dt}. \quad (1)$$

(Por. Rozprawy Wydz. M. P. Ak. Um., XXIX, 171; XXVII, 273; Wstęp do fizyki teoretycznej, 1890, Rozdz. VIII). Z równania (1) wynika

$$\frac{dF}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint dx dy dz \rho \bar{f} = \\ = \iint dS \rho \left[\bar{\xi} f \cos(nx) + \bar{\eta} f \cos(ny) + \bar{\zeta} f \cos(nz) \right] + \\ + \iiint dx dy dz \rho \left(X \frac{\partial \bar{f}}{\partial u} + Y \frac{\partial \bar{f}}{\partial v} + Z \frac{\partial \bar{f}}{\partial w} \right) + \iiint dx dy dz \rho \frac{D\bar{f}}{Dt}; \quad (2)$$

po prawej stronie mamy tu trzy części składowe zmiany DF/dt , jakie zapowiedzieliśmy wyżej. Wyraz trzeci

$$\frac{DF}{Dt} = \iiint dx dy dz \rho \frac{D\bar{f}}{Dt} \quad (3)$$

wyraża zmianę „koercyjną“, która trwa, niezależnie od dwóch pozostałych.

O tej zmianie DF/Dt uczynimy przypuszczenie, że jest ona stale proporcjonalna do wartości chwilowej funkcji F . Oznaczmy przez τ pewien stały okres czasu. Przypuszczamy, że

$$(V) \quad \frac{DF}{Dt} = -\frac{2F}{\tau},$$

przynajmniej w sąsiedztwie stanu równowagi równanie to jest spełnione w wysokim stopniu przybliżenia. Nazywamy czas charakterystyczny τ „czasem zwalniania“, za Maxwellem, który utworzył już to pojęcie w dwóch szczególnych i ważnych przypadkach (Philosophical Transactions 1867, p. 82; Scientific Papers, Vol. II, p. 69; Treatise on Electricity and Magnetism, third edition, Vol. I, p. 450). Równanie (V) możemy nazwać „równaniem zwalniania“. Możemy wyrazić je tak: gdyby, poczynając od pewnej chwili dowolnej, funkcja F poczęła zmniejszać się z tą samą szybkością, z jaką zmniejszała się w tej chwili, znikłaby w takim razie zupełnie po upływie czasu $\frac{1}{2}\tau$. Przytaczamy teraz przykłady stosowania się równania (V).

§ 15. Hydrodynamika nieodwracalna.

W oznaczeniach § 10-go mamy, według określenia (IV)-go i według wzorów tego artykułu:

$$(1) \quad F = \iiint dx dy dz \nu \left\{ \begin{aligned} & \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{3}\theta \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{3}\theta \right) \frac{\partial v}{\partial y} + \\ & + \left(\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{1}{3}\theta \right) \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \end{aligned} \right\}$$

$$= \iiint dx dy dz \nu \left\{ \begin{aligned} & \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{3}\theta \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{3}\theta \right)^2 + \\ & + \left(\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{1}{3}\theta \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \end{aligned} \right\}$$

Widzimy dalej łatwo, że równania Naviera, Poissona, Stokesa i Maxwella nie mogłyby być prawdziwe, gdyby następujące równania nie były prawdziwe:

$$\begin{aligned}
 p_{xx} - p &= -2\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{3} \theta \right) & p_{yz} &= -\mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\
 p_{yy} - p &= -2\mu \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{3} \theta \right) & p_{zx} &= -\mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\
 p_{zz} - p &= -2\mu \left(\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{1}{3} \theta \right) & p_{xy} &= -\mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right);
 \end{aligned} \quad (2)$$

przez p_{xx} , p_{yy} , p_{zz} , p_{yz} , p_{zx} , p_{xy} oznaczyliśmy znane ciśnienia składowe, normalne i styczne. Możemy zatem uważać równania (1) i (2) za hipotezy, stwierdzone przez doświadczenie. Otrzymamy z nich:

$$F = \iiint dx dy dz \frac{1}{4\mu} \left\{ (p_{xx} - p)^2 + (p_{yy} - p)^2 + (p_{zz} - p)^2 + \right. \\
 \left. + 2p_{yz}^2 + 2p_{zx}^2 + 2p_{xy}^2 \right\}. \quad (3)$$

Dalej mamy równania, wynikające z teorii molekularnej „kinematycznej“, a zatem niezależne od specjalnych molekularnych hipotez, następujące:

$$\begin{aligned}
 \frac{D(p_{xx} - p)}{Dt} &= 2p \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{3} \theta \right) & \frac{Dp_{yz}}{Dt} &= p \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\
 \frac{D(p_{yy} - p)}{Dt} &= 2p \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{3} \theta \right) & \frac{Dp_{zx}}{Dt} &= p \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\
 \frac{D(p_{zz} - p)}{Dt} &= 2p \left(\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{1}{3} \theta \right) & \frac{Dp_{xy}}{Dt} &= p \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right);
 \end{aligned} \quad (4)$$

równania te stosują się do zakłóceń niezbyt gwałtownych (Maxwell, Phil. Trans. f. 1867, p. 81). Z równań (2) i (4), kładąc

$$\frac{\mu}{p} = \tau, \quad (5)$$

otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
 \frac{D(p_{xx} - p)}{Dt} &= -\frac{p_{xx} - p}{\tau} & \frac{Dp_{yz}}{Dt} &= -\frac{p_{yz}}{\tau} \\
 \frac{D(p_{yy} - p)}{Dt} &= -\frac{p_{yy} - p}{\tau} & \frac{Dp_{zx}}{Dt} &= -\frac{p_{zx}}{\tau} \\
 \frac{D(p_{zz} - p)}{Dt} &= -\frac{p_{zz} - p}{\tau} & \frac{Dp_{xy}}{Dt} &= -\frac{p_{xy}}{\tau}.
 \end{aligned} \quad (6)$$

z tych zaś równań i z równania (3) wynika:

$$(7) \quad F = - \iiint dx dy dz \frac{\tau}{4\mu} \left\{ \begin{array}{l} (p_{xx} - p) \frac{D(p_{xx} - p)}{Dt} + \\ + (p_{yy} - p) \frac{D(p_{yy} - p)}{Dt} + \\ + (p_{zz} - p) \frac{D(p_{zz} - p)}{Dt} + \\ + 2p_{yz} \frac{Dp_{yz}}{Dt} + 2p_{zx} \frac{Dp_{zx}}{Dt} + 2p_{xy} \frac{Dp_{xy}}{Dt} \end{array} \right\};$$

a zatem istotnie, zgodnie z równaniem (V), mamy, według wzoru (3),

$$(8) \quad \frac{DF}{Dt} = - \frac{2F}{\tau}.$$

Czas zwalniania τ tu uważany, t. j. odpowiadający zjawisku tarcia wewnętrznego, wynosi np. w powietrzu, w 0°C i pod ciśnieniem normalnym, około $2 \cdot 10^{-10}$ sekundy, jak to pierwszy Maxwell obliczył. Możemy też porównywać różne płyny ze sobą. W takim razie, domniemywamy się, w duchu Van der Waalsa nauki o „zgodności termodynamicznej“, że czasy zwalniania, uważane w dowolnych, odpowiadających sobie stanach dwóch płynów, powinny pozostawać w stałym pomiędzy sobą stosunku ¹⁾. Ztąd wynika, że współczynniki tarcia wewnętrznego w dowolnych, odpowiadających sobie stanach dwóch płynów pozostają również w stałym pomiędzy sobą stosunku ²⁾.

§ 16. Dyfuzya.

Zachowując założenia i oznaczenia § 11-go, wnosimy z formuł ówczesnych, iż funkcyja dysypacyjna dyfuzyi, utworzona według określenia (IV), wynosi

$$(1) \quad F = \frac{1}{2} \iiint dx dy dz A \rho_1 \rho_2 \{ (u_2 - u_1)^2 + (v_2 - v_1)^2 + (w_2 - w_1)^2 \}.$$

Całkowitą teorią dyfuzyi można oprzeć na równaniach „kinematycznych“ oraz na następujących równaniach „koercyjnych“:

¹⁾ Por. Kamerlingh Onnes, *Algemeene Theorie der Vloeistoffen*, Tweede Stuk, p. 8. Amsterdam, 1881.

²⁾ Kamerlingh Onnes, *Communications from the Laboratory of Physics at the University of Leiden*, Nro 12, p. 11, 1894.

$$\begin{aligned}
 \frac{D u_1}{D t} &= A \rho_2 (u_2 - u_1) & \frac{D u_2}{D t} &= A \rho_1 (u_1 - u_2) \\
 \frac{D v_1}{D t} &= A \rho_2 (v_2 - v_1) & \frac{D v_2}{D t} &= A \rho_1 (v_1 - v_2) \\
 \frac{D w_1}{D t} &= A \rho_2 (w_2 - w_1) & \frac{D w_2}{D t} &= A \rho_1 (w_1 - w_2),
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

przez $D / D t$ oznaczamy tu działanie koercyjne całkowite obu gazów. Istotnie równania Maxwella i Stefana wymagają spełniania się równań (2), o których przeto możemy powiedzieć, że są hipotezami, stwierdzonymi przez doświadczenie. Zastosujmy równania nasze do zwykłego przypadku powolnej i spokojnej dyfuzji. Znajdziemy

$$\frac{R \vartheta}{A (\rho_1 + \rho_2)}, \tag{3}$$

jako wartość „spółczynnika dyfuzji“, gdzie ϑ oznacza temperaturę, R stałą gazów doskonałych; wartość tę oznaczamy przez h . Uważajmy dalej czas τ , określony jak następuje:

$$\tau = \frac{l}{A (\rho_1 + \rho_2)} = \frac{(\rho_1 + \rho_2) h}{p_1 + p_2}; \tag{4}$$

będzie to okres charakterystyczny uspakajania się zakłócenia tu uważanego, polegającego na niejednorodnym rozkładzie dwóch gazów w przestrzeni. W mieszaninie np. tlenu i azotu, w 0°C. i pod ciśnieniem normalnym, mamy $\tau = 4,5 \cdot 10^{-10}$ sekundy, mniej więcej, według liczb, znalezionych przez v. Obermayera (*Wien. Sitzb.* (2), Bd. 81, p. 1102). Z równań (2) i (4) wynika:

$$\begin{aligned}
 \frac{D (u_2 - u_1)}{D t} &= - \frac{u_2 - u_1}{\tau} \\
 \frac{D (v_2 - v_1)}{D t} &= - \frac{v_2 - v_1}{\tau} \\
 \frac{D (w_2 - w_1)}{D t} &= - \frac{w_2 - w_1}{\tau};
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

a ztąd i z (1) otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 F = - \frac{1}{2} \iiint dx dy dz A \rho_1 \rho_2 \tau \left\{ (u_2 - u_1) \frac{D (u_2 - u_1)}{D t} + \right. \\
 \left. + (v_2 - v_1) \frac{D (v_2 - v_1)}{D t} + (w_2 - w_1) \frac{D (w_2 - w_1)}{D t} \right\}. \tag{6}
 \end{aligned}$$

Porównanie z (1) pokazuje, że i tu znowu

$$(7) \quad \frac{DF}{Dt} = -\frac{2F}{\tau}.$$

Udowodnijmy jeszcze, że rzeczywiście $2F$ jest miarą szybkości, z jaką tworzy się ciepło skutkiem dyfuzji. Według prawa zachowania energii jest

$$(8) \quad \frac{D}{Dt} \iiint dx dy dz \frac{1}{2} \left\{ \rho_1(u_1^2 + v_1^2 + w_1^2 + \bar{\xi}_1^2 + \bar{\eta}_1^2 + \bar{\zeta}_1^2) + \right. \\ \left. + \rho_2(u_2^2 + v_2^2 + w_2^2 + \bar{\xi}_2^2 + \bar{\eta}_2^2 + \bar{\zeta}_2^2) \right\} = 0.$$

Dalej, z równań (2) mamy

$$(9) \quad \frac{D}{Dt} \iiint dx dy dz \frac{1}{2} \rho_1 (u_1^2 + v_1^2 + w_1^2) = \\ = \iiint dx dy dz A \rho_1 \rho_2 \{ u_1 (u_2 - u_1) + v_1 (v_2 - v_1) + w_1 (w_2 - w_1) \};$$

$$(10) \quad \frac{D}{Dt} \iiint dx dy dz \frac{1}{2} \rho_2 (u_2^2 + v_2^2 + w_2^2) = \\ = \iiint dx dy dz A \rho_2 \rho_1 \{ u_2 (u_1 - u_2) + v_2 (v_1 - v_2) + w_2 (w_1 - w_2) \}.$$

Wobec równania (8) zatem okazuje się, iż

$$(11) \quad \frac{D}{Dt} \iiint dx dy dz \frac{1}{2} \{ \rho_1 (\bar{\xi}_1^2 + \bar{\eta}_1^2 + \bar{\zeta}_1^2) + \rho_2 (\bar{\xi}_2^2 + \bar{\eta}_2^2 + \bar{\zeta}_2^2) \} = \\ = \iiint dx dy dz A \rho_1 \rho_2 \{ (u_2 - u_1)^2 + (v_2 - v_1)^2 + (w_2 - w_1)^2 \} = 2F,$$

co wyraża twierdzenie zapowiedziane.

§ 17. Rozpraszanie się energii elektromagnetycznej.

Elektromagnetyczna funkcja dysypacyjna, w oznaczeniach i założeniach § 13-go, wynosi

$$(1) \quad F = \frac{1}{2} \iiint dx dy dz C (E_x^2 + E_y^2 + E_z^2).$$

Działanie koercyjne, wywierane na zakłócenie przez materię, wynosi co następuje:

$$(2) \quad K \frac{DE_x}{Dt} = -4\pi C E_x; \quad K \frac{DE_y}{Dt} = -4\pi C E_y; \quad K \frac{DE_z}{Dt} = -4\pi C E_z;$$

całkowitą zmianę wielkości E_x, E_y, E_z wyrażają równania (2) w § 13-ym. Wprowadźmy elektromagnetyczny czas zwalniania τ , określając go, jak to już Maxwell uczynił, za pomocą równania

$$\tau = \frac{K}{4\pi C}; \quad (3)$$

podstawiawszy do (2), znajdziemy równania, które wobec (1) dają

$$F = -\frac{1}{2} \iiint dx dy dz \tau C \left\{ E_x \frac{DE_x}{Dt} + E_y \frac{DE_y}{Dt} + E_z \frac{DE_z}{Dt} \right\} \quad (4)$$

a zatem znowu

$$\frac{DF}{Dt} = -\frac{2F}{\tau}. \quad (5)$$

Czas τ w mieszaninie wody i H_2SO_4 (około 8%) wynosi, według J. J. Thomsona, około $2 \cdot 10^{-11}$ sekundy (*Notes on recent researches in Electricity and Magnetism*, Oxford, 1893, § 32); w szkłe zaś, w $200^\circ C$, około 10^{-5} sek. W metalach τ musi być znacznie krótszy.

§ 18. Dynamika nieodwracalna.

W ostatnim przypadku, § 17, mamy proporcjonalność energii T do funkcji dysypacyjnej F ; tu zatem mamy nie tylko

$$\frac{DF}{Dt} = -\frac{2F}{\tau} \quad \text{lecz również} \quad \frac{DT}{Dt} = -\frac{2T}{\tau}. \quad (1)$$

Ten sam przypadek zachodzi w teorii dyfuzji, § 16, gdy mamy

$$\rho_1 u_1 + \rho_2 u_2 = 0 \quad (2)$$

(Maxwell, *Phil. Trans. f. 1867*, pp. 73—74); albowiem wówczas:

$$\begin{aligned} \frac{\rho_1 \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} \{ (u_2 - u_1)^2 + (v_2 - v_1)^2 + (w_2 - w_1)^2 \} = \\ = \rho_1 (u_1^2 + v_1^2 + w_1^2) + \rho_2 (u_2^2 + v_2^2 + w_2^2). \end{aligned} \quad (3)$$

Ten sam również przypadek zachodzi w Lorda Rayleigh nieodwracalnej dynamice, § 9, jeśli przypuścimy, że każda siła dodatkowa $-R'_i$, tj. czysto rozpraszająca, czynna w kierunku q_i , jest proporcjonalna do odpowiedniego momentu $\partial T / \partial s_i$; że wynosi np.:

$$-R'_i = \frac{1}{\tau} \frac{\partial T}{\partial s_i}, \quad (4)$$

gdzie τ jest stałą. Wówczas mamy

$$(5) \quad T = \tau F.$$

Według równań (5) § 9-go łatwo wnosimy, że zmiana koercyjna energii T (t. j. zmiana tej energii, wynikająca z działania sił dodatkowych, czysto rozpraszających) wynosi ogólnie

$$(6) \quad \frac{DT}{Dt} = -2F,$$

zatem otrzymamy, jak zapowiedziano,

$$(7) \quad \frac{DF}{Dt} = -\frac{2F}{\tau} \text{ oraz } \frac{DT}{Dt} = -\frac{2T}{\tau}.$$

§ 19. Funkcja dysypacyjna przewodnictwa ciepła.

Według rezultatów pracy „O energii kinetycznej ruchu ciepła i t. d.” (Rozprawy W. M. P. Ak. Um., tom XXVII, str. 273), funkcja dysypacyjna przewodnictwa ciepła wynosi, jeśli θ oznacza $\frac{1}{3}(\bar{\xi}^2 + \bar{\eta}^2 + \bar{\zeta}^2)$, co następuje:

$$(1) \quad 2F = -\frac{5}{2} \iiint dx dy dz \left\{ \rho r_x \frac{\partial \theta}{\partial x} + \rho r_y \frac{\partial \theta}{\partial y} + \rho r_z \frac{\partial \theta}{\partial z} \right\}.$$

Mamy, według równań (23) i (65) w tejże pracy, równania „kinematyczne”:

$$(2) \quad \frac{D\rho r_x}{Dt} = 5p_{xx} \frac{\partial \theta}{\partial x}; \quad \frac{D\rho r_y}{Dt} = 5p_{yy} \frac{\partial \theta}{\partial y}; \quad \frac{D\rho r_z}{Dt} = 5p_{zz} \frac{\partial \theta}{\partial z}$$

oraz założenia „koercyjne”:

$$(3) \quad \frac{D\rho r_x}{Dt} = -\frac{5p_{xx}}{k} \rho r_x; \quad \frac{D\rho r_y}{Dt} = -\frac{5p_{yy}}{k} \rho r_y;$$

$$\frac{D\rho r_z}{Dt} = -\frac{5p_{zz}}{k} \rho r_z.$$

Równania (3) muszą być spełnione, ażeby z równań (2) wypadły równania:

$$(4) \quad \rho r_x = -k \frac{\partial \theta}{\partial x}; \quad \rho r_y = -k \frac{\partial \theta}{\partial y}; \quad \rho r_z = -k \frac{\partial \theta}{\partial z}$$

których kinematycznym następstwem jest równanie Fouriera. Ztąd wynika, że równania (3) należy pożytywać za hipotezę, stwierdzoną przez doświadczenie. Stosując się do równań (3), lecz zaniehbując różnice $(p_{xx} - p)$, $(p_{yy} - p)$, oraz $(p_{zz} - p)$, uważajmy czas zwalniania

$$\tau = \frac{k}{5p}. \quad (5)$$

Z równań (1) i (4) wnosimy:

$$2F = \frac{5}{2} \iiint dx dy dz \frac{1}{k} \{(\rho r_x)^2 + (\rho r_y)^2 + (\rho r_z)^2\}; \quad (6)$$

z równań zaś (1) i (2), gdy zaniehbujemy $(p_{xx} - p)$, $(p_{yy} - p)$, $(p_{zz} - p)$,

$$2F = -\frac{D}{Dt} \iiint dx dy dz \frac{1}{4p} \{(\rho r_x)^2 + (\rho r_y)^2 + (\rho r_z)^2\}. \quad (7)$$

A zatem, jak widzimy z (5), mamy tu znowu

$$\frac{DF}{Dt} = -\frac{2F}{\tau}. \quad (8)$$

§ 20. Związki pomiędzy okresami zwalniania.

Dla odróżnienia, oznaczmy przez τ_F czas zwalniania, stosujący się do zjawiska przewodzenia ciepła; a przez τ_M czas zwalniania, stosujący się do zjawiska wewnętrznego tarcia. Zwykła Fourierowska stała przewodnictwa ciepła wynosi, jak łatwo jest się przekonać, $\frac{1}{3} c_v k$, gdzie c_v jest znanem ciepłem właściwym, k zaś wielkością, którą oznaczaliśmy w ten sposób w artykule poprzednim. Wiadomo dalej z teoryi kinetycznej gazów, że stała Fourierowska przewodnictwa ciepła jest

$$\frac{15}{4} (\gamma - 1) c_v \mu, \quad (1)$$

gdzie $\gamma = c_p/c_v$ jest stosunkiem pomiędzy dwoma ciepłami właściwymi, μ zaś oznacza stałą tarcia wewnętrznego [zob. np. Boltzmann, *Vorlesungen über Gastheorie*, równania (238), (54) i (57)]. Zatem mamy

$$\tau_F = \frac{3}{4} (\gamma - 1) \tau_M \quad \text{albo lepiej} \quad \tau_F = \frac{3}{2} \tau_M, \quad (2)$$

ponieważ rachunki nasze wymagałyby, właściwie mówiąc, ażeby gaz był jednoatomowy, a zatem, żeby $\gamma - 1 = \frac{2}{3}$.

Wypada oczekiwać, że równie proste związki zachodzą pomiędzy wszystkimi okresami zwalniania, odpowiadającymi różnym rodzajom koercyi, jakie może wywierać określone ciało względem różnorodnych zakłóceń. Każde równie proste równanie pomiędzy dwoma okresami zwalniania, jakie okaże się słusznem, będzie stanowiło sformułowanie określonego fizycznego prawa.

