ZASADY

RACHUNKÓW WYŻSZYCH.

PRZEZ

A. J. Słodółkiewicza.

Jedna figura w tekscie.

WARSZAWA.
Skład główny w księgarni Gebethnera i Wolffa.

1896.

ДОЗВОЛЕНО ЦЕНЗУРОЮ.
Варшава, 22-го Ноября 1895 года.

Druk Józefa Sikorskiego, Warecka 14.

PRZEDMOWA.

Pracę niniejszą w głównych zarysach ułożyłem podczas miesięcy Lipca, Sierpnia i Września roku zeszłego. Pierwotnym zamiarem moim było ogłosić drukiem w kilku częściach w jednym z zagranicznych miesięczników. Gdy jednak przesłałem do ocenienia kilka kartek tej pracy w zwięzłym wykładzie, otrzymałem w odpowiedzi zupełne niezrozumienie teoryi. Sądząc, że brak zainteresowania mógł wypływać tylko ze zbyt treściwego wyłożenia urywków, postanowiłem wszystkie myśli rozwinąć obszerniej, uzupełnić nowemi spostrzeżeniami i poddać pod światły i bezstronny sąd p. p. matematyków; mam nadzieję, że wyniki pracy mojej będą z czasem poznane i po za obrębem kraju naszego. Przedewszystkiem rozwijam teoryę różnic dla funkcyj jednej zmiennej, tudzież wielu zmiennych niezależnych. O ile wiem, ta teorya nie była dotąd tak szczegółowo traktowaną, przytem powszechnie znane wzory różnic, jako też pochodnych dla wszystkich funkcyj zasadniczych, opuszczam, gdyż znaleźć je można pięknie wyłożone w dziele prof. Folkierskiego, a także i w wielu innych podręcznikach zasad rachunku różniczkowego. W całej pracy mojej rozwijam myśl, że każdy bez wyjątku wzór, wzięty z *rachunku różniczkowego*, musi mieć odpowiedni sobie wzór w *rachunku różnic*. Myśl ta nie jest nową, jednak nigdy nie była tak systematycznie przeprowadzoną przez cały wykład, jak w pracy niniejszej; nawet w pochodnych funkcyj jednej zmiennej niezależnej nie zwracano zbyt wiele uwagi na tę ciekawą własność. Pogląd taki dał mi możność wprowadzenia pewnych koniecznych dopełnień w niektórych wzorach rachunku różniczkowego.

Dalej rozwijam nową teoryę *przyrostków wykładniczych* i na tej podstawie wykładam zasady nowego rachunku nieskończenie małych, czyli *rachunku wykładniczkowego*. Przytem daję tło odmienne od tego, które używał Hoene-Wroński, wskutek tego rachunek mój zasadniczo różni się od teoryi Wrońskiego, mimo pozornego podobieństwa niektórych moich wzorów z wzorami, napotykanemi w dziełach wspomnianego wyżej matematyka. Niedługi czas rozstrzygnie, która z teoryi, moja, czy też Hoene-Wrońskiego, będzie pożyteczniejszą w matematyce.

Nadmienię w końcu, że wszelką krytykę ścisłą i bezstronną przyjmę z wdzięcznością.

Płock, dnia 1 stycznia 1896 roku.

I. Teorya różnic.

Mając daną funkcyę $F(x)$, nazywamy jej *różnicą rzędu 1-go* wyrażenie:

$$(1) \qquad \Delta F = F(x+\Delta x) - F(x),$$

gdzie Δx oznacza skończony przyrost zmiennej, zaś ΔF odpowiedni przyrost funkcyi czyli różnicę rzędu 1-go. Podobnie, podług tego samego prawidła, *różnicę rzędu 2-go* otrzymamy, kładąc w obydwóch wyrazach po drugiej stronie równości (1) $x+\Delta x$ zamiast x i odejmując wartość pierwotną, będzie więc

$$\Delta^2 F = F(x+2\Delta x) - F(x+\Delta x) - F(x+\Delta x) + F(x)$$

czyli

$$(2) \qquad \Delta^2 F = F(x+2\Delta x) - 2F(x+\Delta x) + F(x).$$

Oczywista, wzór (2) otrzymaliśmy z (1) wskutek działania, które symbolicznie możemy przedstawić tak:

$$(3) \qquad \Delta\Delta F = \Delta F(x+\Delta x) - \Delta F(x).$$

Tak samo *różnicę rzędu 3-go* będziemy mieli, kładąc po drugiej stronie równości (2) $x+\Delta x$ zamiast x i odejmując wartość pierwotną

$$\Delta^3 F = F(x+3\Delta x) - 2F(x+2\Delta x) + F(x+\Delta x) - F(x+2\Delta x)$$
$$+ 2F(x+\Delta x) - F(x)$$

czyli

$$(4) \qquad \Delta^3 F = (x+3\Delta x) - 3F(x+2\Delta x) + 3F(x+\Delta x) - F(x).$$

Jak widzimy, wzór (4) otrzymaliśmy z (2) za pomocą działania

$$\Delta \Delta^2 F = \Delta F(x+2\Delta x) - \Delta [2F(x+\Delta x)] + \Delta F(x), \tag{5}$$

co jest łatwem do sprawdzenia.

Różnicą rzędu 4-go będzie podobnie

$$\Delta^4 F = F(x+4\Delta x) - 4F(x+3\Delta x) + 6F(x+2\Delta x) - 4F(x+\Delta x) + F(x). \tag{6}$$

Nie trudno pisać po kolei wszystkie różnice, ponieważ, jak widzimy, spółczynniki liczebne są te same, które spotykamy w dwumianie N e w t o-n a. Przypuśćmy, że powyższe prawo tworzenia różnic ma miejsce dla rzędu k

$$\Delta^k F = \Delta(x+k\Delta x) - kF(x+(k-1)\Delta x) + \frac{k(k-1)}{1.2} F(x+(k-2)\Delta x)$$
$$- \dots \pm F(x),$$

natenczas dla różnicy rzędu $k+1$ będziemy mieli

$$\begin{aligned}\Delta^{k+1} F = \Delta\Delta^k F = \Delta F(x+k\Delta x) - \Delta\, |kF(x+(k-1)\Delta x)\\ + \Delta \left[\frac{k(k-1)}{1.2} F(x+(k-2)\Delta x)\right] - \dots \pm \Delta F(x).\end{aligned} \tag{7}$$

Po wykonaniu działań, wskazanych w ostatnim wzorze, łatwo zauważymy, że wzmiankowane wyżej prawo tworzenia różnic będzie mieć miejsce dla $\Delta^{k+1} F$. Stąd wniosek, że prawo tworzenia różnic jest dla wszystkich przypadków dowiedzione. Napiszmy teraz wzór następujący:

$$\begin{aligned}F(x+n\Delta x) = F(x) + n\Delta F + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 F + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\Delta^3 F + \dots\\ \dots + \Delta^n F.\end{aligned} \tag{8}$$

Wzór ten drogą stopniowych rugowań $F(x+k\Delta x)$, $(k=1,2,\dots,n-1)$ otrzymać można, mając dane wszystkie wyrażenia różnic $\Delta F, \Delta^2 F, \dots, \Delta^n F$. Wzór (8) można uzasadnić także i tą przyczyną, że równość (8) jest niczem więcej, jak tylko powtórzeniem wszystkich danych nam definicyj różnic.

Istotnie, kładąc w (8) $n=1$ otrzymamy

$$F(x+\Delta x) = F(x) + \Delta F,$$

jest to samo, co (1).

Kładąc we wzorze (8) $n=2$, będziemy mieli

$$F(x+2\Delta x) = F(x) + 2\,\Delta\, F + \Delta^2\, F,$$

wyrugowawszy tutaj ΔF przy pomocy (1), otrzymamy związek, który przyjęliśmy za określenie różnicy drugiej i t. d. Dowodzenie ogólnej prawdziwości wzoru (8) znanem jest dobrze w wykładach zasad rachunku różniczkowego, z tego powodu dowodzenie to pomijamy.

Dalej, niech będzie dana funkcya dwóch zmiennych niezależnych

(9) $$f = f(x, y).$$

Różnicą zupełną rzędu 1-go będzie

(10) $$\Delta f = f(x+\Delta x,\ y+\Delta y) - f(x, y),$$

gdzie Δx i Δy oznaczają przyrostki zmiennych niezależnych, Δf odpowiedni przyrost funkcyi. Dla różnicy zupełnej rzędu 1-go można dowieść pewnego twierdzenia, które będzie zasadniczem w teoryi różnic funkcyj dwóch zmiennych niezależnych.

Oznaczmy *różnicę częściową* względem samej zmiennej x tak

(11) $$\Delta_x f = f(x+\Delta x, y) - f(x, y),$$

tudzież, *różnicę częściową* względem samej zmiennej y

(12) $$\Delta_y f = f(x, y+\Delta y) - f(x, y).$$

Kładąc w (11) $y+\Delta y$ zamiast y w obydwóch wyrazach i odciągając wartość pierwotną danej różnicy, otrzymamy różnicę rzędu 2-go, wziętą nasamprzód względem x, a potem względem y

(13) $$\Delta^2_{x,y} f = f(x+\Delta x.\ y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y) - f(x+\Delta x, y) + f(x, y).$$

To samo wyrażenie moglibyśmy otrzymać z (12), kładąc $x+\Delta x$ zamiast x w obydwóch wyrazach i odciągając ich wartość pierwotną. Z tego wypada, że

(14) $$\Delta^2_{x,y} f = \Delta^2_{y,x} f.$$

Gdy dodamy odpowiedniemi stronami równania (11), (12) i (13), łatwo spostrzeżemy, że

(15) $$\Delta f = \Delta_x f + \Delta_y f + \Delta^2_{x,y} f,$$

czyli, *różnica zupełna rzędu 1-go funkcyi dwóch zmiennych niezależnych równa się sumie trzech różnic częściowych: różnicy rzędu 1-go względem x, więcej różnica częściowa rzędu 1-go względem y, więcej różnica częściowa rzędu 2-go względem x i y.*

Jestto twierdzenie zasadnicze, które da nam możność wyprowadzenia różnic zupełnych, rzędów wyższych.

Biorąc różnicę zupełną obu stron równania (15), otrzymamy

$$\Delta\Delta f = \Delta f\,(x+\Delta x,\ y+\Delta y) - \Delta f\,(x,\ y)\,,$$

skąd na zasadzie (15) będzie

$$\Delta^2 f = \Delta_x f\,(x+\Delta x,\ y+\Delta y) + \Delta_y\ f\ (x+\Delta x,\ y+\Delta y) + \Delta^2_{x,y} f\,(x+\Delta x,\ y+\Delta y)$$
$$- \Delta_x f\,(x,y) - \Delta_y f\,(x,y) - \Delta^2_{x,y} f\,(x,y)\,,$$

czyli

$$\Delta^2 f = f\,(x+2\Delta x,\ y+\Delta y) - f\,(x+\Delta x,\ y+\Delta y) + f\,(x+\Delta x,\ y+2\Delta y)$$
$$- f\,(x+\Delta x,\ y+\Delta y) + f\,(x+2\Delta x,\ y+2\Delta y) - f\,(x+\Delta x,\ y+2\Delta y)$$
$$- f\,(x+2\Delta x,\ y+\Delta y) + f\,(x+\Delta x,\ y+\Delta y) - f\,(x+\Delta x,\ y)$$
$$+ f\,(x,y) - f\,(x,\ y+\Delta y) + f\,(x,y) - f\,(x+\Delta x,\ y+\Delta y)$$
$$+ f\,(x,\ y+\Delta y) + f\,(x+\Delta x,\ y) - f\,(x,y)\,.$$

Stąd po łatwem uproszczeniu otrzymamy

(16) $$\Delta^2 f = f\,(x+2\Delta x,\ y+2\Delta y) - 2\,f\,(x+\Delta x,\ y+\Delta y) + f\,(x,y)\,.$$

Jestto *rożnica zupełna rzędu 2-go* funkcyi dwóch zmiennych niezależnych. Napiszemy teraz następujące różnice częściowe:

$$\Delta^2_{x,x} f = f\,(x+2\Delta x,\ y) - 2f\,(x+\Delta x,\ y) + f\,(x,y)\,,$$
$$\Delta^2_{y,y} f = f\,(x,\ y+2\Delta y) - 2f\,(x,\ y+\Delta y) + f\,(x,y)\,,$$
$$\Delta^2_{x,y} f = f\,(x+\Delta x,\ y+\Delta y) - f\,(x+\Delta x,\ y) - f\,(x,\ y+\Delta y) + f\,(x,y)\,,$$
$$\Delta^3_{x,x,y} f = f\,(x+2\Delta x,\ y+\Delta y) - 2\,f\,(x+\Delta x,\ y+\Delta y) + f\,(x,\ y+\Delta y)$$
$$- f\,(x+2\Delta x,\ y) + 2f\,(x+\Delta x,\ y) - f\,(x,y)\,,$$
$$\Delta^3_{y,y,x} f = f\,(x+\Delta x,\ y+2\Delta y) - 2f\,(x+\Delta x,\ y+\Delta y) + f\,(x+\Delta x,\ y)$$
$$- f\,(x,\ y+2\Delta y) + 2f\,(x,\ y+\Delta y) - f\,(x,y)\,,$$
$$\Delta^4_{x,x,y,y} f = f\,(x+2\Delta x,\ y+2\Delta y) - 2f\,(x+\Delta x,\ y+2\Delta y) + f\,(x,\ y+2\Delta y)$$
$$- f\,(x+2\Delta x,\ y+\Delta y) + 2f\,(x+\Delta x,\ y+\Delta y) - f\,(x,\ y+\Delta y)$$
$$- f\,(x+2\Delta x,\ y+\Delta y) + 2f\,(x+\Delta x,\ y+\Delta y) - f\,(x,\ y+\Delta y)$$
$$+ f\,(x+2\Delta x,\ y) - 2f\,(x+\Delta x,\ y) + f\,(x,y)\,.$$

Sposób pisania podobnych różnic częściowych nie przedstawia żadnych trudności. Stosujemy łatwo prawidła podobne, jak dla (13).

Po uważnem rozpatrzeniu napisanych powyżej równań, nie trudno spostrzedz nastepujący związek:

$$\Delta^2 f = \Delta^2_{x,x} f + 2\Delta^2_{x,y} f + \Delta^2_{y,y} f + 2\Delta^3_{x,x,y} f + 2\Delta^3_{y,y,x} f + \Delta^4_{x,x,y,y} f. \tag{17}$$

Na zasadzie prawa tworzenia się różnic częściowych można zauważyć

$$\Delta^3_{x,x,y} f = \Delta^3_{y,x,x} f,\quad \Delta^3_{y,y,x} f = \Delta^3_{x,y,y} f,\quad \Delta^4_{x,x,y,y} f = \Delta^4_{y,y,x,x} f. \tag{18}$$

Ażeby otrzymać *różnicę zupełną rzędu 3-go* stosujemy do (16) znowu twierdzenie zasadnicze (15) i otrzymamy nasamprzód

$$\Delta\Delta^2 f = \Delta f\,(x+2\Delta x,\ y+2\Delta y) - \Delta\,[2f\,(x+\Delta x,\ y+\Delta y)] + \Delta f\,(x, y),$$

następnie

$$\begin{aligned}\Delta^3 f = {} & \Delta_x f\,(x+2\Delta x,\ y+2\Delta y) + \Delta_y f\,(x+2\Delta x,\ y+2\Delta y)\\ & + \Delta^2_{x,y} f\,(x+2\Delta x,\ y+2\Delta y) - \Delta_x\,[2f\,(x+\Delta x,\ y+\Delta y)]\\ & - \Delta_y\,[2f\,(x+\Delta x,\ y+\Delta y)] - \Delta^2_{x,y}\,[2f\,(x+\Delta x,\ y+\Delta y)]\\ & + \Delta_x f\,(x,y) + \Delta_y f\,(x,y) + \Delta^2_{x,y} f\,(x,y).\end{aligned}$$

Zastępując w ostatniem każdą z różnic częściowych jej wartością, otrzymamy po uproszczeniu

$$\begin{aligned}\Delta^3 f = {} & f\,(x+3\Delta x,\ y+3\Delta y) - 3f\,(x+2\Delta x,\ y+2\Delta y)\\ & + 3f\,(x+\Delta x,\ y+\Delta y) - f\,(x, y).\end{aligned} \tag{19}$$

Drogą podobną, jak powyżej, daje się wyprowadzić związek pomiędzy różnicą zupełną rzędu 3-go i odpowiedniemi różnicami częściowemi:

$$\begin{aligned}\Delta^3 f = {} & \Delta^3_{x,x,x} f + 3\,\Delta^3_{x,x,y} f + 3\,\Delta^3_{x,y,y} f + \Delta^3_{y,y,y} f + 3\,\Delta^4_{x,x,x,y} f\\ & + 6\,\Delta^4_{x,x,y,y} f + 3\,\Delta^4_{x,y,y,y} f + 3\,\Delta^5_{x,x,y,y,y} f + 3\,\Delta^5_{x,x,x,y,y} f + \Delta^6_{x,x,x,y,y,y} f.\end{aligned} \tag{20}$$

Dalej, otrzymamy także *różnicę zupełną rzędu 4-go*:

$$\begin{aligned}\Delta^4 f = {} & f\,(x+4\Delta x,\ y+4\Delta y) - 4\,f\,(x+3\Delta x,\ y+3\Delta y) +\\ & + 6\,f\,(x+2\Delta x,\ y+2\Delta y) - 4\,f\,(x+\Delta x,\ y+\Delta y) + f\,(x, y),\end{aligned} \tag{21}$$

tudzież, jej związek z różnicami częściowemi:

$$
\begin{aligned}
\overset{4}{\Delta} f = {} & \overset{4}{\Delta}_{x^{(4)}} f + 4 \overset{4}{\Delta}_{x^{(3)},\, y} f + 6 \overset{4}{\Delta}_{x^{(2)},\, y^{(2)}} f + 4 \overset{4}{\Delta}_{x,\, y^{(3)}} f + \overset{4}{\Delta}_{y^{(4)}} f \\
& + 4 \overset{5}{\Delta}_{x^{(4)},\, y} f + 12 \overset{5}{\Delta}_{x^{(3)},\, y^{(2)}} f + 12 \overset{5}{\Delta}_{x^{(2)},\, y^{(3)}} f + 4 \overset{5}{\Delta}_{x,\, y^{(4)}} f \\
& + 6 \overset{6}{\Delta}_{x^{(4)},\, y^{(2)}} f + 12 \overset{6}{\Delta}_{x^{(3)},\, y^{(3)}} f + 6 \overset{6}{\Delta}_{x^{(2)},\, y^{(4)}} f + \\
& + 4 \overset{7}{\Delta}_{x^{(4)},\, y^{(3)}} f + 4 \overset{7}{\Delta}_{x^{(3)},\, y^{(4)}} f + \overset{8}{\Delta}_{x^{(4)},\, y^{(4)}} f.
\end{aligned} \tag{22}
$$

Tym sposobem można udowodnić wzór ogólny

$$
\begin{aligned}
\Delta^k f = {} & f(x + k\Delta x,\, y + k\Delta y) - kf(x + [k-1]\,\Delta x,\, y + [k-1]\,\Delta y) \\
& + \frac{k\,(k-1)}{1\,.\,2} f(x + [k-2]\,\Delta x,\, y + [k-2]\,\Delta y) - \ldots \pm f(x, y)
\end{aligned} \tag{23}
$$

a także związek, zawierający różnice częściowe:

$$
\left\{
\begin{aligned}
\overset{k}{\Delta} f = {} & \overset{k}{\Delta}_{x^{(k)}} f + k \overset{k}{\Delta}_{x^{(k-1)},\, y} f + \frac{k\,(k-1)}{1\,.\,2} \overset{k}{\Delta}_{x^{(k-2)},\, y^{(2)}} f + \ldots \\
& \ldots + k \overset{k}{\Delta}_{x,\, y^{(k-1)}} f + \overset{k}{\Delta}_{y^{(k)}} f \\
& + k \left[\overset{k+1}{\Delta}_{x^{(k)},\, y} f + (k-1) \overset{k+1}{\Delta}_{x^{(k-1)},\, y^{(2)}} f + \frac{(k-1)\,(k-2)}{1\,.\,2} \overset{k+1}{\Delta}_{x^{(k-2)},\, y^{(3)}} f + \ldots \right. \\
& \left. \ldots + (k-1) \overset{k+1}{\Delta}_{x^{(2)},\, y^{(k-1)}} f + \overset{k+1}{\Delta}_{x,\, y^{(k)}} f \right] \\
& + \frac{k\,(k-1)}{1\,.\,2} \left[\overset{k+2}{\Delta}_{x^{(k)},\, y^{(2)}} f + (k-2) \overset{k+2}{\Delta}_{x^{(k-1)},\, y^{(3)}} f + \frac{(k-2)(k-3)}{1\,.\,2} \overset{k+2}{\Delta}_{x^{(k-2)},\, y^{(4)}} f + \ldots \right. \\
& \left. \ldots + (k-2) \overset{k+2}{\Delta}_{x^{(3)},\, y^{(k-1)}} f + \overset{k+2}{\Delta}_{x^{(2)},\, y^{(k)}} \right] + \ldots \\
& \ldots + \frac{k\,(k-1)}{1\,.\,2} \left[\overset{2k-2}{\Delta}_{x^{(k)},\, y^{(k-2)}} f + 2 \overset{2k-2}{\Delta}_{x^{(k-1)},\, y^{(k-1)}} f + \overset{2k-2}{\Delta}_{x^{(k-2)},\, y^{(k)}} f \right] \\
& + k \left[\overset{2k-1}{\Delta}_{x^{(k)},\, y^{(k-1)}} f + \overset{2k-1}{\Delta}_{x^{(k-1)},\, y^{(k)}} f \right] + \overset{2k}{\Delta}_{x^{(k)},\, y^{(k)}} f;
\end{aligned}
\right. \tag{24}
$$

dla krótkości wprowadziliśmy oznaczenia $x^{(s)}$ zamiast $x, x, x, \ldots$ s razy.

Dowieść można, że gdy wzór napisany ma miejsce dla $\Delta^k f$, natenczas, stosując symbol Δ do każdego wyrazu, zauważymy po uproszczeniu, że wzór będzie także prawdziwym i dla $\Delta^{k+1} f$, czyli, że wzór ten jest zawsze prawdziwy.

Możemy oprócz tego napisać i dowieść wzór:

$$f(x+n\Delta x, y+n\Delta y) = f(x, y) + n\Delta f + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \Delta^2 f + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \Delta^3 f + \ldots + \Delta^n f. \tag{25}$$

Wzór ten obejmuje wszystkie definicye różnic zupełnych, jest to więc tylko dedukcya, czyli najogólniejsza definicya wszystkich różnic zupełnych. W rzeczy samej, kładąc w ostatnim wzorze $n=1$, otrzymamy różnicę zupełną rzędu 1-go, kładąc $n=2$, otrzymamy różnicę zupełną rzędu 2-go i t. d., kładąc $n=k$, otrzymamy różnicę rzędu k.

Przejdźmy teraz do funkcyj trzech zmiennych niezależnych.

Metoda postępowania pozostanie tą samą, jak poprzednio, lecz wzory odpowiednie będą więcej złożone.

Niech będzie funkcya trzech zmiennych niezależnych

$$F = F(x, y, z).$$

Różnicą zupełną rzędu 1-go będzie

$$\Delta F = F(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - F(x, y, z). \tag{26}$$

Napiszmy następujące różnice częściowe:

$$\left\{\begin{aligned}
&\Delta_x F = F(x+\Delta x, y, z) - F(x, y, z),\\
&\Delta_y F = F(x, y+\Delta y, z) - F(x, y, z),\\
&\Delta_z F = F(x, y, z+\Delta z) - F(x, y, z),\\
&\Delta^2_{x,y} F = F(x+\Delta x, y+\Delta y, z) - F(x, y+\Delta y, z) - F(x+\Delta x, y, z)\\
&\qquad + F(x, y, z),\\
&\Delta^2_{x,z} F = F(x+\Delta x, y, z+\Delta z) - F(x, y, z+\Delta z) - F(x+\Delta x, y, z)\\
&\qquad + F(x, y, z),\\
&\Delta^2_{y,z} F = F(x, y+\Delta y, z+\Delta z) - F(x, y, z+\Delta z) - F(x, y+\Delta y, z)\\
&\qquad + F(x, y, z),\\
&\Delta^3_{x,y,z} = F(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - F(x, y+\Delta y, z+\Delta z)\\
&\quad - F(x+\Delta x, y, z+\Delta z) + F(x, y, z+\Delta z) - F(x+\Delta x, y+\Delta y, z)\\
&\quad + F(x, y+\Delta y, z) + F(x+\Delta x, y, z) - F(x, y, z).
\end{aligned}\right. \tag{26a}$$

Jako następstwo symetrycznego kształtu tych różnic wypada prawo symbolów

$$(27)\qquad \Delta^2_{x,y}\,F=\Delta^2_{y,x}\,F,\ \Delta^2_{x,z}\,F=\Delta^2_{z,x}\,F,\ \Delta^2_{y,z}\,F=\Delta^2_{z,y}\,F,\ \Delta^3_{x,y,z}\,F=\Delta^3_{y,x,z}\,F,$$

i t. d.

Dodając odpowiedniemi stronami wszystkie, napisane powyżej, różnice częściowe (26a), łatwo otrzymamy

$$(28)\qquad \Delta F=\Delta_x\,F+\Delta_y\,F+\Delta_z\,F+\Delta^2_{x,y}\,F+\Delta^2_{x,z}\,F+\Delta^2_{y,z}\,F+\Delta^3_{x,y,z}\,F.$$

Jestto twierdzenie zasadnicze dla funkcyj trzech zmiennych niezależnych. *Różnica zupełna rzędu 1-go funkcyi trzech zmiennych niezależnych równa się sumie trzech różnic częściowych rzędu 1-go względem każdej zmiennej zosobna, więcej suma trzech różnic częściowych rzędu 2 go względem każdej pary zmiennych, więcej różnica częściowa rzędu 3-go względem wszystkich zmiennych.*

Dalej różnicą zupełną rzędu 2-go będzie

$$\Delta\Delta F=\Delta F\,(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z)-\Delta F\,(x,\ y,\ z),$$

czyli

$$\begin{aligned}\Delta^2 F=\ &\Delta_x\,F\,(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z)+\Delta_y\,F\,(x+\Delta x,\ z+\Delta y,\ z+\Delta z)\\ &+\Delta_z\,F\,(x+\Delta x,\ y+\Delta y.\ z+\Delta z)+\Delta^2_{x,y}\,F\,(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z)\\ &+\Delta^2_{x,z}\,F\,(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z)+\Delta^2_{y,z}\,F\,(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z)\\ &+\Delta^3_{x,y,z}\,F\,(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z)-\Delta_x\,F-\Delta_y\,F-\Delta_z\,F-\Delta^2_{x,y}\,F\\ &-\Delta^2_{x,z}\,F-\Delta^2_{y,z}\,F-\Delta^3_{x,y,z}\,F.\end{aligned}$$

Zastąpiwszy w powyższem różnice częściowe przez ich wartości, po uproszczeniu otrzymamy różnicę zupełną rzędu 2-go w kształcie:

$$(29)\qquad \begin{aligned}\Delta^2 F=F\,(x+2\Delta x,\ y+2\Delta y,\ z+2\Delta z)-2F\,(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z)\\ +F\,(x,\ y,\ z),\end{aligned}$$

którą podobnie, jak dla dwóch zmiennych niezależnych będziemy mogli wyrazić zapomocą różnic częściowych tak:

$$
(30)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\Delta^2 F = \Delta^2{}_{x^{(2)}} F + 2\Delta^2{}_{x,y} F + \Delta^2{}_{y^{(2)}} F + 2\Delta^2{}_{x,z} F + 2\Delta^2{}_{y,z} F + \Delta^2{}_{z^{(2)}} F \\
&+ 2\Delta^3{}_{x^{(2)},y} F + 2\Delta^3{}_{x^{(2)},z} F + 2\Delta^3{}_{x,y^{(2)}} F + 2\Delta^3{}_{y^{(2)},z} F + 2\Delta^3{}_{x,z^{(2)}} F \\
&+ 2\Delta^3{}_{y,z^{(2)}} F + 6\Delta^3{}_{x,y,z} F + \Delta^4{}_{x^{(2)},y^{(2)}} F + \Delta^4{}_{y^{(2)},z^{(2)}} F + \Delta^4{}_{x^{(2)},z^{(2)}} F \\
&\quad + 4\Delta^4{}_{x^{(2)},y,z} F + 4\Delta^4{}_{x,y^{(2)},z} F + 4\Delta^4{}_{x,y,z^{(2)}} F + 2\Delta^5{}_{x^{(2)},y^{(2)},z} F \\
&\qquad + 2\Delta^5{}_{x^{(2)},y,z^{(2)}} F + 2\Delta^5{}_{x,y^{(2)},z^{(2)}} F + \Delta^6{}_{x^{(2)},y^{(2)},z^{(2)}} F.
\end{aligned}
\right.
$$

Bardzo łatwo sprawdzić, że wzór powyższy jest rzetelnym, zapomocą podstawienia wszystkich wartości różnic częściowych.

Stosując taką samą metodę dalej, będziemy mieli

$$
\begin{aligned}
\Delta^3 F = F(x+3\Delta x,\, y+3\Delta y,\, z+3\Delta z) &- 3F(x+2\Delta x,\, y+2\Delta y,\, z+2\Delta z) \\
&+ 3\,F(x+\Delta x,\, y+\Delta y,\, z+\Delta z) - F(x, y, z).
\end{aligned}
$$

Związek ostatniej różnicy $\Delta^3 F$ z różnicami częściowemi opuszczamy, jako zbyt zawiły, sądząc, że myśl zasadnicza sposobu pisania takich związków jest dostatecznie wyjaśnioną.

Podobnie, jak dla funkcyi dwóch zmiennych niezależnych, będziemy mieli wzór

$$
(31)\quad
\begin{aligned}
F(x+n\Delta x,\, y+n\Delta y,\, z+n\Delta z) = F(x, y, z) + n\Delta\, F + \frac{n\,(n-1)}{1\,.\,2}\,\Delta^2 F \\
+ \frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\,\Delta^3 F + \ldots + \Delta^n F.
\end{aligned}
$$

Wzór ten obejmuje sobą wszystkie definicye różnic zupełnych i łatwo dowieść, że, jeżeli prawdziwym jest dla

$$F(x+k\Delta x,\, y+k\Delta y,\, z+k\Delta z),$$

natenczas będzie prawdziwym i dla

$$F\big(x + (k+1)\,\Delta x,\, y + (k+1)\,\Delta y,\, z + (k+1)\,\Delta z\big),$$

jest więc ogólnym i prawdziwym zawsze.

Dalej moglibyśmy wyprowadzić podobne wzory dla różnic funkcyj czterech, pięciu i wogóle wielu zmiennych niezależnych lecz, ponieważ kształt wzorów staje się coraz bardziej zawiły, ograniczymy się więc tylko przypadkami, powyżej wyłożonemi.

Dowiedziemy dalej kilku twierdzeń zasadniczych, biorąc dla większej ogólności funkcye wielu zmiennych niezależnych. Jednakże wszystkie rozumowania, które wyłożymy poniżej, pozostaną bez zmiany, jeżeli zamiast funkcyi wielu zmiennych zechcemy wziąść funkcyę jednéj tylko zmiennej niezależnej.

Twierdzenie I. *Różnica rzędu 1-go pozostaje bez żadnej zmiany, jeżeli do funkcyi dodamy stałą dowolną, lub też jakąkolwiek funkcyę peryodyczną.*

W rzeczy samej, mając

$$f = f(x, y, z, \ldots)$$

i różnicę pierwszą

$$\Delta f = f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z, \ldots) - f(x, y, z, \ldots), \tag{a}$$

utworzymy różnicę dla

$$f_1 = f(x, y, z, \ldots) + c,$$

gdzie c oznacza albo stałą dowolną, albo też funkcyę peryodyczną

$$c = \varphi(x, y, z, \ldots). \tag{b}$$

W przypadku stałej dowolnej mamy

$$\Delta f_1 = f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z, \ldots) + c - f(x, y, z, \ldots) - c;$$

skąd widoczna, że

$$\Delta f_1 = \Delta f. \qquad \text{c. b. d. d.}$$

W przypadku gdy c oznacza funkcyę peryodyczną (b), będziemy mieli

$$\Delta f_1 = f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z, \ldots) + \varphi(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z, \ldots)$$
$$- f(x, y, z, \ldots) - \varphi(x, y, z, \ldots).$$

Ponieważ jednak funkcya peryodyczna φ czynić musi zadość warunkowi

$$\varphi(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z, \ldots) = \varphi(x, y, z, \ldots)$$

będzie więc i w tym drugim przypadku

$$\Delta f_1 = \Delta f. \qquad \text{c. b. d. d.}$$

Kształt funkcyi peryodycznej można zawsze wybrać tak

$$\varphi = \varphi\left(\sin\frac{2\pi x}{\Delta x}, \cos\frac{2\pi x}{\Delta x}, \sin\frac{2\pi y}{\Delta y}, \cos\frac{2\pi y}{\Delta y}, \sin\frac{2\pi z}{\Delta z}, \cos\frac{2\pi z}{\Delta z}, \ldots\ldots\right),$$

gdzie φ oznacza funkcyę zupełnie dowolną.

Twierdzenie II. *Różnica rzędu 2-go nie podlega żadnej zmianie, gdy do funkcyi dodamy wyraz kształtu:*

$$\frac{x}{\Delta x}\varphi_1 + \frac{y}{\Delta y}\varphi_2 + \frac{z}{\Delta z}\varphi_3 + \dots + \Psi,$$

gdzie $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots, \Psi$ *oznaczają stałe dowolne lub też jakiekolwiek funkcye peryodyczne.*

Gdy mamy daną funkcyę

$$f = f(x, y, z, \dots)$$

i jej różnicę pierwszą w kształcie (a, twier. I), natenczas kładąc

$$f_2 = f(x, y, z, \dots) + \frac{x}{\Delta x}\varphi_1 + \frac{y}{\Delta y}\varphi_2 + \frac{z}{\Delta z}\varphi_3 + \dots + \Psi, \text{ *)}$$

otrzymamy

$$\Delta f_2 = f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z, \dots) + \frac{x+\Delta x}{\Delta x}\varphi_1 + \frac{y+\Delta y}{\Delta y}\varphi_2$$

$$+ \frac{z+\Delta z}{\Delta z}\varphi_3 + \dots + \Psi - f(x, y, z, \dots) - \frac{x}{\Delta x}\varphi_1 - \frac{y}{\Delta y}\varphi_2 - \frac{z}{\Delta z}\varphi_3 - \dots - \Psi,$$

czyli po łatwem uproszczeniu będzie

$$\Delta f_2 = f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z, \dots) + \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \dots - f(x, y, z, \dots).$$

Stąd różnicę rzędu 2-go otrzymamy, kładąc we wszystkich wyrazach $x+\Delta x$ zamiast x, $y+\Delta y$ zamiast y, $z+\Delta z$ zamiast z i t. d. i odciągając całkowitą wartość pierwotną, będzie więc

$$\Delta^2 f_2 = f(x+2\Delta x, y+2\Delta y, z+2\Delta z, \dots) - 2f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z, \dots)$$

$$+ f(x, y, z, \dots).$$

Wyrazy $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots$ w odejmowaniu zniknąć muszą, gdyż oznaczają funkcye peryodyczne. Widzimy więc, że

$$\Delta^2 f_2 = \Delta^2 f. \qquad \text{c. b. d. d.}$$

Podobną własność można także dowieść dla wszystkich różnic rzędów wyższych, lecz dodane dowolnie wyrazy, zawierające funkcye peryodyczne, przybierają kształt coraz bardziej zawiły.

*) $\Delta x, \Delta y, \Delta z, \dots$ są ilości stałe, często bywa dogodniej oznaczać je przez $h, k, l, \dots$

Nie mogąc zbyt rozszerzać dziełka niniejszego, ograniczymy się tylko na przypadkach, roztrząsanych powyżej.

Twierdzenie III. *Różnica jakiegokolwiek rzędu iloczynu funkcyi przez ilość stałą równa się iloczynowi stałej przez różnicę tego samego rzędu funkcyi.*

Niech będzie dana funkcya

$$f = f(x, y, z, \ldots)$$

i różnica rzędu k:

$$\Delta^k f = f(x + k\Delta x,\ y + k\Delta y,\ z + k\Delta z, \ldots)$$
$$- kf(x + (k-1)\Delta x,\ y + (k-1)\Delta y,\ z + (k-1)\Delta z, \ldots)$$
$$+ \frac{k(k-1)}{1 \cdot 2} f(x + (k-2)\Delta x, y + (k-2)\Delta y, z + (k-2)\Delta z, \ldots) - \ldots\ldots$$
$$\ldots \pm f(x, y, z, \ldots).$$

Podobnie będziemy mieli

$$\Delta^k (af) = af(x+k\Delta x, y+k\Delta y, z+k\Delta z, \ldots)$$
$$- k\,a\,f(x + (k-1)\Delta x, y + (k-1)\Delta y, z + (k-1)\Delta z, \ldots) + \ldots$$
$$\ldots \pm af(x, y, z, \ldots)$$

gdzie a jest ilość stała. Wziąwszy a za nawias we wszystkich wyrazach ostatniego równania, łatwo zauważymy, że

$$\Delta^k (af) = a\,\Delta^k f, \qquad \text{c. b. d. d.}$$

Twierdzenie IV. *Różnica sumy funkcyj danych równa się sumie takich samych różnic wszystkich funkcyj.*

Niech będzie dana suma

$$s = F_1(x, y, z, \ldots) + F_2(x, y, z, \ldots) + \ldots + F_n(x, y, z, \ldots).$$

Różnica rzędu k będzie, jak wiemy, taka:

$$\Delta^k s = F_1(x+k\Delta x, y+k\Delta y, z+k\Delta z, \ldots) + F_2(x+k\Delta x, z+k\Delta y, z+k\Delta z, \ldots) + \ldots$$
$$\ldots + F_n(x+k\Delta x, y+k\Delta y, z + k\Delta z, \ldots) + \ldots$$
$$- k\,[F_1(x + (k-1)\Delta x,\ y + (k-1)\Delta y,\ z + (k-1)\Delta z, \ldots)$$
$$+ F_2(x + (k-1)\Delta x, y + (k-1)\Delta y, z + (k-1)\Delta z, \ldots)$$
$$\ldots + F_n(x + (k-1)\Delta x,\ y + (k-1)\Delta y,\ z + (k-1)\Delta z, \ldots)] + \ldots$$
$$\ldots \pm F_1(x, y, z, \ldots) \pm F_2(x, y, z, \ldots) \pm \ldots \pm F_n(x, y, z, \ldots).$$

Po uporządkowaniu wyrazów powyższego równania tak, ażeby naprzód napisane były te wyrazy, które zawierają F_1, potem wszystkie te, które zawierają F_2 i t. d., zauważymy, że

$$\Delta^k s = \Delta^k F_1 + \Delta^k F_2 + \ldots + \Delta^k F_n . \qquad \text{c. b. d. d.}$$

Przejdziemy teraz do oznaczenia *różnicy iloczynu* dwóch funkcyi danych.

Niech dany będzie iloczyn

$$(A) \qquad u = f(x, y, z, \ldots) . F(x, y, z, \ldots) .$$

Wiemy, że różnicę powyższego iloczynu można napisać tak

$$\Delta u = f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z, \ldots) . F(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z, \ldots) - f . F;$$

Dalej wiemy także, iż

$$(B) \qquad \begin{cases} f(x+\Delta x), y+\Delta y, z+\Delta z, \ldots) = f + \Delta f, \\ F(x+\Delta x, y+\Delta x, z+\Delta z, \ldots) = F + \Delta F. \end{cases}$$

Podstawiwszy te wartości w równanie (A), otrzymamy

$$\Delta u = (f+\Delta f)(F+\Delta F) - f . F$$

czyli

$$\Delta (f . F) = f . \Delta F + F . \Delta f + \Delta f . \Delta F .$$

Jestto *różnica rzędu 1-go* iloczynu funkcyj danych.

Napiszmy dalej różnicę rzędu 2-go poprzedniego iloczynu u w kształcie)

$$(C) \qquad \begin{aligned} \Delta^2 u = & f(x+2\Delta x, y+2\Delta y, z+2\Delta z, \ldots) . F(x+2\Delta x, y+2\Delta y, z+2\Delta z, \ldots) \\ & - 2f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z, \ldots) . F(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z, \ldots) + f . F. \end{aligned}$$

Wiemy, że (porówn. wzór 31)

$$f(x+2\Delta x, y+2\Delta y, z+2\Delta z, \ldots) = f + 2\,\Delta f + \Delta^2 f,$$
$$F(x+2\Delta x, y+2\Delta y, z+2\Delta z, \ldots) = F + 2\,\Delta F + \Delta^2 F;$$

oprócz tego mamy jeszcze związki (B). Podstawiwszy napisane powyżej wartości, oraz wartości (B) w równanie (C), będziemy mieli

$$\Delta^2 u = (f+2\Delta f+\Delta^2 f)(F+2\Delta F+\Delta^2 F) - 2(f+\Delta f)(F+\Delta F) + f . F,$$

skąd po łatwem uproszczeniu otrzymamy

$$\Delta^2 (f . F) = f \Delta^2 F + 2 \Delta f . \Delta F + F . \Delta^2 f + 2 \Delta f . \Delta^2 F + 2 \Delta^2 f . \Delta F$$
$$+ \Delta^2 f . \Delta^2 F .$$

Jestto *różnica rzędu 2-go* iloczynu dwóch funkcyj danych. Tym sposobem prowadząc dowodzenie dalej, otrzymamy wzór dla różnicy rzędu k w następującym kształcie:

$$(D) \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta^k (f . F) = {} & f . \Delta^k F + k \Delta f . \Delta^{k-1} F + \frac{k(k-1)}{1 . 2} \Delta^2 f . \Delta^{k-2} F + \ldots \\ & \ldots + k \Delta^{k-1} f . \Delta F + F . \Delta^k f \\ & + k \Big[\Delta f . \Delta^k F + (k-1) \Delta^2 f \Delta^{k-1} F + \frac{(k-1)(k-2)}{1 . 2} \Delta^3 f \Delta^{k-2} F + \ldots \\ & \ldots + (k-1) \Delta^{k-1} f . \Delta^2 F + \Delta^k f . \Delta F \Big] \\ & + \frac{k(k-1)}{1 . 2} \Big[\Delta^2 f . \Delta^k F + (k-2) \Delta^3 f \Delta^{k-1} F + \frac{(k-2)(k-3)}{1 . 2} \Delta^4 f . \Delta^{k-2} F + \ldots \\ & \ldots + (k-2) \Delta^{k-1} f . \Delta^3 F + \Delta^k f . \Delta^2 F \Big] + \ldots \\ & \ldots + \frac{k(k-1)}{1 . 2} \Big[\Delta^{k-2} f . \Delta^k F + 2 \Delta^{k-1} f . \Delta^{k-1} F + \Delta^k f . \Delta^{k-2} F \Big] \\ & + k \Big[\Delta^{k-1} f . \Delta^k F + \Delta^k f . \Delta^{k-1} F \Big] + \Delta^k f . \Delta^k F . \end{aligned} \right.$$

Przyjmując, że wzór, napisany powyżej, ma miejsce dla $\Delta^k (f . F)$ i, stosując znowu symbol Δ do każdego wyrazu, zauważymy po dokonaniu uproszczeń, że wzór powyższy będzie prawdziwym dla $\Delta^{k+1} (f . F)$ czyli, że wzór jest ogólnym i prawdziwym zawsze.

II. Rachunek różniczkowy.

Od rachunku różnic przejdziemy do rachunku różniczkowego, robiąc jedno ogólne przypuszczenie, że przyrostki zmiennych niezależnych Δx, Δy, Δz, ... stają się nieskończenie małemi. Oprócz tego rozważać będziemy *funkcye ciągłe* t. j. takie, których przyrostki stają się ilościami nieskończenie małemi, gdy Δx, Δy, Δz, ... dążą do zera. Gdyby przyrostki funkcyj przybierały wartość ∞, podczas gdy przyrostki zmiennych niezależnych byłyby nieskończenie małemi, natenczas mówić będziemy, że funkcya ma ciągłość zerwaną. Przedmiotem wszystkich naszych rozumowań, które poniżej wyłożymy, będą funkcye ciągłe.

§ 1. *Funkcye jednej zmiennej niezależnej.*

Niech daną będzie funkcya

$$F = F(x).$$

Różniczką rzędu 1-go nazywamy granicę różnicy rzędu 1-go

$$dF = \lim \Delta F = \lim \left[F(x+\Delta x) - F(x) \right],$$

gdy Δx nieograniczenie zdąża do zera.

Pochodną rzędu 1-go nazywamy granicę stosunku

$$\lim \frac{\Delta F}{\Delta x} = \lim \left. \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} \right|_{\Delta x = 0} = F'(x);$$

oznaczamy powyższą granicę przez $\frac{dF}{dx}$, albo też przez $F'(x)$.

Różniczką rzędu 2-go jest granica różnicy rzędu 2-go

$$d^2F = \lim \Delta^2 F = \lim \left[F(x+2\Delta x) - 2F(x+\Delta x) + F(x)\right]$$

gdy Δx zdąża do zera.

Widzieliśmy w teoryi różnic, że

$$\Delta^2 F = \Delta\Delta F,$$

oczywista, taka sama zależność istnieć musi i dla granic

$$d^2 F = ddF.$$

Dalej, *pochodna rzędu 2-go* jest granicą stosunku drugiej różnicy funkkcyi do kwadratu Δx, gdy Δx zdąża do zera

$$\lim \frac{\Delta^2 F}{\Delta x^2} = \lim \left.\frac{F(x+2\Delta x) - 2F(x+\Delta x) + F(x)}{\Delta x^2}\right|_{\Delta x = 0} = F''(x).$$

Granicę powyższą, zgodnie z poprzedzającem, oznaczać będziemy albbo przez $\frac{d^2 F}{dx^2}$, albo też przez $F''(x)$.

Różniczka rzędu 3-go jest granicą różnicy rzędu 3-go

$$d^3 F = \lim \Delta^3 F = \lim \left[F(x+3\Delta x) - 3F(x+2\Delta x) + 3F(x+\Delta x) - F(x)\right],$$

gdy Δx dąży do zera.

Ponieważ dla różnic mieliśmy

$$\Delta^3 F = \Delta\, \Delta^2 F,$$

więc i w granicy dla odpowiedniej różniczki istnieć będzie to samo prawo

$$d^3 F = d\, d^2 F.$$

Pochodną rzędu 3-go nazywamy granicę stosunku różnicy 3-go rzęddu funkcyi danej do sześcianu Δx, gdy Δx zdąża do zera

$$\lim \frac{\Delta^3 F}{\Delta x^3} = \lim \left.\frac{F(x+3\Delta x) - 3F(x+2\Delta x) + 3F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x^3}\right|_{\Delta x = 0} = F'''(x),$$

podobnie, jak powyżej, trzecią pochodną oznaczać będziemy albo przez $\frac{d^3 F}{dx^3}$, albo przez $F'''(x)$.

Wogóle, *różniczka* k-go rzędu jest granicą k-ej różnicy funkcyi, tudzież *pochodna* k-go rzędu jest granicą stosunku k-ej różnicy funkcyi do k-ej potęgi Δx, gdy Δx zdąża do zera.

Gdybyśmy mieli *funkcyę złożoną* w kształcie

$$u = f\,(x_n)\,,$$

$$x_n = \varphi_n\,(x_{n-1})\,,\quad x_{n-1} = \varphi_{n-1}\,(x_{n-2})\,,\ .\ .\ .\ ,\ x_2 = \varphi_2\,(x_1)\,,$$

natenczas, nie rozwiązując układu równań, możemy znaleść pochodną u względem x_1. W tym celu napiszmy tożsamość

$$\frac{\Delta u}{\Delta x_1} = \frac{\Delta u}{\Delta x_n} \cdot \frac{\Delta x_n}{\Delta x_{n-1}} \cdot\,.\,.\,\cdot \frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}\,,$$

przeszedłszy do granic, będziemy mieli

$$\frac{du}{dx_1} = \frac{du}{dx_n} \cdot \frac{dx_n}{dx_{n-1}} \cdot\,.\,.\,\cdot \frac{dx_2}{dx_1}\,.$$

Jeżeli przyjmiemy Δx dążącem do zera nieskończenie, natenczas zamiast wzoru (8) (rozdz. I) będziemy mogli napisać wzór następujący:

$$F\,(x+n\Delta x) = F\,(x) + n\,F'\,(x)\,\Delta x + \frac{n\,(n-1)}{1\,.\,2}\,F''\,(x)\,\Delta x^2$$
$$+ \frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\,F'''\,(x)\,\Delta x^3 + \ .\ .\ .$$

Uważając Δx jako ilość nieskończenie małą, zrobiliśmy w (8) zamiany

$$\Delta F = \frac{\Delta F}{\Delta x}\,.\,\Delta x\,,\quad \Delta^2 F = \frac{\Delta^2 F}{\Delta x^2}\,\Delta x^2 \quad \text{i t. d.}$$

Od ostatniego wzoru przejść bardzo łatwo do wzoru T a y l o r' a, kładąc $\Delta x = \dfrac{h}{n}$, $n = \infty$.

W tym przypadku będziemy mieli:

$$F\,(x+h) = F\,(x) + \frac{h}{\Delta x}\,F'\,(x)\,.\,\Delta x + \frac{1}{1\,.\,2} \cdot \frac{h}{\Delta x}\left(\frac{h-\Delta x}{\Delta x}\right) F''\,(x)\,\Delta x^2$$
$$+ \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3} \cdot \frac{h}{\Delta x}\left(\frac{h-\Delta x}{\Delta x}\right)\left(\frac{h-2\Delta x}{\Delta x}\right) F'''\,(x)\,\Delta x^3 + \ .\ .\ .$$

czyli

$$(\text{i})\quad F(x+h) = F(x) + h\,F'(x) + \frac{h^2}{1\,.\,2}\,F''(x) + \frac{h^3}{1\,.\,2\,.\,3}\,F'''(x) + \ldots .$$

x oznacza zmienną, h przyrostek.

Pierwsza strona tego wzoru nie ulega żadnej zmianie, jeżeli zamiasst x napiszemy h, a zamiast h weźmiemy x; wypada więc z tego ważny wniosek, że, jeżeli druga strona powyższej równości jest rozkładem tej funkccyi, którą mamy po pierwszej stronie, natenczas własność wzmiankowana powvinna należeć i do drugiej strony równości.

Musi więc być prawdziwą i taka postać szeregu:

$$(\text{k})\quad F(x+h) = F(h) + x\,F'(h) + \frac{x^2}{1\,.\,2}\,F''(h) + \frac{x^3}{1\,.\,2\,.\,3}\,F'''(h) + \ldots .$$

Szereg Maclaurina jest tylko bardzo szczególnym przypadkiem]powyższego (k), gdy przyjmiemy $h=0$. Niesłusznie odróżnia się szereg M[aclaurina, jako coś odrębnego, gdyż jest to szereg Taylora z warrunkiem $h=0$. Jeżeli szereg w postaci (i) jest zbieżnym, a także gdy szerreg, wzięty w drugiej postaci (k), jest zbieżnym, natenczas nie można wątpić, że rozkład odnosi się ściśle do funkcyi napisanej po pierwszej stronie i w tyych przypadkach szereg zbieżny, przy $h=0$, będzie także niewątpliwie przedsstawiać rozkład danej funkcyi, a nie jakiejbądź innej. Z takiego punktu \widzenia roztrząsanie reszty wzoru Taylor'a będzie zbytecznem.

Twierdzenie, które wyprowadziliśmy w poprzedzającym rozdziale (dla funkcyi wielu zmiennych niezależnych, będą mieć, bezwątpienia, miejsce i (dla jednej zmiennej.

Z twierdzenia 1-go wypada dla funkcyi jednej zmiennej.

$$\Delta\,(F+c) = \Delta F,$$

gdzie c oznacza stałą dowolną, lub funkcyę peryodyczną.

Przechodząc od ostatniego równania do granic, otrzymamy

$$d\,(F+c) = dF,$$

czyli, że, *różniczka nie zmienia się, jeżeli do funkcyi dodamy stałą dowolną.* O funkcyi peryodycznej w granicy mowy być nie może, gdyż nieskończemie małe przyrostki znikają.

Oprócz tego, widocznem jest

$$\frac{\Delta\,(F+c)}{\Delta x} = \frac{\Delta F}{\Delta x},$$

stąd w granicy będzie:

$$\frac{d(F+c)}{dx} = \frac{dF}{dx}$$

czyli, *pochodna nie zmienia się, jeżeli do funkcyi dodamy stałą.*

Z twierdzenia III mamy:

$$\Delta^k (a F) = a \Delta^k F,$$

skąd w granicy będzie

$$d^k (a F) = a d^k F.$$

Podobnie dla pochodnej

$$\frac{\Delta^k (a F)}{\Delta x^k} = a \frac{\Delta^k F}{\Delta x^k},$$

czyli w granicy

$$\frac{d^k (a F)}{dx^k} = a \frac{d_k F}{dx^k}.$$

Widzimy więc, że *pochodna iloczynu funkcyi przez stałą równa się iloczynowi stałej przez pochodną tego samego rzędu funkcyi.* To samo mamy i dla różniczki.

Z twierdzenia IV-go wnioskujemy, że, mając daną sumę

$$s = F_1(x) + F_2(x) + \ldots + F_n(x),$$

otrzymamy różnicę k-go rzędu

$$\Delta^k s = \Delta^k F_1 + \Delta^k F_2 + \ldots + \Delta^k F_n,$$

stąd w granicy będzie

$$d^k s = d^k F_1 + d^k F_2 + \ldots + d^k F_n.$$

Podobnie dla pochodnych będzie także

$$\frac{\Delta^k s}{\Delta x^k} = \frac{\Delta^k F_1}{\Delta x^k} + \frac{\Delta^k F_2}{\Delta x^k} + \ldots + \frac{\Delta^k F_n}{\Delta x^k}$$

w granicy

$$\frac{d^k s}{dk^k} = \frac{d^k F_1}{dx^k} + \frac{d^k F_2}{dx^k} + \ldots + \frac{d^k F_n}{dx^k}.$$

Tak więc, *pochodna sumy równa się sumie pochodnych tego samego rzędu.* Podobnie będzie i dla różniczki.

Ażeby wyprowadzić pochodną i różniczkę iloczynu, dla łatwiejszeego zrozumienia weźmiemy nasamprzód różnicę rzędu 1-go. W rozdziale poprzedzającym otrzymaliśmy

$$\Delta\,(f.F) = f\,\Delta F + F.\Delta f + \Delta f.\Delta F. \tag{l}$$

Gdybyśmy stąd przeszli wprost do granicy, natenczas dla różniczzki wzór byłby taki:

$$d\,(f.F) = f.dF + F.df + df.dF. \tag{j}$$

Jednak łatwo dowieść, że ostatni wyraz po drugiej stronie musi zrniknąć.

W rzeczy samej dla pochodnej będzie widoczny związek

$$\frac{\Delta\,(f.F)}{\Delta x} = f\,\frac{\Delta F}{\Delta x} + F\,\frac{\Delta f}{\Delta x} + \frac{\Delta f}{\Delta x}.\Delta F, \tag{m}$$

który otrzymaliśmy z poprzedzającego (l), dzieląc wszystkie wyrazy przez Δx. Przechodząc od ostatniego związku do granic, mamy

$$\frac{d\,(f.F)}{dx} = f\,\frac{dF}{dx} + F\,\frac{df}{dx},$$

ostatni wyraz w (m) znika, ponieważ *pochodna* jest ilością skończoną i mie może zawierać nieskończenie małej.

Więc też z tego względu różniczką iloczynu w przypadku jednej zmiennej niezależnej jest:

$$d\,(f.F) = f.dF + F.df$$

a nie równość (j).

Dla różnicy rzędu 2-go mieliśmy wzór

$$\Delta^2\,(f.F) = f\,\Delta^2 F + 2\,\Delta f.\Delta F + F\,\Delta^2 f + 2\,\Delta f.\Delta^2 F + 2\,\Delta^2 f.\Delta F + \Delta^2 f.\Delta^2 F,$$

skąd, dzieląc przez Δx^2, otrzymamy

$$\frac{\Delta^2\,(f.F)}{\Delta x^2} = f\,\frac{\Delta^2 F}{\Delta x^2} + 2\,\frac{\Delta f}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta F}{\Delta x} + F\,\frac{\Delta^2 f}{\Delta x^2} + 2\,\Delta f\,\frac{\Delta^2 F}{\Delta x^2} + 2\,\frac{\Delta^2 f}{\Delta x^2}\,\Delta F + \frac{\Delta^2 f}{\Delta x^2}.\Delta^2 F. \tag{n}$$

Po przejściu do granicy będzie widocznie

$$\frac{d^2(f.F)}{dx^2}=f\frac{d^2F}{dx^2}+2\frac{df}{dx}\cdot\frac{dF}{dx}+F\frac{d^2f}{dx^2}.$$

Te zaś wyrazy w równaniu (n), które zawierają ilości nieskończenie małe, zniknąć muszą.

Podobny wzór będzie dla różniczki rzędu 2-go.

Taką samą drogą z wzoru (D), przedstawiającego k-ą różnicę iloczynu, otrzymamy pochodnę k-go rzędu:

$$\frac{d^k(f.F)}{dx^k}=f\frac{d^kF}{dx_k}+k\frac{df}{dx}\,\frac{d^{k-1}F}{dx^{k-1}}+\frac{k(k-1)}{1.2}\,\frac{d^2f}{dx^2}\,\frac{d^{k-2}F}{dx^{k-2}}+\dots$$

$$\dots+k\frac{d^{k-1}f}{dx^{k-1}}\,\frac{dF}{dx}+F\frac{d^kf}{dx^k}.$$

Jestto znany wzór Leibnitz'a.

Wyrażenia nieoznaczone.

Odróżniamy dwa typy główne wyrażeń nieoznaczonych. Postać symboliczna pierwszego typu jest $\frac{0}{0}$, drugiego zaś 1^∞.

Niech będzie dany ułamek

$$\left.\frac{f(x)}{F(x)}\right|_{x=a}=\frac{f(a)}{F(a)}=\frac{0}{0}.$$

Ażeby odnaleźć prawdziwą wartość powyższego ułamku, weźmy

$$\frac{f(a+\varepsilon)}{F(a+\varepsilon)},$$

gdzie ε oznacza ilość nieskończenie małą.

Stosując do licznika i mianownika wzór Taylor'a, będziemy mieli

$$\frac{f(a+\varepsilon)}{F(a+\varepsilon)}=\frac{f(a)+\varepsilon f'(a)+\frac{\varepsilon^2}{1.2}f''(a)+\frac{\varepsilon^3}{1.2.3}f'''(a)+\dots}{F(a)+\varepsilon F'(a)+\frac{\varepsilon^2}{1.2}F''(a)+\frac{\varepsilon^3}{1.2.3}F'''(a)+\dots}.$$

Ponieważ jednak według założenia mamy

$$f(a)=F(a)=0,$$

więc będzie po skróceniu przez ε

$$\frac{f(a+\varepsilon)}{F(a+\varepsilon)} = \frac{f'(a) + \frac{\varepsilon}{1\,.\,2} f''(a) + \frac{\varepsilon^2}{1\,.\,2\,.\,3} f'''(a) + \ldots}{F'(a) + \frac{\varepsilon}{1\,.\,2} F''(a) + \frac{\varepsilon^2}{1\,.\,2\,.\,3} F'''(a) + \ldots}\,.$$

Kładąc w powyższem $\varepsilon=0$, otrzymamy

$$\frac{f(a)}{F(a)} = \frac{f'(a)}{F'(a)}\,.$$

Jestto szukana wartość danego wyrażenia nieoznaczonego.

Jeżeli $f'(a)$ i $F'(a)$ nie są zerami, natenczas wyrażenie nieoznaczone nazywać będziemy *jednokrotnie nieoznaczonem.* Gdyby $f'(a)$ i $F'(a)$ były równe zerom, w tym przypadku będzie widocznie

(p) $$\frac{f'(a)}{F'(a)} = \frac{f''(a)}{F''(a)}\,;$$

dane wyrażenie będziemy nazywać *dwukrotnie nieoznaczonem*, jeżeli ma miejsce związek (p), i $f''(a)$, $F''(a)$ nie równe zeru.

Dalej, gdyby i $f''(a) = F''(a) = 0$, natenczas jest widocznem, że

$$\frac{f''(a)}{F''(a)} = \frac{f'''(a)}{F'''(a)}\,.$$

Jeżeli $f'''(a)$ i $F'''(a)$ nie będą równe zeru, w tym przypadku ułame $\frac{f'''(a)}{F'''(a)}$ będzie przedstawiać prawdziwą wartość danego wyrażenia, które nazywać będziemy *trzykrotnie nieoznaczonem.* i t. d.

Wyrażenia nieoznaczone drugiego typu mają kształt

$$u = [F(x)]^{f(x)}\,.$$

Dajmy, że dla pewnej wartości $x=a$ będzie

$$F(a) = 1\,, \quad f(a) = \infty$$

i wskutek tego $u = 1^\infty$.

Ażeby znaleść prawdziwą wartość danego wyrażenia, koniecznem jest przejście do logarytmu

$$\lg u = f(x) \lg F(x)\Big|_{x=a}\,,$$

czyli

$$\lg u = \frac{\lg F(a)}{\dfrac{1}{f(a)}} = \frac{0}{0}.$$

W dalszym ciągu stosujemy prawidło, dowiedzione dla wyrażeń typu $\frac{0}{0}$ i, znalazłszy prawdziwą wartość

$$\lg u = Q,$$

będziemy mieli widocznie

$$u = e^Q.$$

Wszelkie inne wyrażenia nieoznaczone możemy zawsze doprowadzić do dwóch typów głównych, powyżej wzmiankowanych.

§ 2. *Funkcye wielu zmiennych.*

Gdy mamy daną funkcyę wielu zmiennych niezależnych

$$f = f(x, y, z, \ldots),$$

natenczas możemy ustanowić ściśle pojęcia *pochodnej częściowej* rzędu 1-go względem pewnej zmiennej, lub pochodnych częściowych rzędów wyższych względem kilku zmiennych, lub względem wszystkich zmiennych. Pochodne te przedstawiają we wszystkich własnościach zupełne podobieństwo do pochodnych funkcyi jednej zmiennej niezależnej; odrębnych własności te pochodne wcale nie posiadają, możnaby więc nazywać je wprost *pochodnemi* funkcyj wielu zmiennych, bez dodawania wyrazu *częściowe* lub *cząstkowe*. Dla funkcyj wielu zmiennych niezależnych możemy także określić pojęcie *różniczki zupełnej*, która będzie ściśle odpowiadać różniczce funkcyi jednej zmiennej, oprócz tego będziemy jeszcze odróżniać pojęcie *różniczki częściowej* lub *cząstkowej*, która odpowiadać będzie pochodnej, wziętej względem jednej, lub kilku zmiennych.

Dajmy nasamprzód funkcyę dwóch zmiennych niezależnych

$$f = f(x, y).$$

Różniczką zupełną powyższej funkcyi jest granica

(q′) $$df = \lim \Delta f = \lim\, [f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y)],$$

gdy Δx wraz z Δy zdążają do zera.

Z wzoru (15) *teoryi różnic* otrzymujemy wprost

$$(\text{q}'')\qquad \Delta f = \frac{\Delta_x f}{\Delta x} \,.\, \Delta x + \frac{\Delta_y f}{\Delta y} \,.\, \Delta y + \frac{\Delta^2_{x,y} f}{\Delta x \,.\, \Delta y} \Delta x \,.\, \Delta y \,.$$

Przeszedłszy do granic, będziemy mieli

$$(\text{q})\qquad df = \frac{df}{dx} dx + \frac{df}{dy} dy + \frac{d^2 f}{dx\, dy} dx\, dy \,.$$

Jestto *różniczka zupełna* rzędu 1-go funkcyi dwóch zmiennych niezależnych. Wyraz oddzielny

$$\frac{df}{dx} dx = d_x f$$

nazywamy *różniczką częściową* względem zmiennej x. Podobnie wyraz drugii

$$\frac{df}{dy} dy = d_y f$$

nazywamy *różniczką częściową* względem zmiennej y. Trzeci wyraz:

$$\frac{d^2 f}{dx\, dy} dx\, dy = d^2_{x,y} f$$

nazywać będziemy *różniczką częściową rzędu 2-go* względem zmiennych x i y.

W teoryi różnic (14) dowiedliśmy prawa symbolów

$$\Delta^2_{x,y} f = \Delta^2_{y,x} f \,.$$

więc i w granicy być musi także

$$d^2_{x,y} f = d^2_{y,x} f \,,$$

skąd wypada widocznie

$$\frac{d^2 f}{dx\, dy} = \frac{d^2 f}{dy\, dx} \,.$$

Ażeby ułatwić zrozumienie tak ważnego wzoru, jak (q), powtórzemy dowodzenie nieco obszerniej.

$$\frac{df}{dx} = \lim \frac{\Delta_x f}{\Delta x} = \lim \left.\frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}\right|_{\Delta x = 0},$$

$$\frac{df}{dy} = \lim \frac{\Delta_y f}{\Delta y} = \lim \left.\frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}\right|_{\Delta y = 0},$$

$$\frac{d^2 f}{dx\, dy} = \lim \frac{\Delta_{x,y} f}{\Delta x\, \Delta y}$$

$$= \lim \left.\frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y) - f(x+\Delta x, y) + f(x, y)}{\Delta x \,.\, \Delta y}\right|_{\substack{\Delta x = 0 \\ \Delta y = 0}}.$$

Dla znalezienia wartości pierwszych dwóch pochodnych granice odnajdują się sposobem zwykłym. Ażeby znaleść granicę

(r)
$$\lim \frac{\Delta_{x,y} f}{\Delta x \,.\, \Delta y},$$

szukać należy nasamprzód granicy względem Δx, uważając Δy za ilość stałą, potem dopiero szukamy drugi raz granicy względem Δy. Istotnie, biorąc w powyższem pochodnę licznika i mianownika względem ilości Δx będziemy mieli:

$$\frac{\dfrac{d f(x+\Delta x, y+\Delta y)}{dx} \cdot \dfrac{dx}{\Delta x} - \dfrac{df(x+\Delta x, y)}{dx} \cdot \dfrac{dx}{\Delta x}}{\Delta y}.$$

Przypuszczając tutaj, że Δx dąży do zera, będzie

$$\frac{\dfrac{df(x, y+\Delta y)}{dx} - \dfrac{df(x, y)}{dx}}{\Delta y}.$$

Gdy Δy dąży do zera, natenczas ułamek ostatni będzie $\frac{0}{0}$, biorąc znowu pochodne licznika i mianownika względem Δy, otrzymamy

$$\frac{d^2 f(x, y+\Delta y)}{dx\, dy} \, \frac{dy}{\Delta y}$$

czyli, przyjmując Δy dążącem nieograniczenie do zera, będzie

$$\frac{d^2 f(x, y)}{dx\, dy}.$$

Jestto prawdziwa wartość stosunku nieoznaczonego (r), gdy Δx i Δy zdążają do zera.

Otrzymawszy pochodne, możemy napisać różniczki częściowe w kształcie:

$$
(s)\begin{cases}
\frac{df}{dx}\,dx = \lim\,[f\,(x+\Delta x,\,y) - f\,(x,\,y)] \\
\frac{df}{dy}\,dy = \lim\,[f\,(x,\,y+\Delta y) - f\,(x,\,y)] \\
\frac{d^2 f}{dx\,dy}\,dxdy = \lim\,[f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x+\Delta x, y) - f(x, y+\Delta y) + f(x,y)].
\end{cases}
$$

Mając na uwadze równość (q'), którą przyjęliśmy za określenie różniczki zupełnej, i dodając odpowiedniemi stronami równania (s), będziemy mieli

$$
df = \frac{df}{dx}\,dx + \frac{df}{dy}\,dy + \frac{d^2 f}{dx\,dy}\,dx\,dy\,.
$$

Tak w fizyce matematycznej, jak i w innych naukach stosowanych, korzystają tylko z pierwszych dwóch wyrazów, napisanych po drugiej stronie ostatniego wzoru. Widzimy, że pierwsze dwa wyrazy przedstawiają tylko *pierwsze przybliżenie* prawdziwej wartości różniczki zupełnej funkcyi dwóch zmiennych niezależnych. Dla wielu zagadnień pierwsze przybliżenie może być wystarczającem.

Z wzoru (17), który otrzymaliśmy w teoryi różnic, mamy

$$
(t)\quad
\begin{aligned}
\Delta^2 f = {} & \frac{\Delta^2{}_{x,x} f}{\Delta x^2}\,\Delta x^2 + 2\,\frac{\Delta^2{}_{x,y}\,f}{\Delta x\,.\,\Delta y}\,.\,\Delta x\,.\,\Delta y + \frac{\Delta^2{}_{y,y}\,f}{\Delta y^2}\,\Delta y^2 + 2\,\frac{\Delta^3{}_{x,x,y}\,f}{\Delta x^2\,\Delta y}\,\Delta x^2\,.\,\Delta y \\
& + 2\,\frac{\Delta^3{}_{y,y,x}\,f}{\Delta y^2\,.\,\Delta x}\,\Delta y^2\,.\,\Delta x + \frac{\Delta^4{}_{x,x,y,y}\,f}{\Delta x^2\,.\,\Delta y^2}\,\Delta x^2\,.\,\Delta y^2\,,
\end{aligned}
$$

Przeszedłszy do granic, otrzymamy różniczkę zupełną rzędu 2-go

$$
\begin{aligned}
d^2 f = {} & \frac{d^2 f}{dx^2}\,dx^2 + 2\,\frac{d^2 f}{dx\,dy}\,dx\,dy + \frac{d^2 f}{dy^2}\,dy^2 + 2\,\frac{d^3 f}{dx^2\,dy}\,dx^2\,dy \\
& + 2\,\frac{d^3 f}{dy^2\,dx}\,dy^2\,dx + \frac{d^4 f}{dx^2\,dy^2}\,dx^2\,dy^2\,.
\end{aligned}
$$

Dla różnic mieliśmy prawo symbolów (18):

$$
\Delta^3{}_{x,x,y}\,f = \Delta^3{}_{y,x,x}\,f\,,\quad \Delta^3{}_{y,y,x}\,f = \Delta^3{}_{x,y,y}\,f\,,\quad \Delta^4{}_{x,x,y,y}\,f = \Delta^4{}_{y,y,x,x}\,f
$$

podobnie także będzie w granicach dla odpowiednich różniczek

$$d^3{}_{x,x,y} f = d^3{}_{y,x,x} f, \quad d^3{}_{y,y,x} f = d^3{}_{x,y,y} f, \quad d^4{}_{x,x,y,y} f = d^4{}_{y,y,x,x} f$$

skąd wypada, że

$$\frac{d^3 f}{dx^2 dy} = \frac{d^3 f}{dy dx^2}, \quad \frac{d^3 f}{dy^2 dx} = \frac{d^3 f}{dx dy^2}, \quad \frac{d^4 f}{dx^2\, dy^2} = \frac{d^4 f}{dy^2\, dx^2}.$$

Takim samym sposobem, jak powyżej, z wzoru (24), który przedstawia k-tą różnicę, przechodzimy do granic:

$$d^k f = \frac{d^k f}{dx^k} dx^k + k \frac{d^k f}{dx^{k-1}\, dy} dx^{k-1}\, dy + \frac{k\,(k-1)}{1\,.\,2} \frac{d^k f}{dx^{k-2} dy^2} dx^{k-2} dy^2 + \ldots$$

$$\ldots + k \frac{d^k f}{dx\, dy^{k-1}} dx\, dy^{k-1} + \frac{d^k f}{dy^k} dy^k$$

$$+ k \left[\frac{d^{k+1} f}{dx^k\, dy} dx^k\, dy + (k-1) \frac{d^{k+1} f}{dx^{k-1}\, dy^2} dx^{k-1}\, dy^2 \right.$$

$$\left. + \frac{(k-1)\,(k-2)}{1\,.\,2} \frac{d^{k+1} f}{dx^{k-2}\, dy^3} dx^{k-2}\, dy^3 + \ldots + \frac{d^{k+1} f}{dx\, dy^k} dx\, dy^k \right]$$

$$+ \frac{k\,(k-1)}{1\,.\,2} \left[\frac{d^{k+2} f}{dx^k\, dy^2} dx^k\, dy^2 + (k-2) \frac{d^{k+2} f}{dx^{k-1} dy^3} dx^{k-1}\, dy^3 \right.$$

$$\left. + \frac{(k-2)\,(k-3)}{1\,.\,2} \frac{d^{k+2} f}{dx^{k-2} dy^4} dx^{k-2}\, dy^4 + \ldots + \frac{d^{k+2} f}{dx^2\, dy^k} dx^2\, dy^k \right] + \ldots$$

$$\ldots + \frac{k\,(k-1)}{1\,.\,2} \left[\frac{d^{2k-2} f}{dx^k\, dy^{k-2}} dx^k\, dy^{k-2} + 2 \frac{d^{2k-2} f}{dx^{k-1}\, dy^{k-1}} dx^{k-1}\, dy^{k-1} \right.$$

$$\left. + \frac{d^{2k-2} f}{dx^{k-2}\, dy^k} dx^{k-2}\, dy^k \right]$$

$$+ k \left[\frac{d^{2k-1} f}{dx^k dy^{k-1}} dx^k\, dy^{k-1} + \frac{d^{2k-1} f}{dx^{k-1} dy^k} dx^{k-1}\, dy^k \right] + \frac{d^{2k} f}{dx^k\, dy^k} dx^k\, dy^k.$$

Jestto wzór, który przedstawia *różniczkę zupełną rzędu k-go* funkcyi dwóch zmiennych niezależnych.

W przypadku szczególnym, gdy mamy jedną zmienną niezależną t

$$f = f(x, y),$$

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t),$$

wzory poprzedzające będą miały kształt prostszy.

Dzieląc wszystkie wyrazy wzoru (q″) przez Δt, otrzymamy

$$\frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{\Delta_x f}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\Delta_y f}{\Delta y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta t} + \frac{\Delta^2{}_{x,y} f}{\Delta x \Delta y} \frac{\Delta x}{\Delta t} \cdot \Delta y .$$

Przechodząc do granic i wiedząc, że pochodna jest ilością skończoną a więc nie może zawierać nieskończenie małych, będziemy mieli z powyższego tylko dwa wyrazy

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} .$$

Tutaj dla odróżnienia piszemy ∂ zamiast d, gdyż znaczenia pochodnych $\frac{\partial f}{\partial x}$ i $\frac{\partial f}{\partial y}$ są innego rodzaju, aniżeli $\frac{df}{dx}$ i $\frac{df}{dy}$, pochodnych w całem znaczeniu tego wyrazu.

Podobnie z wzoru (t), dzieląc wszystkie wyrazy przez Δt^2, otrzymamy:

$$\frac{\Delta^2 f}{\Delta t^2} = \frac{\Delta^2{}_{x,x} f}{\Delta x^2} \left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + 2 \frac{\Delta^2{}_{x,y} f}{\Delta x \Delta y} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta t} + \frac{\Delta^2{}_{y,y} f}{\Delta y^2} \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2 +$$

$$+ 2 \frac{\Delta^3{}_{x,x,y} f}{\Delta x^2 \Delta y} \left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 \Delta y + 2 \frac{\Delta^3{}_{y,y,x} f}{\Delta y^2 \Delta x} \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2 \Delta x + \frac{\Delta^4{}_{x,x,y,y} f}{\Delta x^2 \Delta y^2} \left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 \Delta y^2 .$$

Przeszedłszy stąd do granic i pamiętając, że pochodna nie może zawierać ilości nieskończenie małych, będziemy mieli

$$\frac{d^2 f}{dt^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cdot \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 .$$

Jestto druga pochodna funkcyi złożonej. Podobną drogą łatwo otrzymać wzory dla wszelkich pochodnych rzędów wyższych.

W *teoryi różnic* wyprowadziliśmy wzór (25) w kształcie:

$$f(x+n\Delta x,\, y+n\Delta y) = f(x, y) + n\, \Delta f + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \Delta^2 f + \ldots + \Delta^n f .$$

Zastąpiwszy w powyższem Δf, $\Delta^2 f$, . . . ich wartościami w różnicach częściowych, otrzymamy

$$f(x+n\Delta x, y+n\Delta y) = f(x,y) + n\left[\frac{\Delta_x f}{\Delta x}\Delta x + \frac{\Delta_y f}{\Delta y}\Delta y + \frac{\Delta^2{}_{x,y} f}{\Delta x.\Delta y}\Delta x\,\Delta y\right]$$

$$+\frac{n(n-1)}{1\,.\,2}\left[\frac{\Delta^2{}_{x,x} f}{\Delta x^2}\Delta x^2 + 2\,\frac{\Delta^2{}_{x,y} f}{\Delta x.\Delta y}\Delta x\,\Delta y + \frac{\Delta^2{}_{y,y} f}{\Delta y^2}\Delta y^2 + 2\,\frac{\Delta^3{}_{x,x,y} f}{\Delta x^2.\Delta y}\Delta x^2.\,\Delta y\right.$$

$$\left.+\,2\,\frac{\Delta^3{}_{x,y,y} f}{\Delta x\,\Delta y^2}\,.\,\Delta x\,.\,\Delta y^2 + \frac{\Delta^4{}_{x,x,yy} f}{\Delta x^2\,\Delta y^2}\Delta x^2\,\Delta y^2\right] + \ldots$$

Przyjmując tutaj $n=\infty$, $n\Delta x = h$, $n\Delta y = k$, będziemy mieli

$$f(x+h, y+k) = f(x,y) + h\,\frac{df}{dx} + k\,\frac{df}{dy} + h\,\frac{d^2 f}{dx\,dy}\,.\,\Delta y$$

$$+\,\frac{1}{1\,.\,2}\left[h^2\,\frac{d^2 f}{dx^2} + 2\,hk\,\frac{d^2 f}{dx\,dy} + k^2\,\frac{d^2 f}{dy^2}\right]$$

$$+\,\frac{1}{1\,.\,2}\left[2h^2\,\frac{d^3 f}{dx^2 dy}\Delta y + 2k^2\,\frac{d^3 f}{dx dy^2}\Delta x + hk\,\frac{d^4 f}{dx^2\,dy^2}\Delta x\,.\,\Delta y\right] + \ldots$$

Ponieważ jednak po pierwszej stronie mamy ilość skończoną, więc i po drugiej stronie równości powinny być tylko ilości skończone, te zaś wyrazy, które zawierają nieskończenie małe Δx, Δy, po przejściu do granic zniknąć muszą i ostatecznie otrzymamy znany wzór Taylora

$$f(x+h, y+k) = f(x,y) + h\,\frac{df}{dx} + k\,\frac{df}{dy}$$

(u)

$$+\,\frac{1}{1\,.\,2}\left[h^2\,\frac{d^2 f}{dx^2} + 2hk\,\frac{d^2 f}{dx\,dy} + k^2\,\frac{d^2 f}{dy^2}\right] + \ldots\ldots$$

Pierwsza strona napisanej powyżej równości pozostaje bez żadnej zmiany, jeżeli x zastąpimy przez przyrostek h i naodwrót h przez zmienną x, a także, gdy zmienną y zastąpimy przez przyrostek k, tudzież k przez y. Wniosek stąd taki, że ta sama własność powinna być i po drugiej stronie równości, a więc, jeżeli pierwsza strona ma być tem samem, co i druga, czyli jeżeli rozwinięcie ściśle odnosi się do funkcyi, napisanej po pierwszej stronie, natenczas powinno być także

$$
(v) \qquad \begin{aligned} f(x+h, y+k) &= f(h,k) + x\left(\frac{df}{dx}\right)_h + y\left(\frac{df}{dy}\right)_k \\ &+ \frac{1}{1\,.\,2}\left[x^2\left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)_h + 2\,xy\left(\frac{d^2f}{dx\,dy}\right)_{h,k} + y^2\left(\frac{d^2f}{dy^2}\right)_k\right] + \ldots . \end{aligned}
$$

Wzór powyższy jest ogólniejszym od wzoru Maclaurina i ażeby przejść do szeregu Maclaurina, należy tylko przyjąć $h=k=0$.

Wyprowadzamy stąd wniosek, że dla tych wszystkich funkcyi ciągłych, dla których szereg, napisany w postaci (u), jest zbieżny, a także i szereg w postaci (v) będzie również zbieżny; natenczas dla tych funkcyi szereg Maclaurina będzie mieć zawsze miejsce i badanie reszt wzoru Taylora stanie się zbytecznem.

Twierdzenie III w zastosowaniu do funkcyi dwóch zmiennych niezależnych będzie

$$\Delta^k\,(af) = a\,\Delta^k f,$$

gdzie a oznacza *stałą*. Podobnie i w granicy będziemy mieli

$$d^k\,(af) = a\,d^k f.$$

Jestto ta sama własność, którą mieliśmy dla funkcyi jednej zmiennej niezależnej; tylko nastąpiła taka zmiana, że w powyższem wzorze f ma znaczenie:

$$f = f\,(x, y).$$

Dalej, dla sumy

$$s = F_1\,(x, y) + F_2\,(x, y) + \ldots + F_n\,(x, y)$$

z twierdzenia IV wypada różnica

$$\Delta^k s = \Delta^k F_1 + \Delta^k F_2 + \ldots + \Delta^k F_n\,.$$

W granicy będzie to samo prawo symbolów

$$d^k s = d^k F_1 + d^k F_2 + \ldots + d^k F_n\,.$$

Podobne twierdzenie mieliśmy już dla sumy funkcyj jednej zmiennej niezależnej.

Dla iloczynu dwóch funkcyj zmiennych niezależnych x i y mieliśmy w *teoryi różnic* wzór (D). Przechodząc do granic, otrzymamy różniczkę k-go rzędu iloczynu, w kształcie:

$$d^k(f.F) = f\,d^k F + k\,df.\,d^{k-1}F + \frac{k(k-1)}{1.2}\,d^2 f.\,d^{k-2}F + \ldots + F\,d^k f$$

$$+ k\Big[df.\,d^k F + (k-1)\,d^2f.\,d^{k-1}F + \frac{(k-1)(k-2)}{1.2}\,d^3 f.\,d^{k-2}F + \ldots$$

$$\ldots + d^k f.\,dF\Big]$$

$$+ \frac{k(k-1)}{1.2}\Big[d^2f.\,d^kF + (k-2)\,d^3f.\,d^{k-1}F + \frac{(k-2)(k-3)}{1.2}\,d^4f.\,d^{k-2}F + \ldots$$

$$\ldots + d^k f.\,d^2 F\Big] + \ldots$$

$$\ldots + \frac{k(k-1)}{1.2}\left[d^{k-2}f.\,d^k F + 2d^{k-1}f.\,d^{k-1}F + d^k f.\,d^{k-2}F\right]$$

$$+ k\left[d^{k-1}f.\,d^k F + d^kf.\,d^{k-1}F\right] + d^kf.\,d^kF.$$

W ostatnim wzorze f oznacza $f(x, y)$, a F ma znaczenie $F(x, y)$.

Gdy mamy tylko jedną zmienną niezależną, natenczas wzór dla różniczki iloczynu, jak widzieliśmy poprzednio, znacznie się upraszcza.

Dalej, weźmy funkcyę trzech zmiennych niezależnych

$$F = F(x, y, z).$$

Różniczką zupełną napisanej funkcyi jest granica

$$dF = \lim \Delta F = \lim\left[F(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - F(x, y, z)\right],$$

gdy Δx, Δy, Δz zdążają nieograniczenie do zera.

W przypadku funkcyi trzech zmiennych niezależnych mieliśmy dla *różnicy zupełnej* wzór (28). Wzór wzmiankowany możemy napisać tak

$$\Delta F = \frac{\Delta_x F}{\Delta x}\Delta x + \frac{\Delta_y F}{\Delta y}\Delta y + \frac{\Delta_z F}{\Delta z}\Delta z + \frac{\Delta^2_{x,y} F}{\Delta x\,\Delta y}\Delta x.\Delta y + \frac{\Delta^2_{x,z} F}{\Delta x\,\Delta z}\Delta x.\Delta z$$

(w)

$$+ \frac{\Delta^2_{y,z} F}{\Delta y.\Delta z}\Delta y.\Delta z + \frac{\Delta^3_{x,y,z} F}{\Delta x\,\Delta y\,\Delta z}.\Delta x.\Delta y.\Delta z.$$

Przechodząc do granic, przypuszczamy, że Δx, Δy, Δz są nieskończenie małemi i natenczas będziemy mieli *różniczkę zupełną rzędu 1-go* w kształcie

$$dF = \frac{dF}{dx}dx + \frac{dF}{dy}dy + \frac{dF}{dz}dz + \frac{d^2 F}{dx\,dy}dx\,.\,dy + \frac{d^2F}{dx\,dz}dx\,.\,dz$$

$$+ \frac{d^2F}{dy\,dz}dy\,.\,dz + \frac{d^3F}{dx\,dy\,dz}dx\,.\,dy\,.\,dz\,.$$

Jak się znajdują granice stosunków

$$\lim \frac{\Delta^2_{x,y} F}{\Delta x\,\Delta y}\,,$$

o tem mówiliśmy, rozpatrując funkcye pochodne w przypadku dwóch zmiennych niezależnych. Tutaj nadmienimy jeszcze, że

$$\frac{d^3F}{dxdydz} = \lim \frac{\Delta^3_{x,y,z} F}{\Delta x\,\Delta y\,\Delta z}$$

$$=\lim\Bigg[\frac{F(x+\Delta x,y+\Delta y,z+\Delta z)-F(x,y+\Delta y,z+\Delta z)-F(x+\Delta x,y,z+\Delta z)-F(x+\Delta x,y+\Delta y,}{\Delta x\,.\,\Delta y\,.\,\Delta z}$$

$$+\frac{F(x,y,z+\Delta z)+F(x,y+\Delta y,z)+F(x+\Delta x,y,z)-F(x,y,z)}{\Delta x\,.\,\Delta y\,.\,\Delta z}\Bigg]_{\Delta x=0,\Delta y=0,\Delta z=0}\,.$$

Dla znalezienia prawdziwej wartości powyższego stosunku szukamy nasamprzód granicy względem Δx, uważając Δy i Δz za stałe; następnie szukamy granicy poraz drugi względem Δy, uważając Δz jako stałą. Nakoniec szukamy granicy względem Δz. Podobnie, jak to uczyniliśmy w przypadku dwóch zmiennych niezależnych, moglibyśmy i tutaj dowieść, że ostateczną wartością granicy być musi pochodna:

$$\frac{d^3F}{dx\,dy\,dz}\,.$$

Z prawa, dotyczącego porządku różnicowań (27)

$$\Delta^2_{x,y} F = \Delta^2_{y,x} F,\ \Delta^2_{x,z} F = \Delta^2_{z,x} F,\ \Delta^3_{x,y,z} F = \Delta^3_{y,x,z} F = \Delta^3_{y,z,x} \quad \text{i t. d.}$$

wypływa w granicy prawo o porządku różniczkowań

$$d^2_{x,y} F = d^2_{y,x} F,\ d^2_{x,z} F = d^2_{z,x} F,\ d^3_{x,y,z} F = d^3_{y,x,z} F, \quad \text{i t. d.}$$

skąd będzie widocznie

$$\frac{d^2F}{dx\,dy} = \frac{d^2F}{dy\,dx},\ \frac{d^2F}{dx\,dz} = \frac{d^2F}{dz\,dx},\ \frac{d^3F}{dx\,dy\,dz} = \frac{d^3F}{dy\,dx\,dz} \qquad \text{i t. d.}$$

Dla różnicy zupełnej rzędu 2-go mieliśmy wzór (30), który możemy napisać w kształcie:

$$\Delta^2 F = \frac{\Delta^2_{x(2)} F}{\Delta x^2} \Delta x^2 + 2 \, . \frac{\Delta^2_{x,y} F}{\Delta x \, . \, \Delta y} \Delta x \, . \, \Delta y + \frac{\Delta^2_{y(2)} F}{\Delta y^2} \Delta y^2 + 2 \, . \frac{\Delta^2_{x,z} F}{\Delta x \, \Delta z} \Delta x . \Delta z$$

$$+ 2 \, . \frac{\Delta^2_{y,z} F}{\Delta y . \Delta z} \Delta y \, . \, \Delta z + \frac{\Delta^2_{z(2)} F}{\Delta z^2} \Delta z^2 + 2 \, . \frac{\Delta^3_{x(2),y} F}{\Delta x^2 . \Delta y} \Delta x^2 . \Delta y + 2 . \frac{\Delta^3_{x(2),z} F}{\Delta x^2 \, . \, \Delta z} \Delta x^2 \, \Delta z$$

$$+ 2 \, . \frac{\Delta^3_{x,y(2)} F}{\Delta x \, \Delta y^2} . \Delta x \, . \, \Delta y^2 + 2 \, . \frac{\Delta^3_{y(2),z} F}{\Delta y^2 \, \Delta z} . \Delta y^2 \, . \, \Delta z + 2 \, . \frac{\Delta^3_{x,z(2)} F}{\Delta x \, \Delta z^2} . \Delta x \, . \, \Delta z^2$$

$$+ 2 \, . \frac{\Delta^3_{y,z(2)} F}{\Delta y \, \Delta z^2} . \Delta y \, . \, \Delta z^2 + 6 \, . \frac{\Delta^3_{x,y,z} F}{\Delta x . \Delta y . \Delta z} \Delta x \, . \, \Delta y \, . \, \Delta z + \frac{\Delta^4_{x(2),y(2)} F}{\Delta y^2 \, . \, \Delta y^2} \Delta x^2 \, . \, \Delta y^2$$

$$+ \frac{\Delta^4_{y(2),z(2)} F}{\Delta y^2 \, . \, \Delta z^2} . \Delta y^2 \, . \, \Delta z^2 + \frac{\Delta^4_{x(2),z(2)} F}{\Delta x^2 \, . \, \Delta z^2} . \Delta x^2 \, . \, \Delta z^2 + 4 \, . \frac{\Delta^4_{x(2),y,z} F}{\Delta x^2 \, \Delta y . \Delta z} . \Delta x^2 \, . \, \Delta y \, . \, \Delta z$$

$$+ 4 \, . \frac{\Delta^4_{x,y(2),z} F}{\Delta x . \Delta y^2 . \Delta z} . \Delta x \, . \, \Delta y^2 \, . \, \Delta z + 4 \, . \frac{\Delta^4_{x,y,z(2)} F}{\Delta x \, . \, \Delta y \, . \, \Delta z^2} . \Delta x \, . \, \Delta y \, . \, \Delta z^2$$

$$+ 2 \, . \frac{\Delta^5_{x(2),y(2),z} F}{\Delta x^2 . \, \Delta y^2 . \, \Delta z} \Delta x^2 \, . \, \Delta y^2 \, . \Delta z + 2 \, . \frac{\Delta^5_{x(2),y,z(2)} F}{\Delta x^2 . \Delta y \, . \, \Delta z^2} \Delta x^2 \, . \, \Delta y \, . \, \Delta z^2$$

$$+ 2 \, . \frac{\Delta^5_{x,y(2),z(2)} F}{\Delta x . \Delta y^2 . \Delta z^2} . \Delta x \, . \, \Delta y^2 \, . \, \Delta z^2 + \frac{\Delta^6_{x(2),y(2),z(2)} F}{\Delta x^2 . \, \Delta y^2 . \, \Delta z^2} . \Delta x^2 \, . \, \Delta y^2 \, . \, \Delta z^2 \, .$$

Przeszedłszy do granic, otrzymamy wzór różniczki zupełnej rzędu 2-go

$$d^2 F = \frac{d^2 F}{dx^2} dx^2 + 2 \frac{d^2 F}{dx \, dy} dx \, dy + \frac{d^2 F}{dy^2} dy^2 + 2 \frac{d^2 F}{dx \, dz} dx \, dz + 2 \frac{d^2 F}{dy dz} dy \, dz$$

$$+ \frac{d^2 F}{dz^2} dz^2 + 2 \frac{d^3 F}{dx^2 dy} dx^2 \, dy + 2 \frac{d^3 F}{dx^2 \, dz} dx^2 \, dz + 2 \frac{d^3 F}{dx dy^2} dx \, dy^2$$

$$+ 2 \frac{d^3 F}{dy^2 dz} dy^2 \, dz + 2 \frac{d^3 F}{dx dz^2} dx \, dz^2 + 2 \frac{d^3 F}{dy dz^2} dy \, dz^2 + 6 \frac{d^3 F}{dx \, dy \, dz} dx \, dy \, dz$$

$$+ \frac{d^4 F}{dx^2 \, dy^2} dx^2 \, dy^2 + \frac{d^4 F}{dy^2 \, dz^2} dy^2 \, dz^2 + \frac{d^4 F}{dx^2 \, dz^2} . \, dx^2 \, dz^2$$

$$+ 4 \frac{d^4 F}{dx^2 dy \, dz} . \, dx^2 \, dy \, dz + 4 \frac{d^4 F}{dx \, dy^2 dz} . \, dx \, dy^2 \, dz + 4 \frac{d^4 F}{dx dy dz^2} dx \, dy \, dz^2$$

$$+ 2 \frac{d^5F}{dx^2dy^2dz} dx^2 dy^2 dz + 2 \frac{d^5F}{dx^2dydz^2} dx^2 dy dz^2$$

$$+ 2 \frac{d^5F}{dx\,dy^2dz^2} dx\,dy^2 dz^2 + \frac{d^6F}{dx^2dy^2dz^2} dx^2 dy^2 dz^2 .$$

W szczególnym przypadku, gdy będzie dane

$$F = F(x, y, z)$$

$$x = \varphi_1(t), \quad y = \varphi_2(t), \quad z = \varphi_3(t)$$

będziemy mogli wzory różnic podzielić: przez Δt, biorąc różnicę rzędu 1-go (w) i przez Δt^2 wzór różnicy rzędu 2-go; czyli w granicy podzielimy wszystkie wyrazy różniczki rzędu 1-go przez dt, a wyrazy różniczki rzędu 2-go przez dt^2. Wskutek tego ilości nieskończenie małe znikną, a pozostaną tylko ich stosunki, jako ilości skończone; w tym przypadku szczególnym wzory powyższe przybierają postać znacznie prostszą:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dt};$$

tudzież

$$\frac{d^2F}{dt^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + 2 \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\left(\frac{dx}{dt}\right)\cdot\left(\frac{dy}{dt}\right) + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + 2 \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z}\left(\frac{dx}{dt}\right)\cdot\left(\frac{dz}{dt}\right)$$

$$+ 2 \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z}\left(\frac{dy}{dt}\right)\cdot\left(\frac{dz}{dt}\right) + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 .$$

Podobnie można wyprowadzić wzory różniczek i pochodnych rzędów wyższych.

Dalej, w teoryi różnic mieliśmy wzór (31)

$$F(x + n\Delta x, y + n\Delta y, z + n\Delta z) = F(x, y, z) + n\Delta F$$

$$+ \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \Delta^2 F + \ldots + \Delta^n F .$$

Zastępując w powyższem różnice zupełne ΔF, $\Delta^2 F$, ... przez ich wartości w różnicach częściowych i przechodząc następnie do nieskończenie małych, będziemy przypuszczać

$$n\,\Delta x = h, \quad n\,\Delta y = k, \quad n\,\Delta z = l, \quad n = \infty .$$

Tym sposobem, podobnie jak dla funkcyj dwóch zmiennych niezależnych, otrzymamy znany wzór T a y l o r a

$$F(x+h,\ y+k,\ z+l) = F(x, y, z) + h\frac{dF}{dx} + k\frac{dF}{dy} + l\frac{dF}{dz}$$

$$+\frac{1}{1\,.\,2}\left(h^2\frac{d^2F}{dx^2} + 2hk\frac{d^2F}{dx\,dy} + k^2\frac{d^2F}{dy^2} + 2hl\frac{d^2F}{dxdz} + 2kl\frac{d^2F}{dy\,dz} + l^2\frac{d^2F}{dz^2}\right) + \ldots$$

Ponieważ strona pierwsza nie zmienia się przy zamianie x na h i h na x, y na k i k na y, z na l tudzież l na z, więc, jeżeli rozkład rzetelnie odnosi się do funkcyi napisanej po pierwszej stronie, natenczas ta sama własność musi mieć miejsce i na drugiej stronie równości, czyli

$$F(x+h, y+k, z+l) = F(h, k, l) + x\left(\frac{dF}{dx}\right)_h + y\left(\frac{dF}{dy}\right)_k + z\left(\frac{dF}{dz}\right)_l$$

$$+\frac{1}{1\,.\,2}\left[x^2\left(\frac{d^2F}{dx^2}\right)_h + 2xy\left(\frac{d^2F}{dx\,dy}\right)_{h,k} + y^2\left(\frac{d^2F}{dy^2}\right)_k + 2xz\left(\frac{d^2F}{dx\,dz}\right)_{h,l}\right.$$

$$\left. + 2yz\left(\frac{d^2F}{dy\,dz}\right)_{k,l} + z^2\left(\frac{d^2F}{dz^2}\right)_l\right] + \ldots\ldots$$

Zbieżność szeregu w obu napisanych postaciach będzie zupełnie wystarczającą dla prawdziwości twierdzenia T a y l o r a; po sprawdzeniu tej cechy możemy bez wątpienia przejść i do przypadku szczególnego, gdy $h = k = l = 0$.

Wzory różniczek sum i iloczynów będą podobne tym, jakie wyprowadziliśmy dla funkcyj dwóch zmiennych niezależnych. Dla uniknięcia rozwlekłości nie będziemy tutaj powtarzać dowodzeń wspomnianych wzorów.

III. Rachunki odwrotne.

Widzieliśmy w rozdziałach poprzedzających, że dla każdej funkcyi danej możemy łatwo napisać jej *różnicę* lub *różniczkę* jakiegokolwiek rzędu. Odwrotnie, gdy, mając daną jakąbądź różnicę lub różniczkę funkcyi nieznanej, szukać będziemy samej funkcyi, takie zadanie należeć będzie do rachunku odwrotnego. Podczas, gdy zadanie wprost możemy łatwo rozwiązać dla wszelkich funkcyj, pomyślanych podług upodobania, to jednak zadanie odwrotne staje się bardzo trudnem i bywa możliwem do wykonania pod postacią skończoną tylko w szczególnych przypadkach.

§ 1. *Rachunek sum całkowych.*

Zajmiemy się nasamprzód *rachunkiem sum* czyli rachunkiem odwrotnym względem *rachunku różnic*. Jako symbol rachunku odwrotnego będziemy używać znaku Σ tak, że, mając funkcyę

$$f = f\,(x, y, z, \ldots),$$

możemy napisać tożsamość

$$(1)\qquad \begin{aligned} &\Delta\Sigma\, f\,(x, y, z, \ldots) = \Sigma\, \Delta f \\ &= \Sigma\, [f\,(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z, \ldots) - f\,(x, y, z, \ldots)]. \end{aligned}$$

Jestto widoczne, gdyż symbole Σ i Δ oznaczają rachunki względem siebie odwrotne i, będąc razem wzięte, nie mogą nic zmienić. Równość (1) możemy napisać inaczej, oznaczając drugą stronę przez

$$F(x, y, z, \ldots, \Delta x, \Delta y, \Delta z, \ldots);$$

natenczas zamiast (1) będzie

$$\Delta \Sigma f(x, y, z, \ldots) = F(x, y, z, \ldots, \Delta x, \Delta y, \Delta z, \ldots).$$

Stąd widocznie, stosując znowu symbol Σ do obu stron, będziemy mieli

$$\Sigma f(x, y, z, \ldots) = \Sigma F(x, y, z, \ldots, \Delta x, \Delta y, \Delta z, \ldots) + c. \tag{2}$$

W szczególnym przypadku, gdy mamy tylko jedną zmienną niezależną, będzie

$$\Sigma f(x) = \Sigma F(x, \Delta x) + c.$$

We wzorach powyższych f oznacza funkcyę daną, ΣF jestto niewiadoma wartość sumy całkowej, c zaś oznacza stałą dowolną lub dowolną funkcyę peryodyczną, którą, jak wiemy, zawsze dodawać można bez zmiany różnicy.

Widzimy więc, że znaleźć sumę całkową w granicach nieoznaczonych

$$\Sigma f(x, y, z, \ldots)$$

znaczyć będzie to samo, co znaleźć taką funkcyę wszystkich zmiennych niezależnych, tudzież przyrostków stałych $\Delta x, \Delta y, \Delta z, \ldots$, której różnica zupełna rzędu pierwszego równa się funkcyi

$$f(x, y, z, \ldots),$$

napisanej pod znakiem Σ

Dalej wyprowadzimy kilka twierdzeń zasadniczych dla rachunku sum całkowych.

Napiszmy tożsamość

$$f_1 + f_2 + f_3 + \ldots = f_1 + f_2 + f_3 + \ldots,$$

gdzie dla krótkości piszemy f_i zamiast szczegółowo

$$f_i(x, y, z, \ldots), \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots).$$

Z powyższej tożsamości wypływa druga tożsamość, widoczna sama przez się:

$$\Delta \Sigma (f_1 + f_2 + f_3 + \ldots) = \Delta \Sigma f_1 + \Delta \Sigma f_2 + \Delta \Sigma f_3 + \ldots,$$

czyli

$$\Delta \Sigma (f_1 + f_2 + f_3 + \ldots) = \Delta \{ \Sigma f_1 + \Sigma f_2 + \Sigma f_3 + \ldots \}.$$

Wiemy jednak że, jeżeli różnice rzędu 1-go dwóch jakichkolwiek funkcyj są równe, natenczas same funkcye różnią się między sobą tylko o ilość stałą lub o funkcyę peryodyczną dowolną, będzie więc z poprzedzającego

$$\Sigma (f_1 + f_2 + f_3 + \ldots) = \Sigma f_1 + \Sigma f_2 + \Sigma f_3 + \ldots + c.$$

Tutaj ilość c może być opuszczaną zupełnie. Widzimy więc, że, aby zastosować do sumy algebraicznej działanie, wyrażone znakiem Σ, trzeba wykonać wspomniane działanie nad każdym składnikiem z osobna. Oczywista, prawidło, wypowiedziane wyżej, stosuje się bez żadnej zmiany do przypadku szczególnego, gdy mamy sumę funkcyj jednej zmiennej niezależnej.

Dalej, napiszmy tożsamość

$$af = af(x, y, z, \ldots),$$

gdzie a oznacza stały mnożnik. Będziemy mieli widocznie

$$\Delta \Sigma (af) = a \,.\, \Delta \Sigma f,$$

czyli

$$\Delta \Sigma (af) = \Delta [a \Sigma f],$$

skąd wypada

$$\Sigma (af) = a \Sigma f + c.$$

Ilość c może być tutaj opuszczoną. Widzimy więc, że *suma pewnej funkcyi, pomnożonej przez stałą, równa się stałej, pomnożonej przez sumę samej funkcyi.*

Mając dany iloczyn dwóch funkcyj jednej zmiennej niezależnej

$$f(x) \,.\, F(x),$$

dowiedliśmy w teoryi różnic następującego wzoru:

$$\Delta (f \,.\, F) = f \,.\, \Delta F + F \,.\, \Delta f + \Delta f \,.\, \Delta F.$$

Zastosowawszy znak Σ do każdego wyrazu powyższego równania, łatwo otrzymamy

(2a) $$\Sigma f \Delta F = f \,.\, F - \Sigma F \Delta f - \Sigma \Delta f \,.\, \Delta F.$$

Wzór ten może być bardzo pomocnym przy szukaniu wartości sum całkowych.

Sumą podwójną będziemy nazywać wyrażenie:

$$\Sigma\Sigma f(x, y, z, \ldots) = \Phi(x, y, z, \ldots, \Delta x, \Delta y, \Delta z, \ldots)$$

$$+ \frac{x}{\Delta x} c_1 + \frac{y}{\Delta y} c_2 + \frac{z}{\Delta z} c_3 + \ldots + c,$$

w którem f oznacza funkcyę daną, Φ oznacza taką funkcyę, której rożnica zupełna rzędu drugiego równa się funkcyi danej f. Wyrazy zaś, zawierające ilości dowolne $c_1, c_2, c_3, \ldots, c$ są takie, które, jak dowiedliśmy w rozdziale I, nie zmieniają wcale wartości rożnicy rzędu 2-go.

Sumą potrójną

$$\Sigma\Sigma\Sigma f(x, y, z, \ldots)$$

będziemy nazywać taką funkcyę wszystkich zmiennych tudzież stałych dowolnych, której różnica zupełna rzędu trzeciego równa się funkcyi danej f, i t. d.

Zajmiemy się teraz sumami funkcyj jednej zmiennej niezależnej.

Można łatwo znaleźć pod postacią skończoną

$$\Sigma f(x),$$

jeżeli $f(x)$ oznacza funkcyę wymierną całkowitą

$$f(x) = Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \ldots + Mx + N.$$

$A, B, C, \ldots$ są ilości stałe, m liczba całkowita.

W tym przypadku będziemy mieli

$$\Sigma f(x) = A\Sigma x^m + B\Sigma x^{m-1} + C\Sigma x^{m-2} + \ldots + M\Sigma x + N\Sigma x^0;$$

czyli zagadnienie nasze sprowadza się do znalezienia

$$\Sigma x^p,$$

gdzie p jest jakakolwiek liczba całkowita lub zero. Ażeby znaleść wartość Σ, w tym celu zastosujemy wzór T a y l o r a w kształcie:

$$\Delta f(x) = \Delta x \,.\, f'(x) + \frac{(\Delta x)^2}{1\,.\,2} \,.\, f''(x) + \frac{(\Delta x)^3}{1\,.\,2\,.\,3} \,.\, f'''(x) + \ldots$$

Stosując tutaj znak Σ do każdego wyrazu, otrzymamy

$$(3)\quad f(x) = \Delta x \,.\, \Sigma f'(x) + \frac{(\Delta x)^2}{1\,.\,2} \,.\, \Sigma f''(x) + \frac{(\Delta x)^3}{1\,.\,2\,.\,3} \,.\, \Sigma f'''(x) + \ldots$$

Szereg powyższy musi być skończonym, gdyż, przyjmując $f(x) = x^p$, p-ta pochodna będzie równą $1\,.\,2\,.\,3 \ldots (p-1)\,p$ i na wyrazie, który zawiera ostatnią pochodną, szereg skończy się.

Jeżeli założymy nasamprzód

$$f(x) = \frac{x^{m+1}}{m+1}$$

natenczas z wzoru (3) otrzymamy

$$\frac{x^{m+1}}{m+1} = \Delta x\, \Sigma\, x^m + \frac{(\Delta x)^2}{1\,.\,2} \,.\, m\, \Sigma\, x^{m-1} + \frac{(\Delta x)^3}{1\,.\,2\,.\,3} \,.\, m\,(m-1)\, \Sigma\, x^{m-2} + \ldots$$

Kładąc dalej we wzorze (3)

$$f(x) = \frac{x^m}{m},$$

będziemy mieli

$$\frac{x^m}{m} = \Delta x\, \Sigma\, x^{m-1} + \frac{(\Delta x)^2}{1\,.\,2}\,(m-1)\, \Sigma\, x^{m-2}$$

$$+ \frac{(\Delta x)^3}{1\,.\,2\,.\,3}\,(m-1)\,(m-2)\, \Sigma\, x^{m-3} + \ldots$$

Następnie damy we wzorze (3)

$$f(x) = \frac{x^{m-1}}{m-1}$$

i t. d. Takim sposobem, zniżając kolejno potęgę x, dojdziemy nakoniec do

$$f(x) = \frac{x^2}{2}$$

będzie natenczas

$$\frac{x^2}{2} = \Delta x \, \Sigma \, x + \frac{(\Delta x)^2}{1 \, . \, 2} \, \Sigma \, x^0$$

i nareszcie, gdy $f(x) = x$, będzie

$$x = \Delta x \, \Sigma \, x^0 .$$

Tak więc będziemy mieli układ $m+1$ równań liniowych, z których wyrugujemy m ilości Σx^0, Σx, . . . , Σx^{m-1} i jako ostateczny wypadek rugowania otrzymamy wzór pod postacią skończoną, dający wartość $\Sigma \, x^m$. Z powodu wielkiej ilości równań otrzymanie ogólnego wzoru dla $\Sigma \, x^m$ jest zawiłe i przedstawia znaczne trudności; łatwo jednak wzór może być napisany w postaci wyznacznika $m+1$ stopnia.

Ograniczymy się na tem miejscu napisaniem szczególnych przypadków dła $m = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$

$$\Sigma \, x^0 = \frac{x}{\Delta x} + c,$$

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} \Sigma \, x &= \frac{x^2}{2\Delta x} - \frac{x}{2} + c, \\ \Sigma \, x^2 &= \frac{x^3}{3\Delta x} - \frac{x^2}{2} + \frac{x . \Delta x}{6} + c, \\ \Sigma \, x^3 &= \frac{x^4}{4\Delta x} - \frac{x^3}{2} + \frac{x^2 \Delta x}{4} + c, \\ \Sigma \, x^4 &= \frac{x^5}{5\Delta x} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^3 \Delta x}{3} - \frac{x \, (\Delta x)^3}{30} + c, \end{aligned} \right.$$

i t. d.

We wszystkich wzorach, powyżej napisanych, c oznacza stałą dowolną lub dowolną funkcyę peryodyczną.

Widzimy więc, że szereg Taylora daje nam możność łatwego wyprowadzenia wzoru $\Sigma \, f(x)$, gdy $f(x)$ oznacza funkcyę wymierną całkowitą. Tą samą metodę stosować można i do wszelkich innych funkcyj $f(x)$, lecz wzory, otrzymane na tej drodze, będą miały postać szeregów nieskończonych.

Ażeby otrzymać sumy podwójne, stosujemy znak Σ do każdego wyrazu wzorów (4), wskutek czego otrzymamy

$$\Sigma\Sigma\, x^0 = \frac{1}{\Delta x}\,\Sigma\, x + c\,\Sigma\, x^0 + c_1\,,$$

$$\Sigma\Sigma\, x = \frac{1}{2\Delta x}\,\Sigma\, x^2 - \frac{1}{2}\,\Sigma\, x + c\,\Sigma\, x^0 + c_1\,,$$

$$\Sigma\Sigma\, x^2 = \frac{1}{3\Delta x}\,\Sigma\, x^3 - \frac{1}{2}\,\Sigma\, x^2 + \frac{\Delta x}{6}\,\Sigma\, x + c\,\Sigma\, x^0 + c_1\,,$$

$$\Sigma\Sigma\, x^3 = \frac{1}{4\Delta x}\,\Sigma\, x^4 - \frac{1}{2}\,\Sigma\, x^3 + \frac{\Delta x}{4}\,\Sigma\, x^2 + c\Sigma\, x^0 + c_1\,,$$

i t. d.

skąd, po wyrugowaniu sum pojedyńczych przy pomocy wzorów (4), łatwo otrzymujemy:

$$(5)\quad \begin{cases} \Sigma\Sigma\, x^0 = \dfrac{x^2}{2\,(\Delta x)^2} - \dfrac{x}{2\Delta x} + c\,\dfrac{x}{\Delta x} + c_1\,, \\[2ex] \Sigma\Sigma\, x = \dfrac{x^3}{6\,(\Delta x)^2} - \dfrac{x^2}{2\,\Delta x} + \dfrac{x}{3} + c\,\dfrac{x}{\Delta x} + c_1\,, \\[2ex] \Sigma\Sigma\, x^2 = \dfrac{x^4}{12\,(\Delta x)^2} - \dfrac{x^3}{3\,\Delta x} + \dfrac{5x^2}{12} - \dfrac{x\Delta x}{6} + \dfrac{cx}{\Delta x} + c_1\,, \\[2ex] \Sigma\Sigma\, x^3 = \dfrac{x^5}{20\,(\Delta x)^2} - \dfrac{x^4}{4\Delta x} + \dfrac{5x^3}{12} - \dfrac{x^2\Delta x}{4} + \dfrac{x\,(\Delta x)^2}{30} + c\,\dfrac{x}{\Delta x} + c_1\,. \end{cases}$$

i t. d.

c i c_1 oznaczają stałe dowolne lub dowolne funkcye peryodyczne.

Chcąc otrzymać sumy potrójne, znowu stosujemy znak Σ do każdego wyrazu wzorów (5) i po uproszczeniu będziemy mieli:

$$\Sigma\Sigma\Sigma\, x^0 = \frac{x^3}{6\,(\Delta x)^3} - \frac{x^2}{2(\Delta x)^2} + \frac{x}{3\Delta x} + c\,\frac{x^2}{(\Delta x)^2} + c'\,\frac{x}{\Delta x} + c''\,,$$

$$\Sigma\Sigma\Sigma\, x = \frac{x^4}{24\,(\Delta x)^3} - \frac{x^3}{4\,(\Delta x)^2} + \frac{11\,x^2}{24\,\Delta x} - \frac{x}{4} + c\,\frac{x^2}{(\Delta x)^2} + c'\,\frac{x}{\Delta x} + c''\,,$$

$$\Sigma\Sigma\Sigma\, x^2 = \frac{x^5}{60\,(\Delta x)^3} - \frac{x^4}{8\,(\Delta x)^2} + \frac{x^3}{3\,\Delta x} - \frac{3x^2}{8} + \frac{3x\,\Delta x}{20}$$

$$+ c\,\frac{x^2}{(\Delta x)^2} + c'\,\frac{x}{\Delta x} + c''\,.$$

i t. d.

Dalej tą samą drogą można otrzymać sumy poczwórne i wogóle jakiekolwiek sumy wielokrotne.

Jeżeli mamy funkcyę całkowitą wymierną z wielu zmiennemi, to i w tym przypadku wzór Taylora prowadzi do znalezienia sumy całkowej. W rzeczy samej, w przypadku funkcyi dwóch zmiennych niezależnych mamy

$$f\,(x+h,\, y+k) = f\,(x,\, y) + h\,\frac{df}{dx} + k\,\frac{df}{dy}$$

(6)

$$+ \frac{1}{1\,.\,2}\left(h^2\,\frac{d^2f}{dx^2} + 2hk\,\frac{d^2f}{dx\,dy} + k^2\,\frac{d^2f}{dy^2}\right) + \ldots$$

czyli

$$\text{(7)}\quad \Delta f = h\,\frac{df}{dx} + k\,\frac{df}{dy} + \frac{1}{1\,.\,2}\left(h^2\,\frac{d^2f}{dx^2} + 2\,hk\,\frac{d^2f}{dx\,dy} + k^2\,\frac{d^2f}{dy^2}\right) + \ldots$$

Dla krótkości piszemy w powyższem h zamiast Δx i k zamiast Δy. Szereg (7) w przypadku, gdy f oznacza funkcyę wymierną całkowitą, musi się skończyć na pewnym wyrazie.

Jeżeli zastosujemy znak Σ do każdego wyrazu równości (7), natenczas otrzymamy

$$f = h\sum\frac{df}{dx} + k\sum\frac{df}{dy} + \frac{h^2}{2}\sum\frac{d^2f}{dx^2} + hk\sum\frac{d^2f}{dx\,dy}$$

(8)

$$+ \frac{k^2}{2}\sum\frac{d^2f}{dy^2} + \ldots$$

Przy pomocy wzoru (8) możemy zawsze znaleść

$$\Sigma\, f\,(x,\, y)\,,$$

jeżeli f oznacza jakąkolwiek funkcyę wymierną całkowitą.

Weźmy naprzykład

$$\Sigma\, xy\,;$$

z wzoru (8), dając $f = x^2 y$, wypada łatwo:

(9) $$x^2 y = 2h\, \Sigma\, xy + k\, \Sigma\, x^2 + h^2\, \Sigma\, y + 2hk\, \Sigma\, x + h^2 k\, \Sigma\, x^0\, y^0\,.$$

Kładąc we wzorze (8)

$$f = xy,$$

będziemy mieli

$$xy = h\, \Sigma\, y + k\, \Sigma\, x + hk\, \Sigma\, x^0\, y^0\,;$$

skąd wypada

$$\Sigma\, x^0\, y^0 = \frac{xy - h\, \Sigma\, y - k\, \Sigma\, x}{hk}\,.$$

Podstawiając znalezioną wyżej wartość $\Sigma\, x^0\, y^0$ w równości (9), tudzież uwzględniając wartości Σx, Σx^2, Σy, które odnajdziemy pomiędzy równaniami (4), po uproszczeniu otrzymamy z (9)

$$\Sigma\, xy = \frac{x^2 y}{2h} - \frac{xy}{2} - \frac{kx^3}{6h^2} + \frac{kx}{6}\,.$$

Wiemy jednak, że wartość $\Sigma\, xy$ powinna być symetryczną funkcyą x i y, wskutek tego, zmieniając x na y tudzież h na k i odwrotnie, będziemy mieli z ostatniego równania

$$\Sigma\, xy = \frac{y^2 x}{2k} - \frac{xy}{2} - \frac{hy^3}{6k^2} + \frac{hy}{6}\,.$$

Dodawszy powyższe dwa równania, łatwo znajdziemy szukaną wartość $\Sigma\, xy$ w kształcie:

(10) $$\Sigma\, xy = \frac{x^2 y}{4h} + \frac{y^2 x}{4k} - \frac{xy}{2} - \frac{kx^3}{12h^2} - \frac{hy^3}{12k^2} + \frac{kx+hy}{12} + c_1 \frac{x}{h} + c_2 \frac{y}{k} + c\,.$$

Nie trudno sprawdzić, że różnicą zupełną funkcyi, napisanej po drugiej stronie, będzie dana ilość xy. Głoski c_1, c_2, c_3 oznaczają stałe dowolne lub też dowolne funkcye peryodyczne.

Gdybyśmy chcieli znaleść

$$\Sigma\Sigma\, xy,$$

natenczas w (10) znowu stosujemy znak Σ do każdego wyrazu i po dokonaniu uproszczeń i wyrugowaniu ilości $\Sigma\, x^2y\ \Sigma\, y^2x$, $\Sigma\, xy$, . . . , otrzymamy nakoniec szukaną sumę podwójną. Tą samą metodę stosujemy do kolejnego znajdowania wszelkich sum całkowych wielokrotnych.

Gdy zamiast funkcyi dwóch zmiennych niezależnych mamy pod znakiem Σ funkcyę trzech lub więcej zmiennych, natenczas postępowanie, opisane powyżej, nie ulegnie żadnym zmianom, tylko za każdym razem użyć trzeba wzoru T a y l o r a, odpowiadającego ściśle danej liczbie zmiennych.

Dotąd mówiliśmy tylko o sumowaniu całkowem w granicach nieoznaczonych i widzieliśmy, że wzory sum mają postać skończoną w przypadku, gdy funkcya, napisana pod znakiem Σ, jest wymierną i całkowitą. Jeżeli jednak mamy znaleść *sumę całkową* w granicach danych od x_0 do X:

$$\sum_{x_0}^{X} f(x) = \mathop{S}_{x_0}^{X} f(x)\,, \tag{11}$$

natenczas zadanie staje się łatwem i zawsze będzie możliwem pod postacią skończoną, niezależnie od kształtu funkcyi $f(x)$. Rowność (11) przedstawia dwojaki sposób pisania; jakie zaś jest bliższe znaczenie sumy całkowej w granicach danych, o tem będzie mowa poniżej.

W rozdziale I wyprowadziliśmy wzór

$$f(x+n\Delta x) = f(x) + n\,\Delta f + \frac{n\,(n-1)}{1\,.\,2}\,\Delta^2 f$$
$$+ \frac{n\,(n-1(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\,\Delta^3 f + \ldots + \Delta^n f.$$

Jeżeli w ostatnim równaniu zastosujemy znak Σ do każdego wyrazu, natenczas będzie

$$\Sigma\, f(x+n\Delta x) - \Sigma\, f(x) = nf + \frac{n\,(n-1)}{1\,.\,2}\,\Delta f$$
$$+ \frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\,\Delta^2 f + \ldots + \Delta^{n-1} f\,.$$

Przyjmując następnie

$$x = x_0 , \quad x_0 + n \, \Delta x = X ,$$

z powyższego otrzymamy

$$(12) \quad \begin{aligned} \Sigma f(X) - \Sigma f(x_0) = \frac{X - x_0}{\Delta x} \, . \, f + \frac{(X - x_0)(X - x_0 - \Delta x)}{1 \, . \, 2 \, . \, (\Delta x)^2} \, \Delta f \\ + \frac{(X - x_0)(X - x_0 - \Delta x)(X - x_0 - 2\Delta x)}{1 \, . \, 2 \, . \, 3 \, . \, (\Delta x)^3} \, . \, \Delta^2 f + \ldots + \Delta^{n-1} f . \end{aligned}$$

Takie wyrażenie jak (12) nazywamy sumą w granicach danych od x_0 do X, lub *sumą całkową oznaczoną* i piszemy dla krótkości

$$(13) \qquad \Sigma f(X) - \Sigma f(x_0) = \sum_{x_0}^{X} f(x) , \quad \text{lub też} \quad \mathop{S}_{x_0}^{X} f(x) .$$

Widzimy więc, że suma oznaczona równa się różnicy dwóch sum nieoznaczonych, z których pierwsza odpowiada górnej granicy zmiennej x, druga zaś dolnej granicy x.

Druga strona równości (12) wskazuje nam te działania, które dają możność znaleść zawsze wartość sumy oznaczonej, gdy n liczba całkowita.

Z równości (13) widoczna

$$(13a) \qquad \mathop{S}_{x_0}^{X} f(x) = - \mathop{S}_{X}^{x_0} f(x)$$

czyli, że suma oznaczona zmienia znak, jeżeli przestawimy wzajemnie granice sumy.

§ 2. *Równania różnicowe.*

Najogólniejszem zadaniem w rachunku odwrotnym będzie to, gdy mamy jedno równanie lub układ kilku równań i szukać będziemy funkcyi, czyniącej im zadość tożsamościowo. Kształt ogólny równań różnicowych z jedną zmienną niezależną jest

$$F(x, y, \Delta x, \Delta y) = 0 ;$$

w tym przypadku szukamy funkcyi

$$y = f(x, \Delta x, c),$$

ktora czyni zadość danemu równaniu, c oznacza stałą dowolną lub dowolną funkcyę peryodyczną.

Kształt ogólny równań różnicowych rzędów wyższych będzie w przypadku jednej zmiennej niezależnej

$$F(x, y, \Delta x, \Delta y, \Delta^2 y, \Delta^3 y, \ldots, \Delta^n y) = 0,$$

któremu powinno czynić zadość

$$y = f(x, \Delta x, c_1, c_2, \ldots, c_n).$$

$c_1, c_2, \ldots, c_n$ są stałe dowolne lub dowolne funkcye peryodyczne.

Równanie różnicowe z wielu zmiennemi niezależnemi ma kształt

$$F(x, y, z, \ldots, \Delta x, \Delta y, \Delta z, \ldots, f, \Delta f, \Delta^2 f, \Delta^3 f, \ldots, \Delta^n f) = 0,$$

któremu czyni zadość tożsamościowo

$$f = f(x, y, z, \ldots, \Delta x, \Delta y, \Delta z, \ldots, c, c_1, c_2, \ldots, c_n, c_{n+1}, \ldots, c_{2n})$$

funkcya, zawierająca $2n+1$ ilości dowolnych.

§ 3. *Rachunek całkowy.*

Jeżeli mamy daną różniczkę

$$f'(x) \,.\, dx$$

i szukać będziemy funkcyi pierwotnej $f(x)$, natenczas takie zagadnienie będzie zasadniczem w *rachunku całkowym*. Piszemy w tym przypadku

$$\int f'(x)\, dx = f(x) + c. \tag{14}$$

Funkcya pierwotna $f(x)$ nazywa się *całką*; głoska c oznacza stałą dowolną, którą, jak widzieliśmy, zawsze dodawać można do funkcyi bez zmiany jej różniczki.

Możemy dowieść, że

$$\int f'(x)\, dx = \lim \Delta x \,.\, \Sigma f'(x).$$

Istotnie, mając na uwadze związek (14), z wzoru (3) wypada

$$\int f'(x)\, dx = \Delta x \,.\, \Sigma\, f'(x) + \frac{(\Delta x)^2}{1.2} \Sigma\, f''(x) + \ldots$$

Przechodząc następnie do granicy, z ostatniego równania będziemy mieli

(14a) $$\int f'(x)\, dx = \lim \Delta x\, \Sigma\, f'(x)\,,$$

pozostałe zaś wyrazy w granicy zniknąć muszą, gdyż zawierają wyższe potęgi nieskończenie małego przyrostka zmiennej niezależnej.

Dalej stosując działanie Σ do każdego wyrazu równania (3), otrzymamy:

(15) $$\Sigma\, f(x) = \Delta x\, \Sigma\Sigma\, f'(x) + \frac{(\Delta x)^2}{1\,.\,2} \Sigma\Sigma\, f''(x) + \ldots,$$

atoli wiemy, że

$$\Sigma\, f(x) = \Sigma \int f'(x)\, dx\,.$$

Podstawiwszy powyższy związek w równość (15) i następnie mnożąc wszystkie wyrazy przez Δx, będziemy mieli

(16) $$\Delta x\, \Sigma \int f'(x)\, dx = (\Delta x)^2\, \Sigma\Sigma\, f'(x) + \frac{(\Delta x)^3}{1\,.\,2} \Sigma\Sigma\, f''(x) + \ldots$$

Na zasadzie związku (14a) widoczna, że

$$\lim \Delta x\,.\, \Sigma \int f'(x)\, dx = \int dx \int f'(x)\, dx\,;$$

wskutek tego, gdy od równania (16) przejdziemy do granic, będzie natenczas:

(17) $$\int dx \int f'(x)\, dx = \lim (\Delta x)^2\,.\, \Sigma\Sigma\, f'(x)\,.$$

Pozostałe wyrazy po drugiej stronie równości (16) w granicy zniknąć muszą, gdyż zawierają wyższe potęgi przyrostka Δx zmiennej niezależnej.

Podobnie, stosując znowu znak Σ do każdego wyrazu równości (16) i mnożąc przez Δx, otrzymamy

$$\Delta x \, \Sigma \, \Delta x \, \Sigma \int f'(x)\, dx = (\Delta x)^3 \, \Sigma\Sigma\Sigma \, f'(x) + \frac{(\Delta x)^4}{1\,.\,2} \, \Sigma\Sigma\Sigma \, f''(x) + \ldots$$

Gdy przejdziemy od ostatniego równania do granic, będzie

$$(18) \qquad \int dx \int dx \int f'(x)\, dx = \lim\, (\Delta x)^3 \, \Sigma\Sigma\Sigma \, f'(x).$$

Rozumowanie powyższe można łatwo poprowadzić dalej dla wszelkich całek wielokrotnych.

Wszystkie wzory podobne, jak (14a), (17), (18), ..., wyrażają związek zasadniczy pomiędzy rachunkiem całkowym i rachunkiem sum całkowych. Gdyby rachunek sum był nam dobrze znany dla wszelkich funkcyj, natenczas za pomocą metody granic łatwo przeszlibyśmy do rachunku całkowego. Niestety rachunek sum zbadany jest tylko dla funkcyj wymiernych i całkowitych, dla innych zaś funkcyj nie posiadamy wzorów pod postacią skończoną.

Jeżeli z wzoru (2a, § 1) zrobimy łatwe przejście do granic, natenczas będzie

$$\int f\, dF = f\,.\,F - \int F\, df.$$

Jestto znany wzór *całkowania częściowego*.

Szukanie całek oznaczonych

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\, dx$$

przedstawia zawsze zadanie łatwiejsze i wartość takiej całki może być wiadomą niezależnie od kształtu całki nieoznaczonej.

W rzeczy samej, jeżeli pomnożymy wszystkie wyrazy równości (12) przez Δx i przejdziemy do granic, przyjąwszy Δx nieskończenie zdążającem do zera, natenczas będzie

$$(19) \quad \int_{x_0}^{X} f(x)\, dx = (X - x_0)\, f(x_0) + \frac{(X-x_0)^2}{1\,.\,2}\, f'(x_0) + \frac{(X-x_0)^3}{1\,.\,2\,.\,3}\, f''(x_0) + \ldots$$

Z równania (13) widoczna, że

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\, dx = \lim\, \Delta x \,.\, \overset{X}{\underset{x_0}{S}} f(x);$$

oprócz tego z wspomnianego związku (13) wnioskujemy jeszcze, że, jeżeli

$$\int f(x)\,dx = \lim \Delta x \sum f(x) = \varphi(x)\,,$$

natenczas będzie

$$(20) \qquad \int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \varphi(X) - \varphi(x_0)$$

czyli, że całka oznaczona równa się zawsze różnicy dwóch krańcowych wartości odpowiedniej całki nieoznaczonej. Po większej części, kształt całki nieoznaczonej bywa nam nieznany i wskutek tego wzór (19) będziemy uważać za zasadniczy tak przy obliczaniu wartości całek oznaczonych, jak i przy poszukiwaniu ich własności. Wiadomo, że szereg nieskończony w kształcie (19) zawsze jest zbieżny i we wszystkich przypadkach może być użyty; gdyby jednak granice całki były $+\infty$ i $-\infty$, natenczas przed użyciem wzoru (19) należy daną całkę przekształcić za pomocą wprowadzenia nowej zmiennej tak, ażeby granice stały się skończone.

Jeżeli równość (13a) pomnożymy przez Δx i następnie przejdziemy do granic, natenczas otrzymamy znaną własność całek oznaczonych:

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = -\int_{X}^{x_0} f(x)\,dx\,.$$

Z równości (20) widoczna, że

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \varphi(X) - \varphi(a) + \varphi(a) - \varphi(x_0)\,,$$

czyli że

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \int_{a}^{X} f(x)\,dx + \int_{x_0}^{a} f(x)\,dx\,.$$

Tym sposobem każdą całkę oznaczoną możemy rozłożyć na sumę dwóch całek, podług powyższego prawidła. Każdą z tych dwóch nowych całek znowu możemy zastąpić sumą dwóch innych, czyli moglibyśmy daną całkę rozłożyć na sumę czterech całek oznaczonych; i t. d.

§ 4. *Równania różniczkowe.*

Równania różniczkowe z jedną zmienną niezależną mają kształt najogólniejszy następujący:

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0, \tag{21}$$

którego całka

$$y = f(x, c)$$

tożsamościowo czyni zadość danemu równaniu. Jeżeli równanie (21) rozwiążemy względem pochodnej $\frac{dy}{dx}$, natenczas będzie

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M}{N},$$

gdzie M i N są pewne funkcye zmiennych x i y. Z ostatniego równania wypada

$$M\,dx + N\,dy = 0,$$

jestto prostszy kształt równań różniczkowych z jedną zmienną niezależną.

Jeżeli mamy w równaniu różniczkowem dwie zmienne niezależne x i y tudzież ich funkcyę z, natenczas kształt ogólny równania będzie:

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz + W\,dx\,dy = 0, \tag{22}$$

X, Y, Z, W oznaczają pewne funkcye zmiennych x, y, z. Równanie powyższe możemy napisać tak:

$$dz = -\frac{X}{Z}\,dx - \frac{Y}{Z}\,dy - \frac{W}{Z}\,dx\,.\,dy$$

i porównywając z różniczką zupełną

$$dz = \frac{dz}{dx}\,dx + \frac{dz}{dy}\,dy + \frac{d^2 z}{dx\,dy}\,dx\,dy,$$

widzimy, że

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{X}{Z}, \quad \frac{dz}{dy} = -\frac{Y}{Z}, \quad \frac{d^2 z}{dx\,dy} = -\frac{W}{Z},$$

czyli

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{X}{Z}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{Y}{Z}\right) = \frac{W}{Z}.$$

Stąd otrzymujemy następujące równania warunkowe:

$$X\left(\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}\right) + Y\left(\frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}\right) + Z\left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}\right) = 0,$$

tudzież

$$W = \frac{1}{Z}\left(Z\frac{\partial Y}{\partial x} - Y\frac{\partial Z}{\partial x}\right) - \frac{X}{Z^2}\left(Z\frac{\partial Y}{\partial z} - Y\frac{\partial Z}{\partial z}\right).$$

Może się zdarzyć, że $W = 0$, natenczas pozostanie tylko pierwszy z napisanych wyżej warunków, podany jeszcze w zeszłym stuleciu przez Eulera dla równania

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = 0,$$

które jest szczególnym przypadkiem równania (22).

Jeżeli będziemy mieli n zmiennych niezależnych $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tudzież ich funkcyę x, natenczas najogólniejszy kształt równania różniczkowego o różniczkach zupełnych będzie

$$\text{(23)} \quad \begin{aligned} X\,dx + \sum_i^{1,\ldots,n} X_i\,dx_i + \sum_{i,k}^{1,\ldots,n} X_{i,k}\,dx_i\,dx_k + \sum_{i,k,l}^{1,\ldots,n} X_{i,k,l}\,dx_i\,dx_k\,dx_l + \ldots \\ \ldots + X_{1,2,\ldots,n}\,dx_1\,dx_2 \ldots dx_n = 0, \end{aligned}$$

gdzie współczynniki $X_i, X_{i,k}, X_{i,k,l}, \ldots, X$ są pewne funkcye wszystkich zmiennych $x, x_1, x_2, \ldots, x_n$.

W szczególnym przypadku, gdy

$$X_{i,k} = X_{i,k,l} = \ldots = X_{1,2,\ldots,n} = 0,$$

kształt równania różniczkowego będzie prostszy

$$X\,dx + \sum_i^{1,\ldots,n} X_i\,dx_i = 0.$$

W tym ostatnim przypadku współczynniki czynią zadość znanym warunkom całkowalności; jeżeli zaś równanie różniczkowe ma kształt (23), natenczas, oprócz wspomnianych warunków całkowalności, dołączają się jeszcze nowe warunki, które można wyprowadzić tąk, jak to uczyniliśmy dla dwóch zmiennych niezależnych.

Oprócz równań o różniczkach zupełnych, mogą być jeszcze *równania różniczkowe cząstkowe*, czyli równania, zawierające pochodne częściowe. Te ostatnie mogą być rzędu 1-go w kształcie:

$$\Phi\left(x, x_1, x_2, \ldots, x_n, \frac{dx}{dx_1}, \frac{dx}{dx_2}, \ldots, \frac{dx}{dx_n}\right) = 0$$

x oznacza zmienną zależną; $x_1, x_2, \ldots, x_n$ są zmienne niezależne.

Całka równania zawiera $n+1$ stałych

$$x = \psi\,(x_1, x_2, \ldots, x_n, c_1, c_2, \ldots, c_n, c).$$

Równania różniczkowe cząstkowe rzędu 2-go mają kształt

$$\Phi\left(x, x_1, x_2, \ldots, x_n, \frac{dx}{dx_1}, \frac{dx}{dx_2}, \ldots, \frac{dx}{dx_n}, \frac{d^2 x}{dx_1\, dx_2}, \ldots, \frac{d^2 x}{dx_i\, dx_k}, \ldots\right.$$

$$\left.\ldots, \frac{d^2 x}{dx_{n-1}\, dx_n}, \ldots, \frac{d^2 x}{dx^2_1}, \ldots, \frac{d^2 x}{dx^2_n}\right) = 0\,.$$

Podobnie można napisać równania rzędów wyższych. W szczególnym przypadku w równaniach rzędów wyższych może być zamiast n zmiennych niezależnych jedna tylko zmienna x_1 i jej funkcya x. Całkowanie równań różniczkowych utrudnia się znacznie, gdy dany jest cały układ równań.

IV. Teorya przyrostków wykładniczych.

Jeżeli mamy układ liczb

$$a, b, c, d, \ldots, n$$

i jeżeli układ ten tworzy się podług pewnego prawa rachunkowego, to daje się pomyśleć dwojakiego rodzaju zależność jednych liczb względem drugich, czyli dwa odrębne rachunki.

Po pierwsze, układ może być utworzony podług *prawa różnic*

$$x, x+\Delta, x+2\Delta, x+3\Delta, \ldots, x+n\Delta, \ldots$$

albo też, po drugie, podług *prawa potęg*

$$x, x x^{\Gamma}, x x^{2\Gamma}, x x^{3\Gamma}, \ldots, x x^{n\Gamma}, \ldots$$

Pierwszemu rodzajowi zależności odpowiada *rachunek różnic*, gdy Δ jest ilość skończona, *rachunek różniczkowy*, gdy Δ jest nieskończenie mała. Drugiemu rodzajowi zależności odpowiada *rachunek przyrostków wykładniczych*, gdy Γ jest jakakolwiek ilość skończona, oraz *rachunek wykładniczkowy*, gdy Γ nieskończenie zdąża do zera. W rachunku różniczkowym funkcye pochodne należą do typu $\frac{0}{0}$, w rachunku wykładniczkowym pochodne zależeć będą od wyrażeń typu 1^{∞}.

Następujące rozumowanie okaże, w jaki sposób wspomniane wyżej rachunki zasadnicze wiążą się pomiędzy sobą.

Dajmy

$$y = f(x)$$

i przypuśćmy, że x otrzymuje przyrostek Δx, a jednocześnie y zwiększa się o Δy, natenczas będzie

$$(1) \qquad y + \Delta y = f(x + \Delta x).$$

Załóżmy dalej

$$(2) \qquad x + \Delta x = x^{1+\alpha}, \; y + \Delta y = y^{1+\beta}.$$

Podstawiając ostatnie wartości w równanie (1), otrzymamy

$$y^{1+\beta} = f(x^{1+\alpha}).$$

Można łatwo dowieść, że α i β znikają jednocześnie; w rzeczy samej, z równań (2) wypada

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} \lg(x + \Delta x) &= (1+\alpha) \,.\, \lg x, \\ \lg(y + \Delta y) &= (1+\beta) \,.\, \lg y; \end{aligned} \right.$$

Oprócz tego wiemy, że

$$\lg(x + \Delta x) - \lg x = A \,.\, \Delta x + \varepsilon \, \Delta x,$$

$$\lg(y + \Delta y) - \lg y = B \,.\, \Delta y + \eta \,.\, \Delta y,$$

gdzie A i B są pewne ilości skończone, ε i η nieskończenie małe. Mając na uwadze ostatnie związki, z równań (3) otrzymamy:

$$(4) \qquad \left\{ \begin{aligned} \alpha &= \Delta x \,.\, \frac{A + \varepsilon}{\lg x}, \\ \beta &= \Delta y \,.\, \frac{B + \eta}{\lg y}. \end{aligned} \right.$$

Widzimy więc, że ilości α i β znikają jednocześnie z Δy i Δx. Z równań (4) wnioskujemy także, że przyrostki wykładnicze zawsze zastąpić można przyrostkami różnicowemi. Gdyby jednak z powyższego zrobić wniosek, że rachunki przyrostków wykładniczych skończonych lub nieskończenie małych są zupełnie zbyteczne, ponieważ zawsze mogą być zastąpione rachunkami różnic lub różniczek, wniosek taki byłby zbyt powierzchownym i zarzut bezzasadnym. Możnaby było z równą słusznością twierdzić, że mnożenie jest działaniem zbytecznem, ponieważ zawsze może być zastąpione dodawaniem. Nikt jednak nie będzie dowodził bezużyteczności mnożenia; sądzę więc, że rachunku przyrostków wykładniczych lekceważyć nie można.

Być może, że rachunek wykładniczkowy nie będzie mieć nigdy tak wielkiego znaczenia, jak rachunek różniczek; to jednak wątpić nie można, że rachunek wykładniczkowy przedstawiać będzie w matematyce znaczne ułatwienia i skrócenia dróg rachunkowych, podobnie jak mnożenie skraca działania kolejnych dodawań. Po kilku uwagach wstępnych, powyżej wyłuszczonych, przejdziemy do teoryi przyrostków wykładniczych.

§ 1. *Funkcye jednej zmiennej niezależnej.*

Przyrostkiem wykładniczym funkcyi $f(x)$ nazywamy pewną ilość skończoną tego rodzaju, że, nadając jakikolwiek przyrostek Γx wykładnikowi zmiennej x, będziemy także mieli Γf odpowiedni przyrostek wykładnika funkcyi, czyli

$$[f(x)]^{1+\Gamma f} = f(x^{1+\Gamma x}).$$

Stąd wypada

$$(5)\qquad [f(x)]^{\Gamma f} = \frac{f(x^{1+\Gamma x})}{f(x)}\,.$$

Γf jestto przyrostek wykładniczy rzędu 1-go funkcyi danej. Iloraz napisany po drugiej stronie znaku równości (5), będziemy nazywać *zmianostanem funkcyjnym*, albo krócej *funkcyałem rzędu 1-go* i, dla krótkości, oznaczać możemy głoską Φ_1.

Widzimy więc, że funkcyał otrzymuje się, kładąc w funkcyi danej $x^{1+\Gamma x}$ zamiast x i dzieląc przez pierwotny stan funkcyi.

Biorąc logarytmy po obu stronach w (5), otrzymamy

$$(6)\qquad \Gamma f = \frac{\lg f(x^{1+\Gamma x}) - \lg f(x)}{\lg f(x)}\,,$$

albo krócej

$$(6a)\qquad \Gamma f = \frac{\lg \Phi_1}{\lg f(x)}$$

czyli *przyrost wykładniczy rzędu 1-go przedstawia iloraz logarytmu funkcyału rzędu 1-go przez logarytm funkcyi danej.*

Twierdzenie I. *Przyrost wykładniczy rzędu 1-go nie zmienia się wcale, gdy zamiast funkcyi* $f(x)$ *weźmiemy* $[f(x)]^c$, *gdzie* c *oznacza stałą dowolną.*

W rzeczy samej, robiąc wyżej wymienione podstawienie, będziemy mieli równanie (6) w kształcie

$$\Gamma f = \frac{c \,.\, \lg f(x^{1+\Gamma x}) - c \,.\, \lg f(x)}{c \,.\, \lg f(x)} \,.$$

Widoczna, że ilość c skraca się i nie może wpływać na zmianę Γf. Jest rzeczą godną uwagi to, że c może być także dowolna funkcya wykładniczo-peryodyczna

$$c = \psi(x) = \psi(x^{1+\Gamma x})$$

i w tym przypadku Γf, jak widzimy, nie ulegnie żadnej zmianie.

Mając funkcyę $f(x)$ i jej funkcyał rzędu 1-go

$$\frac{f(x^{1+\Gamma x})}{f(x)},$$

otrzymamy *funkcyał rzędu 2-go*, kładąc w ostatnim znowu $x^{1+\Gamma x}$ na miejsce x i dzieląc przez stan pierwotny, będzie więc

$$\frac{f(x^{(1+\Gamma x)^2})}{f(x^{1+\Gamma x})} : \frac{f(x^{1+\Gamma x})}{f(x)} = \frac{f(x^{(1+\Gamma x)^2}) \,.\, f(x)}{[f(x^{1+\Gamma x})]^2} = \Phi_2 \,.$$

Będziemy w tym przypadku pisać

(7a) $$[f(x)]^{\Gamma^2 f} = \Phi_2 ,$$

skąd wypada

(7) $$\Gamma^2 f = \frac{\lg f(x^{(1+\Gamma x)^2}) - 2 \lg f(x^{1+\Gamma x}) + \lg f(x)}{\lg f(x)} ;$$

albo krócej

(7b) $$\Gamma^2 f = \frac{\lg \Phi_2}{\lg f(x)}$$

$\Gamma^2 f$ oznacza przyrost wykładniczy rzędu 2-go. Tak więc, *przyrostek wykładniczy rzędu 2-go równa się logarytmowi funkcyału rzędu 2-go, podzielonemu przez logarytm funkcyi.*

Dalej, kładąc w funkcyale rzędu 2-go znowu $x^{1+\Gamma x}$ na miejsce x i dzieląc przez stan pierwotny, będziemy mieli funkcyał rzędu 3-go:

$$\frac{f\left(x^{(1+\Gamma x)^3}\right) f\left(x^{1+\Gamma x}\right)}{\left[f\left(x^{(1+\Gamma x)^2}\right)\right]^2} : \frac{f\left(x^{(1+\Gamma x)^2}\right) . f(x)}{\left[f\left(x^{1+\Gamma x}\right)\right]^2} = \frac{f\left(x^{(1+\Gamma x)^3}\right) . \left[f\left(x^{1+\Gamma x}\right)\right]^3}{\left[f\left(x^{(1+\Gamma x)^2}\right)\right]^3 . f(x)} = \Phi_3 .$$

W tym przypadku piszemy

$$[f(x)]^{\Gamma^3 f} = \Phi_3 .$$

Biorąc logarytmy, otrzymujemy z powyższego:

$$(8) \qquad \Gamma^3 f = \frac{\lg f\left(x^{(1+\Gamma x)^3}\right) - 3 \lg f\left(x^{(1+\Gamma x)^2}\right) + 3 \lg f\left(x^{(1+\Gamma x)}\right) - \lg f(x)}{\lg f(x)} ,$$

albo krócej

$$(8a) \qquad \Gamma^3 f = \frac{\lg \Phi_3}{\lg f(x)} .$$

$\Gamma^3 f$ oznacza przyrost wykładniczy rzędu 3-go.

Tak więc, *przyrostek wykładniczy rzędu 3-go równa się logarytmowi funkcyału rzędu 3-go, podzielonemu przez logarytm funkcyi.*

Podobnie dalej będzie

$$[f(x)^{\Gamma^4 f} = \frac{f\left(x^{(1+\Gamma x)^4}\right) . \left[f\left(x^{(1+\Gamma x)^2}\right)\right]^6 . f(x)}{\left[f\left(x^{(1+\Gamma x)^3}\right)\right]^4 . \left[f\left(x^{1+\Gamma x}\right)\right]^4} = \Phi_4 .$$

Logarytmując ostatnie równanie, będziemy mieli

$$(9) \quad \Gamma^4 f = \frac{\lg f\left(x^{(1+\Gamma x)^4}\right) - 4 \lg f\left(x^{(1+\Gamma x)^3}\right) + 6 \lg f\left(x^{(1+\Gamma x)^2}\right) - 4 \lg f\left(x^{1+\Gamma x}\right) + \lg f(x)}{\lg f(x)} .$$

i t. d.

Sposób pisania przyrostków wykładniczych jest łatwy, gdyż, jak widzimy, współczynniki są te same, które już spotykaliśmy w różnicach rozmaitych rzędów i w znanym wzorze dwumianu N e w t o n a.

Napiszemy teraz wzór główny i zasadniczy w teoryi przyrostków skończonych:

$$(10) \qquad f\left(x^{(1+\Gamma x)^n}\right) = [f(x)]^{1 + n . \Gamma f + \frac{n(n-1)}{1.2} \Gamma^2 f + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} . \Gamma^3 f + \ldots + \Gamma^n f}$$

Wzór ten obejmuje wszystkie definicye przyrostków wykładniczych; jakoż, kładąc $n=1$, otrzymamy

$$f(x^{1+\Gamma x}) = [f(x)]^{1+\Gamma f},$$

co jest prawdziwem na mocy (5). Kładąc w (10) $n=2$, będziemy mieli:

$$f(x^{(1+\Gamma x)^2}) = [f(x)]^{1+2\Gamma f+\Gamma^2 f} = f(x) \,.\, [f(x)]^{2\Gamma f} \,.\, [f(x)]^{\Gamma^2 f}.$$

Po wyrugowaniu z ostatniego równania

$$[f(x)]^{\Gamma f},$$

przy pomocy (5) otrzymamy

$$[f(x)]^{\Gamma^2 f} = \frac{f(x^{(1+\Gamma x)^2}) \,.\, f(x)}{[f(x^{1+\Gamma x})]^2},$$

co jest prawdziwe na zasadzie definicyi (7a). Tak samo będzie i dalej przy $n = 3, 4, \ldots$ Przyjmując takim sposobem, że wzór (10) jest prawdziwym dla liczby n, możemy dowieść, że pozostanie prawdziwym i dla $n+1$. W rzeczy samej, według umówionego powyżej prawidła definicyą dla przyrostka wykładniczego $n+1$ rzędu będzie:

$$[f(x)]^{\Gamma^{n+1} f} = f(x^{(1+\Gamma x)^{n+1}}) \,.\, [f(x^{(1+\Gamma x)^n})]^{-(n+1)} \,.\, [f(x^{(1+\Gamma x)^{n-1}})]^{\frac{(n+1)n}{1\,.\,2}} \;\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots [f(x)]^{\pm 1}.$$

W ostatnim czynniku powyższego wzoru napisaliśmy wykładnik ± 1, co znaczy, że znak $+$ wziąść należy, gdy $n+1$ jest liczba parzysta, znak $-$ weźmiemy w przypadku, gdy $n+1$ będzie liczba nieparzysta. Po wyrugowaniu z napisanego wyżej równania ilości

$$f(x^{(1+\Gamma x)^n}),\; f(x^{(1+\Gamma x)^{n-1}}),\; \ldots$$

przy pomocy (10) otrzymamy

$$[f(x)]^{\Gamma^{n+1} f} = f(x^{(1+\Gamma x)^{n+1}}) \,.\, [f(x)]^{-(n+1)\left\{1+n\Gamma f+\frac{n(n-1)}{1\,.\,2}\Gamma^2 f+\ldots+\Gamma^n f\right\}}$$

$$.\, [f(x)]^{\frac{(n+1)n}{1\,.\,2}\left\{1+(n-1)\Gamma f+\frac{(n-1)(n-2)}{1\,.\,2}\Gamma^2 f+\ldots+\Gamma^{n-1} f\right\}} \ldots\ldots [f(x)]^{\pm 1},$$

skąd po łatwem uproszczeniu będzie

$$f\left(x^{(1+\Gamma x)^{n+1}}\right)$$

$$=[f(x)]^{\Gamma^{n+1}f+(n+1)\left\{1+n.\Gamma f+\frac{n(n-1)}{1.2}.\Gamma^2 f+\ldots+\Gamma^n f\right\}-\frac{(n+1).n}{1.2}\left\{1+(n-1)\Gamma f+\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}\Gamma^2 f+\ldots+\Gamma^{n-1}f\right\}+\ldots\mp 1}.$$

Wykonawszy w ostatniem wszystkie redukcye, będziemy mieli ostatecznie:

$$f\left(x^{(1+\Gamma x)^{n+1}}\right)=[f(x)]^{1+(n+1)\Gamma f+\frac{(n+1)n}{1.2}\Gamma^2 f+\ldots+\Gamma^{n+1}f}.$$

Tym sposobem wzór (10) staje się ogólnym i prawdziwym zawsze. Wzmiankowany wzór możemy także pisać w kształcie dogodniejszym, biorąc logarytmy po obu stronach

$$\text{(11)}\quad \frac{\lg f\left(x^{(1+\Gamma x)^n}\right)}{\lg f(x)}=1+n.\Gamma f+\frac{n(n-1)}{1.2}\Gamma^2 f$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}.\Gamma^3 f+\ldots+\Gamma^n f\ldots$$

Mając wyłożone poprzednio określenia przyrostków wykładniczych rozmaitych rzędów, możemy bez wszelkich trudności wyprowadzić następujące wzory przyrostków dla funkcyi zasadniczych:

$$\Gamma(x^m)=\Gamma x,\quad \Gamma^2(x^m)=(\Gamma x)^2,\quad \Gamma^3(x^m)=(\Gamma x)^3,\quad \text{i t. d.}$$

$$\Gamma(\lg x)=\frac{\lg(1+\Gamma x)}{\lg\lg x},\quad \Gamma^2(\lg x)=0,\quad \Gamma^3(\lg x)=0,\quad \text{i t. d.}$$

$$\Gamma(a^x)=\frac{\lg a^{x(x^{\Gamma x}-1)}}{\lg a^x}=x^{\Gamma x}-1,\quad \Gamma^2(a^x)=x^{(\Gamma x)^2+2\Gamma x}-2x^{\Gamma x}+1,$$

$$\Gamma^3(a^x)=x^{(\Gamma x)^3+3(\Gamma x)^2+3\Gamma x}-3x^{(\Gamma x)^2+2\Gamma x}+3x^{\Gamma x}-1,\quad \text{i t. d.}$$

$$\Gamma(\sin x)=\frac{\lg\sin x^{1+\Gamma x}}{\lg\sin x}-1,\quad \Gamma(\cos x)=\frac{\lg\cos x^{1+\Gamma x}}{\lg\cos x}-1,\quad \text{i t. d.}$$

Gdy mamy $a=$ stałej, natenczas $\Gamma a=\Gamma^2 a=\Gamma^3 a=\ldots=0$.

Dajmy jeszcze

$$y_i = f_i(x)$$

i niech będzie *suma algebraiczna*:

$$u = y_1 + y_2 + \ldots + y_n .$$

Stosując symbol Δ do każdego składnika napisanej sumy, będziemy mieli

$$(12) \qquad \Delta u = \Delta y_1 + \Delta y_2 + \ldots + \Delta y_n .$$

Widzieliśmy powyżej (4), że

$$(13) \qquad \beta = \Delta y \,.\, \frac{B+\varepsilon}{\lg y} ;$$

dalej wiedząc, iż

$$\beta = \Gamma y , \quad B = \frac{1}{y} ,$$

otrzymamy z (13)

$$\Delta y = y \lg y \,.\, \Gamma y + i ,$$

gdzie i oznacza ilość nieskończenie małą. Uwzględniając ostatni związek, będziemy mieli z (12)

$$u \lg u \,.\, \Gamma u + i = y_1 \lg y_1 \,.\, \Gamma y_1 + i_1 + y_2 \lg y_2 \, \Gamma y_2 + i_2 + \ldots$$

$$\ldots + y_n \lg y_n \,.\, \Gamma y_n + i_n .$$

W granicach ilości nieskończenie małe znikną i wskutek tego będzie

$$\Gamma (y_1 + y_2 + \ldots + y_n)$$

$$= \frac{y_1 \lg y_1 \,.\, \Gamma y_1 + y_2 \lg y_2 \,.\, \Gamma y_2 + \ldots + y_n \lg y_n \,.\, \Gamma y_n}{(y_1 + y_2 + \ldots + y_n) \,.\, \lg (y_1 + y_2 + \ldots + y_n)} .$$

Wzór ten przedstawia sposób pisania oraz wartość przyrostka wykładniczego sumy algebraicznej.

Wyprowadzimy poniżej wzór przyrostka wykładniczego *iloczynu*

$$u = y \,.\, z ,$$

$$y = f(x) , \quad z = F(x) .$$

Dla danego iloczynu będziemy mieli widocznie

$$u^{1+\Gamma u} = f(x^{1+\Gamma x}) \, . \, F(x^{1+\Gamma x}),$$

skąd wypada łatwo

$$u^{\Gamma u} = \frac{f(x^{1+\Gamma x})}{f(x)} \, . \, \frac{F(x^{1+\Gamma x})}{F(x)},$$

czyli

$$u^{\Gamma u} = y^{\Gamma y} \, . \, z^{\Gamma z},$$

Logarytmując powyższe równanie, otrzymamy

$$\Gamma u \, . \lg u = \Gamma y \, . \lg y + \Gamma z \, . \lg z;$$

stąd wypływa

$$\Gamma(yz) = \frac{\lg y \, . \, \Gamma y + \lg z \, . \, \Gamma z}{\lg(yz)} \, .$$

Jestto wzór przyrostka wykładniczego rzędu 1-go dla iloczynu. Ażeby otrzymać przyrostek rzędu 2-go dla danego iloczynu, napiszemy na zasadzie przyjętej poprzednio definicyi

$$u^{\Gamma^2 u} = \frac{f(x^{(1+\Gamma x)^2}) \, . \, F(x^{(1+\Gamma x)^2})}{f(x^{1+\Gamma x}) \, . \, F(x^{1+\Gamma x})} : \frac{f(x^{1+\Gamma x}) \, . \, F(x^{1+\Gamma x})}{f(x) \, . \, F(x)},$$

czyli

$$u^{\Gamma^2 u} = \frac{f(x^{(1+\Gamma x)^2}) \, . \, f(x)}{[f(x^{1+\Gamma x})]^2} \, . \, \frac{F(x^{(1+\Gamma x)^2}) \, . \, F(x)}{[F(x^{1+\Gamma x})]^2} \, .$$

Stąd widoczna, że

$$u^{\Gamma^2 u} = y^{\Gamma^2 y} \, . \, z^{\Gamma^2 z} \, .$$

Przechodząc do logarytmów, z ostatniego równania otrzymamy

$$\Gamma^2 u \, . \lg u = \Gamma^2 y \, . \lg y + \Gamma^2 z \, . \lg z,$$

więc będzie

$$\Gamma^2(yz) = \frac{\lg y \, . \, \Gamma^2 y + \lg z \, . \, \Gamma^2 z}{\lg(yz)} \, .$$

Jestto wzór przyrostka wykładniczego rzędu 2-go dla iloczynu. Prowadząc dalej rozumowanie tą samą drogą, dojdziemy do wzoru przyrostka jakiegokolwiek rzędu

$$\Gamma^m (yz) = \frac{\lg y \,.\, \Gamma^m y + \lg z \,.\, \Gamma^m z}{\lg (yz)} \,.$$

Wzór ten bardzo łatwo daje się uogólnić dla jakiejbądź liczby czynników

$$\Gamma^m (y_1 \cdot y_2 \ldots y_n) = \frac{\lg y_1 \,.\, \Gamma^m y_1 + \lg y_2 \,.\, \Gamma^m y_2 + \ldots + \lg y_n \,.\, \Gamma^m y_n}{\lg (y_1 \cdot y_2 \ldots y_n)} \,.$$

Dowiedziemy jeszcze wzoru przyrostka wykładniczego rzędu m-go dla *ilorazu.* Przytem przytoczymy dowodzenie ogólne, które można stosować bez zmiany tak dla iloczynu, jak i dla ilorazu, tylko, ażeby ułatwić zrozumienie, dla iloczynu użyliśmy dowodzenia na przypadkach szczególnych.

Niech będzie dany iloraz

$$u = \frac{y}{z} \,,$$

gdzie

$$y = f(x) \,, \quad z = F(x) \,.$$

Równanie, przyjęte za definicyę przyrostka m-go rzędu, będzie

$$u^{\Gamma^m u} = \frac{f\left(x^{(1+\Gamma x)^m}\right)}{F\left(x^{(1+\Gamma x)^m}\right)} \cdot \left[\frac{f\left(x^{(1+\Gamma x)^{m-1}}\right)}{F\left(x^{(1+\Gamma x)^{m-1}}\right)}\right]^{-m} \cdot \left[\frac{f\left(x^{(1+\Gamma x)^{m-2}}\right)}{F\left(x^{(1+\Gamma x)^{m-2}}\right)}\right]^{\frac{m(m-1)}{1\,.\,2}} \cdots\cdots$$

(14)

$$\ldots \left[\frac{f(x)}{F(x)}\right]^{\pm 1} .$$

Podobnie mamy

$$y^{\Gamma^m y} = f\left(x^{(1+\Gamma x)^m}\right) . \left[f\left(x^{(1+\Gamma x)^{m-1}}\right)\right]^{-m} . \left[f\left(x^{(1+\Gamma x)^{m-2}}\right)\right]^{\frac{m(m-1)}{1\,.\,2}} \ldots [f(x)]^{\pm 1} ,$$

tudzież

$$z^{\Gamma^m z} = F\left(x^{(1+\Gamma x)^m}\right) . \left[F\left(x^{(1+\Gamma x)^{m-1}}\right)\right]^{-m} . \left[F\left(x^{(1+\Gamma x)^{m-2}}\right)\right]^{\frac{m(m-1)}{1\,.\,2}} \ldots [F(x)]^{\pm 1} ;$$

widzimy więc, że z równania (14) wypada

$$u^{\Gamma^m u} = y^{\Gamma^m y} : z^{\Gamma^m z}.$$

Biorąc w ostatnim związku logarytmy, otrzymamy

$$\Gamma^m u \,.\, \lg u = \Gamma^m y \,.\, \lg y - \Gamma^m z \,.\, \lg z\,,$$

czyli

$$\Gamma^m \frac{y}{z} = \frac{\Gamma^m y \,.\, \lg y - \Gamma^m z \,.\, \lg z}{\lg\left(\frac{y}{z}\right)}\,.$$

W szczególnym przypadku, gdy $z = \frac{1}{a} =$ stałej, natenczas będzie $\Gamma^m (ay) = \dfrac{\Gamma^m y \,.\, \lg y}{\lg (ay)}$.

§ 2. *Funkcye wielu zmiennych niezależnych.*

Przejdziemy teraz do określenia przyrostków wykładniczych funkcyi dwóch zmiennych niezależnych

$$f = f(x, y)\,.$$

Jako definicyę *przyrostka wykładniczego zupełnego rzędu 1-go* przyjmujemy równanie

$$f^{\Gamma f} = \frac{f(x^{1+\Gamma x},\ y^{1+\Gamma y})}{f(x, y)}\,; \tag{15}$$

za definicyę *przyrostka wykładniczego zupełnego rzędu 2-go* bierzemy

$$f^{\Gamma^2 f} = \frac{f(x^{(1+\Gamma x)^2},\ y^{(1+\Gamma y)^2}) \,.\, f(x, y)}{[f(x^{1+\Gamma x},\ y^{1+\Gamma y})]^2} \tag{16}$$

i wogóle *przyrostkiem wykładniczym zupełnym rzędu m-go* będzie

$$f^{\Gamma^m f} = f(x^{(1+\Gamma x)^m},\ y^{(1+\Gamma y)^m}) \,.\, \left[f(x^{(1+\Gamma x)^{m-1}},\ y^{(1+\Gamma y)^{m-1}})\right]^{-m}$$

$$.\left[f(x^{(1+\Gamma x)^{m-2}},\ y^{(1+\Gamma y)^{m-2}})\right]^{\frac{m(m-1)}{1.2}} \,.\,.\,.\,.\,.\, \left[f(x, y)\right]^{\pm 1}.$$

W ostatnim czynniku powyższego wzoru będzie wykładnik $+1$, gdy m liczba parzysta, przeciwnie, wykładnik -1 wziąść należy w przypadku m nieparzystego.

Jako następstwo przyjętych określeń przyrostków wykładniczych będzie wzór zasadniczy

$$f\left(x^{(1+\Gamma x)^n}, y^{(1+\Gamma y)^n}\right) = [f(x,y)]^{1+n.\Gamma f+\frac{n(n-1)}{1.2}.\Gamma^2 f+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}.\Gamma^3 f+\ldots+\Gamma^n f}$$

Prawdziwość tego wzoru dowodzi się zupełnie tak samo, jak dla funkcyj jednej zmiennej niezależnej; unikając zbytecznej rozwlekłości, nie będziemy po raz drugi powtarzać znanych dowodzeń.

Przeszedłszy do logarytmów, z ostatniego wzoru otrzymamy

$$(17)\qquad \begin{aligned} \frac{\lg f\left(x^{(1+\Gamma x)^n}, y^{(1+\Gamma y)^n}\right)}{\lg f(x,y)} &= 1 + n\,\Gamma f + \frac{n\,(n-1)}{1\,.\,2}\,.\,\Gamma^2 f \\ &+ \frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\,.\,\Gamma^3 f + \ldots + \Gamma^n f\,. \end{aligned}$$

Z równania (15) otrzymujemy

$$\Gamma f = \frac{\lg f\left(x^{1+\Gamma x}, y^{1+\Gamma y}\right) - \lg f(x,y)}{\lg f(x,y)};$$

stąd widoczna, że przyrostek wykładniczy Γf nie ulega żadnej zmianie, gdy zamiast $f(x,y)$ weźmiemy $[f(x,y)]^c$, gdzie c stała dowolna. W istocie będzie w tym przypadku

$$\Gamma f = \frac{c\lg f\left(x^{1+\Gamma x}, y^{1+\Gamma y}\right) - c\lg f(x,y)}{c\lg f(x,y)}.$$

Ułamek, napisany po drugiej stronie powyższej równości, skraca się przez c. Ilość c może być także dowolna funkcya wykładniczo-peryodyczna

$$c = \psi\left(x^{1+\Gamma x}, y^{1+\Gamma y}\right) = \psi(x,y),$$

i w tym przypadku wzmiankowany ułamek skrócić można przez ψ.

Dla odróżnienia od *przyrostka wykładniczego zupełnego* nazywać będziemy *przyrostkiem częściowym* taki przyrostek wykładniczy, który odpowiada pewnej tylko zmiennej, podczas gdy wszystkie pozostałe zmienne traktujemy, jako ilości stałe, tak naprzykład

$$(18)\qquad f^{\Gamma_x f} = \frac{f(x^{1+\Gamma x}, y)}{f(x, y)},$$

$$(19)\qquad f^{\Gamma_y f} = \frac{f(x, y^{1+\Gamma y})}{f(x, y)}.$$

Przyrostek częściowy rzędu 2-go, wzięty nasamprzód względem zmiennej x, a później względem y, otrzymamy, jeżeli podstawimy po drugiej stronie równości (18) $y^{1+\Gamma_y}$ zamiast y i następnie podzielimy przez stan pierwotny, będzie więc:

$$(20)\qquad f^{\Gamma^2_{x,y} f} = \frac{f(x^{1+\Gamma x}, y^{1+\Gamma y}) \,.\, f(x, y)}{f(x, y^{1+\Gamma y}) \,.\, f(x^{1+\Gamma x}, y)}.$$

Zupełnie takie same wyrażenie otrzymamy z (19), kładąc po drugiej stronie znaku równości $x^{1+\Gamma x}$ zamiast x i dzieląc przez stan pierwotny:

$$f^{\Gamma^2_{y,x} f} = \frac{f(x^{1+\Gamma x}, y^{1+\Gamma y}) \,.\, f(x, y)}{f(x^{1+\Gamma x}, y) \,.\, f(x, y^{1+\Gamma y})}.$$

Z porównania dwóch ostatnich związków mamy prawo symbolów:

$$\Gamma^2_{x,y} f = \Gamma^2_{y,x} f.$$

Pomiędzy przyrostkiem wykładniczym zupełnym i przyrostkami częściowemi istnieje związek, który otrzymamy łatwo, mnożąc odpowiedniemi stronami równości (18), (19) i (20)

$$f^{\Gamma_x f + \Gamma_y f + \Gamma^2_{x,y} f} = \frac{f(x^{1+\Gamma x}, y^{1+\Gamma y})}{f(x, y)}.$$

Porównywając ostatnie równanie z (15), widzimy, że

$$f^{\Gamma_x f + \Gamma_y f + \Gamma^2_{x,y} f} = f^{\Gamma f},$$

czyli

$$(21)\qquad \Gamma f = \Gamma_x f + \Gamma_y f + \Gamma^2_{x,y} f.$$

Tym sposobem, *przyrostek wykładniczy zupełny równa się sumie trzech przyrostków częściowych: przyrostkowi rzędu 1-go względem x, więcej przyrostek rzędu 1-go względem y, więcej przyrostek rzędu 2-go względem* x i y.

Mamy w tem twierdzeniu, równie jak i we wszystkich innych twierdzeniach, zupełne podobieństwo do wzorów różnic. Symbole Δ zastąpione są przez symbole Γ, wskutek tego treść wzorów jest inna, lecz forma zewnętrzna pozostaje bez zmiany. Forma zależy tylko od powszechnych praw algorytmii i we wszelkich rachunkach nie zmienia się; forma zewnętrzna pozostaje abstrakcyą niezależną, w którą przelewają się ideje rozmaitych rachunków.

Ażeby wyśledzić wspomniane podobieństwa dalej, przejdziemy do przyrostków rzędów wyższych.

Napiszmy następujące przyrostki wykładnicze częściowe rzędów wyższych:

$$f^{\Gamma^2_{x,x} f} = \frac{f\,(x^{(1+\Gamma x)^2}, y)\,.\,f\,(x, y)}{[f\,(x^{1+\Gamma x}, y)]^2}, \tag{22}$$

$$f^{\Gamma^2_{x,y} f} = \frac{f\,(x^{1+\Gamma x}, y^{1+\Gamma y})\,.\,f\,(x, y)}{f\,(x^{1+\Gamma x}, y)\,.\,f\,(x, y^{1+\Gamma y})}, \tag{23}$$

$$f^{\Gamma^2_{y,y} f} = \frac{f\,(x, y^{(1+\Gamma y)^2})\,.\,f\,(x, y)}{[f\,(x, y^{1+\Gamma y})]^2}. \tag{24}$$

Dalej, kładąc w (22) $y^{1+\Gamma y}$ zamiast y we wszystkich wyrazach po drugiej stronie znaku równości i dzieląc przez stan pierwotny, otrzymamy

$$f^{\Gamma^3_{x,x,y} f} = \frac{f\,(x^{(1+\Gamma x)^2}, y^{1+\Gamma y})\,.\,f\,(x, y^{1+\Gamma y})\,.\,[f\,(x^{1+\Gamma x}, y)]^2}{[f\,(x^{1+\Gamma x}, y^{1+\Gamma y})]^2\,.\,f\,(x^{(1+\Gamma x)^2}, y)\,.\,f\,(x, y)}; \tag{25}$$

podobnie z (24), kładąc $x^{1+\Gamma x}$ zamiast x we wszystkich wyrazach po drugiej stronie znaku równości i następnie dzieląc przez stan pierwotny, będziemy mieli

$$f^{\Gamma^3_{y,y,x} f} = \frac{f\,(x^{1+\Gamma x}, y^{(1+\Gamma y)^2})\,.\,f\,(x^{1+\Gamma x}, y)\,.\,[f\,(x, y^{1+\Gamma y})]^2}{[f\,(x^{1+\Gamma x}, y^{1+\Gamma y})]^2\,.\,f\,(x, y^{(1+\Gamma y)^2})\,.\,f\,(x, y)}. \tag{26}$$

Nakoniec, kładąc w (25) $y^{1+\Gamma y}$ zamiast y we wszystkich wyrazach po drugiej stronie znaku równości i dzieląc przez stan pierwotny, otrzymamy:

$$f^{\Gamma^4_{x,x,y,y} f} \tag{27}$$
$$= \frac{f\,(x^{(1+\Gamma x)^2}, y^{(1+\Gamma y)^2})\,.\,f\,(x, y^{(1+\Gamma y)^2})\,.\,[f\,(x^{1+\Gamma x}, y^{1+\Gamma y})]^4\,.\,f\,(x^{(1+\Gamma x)^2}, y)\,.\,f\,(x, y)}{[f\,(x^{1+\Gamma x}, y^{(1+\Gamma y)^2})]^2\,.\,[f\,(x^{(1+\Gamma x)^2}, y^{1+\Gamma y})]^2\,.\,[f\,(x, y^{1+\Gamma y})]^2\,[f\,(x^{1+\Gamma x}, y)]^2}$$

Wyrażenie (27) można otrzymać także z (26), kładąc we wszystkich wyrazach po drugiej stronie $x^{1+\Gamma x}$ zamiast x i dzieląc przez stan pierwotny. Wnioskujemy z tego, że

$$\Gamma^4{}_{x,x,y,y}\, f = \Gamma^4{}_{y,y,x,x}\, f.$$

Wzór (25) można otrzymać z równości (23), pisząc we wszystkich wyrazach po drugiej stronie $x^{1+\Gamma x}$ zamiast x i następnie dzieląc przez wartość pierwotną ułamku; stąd wypada wniosek, że

$$\Gamma^3{}_{x,x,y}\, f = \Gamma^3{}_{x,y,x}\, f.$$

Podobnie, pisząc w (23) we wszystkich wyrazach $y^{1+\Gamma y}$ na miejsce y i dzieląc przez pierwotną wartość ułamku, zauważymy, że

$$\Gamma^3{}_{x,y,y}\, f = \Gamma^3{}_{y,y,x}\, f.$$

i t. d.

Prawo symbolów jest to samo, które wyłożyliśmy w *teoryi różnic* w rozdziale I.

Podniósłszy do kwadratów równania (23), (25) i (26), dodamy tak otrzymane wypadki z równaniami (22), (24) i (27), będzie wówczas

$$f^{\Gamma^2{}_{x,x} f + 2\,\Gamma^2{}_{x,y} f + \Gamma^2{}_{y,y} f + 2\,\Gamma^3{}_{x,x,y} f + 2\,\Gamma^3{}_{y,y,x} f + \Gamma^4{}_{x,x,y,y} f}$$

$$= \frac{f\,(x^{(1+\Gamma x)^2},\, y^{(1+\Gamma y)^2})\,.\,f\,(x,\,y)}{[f\,(x^{1+\Gamma x},\, y^{1+\Gamma y})]^2}\,.$$

Porównywając ostatni związek z (16), widzimy, że

$$(28)\qquad \Gamma^2 f = \Gamma^2{}_{x,x}\, f + 2\Gamma^2{}_{x,y}\, f + \Gamma^2{}_{y,y}\, f + 2\Gamma^3{}_{x,x,y}\, f + 2\Gamma^3{}_{y,y,x}\, f + \Gamma^4{}_{x,x,y,y}\, f.$$

Tym sposobem, *przyrostek wykładniczy zupełny rzędu 2-go* wyraża się za pomocą przyrostków częściowych tak samo, jak różnica zupełna rzędu 2-go przez odpowiednie różnice częściowe. Widzimy więc i tutaj, że prawa symbolów Δ i Γ niczem nie różnią się, chociaż treść wewnętrzna jest zupełnie inna.

Podobnie i dalej łatwo otrzymać związek *przyrostka wykładniczego zupełnego rzędu 3-go* z przyrostkami częściowemi

$$\Gamma^3 f = \Gamma^3{}_{x^{(3)}} f + 3\Gamma^3{}_{x^{(2)},y} f + 3\Gamma^3{}_{x,y^{(2)}} f + \Gamma^3{}_{y^{(3)}} f + 3\Gamma^4{}_{x^{(3)},y} f \tag{29}$$
$$+ 6\,\Gamma^4{}_{x^{(2)},y^{(2)}} f + 3\Gamma^4{}_{x,y^{(3)}} f + 3\Gamma^5{}_{x^{(2)},y^{(3)}} f + 3\Gamma^5{}_{x^{(3)},y^{(2)}} f + \Gamma^6{}_{x^{(3)},y^{(3)}} f\,.$$

Dla uniknienia pewnych trudności pisania, nie wyprowadzamy szczegółowo tego ostatniego wzoru, sądząc, że metoda postępowania jest dostatecznie powyżej objaśnioną i łatwą dla zrozumienia. Na poprzedzających stronicach mówiliśmy o licznych podobieństwach rachunku różnic, tudzież rachunku przyrostków wykładniczych. Wspomnieć także trzeba o pewnej własności, która nie powtarza się w obu rachunkach i zasługuje na baczną uwagę.

W rachunku różnic mieliśmy

$$\Delta\,(\Delta f) = \Delta^2 f, \quad \Delta\,(\Delta^2 f) = \Delta^3 f\,, \;\ldots\,,\; \Delta\,(\Delta^i f) = \Delta^{i+1} f\,;$$

prawo to ma znaczenie drugorzędne, gdyż całą teoryę różnic można wykładać na zasadzie umówionych definicyj, nie robiąc najmniejszej wzmianki o tem prawie symbolów. Jednak na prawo, wymienione wyżej, od samego początku wykładu zwróciliśmy uwagę, ponieważ to daje nam znaczne udogodnienia tak w rachunku różnic, jak i w rachunku różniczkowym.

W rachunku przyrostków wykładniczych podobnego prawa symbolów

$$\Gamma\,(\Gamma^i f) = \Gamma^{i+1} f$$

nie ma wcale, ponieważ symbol Γ oznacza zawsze tylko pewien wykładnik wielkości, gdy tymczasem symbol Δ oznacza samą wielkość; więc też nie ma nic w tem sprzecznego, że prawo łączenia wielkości nie może być tożsamościowem względem praw kojarzenia wykładników pewnych wielkości.

W dalszym ciągu przejdziemy do funkcyj trzech zmiennych niezależnych

$$F = F\,(x, y, z)\,.$$

Jako określenie *przyrostka wykładniczego zupełnego rzędu 1-go* przyjmujemy związek:

$$F^{\Gamma F} = \frac{F\,(x^{1+\Gamma x}, y^{1+\Gamma y}, z^{1+\Gamma z})}{F\,(x, y, z)}\,. \tag{30}$$

Za określenie *przyrostka wykładniczego zupełnego rzędu 2-go* bierzemy

$$F^{\Gamma^2 F} = \frac{F\,(x^{(1+\Gamma x)^2}, y^{(1+\Gamma y)^2}, z^{(1+\Gamma z)^2})\,.\,F\,(x, y, z)}{[F\,(x^{1+\Gamma x}, y^{1+\Gamma y}, z^{1+\Gamma z})]^2}\,. \tag{31}$$

Przyrostkiem wykładniczym zupełnym rzędu 3-go będzie $\Gamma^3 F$

$$F^{\Gamma^3 F} = \frac{F\left(x^{(1+\Gamma x)^3}, y^{(1+\Gamma y)^3}, z^{(1+\Gamma z)^3}\right) . \left[F\left(x^{1+\Gamma x}, y^{1+\Gamma y}, z^{1+\Gamma z}\right)\right]^3}{\left[F\left(x^{(1+\Gamma x)^2}, y^{(1+\Gamma y)^2}, z^{(1+\Gamma z)^2}\right)\right]^3 . F(x, y, z)} \tag{32}$$

i t. p.

Następstwem przyjętych definicyj będzie wzór główny

$$F\left(x^{(1+\Gamma x)^n}, y^{(1+\Gamma y)^n}, z^{(1+\Gamma z)^n}\right)$$

$$= [F(x, y, z)]^{1 + n . \Gamma F + \frac{n(n-1)}{1.2} . \Gamma^2 F + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} . \Gamma^3 F + \ldots + \Gamma^n F}$$

który możemy pisać w postaci dogodniejszej:

$$\frac{\lg F\left(x^{(1+\Gamma x)^n}, y^{(1+\Gamma y)^n}, z^{(1+\Gamma z)^n}\right)}{\lg F(x, y, z)} \tag{33}$$

$$= 1 + n . \Gamma F + \frac{n(n-1)}{1.2} . \Gamma^2 F + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} . \Gamma^3 F + \ldots + \Gamma^n F.$$

Ogólna prawdziwość tego wzoru dowodzi się metodą, o której kilkakrotnie już wspominaliśmy w pracy niniejszej. Dowodzenia te, jako znane i łatwe, pomijamy.

Z równania (30) zapomocą logarytmowania otrzymujemy

$$\Gamma F = \frac{\lg F\left(x^{1+\Gamma x}, y^{1+\Gamma y}, z^{1+\Gamma z}\right) - \lg F(x, y, z)}{\lg F(x, y, z)},$$

skąd widoczna, że przyrostek wykładniczy ΓF nie ulegnie żadnej zmianie, gdy zamiast $F(x, y, z)$ weźmiemy $[F(x, y, z)]^c$, gdzie c oznacza stałą dowolną. W rzeczy samej będzie

$$\Gamma F = \frac{c \lg F\left(x^{1+\Gamma x}, y^{1+\Gamma y}, z^{1+\Gamma z}\right) - c \lg F(x, y, z)}{c \lg F(x, y, z)},$$

po skróceniu przez c otrzymamy pierwotną wartość ułamku. Łatwo zauważyć, że ilość c może być dowolna fnnkcya wykładniczo-peryodyczna

$$c = \psi\left(x^{1+\Gamma x}, y^{1+\Gamma y}, z^{1+\Gamma z}\right) = \psi(x, y, z);$$

w tym przypadku wzmiankowany wyżej ułamek skrócić można przez ψ.

Nazywając $\Gamma_x F$, $\Gamma_y F$, $\Gamma_z F$ *przyrostki wykładnicze częściowe rzędu 1-go*, będziemy mieli

$$(34) \qquad F^{\Gamma_x F} = \frac{F(x^{1+\Gamma x}, y, z)}{F(x, y, z)},$$

$$(35) \qquad F^{\Gamma_y F} = \frac{F(x, y^{1+\Gamma y}, z)}{F(x, y, z)}$$

$$(36) \qquad F^{\Gamma_z F} = \frac{F(x, y, z^{1+\Gamma z})}{F(x, y, z)}.$$

Przyrostki częściowe rzędu 2-go będą miały kształt $\Gamma^2_{x,y} F$, $\Gamma^2_{x,z} F$, $\Gamma^2_{y,z} F$

$$(37) \qquad F^{\Gamma^2_{x,y} F} = \frac{F(x^{1+\Gamma x}, y^{1+\Gamma y}, z) \,.\, F(x, y, z)}{F(x^{1+\Gamma x}, y, z) \,.\, F(x, y^{1+\Gamma y}, z)},$$

$$(38) \qquad F^{\Gamma^2_{x,z} F} = \frac{F(x^{1+\Gamma x}, y, z^{1+\Gamma z}) \,.\, F(x, y, z)}{F(x^{1+\Gamma x}, y, z) \,.\, F(x, y, z^{1+\Gamma z})},$$

$$(39) \qquad F^{\Gamma^2_{y,z} F} = \frac{F(x, y^{1+\Gamma y}, z^{1+\Gamma z}) \,.\, F(x, y, z)}{F(x, y^{1+\Gamma y}, z) \,.\, F(x, y, z^{1+\Gamma z})}.$$

Wyrażenie, napisane po drugiej stronie znaku równości (37), otrzymuje się z (34), kładąc we wszystkich wyrazach drugiej strony $y^{1+\Gamma y}$ zamiast y i następnie dzieląc przez wartość pierwotną. Można to samo otrzymać z (35), pisząc $x^{1+\Gamma x}$ na miejsce x i dzieląc przez wartość pierwotną; z tego wnioskujemy, że

$$\Gamma^2_{x,y} F = \Gamma^2_{y,x} F.$$

Wyrażenie, napisane po drugiej stronie znaku równości (38), otrzymaliśmy z (34), kładąc we wszystkich wyrazach drugiej strony $z^{1+\Gamma z}$ zamiast z i dzieląc przez stan pierwotny całego ułamku. Moglibyśmy takie same wyrażenie otrzymać z (36), napisawszy $x^{1+\Gamma x}$ na miejscu x i podzieliwszy przez wartość początkową; stąd wynika

$$\Gamma^2_{x,z} F = \Gamma^2_{z,x} F$$

Podobnym sposobem objaśnia się łatwo, że

$$\Gamma^2_{y,z} F = \Gamma^2_{z,y} F.$$

Oznaczając *przyrost wykładniczy częściowy rzędu 3-o przez* $\Gamma^3_{x,y,z} F$, będziemy mieli

$$(40)\quad F^{\Gamma^3_{x,y,z}F} = \frac{F(x^{1+\Gamma x}, y^{1+\Gamma y}, z^{1+\Gamma z}) . F(x^{1+\Gamma x}, y, z) . F(x, y^{1+\Gamma y}, z) . F(x, y, z^{1+\Gamma z})}{F(x^{1+\Gamma x}, y, z^{1+\Gamma z}) . F(x, y^{1+\Gamma y}, z^{1+\Gamma z}) . F(x^{1+\Gamma x}, y^{1+\Gamma y}, z) . F(x, yz)} .$$

Wyrażenie, które widzimy po drugiej stronie powyższego równania, otrzymaliśmy z (37), pisząc we wszystkich wyrazach strony drugiej $z^{1+\Gamma z}$ na miejscu z i następnie dzieląc przez wartość początkową całego ułamku. Takie same wyrażenie można otrzymać z (38), kładąc $y^{1+\Gamma y}$ zamiast y i dzieląc przez wartość pierwotną, lub też z (39), jeżeli napiszemy $x^{1+\Gamma x}$ na miejsce x i podzielimy przez stan początkowy ułamku.

Wnioskujemy stąd, że ma miejsce

$$\Gamma^3_{x,y,z} F = \Gamma^3_{y,x,z} F = \Gamma^3_{y,z,x} F = \Gamma^3_{x,z,y} F = \ldots\ldots$$

Ażeby wyprowadzić związek, istniejący pomiędzy przyrostkami wykładniczemi częściowemi tudzież przyrostkiem zupełnym, pomnożymy odpowiedniemi stronami równania (34), (35), (36), (37), (38), (39) i (40), natenczas będzie:

$$F^{\Gamma_x F + \Gamma_y F + \Gamma_z F + \Gamma^2_{x,y} F + \Gamma^2_{x,z} F + \Gamma^2_{y,z} F + \Gamma^3_{x,y,z} F} = \frac{F(x^{1+\Gamma x}, y^{1+\Gamma y}, z^{1+\Gamma z})}{F(x, y, z)} .$$

Porównawszy ostatnie równanie z (30), widzimy, że

$$(41)\quad \Gamma F = \Gamma_x F + \Gamma_y F + \Gamma_z F + \Gamma^2_{x,y} F + \Gamma^2_{x,z} F + \Gamma^2_{y,z} F + \Gamma^3_{x,y,z} F.$$

Tak więc, *przyrostek wykładniczy zupełny rzędu 1-go funkcyi trzech zmiennych niezależnych równa się sumie trzech przyrostków częściowych rzędu 1-go względem każdej zmiennej zosobna, więcej suma trzech przyrostków rzędu 2-go względem każdej pary zmiennych, więcej przyrostek częściowy rzędu 3-go względem wszystkich zmiennych.*

Podobną, jak powyżej, drogą można wyprowadzić wzór

$$(42)\quad \left\{ \begin{aligned} \Gamma^2 F = {} & \Gamma^2_{x^{(2)}} F + 2\Gamma^2_{x,y} F + \Gamma^2_{y^{(2)}} F + 2\Gamma^2_{x,z} F + 2\Gamma^2_{y,z} F + \Gamma^2_{z^{(2)}} F \\ & + 2\Gamma^3_{x^{(2)},y} F + 2\Gamma^3_{x^{(2)},z} F + 2\Gamma^3_{x,y^{(2)}} F + 2\Gamma^3_{y^{(2)},z} F + 2\Gamma^3_{x,z^{(2)}} F + 2\Gamma^3_{y,z^{(2)}} F \\ & + 6\Gamma^3_{x,y,z} F + \Gamma^4_{x^{(2)},y^{(2)}} F + \Gamma^4_{x^{(2)},z^{(2)}} F + \Gamma^4_{y^{(2)},z^{(2)}} F + 4\Gamma^4_{x^{(2)},y,z} F \\ & + 4\Gamma^4_{x,y^{(2)},z} F + 4\Gamma^4_{x,y,z^{(2)}} F + 2\Gamma^5_{x^{(2)},y^{(2)},z} F + 2\Gamma^5_{x^{(2)},y,z^{(2)}} F \\ & + 2\Gamma^5_{x,y^{(2)},z^{(2)}} F + \Gamma^6_{x^{(2)},y^{(2)},z^{(2)}} F. \end{aligned} \right.$$

Wzór ten wyraża związek przyrostka wykładniczego zupełnego rzędu 2-go z przyrostkami częściowemi. Jakkolwiek dowodzenie tego wzoru jest bardzo łatwe, to jednak pisanie wszystkich wzorów częściowych byłoby niedogodne i zajęłoby zbyt wiele miejsca. Wzory przyrostków wykładniczych rzędów wyższych stają się coraz bardziej zawiłe, ograniczymy się więc tylko przypadkami, wyłożonemi powyżej.

Taka sama metoda którą stosowaliśmy do funkcyj dwóch i trzech zmiennych niezależnych, zastosować się daje dalej do funkcyj czterech, pięciu i wogóle wielu zmiennych niezależnych. Powtarzanie w dalszym ciągu tych samych, jak poprzednio, rozumowań, uważamy tutaj za zbyteczne, sądząc, że praca niniejsza na ogólności dowodzeń nic nie straci.

V. Rachunek wykładniczkowy.

Przejdziemy teraz do rachunku ilości nieskończenie małych, przypuszczając, że we wszystkich wzorach poprzedzającego rozdziału przyrosty wykładnicze Γ dążą nieskończenie do zera. Będziemy pisać dla odróżnienia głoskę γ zamiast Γ, pamiętając zawsze, że Γ oznaczało przyrostki skończone, gdy tymczasem γ oznaczać będzie przyrostki wykładnicze, nieskończenie zdążające do zera czyli nieskończenie małe.

§ 1. *Funkcye jednej zmiennej niezależnej.*

Funkcyą nadpochodną rzędu 1-go nazywamy granicę stosunku przyrostku wykładniczego funkcyi do podobnego przyrostku zmiennej niezależnej, w miarę tego, gdy przyrostek γx zdąża do zera.

Będzie więc na zasadzie związku (6a, IV)

$$(1) \qquad \lim \frac{\gamma f}{\gamma x} = \lim \frac{\lg \Phi_1}{\gamma x \,.\, \lg f(x)} \,.$$

Łatwo zauważyć, że iloraz

$$\frac{\lg \Phi_1}{\gamma x}$$

przedstawia się pod postacią nieoznaczoną $\frac{0}{0}$, gdy γx zdąża do zera. Granicę wzmiankowanego ilorazu oznaczymy przez $\lg U_1$, tak więc

$$\lim \frac{\lg \Phi_1}{\gamma x} = \lg U_1 .$$

Przeszedłszy od równania (1) do granic, pisać będziemy głoskę g zamiast głoski γ, tym sposobem z (1) otrzymamy

$$\frac{gf}{gx} = \frac{\lg U_1}{\lg f(x)} ,$$

$\frac{gf}{gx}$ jestto *nadpochodna rzędu 1-go.* Wielkość U_1 nazywać będziemy *funkcyałem wykładniczkowym rzędu 1-go.* Widzimy więc, że *nadpochodna rzędu 1-go równa się ilorazowi logarytmu funkcyału wykładniczkowego rzędu 1-go przez logarytm funkcyi danej.*

Funkcyą nadpochodną rzędu 2-go będzie granica stosunku przyrostka wykładniczego rzędu 2-go do kwadratu przyrostka wykładniczego zmiennej niezależnej, gdy ten ostatni zdąża do zera.

Takim sposobem ze związku (7b, IV) wypadnie

$$\lim \frac{\gamma^2 f}{\gamma x^2} = \lim \frac{\lg \Phi_2}{\gamma x^2 . \lg f(x)} .$$

Ponieważ jednak łatwo zauważyć, że stosunek

$$\frac{\lg \Phi_2}{\gamma x^2} = \frac{0}{0}$$

zdąża niewątpliwie do granicy oznaczonej, którą nazwiemy $\lg U_2$, wskutek tego mamy

$$\frac{g^2 f}{gx^2} = \frac{\lg U_2}{\lg f(x)} ,$$

U_2 jestto *funkcyał wykładniczkowy rzędu 2-go.* Tak więc *nadpochodna rzędu 2-go równa się logarytmowi funkcyału wykładniczkowego rzędu 2-go, podzielonemu przez logarytm funkcyi.*

Funkcyą nadpochodną rzędu 3-go będzie granica stosunku przyrostka wykładniczego rzędu 3-go funkcyi danej do sześcianu przyrostka wykładniczego zmiennej niezależnej w miarę tego, gdy ten ostatni zdąża do zera.

Takim sposobem ze związku (8a, IV) mamy

$$\lim \frac{\gamma^3 f}{\gamma x^3} = \lim \frac{\lg \Phi_3}{\gamma x^3 . \lg f(x)} ;$$

atoli iloraz

$$\frac{\lg \Phi_3}{\gamma x^3} = \frac{0}{0}$$

zdąża do granicy oznaczonej, którą nazwiemy $\lg U_3$, będzie więc

$$\frac{g^3 f}{g x^3} = \frac{\lg U_3}{\lg f(x)},$$

U_3 jestto *funkcyał wykładniczkowy rzędu 3-go.*

Metoda naszego postępowania na tych kilku przypadkach szczególnych jest, jak się zdaje, w sposób dostateczny objaśnioną. Widzimy, że ma miejsce tutaj zupełna analogia do tego postępowania, jakie przyjęliśmy w określeniu pochodnych rozmaitych rzędów. Przyjęte powyżej definicye nadpochodnych pozwalają nam zawsze znaleść ich wartości dla funkcyj zasadniczych.

Będziemy mieli na zasadzie wzorów poprzedzającego rozdziału:

$$\frac{g(x^m)}{gx} = \lim \frac{\gamma(x^m)}{\gamma x} = 1,$$

$$\frac{g^2(x^m)}{gx^2} = \lim \frac{\gamma^2(x^m)}{\gamma x^2} = 1, \ldots, \frac{g^m(x^m)}{gx^m} = \lim \frac{\gamma^m(x^m)}{\gamma x^m} = 1,$$

$$\frac{g(\lg x)}{gx} = \lim \frac{\lg(1+\gamma x)}{\gamma x \,.\, \lg \lg x} = \frac{1}{\lg \lg x}, \quad \frac{g^2(\lg x)}{gx^2} = 0, \quad \text{i t. d.}$$

$$\frac{g(a^x)}{gx} = \lim \frac{x^{\gamma x} - 1}{\gamma x} = \lg x,$$

$$\frac{g^2(a^x)}{gx^2} = \lim \frac{x^{(\gamma x)^2 + 2\gamma x} - 2\, x^{\gamma x} + 1}{\gamma x^2} = \lg x + \lg^2 x,$$

i t. p.

W dalszym ciągu, dla łatwiejszego zrozumienia wszystkich zasad rachunku wykładniczkowego, postaramy się wyłożyć jeszcze raz cały wspomniany rachunek niezależnie od przyjętych powyżej definicyj, wypływających wprost z teoryi przyrostków wykładniczych skończonych.

Dla udogodnienia pisać będziemy α zamiast γx, β zamiast γy, γ zamiast γz i t. d. Tym sposobem mając dane

$$y = f(x),$$

przypuszczamy, że wykładnik zmiennej niezależnej otrzymał nieskończenie mały przyrostek α. Wiemy, że jednocześnie wykładnik zmiennej zależnej otrzyma także pewien przyrostek nieskończenie mały β, będzie więc

$$y^{1+\beta} = f\,(x^{1+\alpha})\,,$$

skąd wypada

$$y^{\beta} = \frac{f\,(x^{1+\alpha})}{f\,(x)}\,.$$

Podnosząc obie strony ostatniego równania do potęgi $\frac{1}{\alpha}$, będziemy mieli

$$(2) \qquad y^{\frac{\beta}{\alpha}} = \left[\frac{f\,(x^{1+\alpha})}{f\,(x)}\right]^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Chociaż α i β znikają jednocześnie, to jednak stosunek tych ilości nie znika, bowiem druga strona powyższej równości ma postać nieoznaczoną 1^{∞} i prawdziwa wartość podobnego wyrażenia nieoznaczonego zawsze może być znalezioną. Druga strona w równaniu (2) dąży do granicy oznaczonej jednocześnie, gdy α zdąża do zera. Stosunek $\frac{\beta}{\alpha}$ nazywamy w granicy *funkcyą nadpochodną* i piszemy:

$$(3) \qquad y^{\frac{gy}{gx}} = \lim \left[\frac{f\,(x^{1+\alpha})}{f\,(x)}\right]^{\frac{1}{\alpha}}_{\alpha=0}.$$

Równość ostatnią możemy pisać w kształcie:

$$y^{\frac{gy}{gx}\cdot gx} = \lim \left.\frac{f\,(x^{1+\alpha})}{f\,(x)}\right|_{\alpha=0}.$$

Ilość nieskończenie małą gy

$$gy = \frac{gy}{gx}\cdot gx$$

nazywamy *wykładniczkiem* zmiennej zależnej y tudzież podobnie gx nazywać będziemy wykładniczkiem zmiennej niezależnej x.

Widzimy więc, że *funkcya nadpochodna jest ilorazem dwóch wykładniczków*: zmiennej zależnej tudzież niezależnej.

Funkcya nadpochodna nie zmienia się, jeżeli zamiast $f(x)$ weźmiemy $[f(x)]^c$, gdzie c oznacza stałą dowolną.

Istotnie, z równania (3) będzie

$$(y^c)^{\frac{gy}{gx}} = \lim \left[\frac{\{f(x^{1+\alpha})\}^c}{\{f(x)\}^c}\right]^{\frac{1}{\alpha}} = \lim \left[\frac{f(x^{1+\alpha})}{f(x)}\right]^{\frac{c}{\alpha}}.$$

Jeżeli obie strony powyższego podniesiemy do potęgi $\frac{1}{c}$, zauważymy łatwo, że ilość c bez śladu zniknie, wskutek tego nadpochodna $\frac{gy}{gx}$ pozostanie wielkością bez zmiany. Granicę, do której zdąża druga strona (3), oznaczmy przez U_1, będzie natenczas

$$y^{\frac{gy}{gx}} = U_1 .$$

Logarytmując ostatnie równanie, otrzymamy

$$\frac{gy}{gx} = \frac{\lg U_1}{\lg y} . \tag{4}$$

y nazywamy, jak zwykle, *zasadą*, zaś wielkość U_1 będziemy nazywać *funkcyałem wykładniczkowym rzędu 1-go*. Tak więc, *nadpochodna równa się logarytmowi funkcyału, podzielonemu przez logarytm zasady*.

Z równania (4) widoczna, że

$$gy = \frac{\lg U_1}{\lg y} \cdot gx ,$$

czyli, *wykładniczek zmiennej zależnej równa się nadpochodnej, pomnożonej przez wykładniczek zmiennej niezależnej*.

Celem rachunku wykładniczkowego jest dla każdej danej funkcyi znaleść jej *funkcyał* i następnie *nadpochodną*.

Zadaniem rachunku odwrotnego będzie szukanie *zasady*, mając daną funkcyę nadpochodną.

Zastosujemy teoryę wyłożoną do kilku funkcyj zasadniczych.

Niech będzie dana jakakolwiek *potęga*

$$y = x^m .$$

Nadając nieskończenie małe przyrostki wykładnikom, otrzymamy

$$y^{1+\beta} = x^{m(1+\alpha)},$$

skąd wypada

$$y^{\beta} = x^{m\alpha},$$

i wskutek tego

$$y^{\frac{\beta}{\alpha}} = x^m = y.$$

Widzimy więc, że dla danej potęgi stosunek nieskończenie małych β i α zawsze pozostaje równym jedności, czyli w granicy mieć będziemy:

$$\frac{gy}{gx} = 1.$$

Będzie więc

$$\frac{g\,(x^m)}{gx} = 1.$$

czyli

$$g\,(x^m) = gx.$$

Jeżeli mamy dane a=stałej, natenczas, oczywista, będzie $\frac{ga}{gx}=0$, tudzież $ga = 0$.

Nadpochodna, oraz wykładniczek ilości stałej są zerami.

Niech będzie dany *logarytm*

$$y = \lg x.$$

Z równania (3) mamy

$$y^{\frac{gy}{gx}} = \lim \left[\frac{\lg\,(x^{1+\alpha})}{\lg x}\right]^{\frac{1}{\alpha}}_{\alpha=0};$$

stąd łatwo wypada

$$y^{\frac{gy}{gx}} = \lim_{\alpha=0} (1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e,$$

będzie więc

$$\frac{gy}{gx} = \frac{\lg e}{\lg y} = \frac{1}{\lg \lg x}.$$

Tym sposobem mamy *nadpochodnę logarytmu*

$$\frac{g\,(\lg x)}{gx} = \frac{1}{\lg \lg x},$$

oraz

$$g\,(\lg x) = \frac{gx}{\lg \lg x}.$$

Jestto wykładniczek logarytmu.

Dajmy *funkcyę wykładniczą*

$$y = a^x.$$

Z równania (3) wynika

$$y^{\frac{gy}{gx}} = \lim \left[\frac{a^{x^{1+\alpha}}}{a^x}\right]^{\frac{1}{\alpha}}_{\alpha=0}.$$

Ponieważ łatwo znajdujemy

$$\lim \left. \frac{\lg\left(\dfrac{a^{x^{1+\alpha}}}{a^x}\right)}{\alpha} \right|_{\alpha=0} = x \lg x \,.\, \lg a$$

więc będzie

$$y^{\frac{gy}{gx}} = e^{x \lg x \lg a},$$

skąd przez logarytmowanie otrzymujemy:

$$\frac{gy}{gx} = \frac{x \lg a \,.\, \lg x}{\lg\,(a^x)} = \lg x.$$

Takim sposobem *nadpochodna funkcyi wykładniczej* będzie

$$\frac{g\,(a^x)}{gx} = \lg x,$$

oraz wykładniczek

$$g\,(a^x) = \lg x \,.\, gx\,.$$

Dalej, niech będzie dana *funkcya trygonometryczna* w postaci:

$$y = \sin x\,;$$

równanie (3) będzie mieć kształt

$$y^{\frac{gy}{gx}} = \lim \left[\frac{\sin\,(x^{1+\alpha})}{\sin x}\right]^{\frac{1}{\alpha}}_{\alpha=0}\,.$$

Ponieważ wiemy, że

$$\lim \left.\frac{\lg \dfrac{\sin\,(x^{1+\alpha})}{\sin x}}{\alpha}\right|_{\alpha=0} = x \operatorname{cotg} x \lg x\,,$$

wskutek tego otrzymamy

$$y^{\frac{gy}{gx}} = e^{x \operatorname{cotg} x\,.\,\lg x}\,,$$

skąd wypada

$$\frac{gy}{gx} = \frac{x \operatorname{cotg} x \lg x}{\lg \sin x}\,.$$

Tak więc *nadpochodna wstawy* jest

$$\frac{g\,(\sin x)}{gx} = \frac{x \operatorname{cotg} x \lg x}{\lg \sin x}\,,$$

oraz wykładniczek

$$g\,(\sin x) = \frac{x \operatorname{cotg} x \lg x}{\lg \sin x}\,.\, gx\,.$$

Niech będzie dane

$$y = \cos x\,;$$

podobnie, jak poprzednio, będzie

$$y^{\frac{gy}{gx}} = \lim \left[\frac{\cos (x^{1+\alpha})}{\cos x}\right]^{\frac{1}{\alpha}}_{\alpha=0} .$$

Ponieważ wiemy, że

$$\lim \frac{\lg \left(\frac{\cos x^{1+\alpha}}{\cos x}\right)}{\alpha} = - x \operatorname{tg} x \lg x ,$$

mamy więc

$$y^{\frac{gy}{gx}} = e^{-x \operatorname{tg} x \lg x} ,$$

skąd wypadnie

$$\frac{gy}{gx} = \frac{- x \operatorname{tg} x \lg x}{\lg \cos x} .$$

Tak więc, *nadpochodna dostawy* będzie

$$\frac{g (\cos x)}{gx} = - \frac{x \lg x \,.\, tg\, x}{\lg \cos x} ,$$

oraz wykładniczek

$$g (\cos x) = - \frac{x \lg x \operatorname{tg} x}{\lg \cos x} \,.\, gx .$$

Zupełnie podobnemi sposobami znajdziemy łatwo

$$g (tg\, x) = \frac{2x \lg x}{\sin 2x \lg \operatorname{tg} x} \,.\, gx ,$$

$$g (\operatorname{cotg} x) = - \frac{2x \lg x}{\sin 2x \lg \operatorname{cotg} x} \,.\, gx ,$$

$$g (\sec x) = \frac{x \lg x \operatorname{tg} x}{\lg \sec x} \,.\, gx ,$$

$$g (\operatorname{cosec} x) = - \frac{x \lg x \operatorname{cotg} x}{\lg \operatorname{cosec} x} gx .$$

Dajmy jeszcze *funkcyę kołową* w kształcie:

$$y = \text{arc sin } x ,$$

będziemy mieli

$$y^{\frac{gy}{gx}} = \lim \left[\frac{\text{arc sin } (x^{1+\alpha})}{\text{arc sin } x}\right]^{\frac{1}{\alpha}}_{\alpha=0} .$$

Wiedząc, że

$$\lim \frac{\lg\left(\dfrac{\text{arc sin } x^{1+\alpha}}{\text{arc sin } x}\right)}{\alpha} = \frac{x \lg x}{\sqrt{1-x^2} \,.\, \text{arc sin } x} ,$$

otrzymamy

$$\frac{gy}{gx} = \frac{x \lg x}{\sqrt{1-x^2} \text{ arc sin } x \lg \text{arc sin } x} .$$

Takim sposobem wykładniczkiem *łuku wstawy* będzie

$$g\,(\text{arc sin } x) = \frac{x \lg x}{\sqrt{1-x^2} \text{ arc sin } x \,.\, \lg \text{arc sin } x} \,.\, gx .$$

Podobną drogą można znaleźć dla innych funkcyj kołowych:

$$g\,(\text{arc cos } x) = -\frac{x \lg x}{\sqrt{1-x^2} \text{ arc cos } x \,.\, \lg \text{arc cos } x} \,.\, gx ,$$

$$g\,(\text{arc tg } x) = \frac{x \lg x}{(1+x^2) \text{ arc tg } x \lg \text{arc tg } x} \,.\, gx ,$$

$$g\,(\text{arc cotg } x) = -\frac{x \lg x}{(1+x^2) \text{ arc cotg } x \lg \text{arc cotg } x}\, gx .$$

i t. p.

Niech będą dane u i v dwie funkcye ciągłe zmiennej x, tudzież y ich iloczyn

$$y = u \,.\, v ,$$

$$u = f\,(x) , \quad v = \varphi\,(x) .$$

Oznaczając przez α przyrostek wykładniczy zmiennej niezależnej, oraz β jednoczesny przyrostek wykładnika funkcyi y, będziemy mieli:

$$y^{\frac{\beta}{\alpha}} = \left[\frac{f(x^{1+\alpha}) \cdot \varphi(x^{1+\alpha})}{f(x) \cdot \varphi(x)}\right]^{\frac{1}{\alpha}};$$

przeszedłszy do granic, z powyższego otrzymamy

$$\lim y^{\frac{\beta}{\alpha}} = \lim\left[\frac{f(x^{1+\alpha})}{f(x)}\right]^{\frac{1}{\alpha}} . \lim\left[\frac{\varphi\ (x^{1+\alpha})}{\varphi\ (x)}\right]^{\frac{1}{\alpha}}_{\alpha=0},$$

czyli widocznie

$$y^{\frac{gy}{gx}} = u^{\frac{gu}{gx}} . v^{\frac{gv}{gx}} .$$

Biorąc logarytmy po obu stronach, będziemy mieli

$$\frac{gy}{gx} \lg y = \frac{gu}{gx} \lg u + \frac{gv}{gx} \lg v$$

Takim sposobem, nadpochodna danego iloczynu będzie

$$\frac{g\ (uv)}{gx} = \frac{\lg\ u . \frac{gu}{gx} + \lg v . \frac{gv}{gx}}{\lg\ (uv)},$$

tudzież wykładniczek iloczynu

$$g\ (uv) = \frac{\lg u\ .\ gu + \lg v\ .\ gv}{\lg\ (uv)} .$$

Jeżeli będzie dany iloczyn trzech czynników

$$y = u\ .\ v\ .\ w,$$

$$u = f\ (x), \quad v = \varphi\ (x), \quad w = \psi\ (x),$$

natenczas podobnie, jak powyżej, będzie

$$y^{\frac{\beta}{\alpha}} = \left[\frac{f(x^{1+\alpha}) \cdot \varphi\ (x^{1+\alpha}) \cdot \psi\ (x^{1+\alpha})}{f\ (x) \cdot \varphi\ (x) \cdot \psi\ (x)}\right]^{\frac{1}{\alpha}},$$

tudzież w granicy

$$\lim y^{\frac{\beta}{\alpha}} = \lim \left[\frac{f(x^{1+\alpha})}{f(x)}\right]^{\frac{1}{\alpha}} . \lim \left[\frac{\varphi(x^{1+\alpha})}{\varphi(x)}\right]^{\frac{1}{\alpha}} . \lim \left[\frac{\psi(x^{1+\alpha})}{\psi(x)}\right]^{\frac{1}{\alpha}}_{\alpha=0},$$

skąd widoczna

$$y^{\frac{gy}{gx}} = u^{\frac{gu}{gx}} . v^{\frac{gv}{gx}} . w^{\frac{gw}{gx}} .$$

Logarytmując, z ostatniego równania otrzymamy

$$\frac{g(uvw)}{gx} = \frac{\lg u . \frac{gu}{gx} + \lg v . \frac{gv}{gx} + \lg w . \frac{gw}{gx}}{\lg(uvw)} .$$

Łatwo zauważyć, że powyższe twierdzenie o nadpochodnej iloczynu rozciąga się widocznie na jakąkolwiek liczbę czynników.

Dajmy jeszcze *iloraz* dwóch funkcyi

$$y = \frac{u}{v},$$

gdzie

$$u = f(x), \quad v = \psi(x).$$

Będziemy mieli podobnie, jak dla iloczynu,

$$y^{\frac{\beta}{\alpha}} = \left[\frac{\frac{f(x^{1+\alpha})}{\psi(x^{1+\alpha})}}{\frac{f(x)}{\psi(x)}}\right]^{\frac{1}{\alpha}} .$$

Przechodząc do granic, możemy napisać

$$\lim y^{\frac{\beta}{\alpha}} = \frac{\lim \left[\frac{f(x^{1+\alpha})}{f(x)}\right]^{\frac{1}{\alpha}}}{\lim \left[\frac{\psi(x^{1+\alpha})}{\psi(x)}\right]^{\frac{1}{\alpha}}_{\alpha=0}},$$

czyli

$$y^{\frac{gy}{gx}} = \frac{u^{\frac{gu}{gx}}}{v^{\frac{gv}{gx}}} .$$

Wziąwszy logarytmy po obu stronach powyższego równania, otrzymamy

$$\frac{gy}{gx}\lg y = \frac{gu}{gx}\,.\lg u - \frac{gv}{gx}\,.\lg v\,,$$

skąd wypada nadpochodna ilorazu

$$\frac{g}{gx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{\lg u\,.\,\frac{gu}{gx} - \lg v\,.\,\frac{gv}{gx}}{\lg\left(\frac{u}{v}\right)}$$

oraz wykładniczek

$$g\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{\lg u\,.\,gu - \lg v\,.\,gv}{\lg\left(\frac{u}{v}\right)}\,.$$

Dla wyprowadzenia nadpochodnej *sumy algebraicznej* użyjemy metody odmiennej od poprzedzającej. Mówiliśmy na początku rozdziału IV, że

$$x^{1+\alpha} = x + \Delta x\,,\quad y^{1+\beta} = y + \Delta y\,.$$

Stąd zapomocą logarytmów otrzymujemy

$$\alpha = \frac{\lg(x+\Delta x) - \lg x}{\lg x}\,,$$

$$\beta = \frac{\lg(y+\Delta y) - \lg y}{\lg y}\,,$$

czyli

$$\alpha = \frac{\Delta x}{x\lg x}\,.\,(1+\varepsilon_1)\,,$$

$$\beta = \frac{\Delta y}{y\lg y}\,.\,(1+\varepsilon_2)\,;$$

ε_1, ε_2 są to ilości nieskończenie małe, znikające jednocześnie z Δx i Δy. Podzieliwszy odpowiednio oba ostatnie równania, otrzymamy

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\beta}{\alpha}\,.\,\frac{y\lg y\,.\,(1+\varepsilon_1)}{x\lg x\,.\,(1+\varepsilon_2)}\,.$$

Jeżeli przejdziemy do granic, natenczas z powyższego będziemy mieli

$$\frac{dy}{dx} = \frac{gy}{gx} \cdot \frac{y \lg y}{x \lg x}. \tag{5}$$

Niech będzie dana *suma algebraiczna*

$$y = y_1 + y_2 + \ldots + y_n,$$

gdzie $y_1, y_2, \ldots, y_n$ są pewne funkcye zmiennej niezależnej x. Różniczkując powyżej napisaną sumę, otrzymamy

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx} + \frac{dy_2}{dx} + \ldots + \frac{dy_n}{dx}; \tag{6}$$

jeżeli zaś do każdego wyrazu w (6) zastosujemy wzór (5), natenczas będzie

$$\frac{y \lg y}{x \lg x} \cdot \frac{gy}{gx} = \frac{y_1 \lg y_1}{x \lg x} \cdot \frac{gy_1}{gx} + \frac{y_2 \lg y_2}{x \lg x} \cdot \frac{gy_2}{gx} + \ldots + \frac{y_n \lg y_n}{x \lg x} \frac{gy_n}{gx},$$

skąd łatwo wypada nadpochodna sumy

$$\frac{g\,(y_1 + y_2 + \ldots + y_n)}{gx}$$

$$= \frac{y_1 \lg y_1 \cdot \frac{gy_1}{gx} + y_2 \lg y_2 \cdot \frac{gy_2}{gx} + \ldots + y_n \lg y_n \frac{gy_n}{gx}}{(y_1 + y_2 + \ldots + y_n) \lg (y_1 + y_2 + \ldots + y_n)},$$

tudzież wykładniczek

$$g\,(y_1 + y_2 + \ldots + y_n)$$

$$= \frac{y_1 \lg y_1 \cdot gy_1 + y_2 \lg y_2 \cdot gy_2 + \ldots + y_n \lg y_n \cdot gy_n}{(y_1 + y_2 + \ldots + y_n) \lg (y_1 + y_2 + \ldots + y_n)}.$$

Dalej, przypuśćmy, że mamy daną *funkcyę funkcyi*

$$y = f(u),$$

$$u = \varphi(x).$$

Będziemy mieli widocznie

$$y^{1+\beta} = f(u^{1+\gamma}),$$

$$u^{1+\gamma} = \varphi(x^{1+\alpha}).$$

Stąd wypada

(7) $$y^{\frac{\beta}{\alpha}} = \left[\frac{f(u^{1+\gamma})}{f(u)}\right]^{\frac{1}{\gamma}},$$

(8) $$y^{\frac{\beta}{\alpha}} = \left[\frac{f(\varphi(x^{1+\alpha}))}{f(\varphi(x))}\right]^{\frac{1}{\alpha}} = \left[\frac{f(u^{1+\gamma})}{f(u)}\right]^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Jeżeli obie strony równania (7) podniesiemy do potęgi $\frac{\gamma}{\alpha}$, natenczas będzie

$$y^{\frac{\beta}{\gamma}\cdot\frac{\gamma}{\alpha}} = \left[\frac{f(u^{1+\gamma})}{f(u)}\right]^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Jestto równanie takie same, jak (8), wskutek tego mieć będziemy

$$y^{\frac{\beta}{\gamma}\,\frac{\gamma}{\alpha}} = y^{\frac{\beta}{\alpha}},$$

Przechodząc do granic, z ostatniego otrzymamy

$$y^{\frac{gy}{gu}\cdot\frac{gu}{gx}} = y^{\frac{gy}{gx}},$$

więc będzie

$$\frac{gy}{gx} = \frac{gy}{gu}\cdot\frac{gu}{gx}.$$

Jeżeli mamy funkcyę złożoną w kształcie

$$y = f(u),$$

$$u = \varphi(z), \quad z = \psi(x),$$

natenczas podobnie będzie

$$y^{1+\beta} = f(u^{1+\gamma}),$$
$$u^{1+\gamma} = \varphi(z^{1+\delta}),$$
$$z^{1+\delta} = \psi(x^{1+\alpha}).$$

Będzie także

$$y^{\frac{\beta}{\gamma}} = \left[\frac{f(u^{1+\gamma})}{f(u)}\right]^{\frac{1}{\gamma}}. \tag{9}$$

$$y^{\frac{\beta}{\alpha}} = \left[\frac{f[\varphi\{\psi(x^{1+\alpha})\}]}{f[\varphi\{\psi(x)\}]}\right]^{\frac{1}{\alpha}} = \left[\frac{f[\varphi(z^{1+\delta})]}{f[\varphi(z)]}\right]^{\frac{1}{\alpha}} = \left[\frac{f(u^{1+\gamma})}{f(u)}\right]^{\frac{1}{\alpha}}. \tag{10}$$

Podnosząc obie strony równania (9) do potęgi $\frac{\gamma}{\delta}\cdot\frac{\delta}{\alpha}$, otrzymamy

$$y^{\frac{\beta}{\gamma}\cdot\frac{\gamma}{\delta}\cdot\frac{\delta}{\alpha}} = \left[\frac{f(u^{1+\gamma})}{f(u)}\right]^{\frac{1}{\gamma}\cdot\frac{\gamma}{\delta}\cdot\frac{\delta}{\alpha}},$$

równanie takie same, jak (10). Wnioskujemy stąd, że

$$y^{\frac{\beta}{\gamma}\cdot\frac{\gamma}{\delta}\cdot\frac{\delta}{\alpha}} = y^{\frac{\beta}{\alpha}}.$$

W granicy będziemy mieli

$$y^{\frac{gy}{gu}\cdot\frac{gu}{gz}\cdot\frac{gz}{gx}} = y^{\frac{gy}{gx}},$$

więc będzie

$$\frac{gy}{gx} = \frac{gy}{gu}\cdot\frac{gu}{gz}\cdot\frac{gz}{gx}.$$

Widzimy, że prawidło wykładniczkowania funkcyi złożonej jest zupełnie podobne do prawidła różniczkowania i jest tak samo łatwe do ogólnego dowiedzenia dla wszelkich funkcyj złożonych, jak w rachunku różniczkowym.

Jako definicyę *wykładniczka rzędu 2-go* przyjmujemy związek

$$y^{g^2y} = \lim\left[\frac{f(x^{(1+\alpha)^2})}{f(x^{1+\alpha})} : \frac{f(x^{1+\alpha})}{f(x)}\right]_{\alpha=0}. \tag{11}$$

Jeżeli obie strony powyższego równania podniesiemy do potęgi $\frac{1}{\alpha^2}$, natenczas będzie

$$(11a) \qquad y^{\frac{g^2y}{gx^2}} = \lim \left[\frac{f(x^{(1+\alpha)^2}) \, . \, f(x)}{\{f(x^{1+\alpha})\}^2}\right]^{\frac{1}{\alpha^2}}_{\alpha=0} .$$

Chociaż α^2 dąży nieskończenie do zera, to jednakże druga strona napisanego równania nie znika, lecz zdąża zawsze do granicy oznaczonej, którą łatwo znaleść zapomocą znanych prawideł. Granicę wzmiankowaną będziemy oznaczać głoską U_2 i nazwiemy *funkcyałem wykładniczkowym rzędu 2-go*

Tak więc

$$y^{\frac{g^2y}{gx^2}} = U_2$$

Logarytmując, z ostatniego równania otrzymamy

$$(12) \qquad \frac{g^2y}{gx^2} = \frac{\lg U_2}{\lg y} .$$

Widzimy, że *nadpochodna rzędu 2-go równa się logarytmowi funkcyału rzędu 2-go, podzielonemu przez logarytm zasady.*

Mnożąc obie strony równości (12) przez gx^2, będziemy mieli wykładniczek rzędu 2-go w kształcie

$$g^2y = \frac{\lg U_2}{\lg y} \, . \, gx^2 .$$

Zastosujemy powyżej wyłożoną teoryę do funkcyj zasadniczych.

Dajmy m-tą *potęgę*

$$y = x^m .$$

Równanie (11a) będzie

$$y^{\frac{g^2y}{gx^2}} = \lim \left[\frac{x^{m(1+\alpha)^2} \, . \, x^m}{x^{2m(1+\alpha)}}\right]^{\frac{1}{\alpha^2}}_{\alpha=0} = \lim x^{\frac{m\alpha^2}{\alpha^2}} ,$$

czyli

$$y^{\frac{g^2y}{gx^2}} = x^m = y .$$

Takim sposobem mamy

$$\frac{g^2 y}{g x^2} = 1 ,$$

czyli

$$\frac{g^2 (x^m)}{g x^2} = 1 .$$

Dalej, niech będzie dany *logarytm*

$$y = \lg x .$$

Będziemy mieli podobnie, jak powyżej

$$y^{\frac{g^2 y}{g x^2}} = \lim \left[\frac{\lg x^{(1+\alpha)^2} . \lg x}{\{\lg x^{1+\alpha}\}^2} \right]_{\alpha=0}^{\frac{1}{\alpha^2}} .$$

Ponieważ łatwo zauważyć, że

$$\lim \left. \frac{\lg (1+\alpha)^2 + 2 \lg \lg x - 2 \lg (1+\alpha) - 2 \lg \lg x}{\alpha^2} \right|_{\alpha=0} = 0 ,$$

będzie więc

$$y^{\frac{g^2 y}{g x^2}} = 1 ;$$

stąd wypada

$$\frac{g^2 y}{g x^2} = 0 ,$$

czyli

$$\frac{g^2 (\lg x)}{g x^2} = 0 .$$

Dajmy *funkcyę wykładniczą*

$$y = a^x .$$

Będziemy mieli

$$y^{\frac{g^2 y}{g x^2}} = \lim \left[\frac{a^{x^{(1+\alpha)^2}} . a^x}{(a^{x^{1+\alpha}})^2} \right]_{\alpha=0}^{\frac{1}{\alpha^2}} = U_2 .$$

Według znanego prawidła będzie

$$\lg U_2 = \lim \frac{\lg \ a^{x^{(1+\alpha)^2} - 2x^{1+\alpha} + x}}{\alpha^2}\Bigg|_{\alpha=0} = (x + x \lg x) \lg x \ . \lg a$$

czyli

$$\lg U_2 = (\lg x + \lg^2 x) \ . \lg a^x$$

i wskutek tego

$$U_2 = (a^x)^{\lg x + \lg^2 x} = y^{\lg x + \lg^2 x}\,.$$

Widoczna. że

$$\frac{g^2 y}{g x^2} = \lg x + \lg^2 x \ .$$

Tak więc mamy

$$\frac{g^2\,(a^x)}{g x^2} = \lg x + \lg^2 x \ .$$

Dajmy *funkcyę trygonometryczną* w postaci

$$y = \sin x \ .$$

Równanie (11a) będzie

$$y^{\frac{g^2 y}{g x^2}} = \lim \left[\frac{\sin x^{(1+\alpha)^2} . \sin x}{(\sin x^{1+\alpha})^2}\right]^{\frac{1}{\alpha^2}}_{\alpha=0} = U_2\,,$$

Postępując podług wiadomego prawidła, będziemy mieli

$$\lg U_2 = \lim \frac{\lg \sin x^{(1+\alpha)^2} + \lg \sin x - 2 \lg \sin x^{1+\alpha}}{\alpha^2}\Bigg|_{\alpha=0}$$

czyli

$$\lg U_2 = \lim \frac{\left[(1+\alpha)\, x^{(1+\alpha)^2} \operatorname{cotg} x^{(1+\alpha)^2} - x^{1+\alpha} \operatorname{cotg} x^{1+\alpha}\right] \lg x}{\alpha}\Bigg|_{\alpha=0}\,,$$

więc będzie

$$\lg U_2 = \left[-\frac{x^2 \lg x}{\sin^2 x} + x \lg x \,.\, \operatorname{cotg} x + x \operatorname{cotg} x \right] \lg x\,.$$

Wskutek tego łatwo wypada

$$\frac{g^2 (\sin x)}{g x^2} = \frac{x \lg x}{\sin^2 x \lg \sin x} \left[-x \lg x + \frac{1}{2} \lg x \,.\, \sin 2x + \frac{1}{2} \sin 2x \right].$$

Weźmy dalej

$$y = \cos x\,.$$

Będziemy mieli

$$y^{\frac{g^2 y}{g x^2}} = \lim \left[\frac{\cos x^{(1+\alpha)^2} \,.\, \cos x}{(\cos x^{1+\alpha})^2} \right]^{\frac{1}{\alpha^2}}_{\alpha=0} = U_2\,.$$

Postępując podobnie, jak poprzednio, piszemy

$$\lg U_2 = \lim \left. \frac{\lg \cos^{(1+\alpha)^2} + \lg \cos x - 2 \lg \cos x^{1+\alpha}}{\alpha^2} \right|_{\alpha=0}$$

skąd wypada

$$\lg U_2 = \lim \left. \frac{-\lg x \left[(1+\alpha)\, x^{(1+\alpha)^2} \,.\, \operatorname{tg} x^{(1+\alpha)^2} - x^{1+\alpha} \,.\, \operatorname{tg} x^{1+\alpha} \right]}{\alpha} \right|_{\alpha=0}.$$

Szukaną granicą będzie

$$\lg U_2 = -\frac{x^2 \lg^2 x}{\cos^2 x} - x \lg^2 x \,.\, \operatorname{tg} x - x \lg x \,.\, \operatorname{tg} x$$

i wskutek tego mamy

$$\frac{g^2 (\cos x)}{g x^2} = -\frac{x \lg x}{\cos^2 x \lg \cos x} \left[x \lg x + \frac{1}{2} \lg x \,.\, \sin 2x + \frac{1}{2} \sin 2x \right].$$

Dajmy

$$y = \operatorname{tg} x\,.$$

Równanie (11a) będzie

$$y^{\frac{g^2y}{gx^2}} = \lim \left[\frac{\operatorname{tg} x^{(1+\alpha)^2} \cdot \operatorname{tg} x}{(\operatorname{tg} x^{1+\alpha})^2}\right]_{\alpha=0}^{\frac{1}{\alpha^2}} = U_2;$$

dalej mamy

$$\lg U_2 = \lim \left.\frac{\lg \operatorname{tg} x^{(1+\alpha)^2} + \lg \operatorname{tg} x - 2 \lg \operatorname{tg} x^{1+\alpha}}{\alpha^2}\right|_{\alpha=0},$$

$$\lg U_2 = \lim \left[x^{(1+\alpha)^2} . (1+\alpha) \operatorname{cosec} 2x^{(1+\alpha)^2} - x^{1+\alpha} \operatorname{cosec} 2x^{1+\alpha}\right] \frac{\lg x}{2\alpha}.$$

Znalazłszy granicę, będziemy mieli z powyższego

$$\lg U_2 = (1+\lg x - 2x \lg x . \operatorname{cotg} 2x) \frac{x \lg x . \operatorname{cosec} 2x}{2}.$$

Wskutek tego otrzymamy

$$\frac{g^2 (\operatorname{tg} x)}{gx^2} = (1 + \lg x - 2x \lg x . \operatorname{cotg} 2x) \frac{x \lg x . \operatorname{cosec} 2x}{2 \lg \operatorname{tg} x}.$$

Podobnie mając

$$y = \operatorname{cotg} x,$$

znajdziemy łatwo

$$\frac{g^2 \operatorname{cotg} x}{gx^2} = -(1+\lg x - 2 x \lg x . \operatorname{cotg} 2x) \frac{x \lg x . \operatorname{cosec} 2x}{2 \lg \operatorname{cotg} x}.$$

Taką samą, jak powyżej, drogą znaleść można nadpochodne rzędu 2-go wszystkich innych funkcyi zasadniczych, jako to: sec x, cosec x, arc sin x, arc tg x i t. p.

Dalej, weźmy *iloczyn* dwóch funkcyj

$$y = u . v,$$

gdzie

$$u = f(x), \quad v = \varphi(x).$$

Równania (11a) będą miały kształt

$$u^{\frac{g^2 u}{g x^2}} = \lim \left[\frac{f(x^{(1+\alpha)^2}) \,.\, f(x)}{\{f(x^{1+\alpha})\}^2} \right]^{\frac{1}{\alpha^2}}_{\alpha=0},$$

$$v^{\frac{g^2 v}{g x^2}} = \lim \left[\frac{\varphi(x^{(1+\alpha)^2}) \,.\, \varphi(x)}{\{\varphi(x^{1+\alpha})\}^2} \right]^{\frac{1}{\alpha^2}}_{\alpha=0}.$$

Oprócz tego, mamy także dla danego iloczynu

$$y^{\frac{g^2 y}{g x^2}} = \lim \left[\frac{f(x^{(1+\alpha)^2}) \,.\, \varphi(x^{(1+\alpha)^2}) \,.\, f(x) \,.\, \varphi(x)}{\{f(x^{1+\alpha}) \,.\, \varphi(x^{1+\alpha})\}^2} \right]^{\frac{1}{\alpha^2}}_{\alpha=0},$$

czyli

$$y^{\frac{g^2 y}{g x^2}} = \lim \left[\frac{f(x^{(1+\alpha)^2}) \,.\, f(x)}{\{f(x^{1+\alpha})\}^2} \right]^{\frac{1}{\alpha^2}} . \lim \left[\frac{\varphi(x^{(1+\alpha)^2}) \,.\, \varphi(x)}{\{\varphi(x^{1+\alpha})\}^2} \right]^{\frac{1}{\alpha^2}}.$$

Widzimy więc, że

$$y^{\frac{g^2 y}{g x^2}} = u^{\frac{g^2 u}{g x^2}} \,.\, v^{\frac{g^2 v}{g x^2}},$$

skąd przez logarytmowanie otrzymujemy

$$\frac{g^2 y}{g x^2} \lg y = \frac{g^2 u}{g x^2} \lg u + \frac{g^2 v}{g x^2} \lg v.$$

Tym sposobem nadpochodna rzędu 2-go iloczynu będzie

$$\frac{g^2(uv)}{g x^2} = \frac{\lg u \dfrac{g^2 u}{g x^2} + \lg v \dfrac{g^2 v}{g x^2}}{\lg(uv)}.$$

Mnożąc powyższe równanie przez gx^2 otrzymamy wykładniczek

$$g^2(uv) = \frac{\lg u \,.\, g^2 u + \lg v \,.\, g^2 v}{\lg(uv)}.$$

Metoda dowodzenia w niczem nie ulegnie zmianie, jeżeli zamiast dwóch czynników weźmiemy trzy, cztery, lub więcej; podobnie będzie

$$g^2(u\,v\,w\ldots)=\frac{\lg u\,.\,g^2u+\lg v\,.\,g^2v+\lg w\,.\,g^2w+\ldots}{\lg(u\,v\,w\ldots)}\,.$$

Niech będzie dany *iloraz* dwóch funkcyj

$$y=\frac{u}{v}\,,$$

gdzie

$$u=f(x)\,,\quad v=\varphi(x)\,.$$

Będziemy mieli podobnie, jak w przypadku poprzedzającym

$$y^{\frac{g^2y}{gx^2}}=\lim\left[\frac{\frac{f(x^{(1+\alpha)^2})}{\varphi(x^{(1+\alpha)^2})}\cdot\frac{f(x)}{\varphi(x)}}{\left\{\frac{f(x^{1+\alpha})}{\varphi(x^{(1+\alpha)})}\right\}^2}\right]_{\alpha=0}^{\frac{1}{\alpha^2}}\,,$$

skąd wypada

$$y^{\frac{g^2y}{gx^2}}=\lim\left[\frac{f(x^{(1+\alpha)^2})\,.\,f(x)}{\{f(x^{1+\alpha})\}^2}\right]^{\frac{1}{\alpha^2}}:\lim\left[\frac{\varphi(x^{(1+\alpha)^2})\,.\,\varphi(x)}{\{\varphi(x^{1+\alpha})\}^2}\right]^{\frac{1}{\alpha^2}}\,,$$

czyli

$$y^{\frac{g^2y}{gx^2}}=u^{\frac{g^2u}{gx^2}}:v^{\frac{g^2v}{gx^2}}\,.$$

Logarytmując ostatnie równanie, otrzymamy nadpochodną

$$\frac{g^2}{gx^2}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{\lg u\,\frac{g^2u}{gx^2}-\lg v\,\frac{g^2v}{gx^2}}{\lg\left(\frac{u}{v}\right)}\,,$$

oraz wykładniczek rzędu 2-go

$$g^2\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{\lg u\,.\,g^2u-\lg v\,.\,g^2v}{\lg\left(\frac{u}{v}\right)}$$

Nadpochodną rzędu 2-go *sumy algebraicznej* wyprowadzimy przy pomocy zasad rachunku różniczkowego.

Widzieliśmy, że

$$y^{\frac{g^2y}{gx^2}} = \lim \left[\frac{f\left(x^{(1+\alpha)^2}\right) . f(x)}{\{f(x^{1+\alpha})\}^2}\right]^{\frac{1}{\alpha^2}}_{\alpha=0};$$

biorąc logarytmy po obu stronach, będziemy mieli

$$\frac{g^2y}{gx^2}\lg y = \lim \frac{\lg f\left(x^{(1+\alpha)^2}\right) + \lg f(x) - 2\lg f(x^{1+\alpha})}{\alpha^2}\Bigg|_{\alpha=0}.$$

Druga strona powyższego jest wyrażeniem dwukrotnie nieoznaczonem; postępując podług prawideł, o których była mowa w rozdziale II, znajdziemy łatwo

$$\frac{g^2y}{gx^2} = \frac{x^2\lg^2 x . f(x) . f''(x) + x\lg^2 x f(x) f'(x) + x\lg x f(x) f'(x) - x^2\lg^2 x\,[f'(x)]^2}{[f(x)]^2\lg f(x)}$$

albo krócej

$$(13)\qquad \frac{g^2y}{gx^2} = \frac{x^2 . (\lg^2 x) . y . \frac{d^2y}{dx^2} + x . (\lg^2 x) . y . \frac{dy}{dx} + xy\lg x . \frac{dy}{dx} - x^2\lg^2 x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{y^2\lg y};$$

atoli wiemy, że

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y\lg y}{x\lg x} . \frac{gy}{gx}.$$

Uwzględniwszy ostatni związek, z poprzedzającego otrzymamy

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y\lg y\frac{g^2y}{gx^2} - y\lg y\lg x\frac{gy}{gx} - y\lg y\frac{gy}{gx} + y\lg^2 y\left(\frac{gy}{gx}\right)^2}{x^2\lg^2 x}.$$

Jeżeli więc mamy daną *sumę algebraiczną*

$$y = y_1 + y_2 + \cdots,$$

gdzie wszystkie ilości y_i są pewne funkcye zmiennej niezależnej, natenczas będzie

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y_1}{dx^2} + \frac{d^2y_2}{dx^2} + \dots$$

Wskutek tego będziemy również mieli:

$$y \lg y \frac{g^2y}{gx^2} - y \lg y \lg x \frac{gy}{gx} - y \lg y \frac{gy}{gx} + y \lg^2 y \left(\frac{gy}{gx}\right)^2$$

$$= y_1 \lg y_1 \frac{g^2y_1}{gx^2} - y_1 \lg y_1 \lg x \frac{gy_1}{gx} - y_1 \lg y_1 \frac{gy_1}{gx} + y_1 \lg^2 y_1 \left(\frac{gy_1}{gx}\right)^2$$

$$+ y_2 \lg y_2 \frac{g^2y_2}{gx^2} - y_2 \lg y_2 \lg x \frac{gy_2}{gx} - y_2 \lg y_2 \frac{gy_2}{gx} + y_2 \lg^2 y_2 \left(\frac{gy_2}{gx}\right)^2$$

$$+ \dots\dots\dots\dots\dots$$

stąd otrzymać możemy $\frac{g^2(y_1 + y_2 + \dots)}{gx^2}$, wyrugowawszy przedtem $\frac{g(y_1 + y_2 + \dots)}{gx}$.

Jednak wzór ostateczny będzie dość złożony i wskutek tego ograniczymy się tylko przypadkiem dwóch składników.

Gdy suma ma postać najprostszą:

$$y = y_1 + y_2 ,$$

natenczas z poprzedzającego wzoru, po dokonaniu wszystkich uproszczeń, otrzymamy nadpochodną rzędu 2-go danej sumy:

$$\frac{g^2(y_1 + y_2)}{gx^2}$$

$$= \frac{(y^2{}_1 + y_1 y_2) \lg y_1 \frac{g^2y_1}{gx^2} + (y^2{}_2 + y_1 y_2) \lg y_2 \frac{g^2y_2}{gx^2} + y_1 y_2 \left(\lg y_1 \frac{gy_1}{gx} - \lg y_2 \frac{gy_2}{gx}\right)^2}{(y_1 + y_2)^2 \lg (y_1 + y_2)}.$$

Jako określenie *nadpochodnej rzędu 3-go* mamy równość

$$y^{\frac{g^3y}{gx^3}} = \lim \left[\frac{f(x^{(1+\alpha)^3}) \cdot f(x^{1+\alpha})}{\{f(x^{(1+\alpha)^2})\}^2} : \frac{f(x^{(1+\alpha)^2}) \cdot f(x)}{\{f(x^{1+\alpha})\}^2}\right]_{\alpha=0}^{\frac{1}{\alpha^3}},$$

czyli

$$y^{\frac{g^3 y}{gx^3}} = \lim \left[\frac{f\left(x^{(1+\alpha)^3}\right) . \left\{f\left(x^{1+\alpha}\right)\right\}^3}{\left\{f\left(x^{(1+\alpha)^2}\right)\right\}^3 . f(x)} \right]_{\alpha=0}^{\frac{1}{\alpha^3}} = U_3 .$$

Granicę, do której dąży druga strona powyższego równania, nazywamy *funkcyałem wykładniczkowym rzędu 3-go* i oznaczamy głoską U_3. Przechodząc do logarytmów, z ostatniego będziemy mieli

$$\frac{g^3 y}{gx^3} = \frac{\lg U_3}{\lg y} .$$

Tak więc, *nadpochodna rzędu 3-go równa się logarytmowi funkcyału rzędu 3-go, podzielonemu przez logarytm zasady.*

Wykładniczek rzędu 3-go będzie

$$g^3 y = \frac{\lg U_3}{\lg y} . gx^3 .$$

Stosując metodę podobną, jaką wyłożyliśmy na stronicach poprzedzających dla nadpochodnych rzędu 1-go i 2-go, znajdziemy

$$\frac{g^3 (x^m)}{gx^3} = 1 ,$$

$$\frac{g^3 (\lg x)}{gx^3} = 0 ,$$

$$\frac{g^3 (a^x)}{gx^3} = \lg x + 3 \lg^2 x + \lg^3 x ,$$

i t. p.

Wogóle, jako definicyę *nadpochodnej rzędu n-go*, będziemy mieli równość:

$$y^{\frac{g^n y}{gx^n}} = \lim f\left(x^{(1+\alpha)^n}\right) . \left[f\left(x^{(1+\alpha)^{n-1}}\right)\right]^{-n} . \left[f\left(x^{(1+\alpha)^{n-2}}\right)\right]^{\frac{n(n-1)}{1.2}}$$

$$. \left[f\left(x^{(1+\alpha)^{n-3}}\right)\right]^{-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}} . \; . \; . \; . \; . \left[f(x)\right]^{\pm 1} .$$

W ostatnim czynniku piszemy wykładnik ± 1, rozumiejąc przez to, że znak $+$ należy brać w przypadku n parzystego i znak $-$ bierzemy, gdy n liczba nieparzysta.

Granicę, do której dąży druga strona napisanej powyżej równości, nazywamy *funkcyałem wykładniczkowym rzędu n-go* i oznaczać będziemy głoską U_n. Takim sposobem mamy

$$\frac{g^n y}{gx^n} = \frac{\lg U_n}{\lg y}.$$

Nadpochodna rzędu n-go równa się logarytmowi funkcyału rzędu n-go, podzielonemu przez logarytm zasady.

Wykładniczkiem rzędu n-go będzie

$$g^n y = \frac{\lg U_n}{\lg y} \cdot gx^n.$$

Gdy mamy dany *iloczyn*

$$y = uv,$$

gdzie

$$u = f(x) \quad \text{i} \quad v = \varphi(x),$$

natenczas na zasadzie przyjętej fefinicyi będzie

$$y^{\frac{g^n y}{gx^n}} = \lim f\left(x^{(1+\alpha)^n}\right) \cdot \varphi\left(x^{(1+\alpha)^n}\right) \cdot \left[f\left(x^{(1+\alpha)^{n-1}}\right) \cdot \varphi\left(x^{(1+\alpha)^{n-1}}\right)\right]^{-n}$$

$$\cdot \left[f\left(x^{(1+\alpha)^{n-2}}\right) \cdot \varphi\left(x^{(1+\alpha)^{n-2}}\right)\right]^{\frac{n(n-1)}{1.2}} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \left[f(x) \cdot \varphi(x)\right]^{\pm 1};$$

podobnie

$$u^{\frac{g^n u}{gx^n}} = \lim f\left(x^{(1+\alpha)^n}\right) \cdot \left[f\left(x^{(1+\alpha)^{n-1}}\right)\right]^{-n} \cdot \left[f\left(x^{(1+\alpha)^{n-2}}\right)\right]^{\frac{n(n-1)}{1.2}} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \left[f(x)\right]^{\pm 1},$$

$$v^{\frac{g^n v}{gx^n}} = \lim \varphi\left(x^{(1+\alpha)^n}\right) \cdot \left[\varphi\left(x^{(1+\alpha)^{n-1}}\right)\right]^{-n} \cdot \left[\varphi\left(x^{(1+\alpha)^{n-2}}\right)\right]^{\frac{n(n-1)}{1.2}} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \left[\varphi(x)\right]^{\pm 1}.$$

Z porównania trzech, wyżej napisanych, równości łatwo zauważyć, że

$$y^{\frac{g^n y}{gx^n}} = u^{\frac{g^n u}{gx^n}} \cdot v^{\frac{g^n v}{gx^n}},$$

skąd wypada

$$\frac{g^n(uv)}{gx^n} = \frac{\frac{g^n u}{gx^n} \lg u + \frac{g^n v}{gx^n} \cdot \lg v}{\lg(uv)}.$$

Jestto nadpochodna rzędu n-go iloczynu.

Sposób dowodzenia pozostaje zupełnie taki sam dla *ilorazu*

$$\frac{g^n\left(\frac{u}{v}\right)}{gx^n} = \frac{\frac{g^n u}{gx^n}\lg u - \frac{g^n v}{gx^n}\lg v}{\lg\left(\frac{u}{v}\right)}.$$

Mnożąc przez gx^n, otrzymamy z powyższych wzorów wykładniczki.

W szczególnym przypadku, gdy jeden czynnik iloczynu jest stałym

$$v = a,$$

natenczas będzie wzór prostszy

$$\frac{g^n\,(au)}{gx^n} = \frac{\frac{g^n u}{gx^n}\,.\lg u}{\lg\,(au)}.$$

W rozdziale IV wyprowadziliśmy wzór główny (11) w kształcie

$$\frac{\lg f\,(x^{(1+\Gamma x)^n})}{\lg f\,(x)} = 1 + n\,\Gamma f + \frac{n\,(n-1)}{1.2}\,\Gamma^2 f + \frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{1.2.3}\,\Gamma^3 f + \ldots$$

$$\ldots + \Gamma^n f,$$

gdzie głoską Γ oznaczaliśmy przyrostki wykładnicze skończone.

W rachunku nieskończenie małych zrobimy w powyższym wzorze zamiany widoczne:

$$\Gamma f \text{ przez } \frac{gf}{gx}\,.\,\gamma x\,, \qquad \Gamma^2 f \text{ przez } \frac{g^2 f}{gx^2}\,\gamma x^2$$

$$\Gamma^3 f \text{ przez } \frac{g^3 f}{gx^3}\,\gamma x^3\,, \qquad \text{i t. d.}$$

Będziemy tedy mieli

$$\frac{\lg f\,(x^{(1+\gamma x)^n})}{\lg f\,(x)} = 1 + n\,\frac{gf}{gx}\,.\,\gamma x + \frac{n\,(n-1)}{1.2}\,\frac{g^2 f}{gx^2}\,\gamma x^2$$

$$+ \frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{1.2.3}\,\frac{g^3 f}{gx^3}\,.\,\gamma x^3 + \ldots$$

Dając w ostatnim wzorze

$$\gamma x = \frac{h}{n}, \quad n = \infty, \quad \text{i wiedząc, że} \quad \left(1 + \frac{h}{n}\right)^n_{n=\infty} = e^h,$$

otrzymamy wzór, przedstawiający zupełną analogię do twierdzenia T a y l o r a

$$\text{(14)} \qquad \frac{\lg f\,(x^{e^h})}{\lg f\,(x)} = 1 + h\,\frac{gf}{gx} + \frac{h^2}{1.2}\,\frac{g^2 f}{gx^2} + \frac{h^3}{1.2.3}\,\frac{g^3 f}{gx^3} + \ldots,$$

gdzie h może być albo ilością stałą, lub też jakąkolwiek nową ilością zmienną. Dla prawdziwości wzoru (14) koniecznem i wystarczającem jest, ażeby szereg był zbieżny. Można jeszcze napisać wzór analogiczny z szeregiem T a y l o r a, w postaci danej przez M a c l a u r i n'a; należy tylko w (14) x zastąpić przez pewną ilość a, tudzież h przez x, będziemy wówczas mieli

$$\text{(15)} \qquad \begin{aligned} \frac{\lg f\,(a^{e^x})}{\lg f\,(a)} &= 1 + x\left(\frac{gf}{gx}\right)_a + \frac{x^2}{1.2}\left(\frac{g^2 f}{gx^2}\right)_a \\ &+ \frac{x^3}{1.2.3}\left(\frac{g^3 f}{gx^3}\right)_a + \ldots\ldots, \end{aligned}$$

gdzie $\left(\frac{g^k f}{gx^k}\right)$ oznacza, że nasamprzód trzeba znaleść $\left(\frac{g^k f}{gx^k}\right)$ i potem dopiero zastąpić x przez a; bardzo dogodnem będzie, jeżeli weźmiemy $a=e$, rozumiejąc przez e zasadę logarytmów naturalnych.

Wypada nam tutaj powtórzyć to samo, co i powyżej, że dla prawdziwości wzoru (15) konieczną i wystarczającą cechą będzie zbieżność szeregu nieskończonego.

Widzimy, że rachunek wykładniczkowy wprowadza w analizę matematyczną szeregi potęgowe, odmienne od tych, które napotykamy w rachunku różniczkowym. Gdyby rachunek w pewnem danem zagadnieniu naprowadził nas na szereg zbieżny takiego kształtu, jak napisany po drugiej stronie (15), natenczas z zupełną słusznością możemy szereg zsumować, pisząc zamiast niego granicę w kształcie, który widzimy po pierwszej stronie (15).

Szereg (15) możemy także przedstawić w postaci iloczynu nieskończonego, wiedząc, że

$$\frac{g^k f}{gx^k} = \frac{\lg U_k}{\lg f\,(x)}.$$

W rzeczy samej, wzór (15) można napisać tak:

$$\lg f(a^{e^x}) = 1 + x \lg (U_1)_a + \frac{x^2}{1.2} \lg (U_2)_a + \frac{x^3}{1.2.3} \lg (U_3)_a + \ldots,$$

czyli

$$(16) \qquad f(a^{e^x}) = e \,.\, (U_1)_a^{x} \,.\, (U_2)_a^{\frac{x^2}{1.2}} \,.\, (U_3)_a^{\frac{x^3}{1.2.3}} \ldots\ldots$$

Przez U_k oznaczamy funkcyały wykładniczkowe rozmaitych rzędów; prawidło znalezienia wspomnianych funkcyałów jest nam wiadome dla wszelkich funkcyj f, na zasadzie teoryi, wyłożonej w niniejszym rozdziale. Jeżeli w funkcyale U_k na miejsce x napiszemy a, natenczas będziemy używać oznaczenia $(U_k)_a$.

Dalej, kładąc w (16)

$$e^x = z,$$

będziemy mieli

$$f(a^z) = e \,.\, (U_1)_a^{\lg z} \,.\, (U_2)_a^{\frac{1}{1.2}\lg^2 z} \,.\, (U_3)_a^{\frac{1}{1.2.3}\lg^3 z} \ldots\ldots$$

Nakoniec przyjmując w ostatnim związku

$$a^z = y, \quad a = e,$$

otrzymamy

$$f(y) = e \,.\, (U_1)_e^{\lg \lg y} \,.\, (U_2)_e^{\frac{1}{1.2}\lg^2(\lg y)} \,.\, (U_3)_e^{\frac{1}{1.2.3}\lg^3(\lg y)} \ldots\ldots$$

Jestto rozkład danej funkcyi ciągłej $f(y)$ na *iloczyn nieskończony*; ażeby wzór był prawdziwy trzeba koniecznie, by iloczyn ten był zbieżny.

Tak więc, rachunek wykładniczkowy prowadzi bezpośrednio do rozkładu wszelkiej funkcyi ciągłej jednej zmiennej niezależnej na iloczyn nieskończony, podobnie jak rachunek różniczkowy prowadzi do rozkładu danej funkcyi na sumę nieskończoną.

Dla objaśnienia weźmy, naprzykład, jakąkolwiek potęgę

$$f(y) = y^m.$$

Widzieliśmy, że w tym przypadku nadpochodne wszystkich rzędów były równe jednościom, czyli funkcyały były równe znowu tej samej danej potędze. Wskutek tego iloczyn nieskończony będzie miał kształt

$$y^m = e \, . \, e^{m \lg \lg y} \, . \, e^{\frac{m}{1.2} \lg^2 (\lg y)} \, . \, e^{\frac{m}{1.2.3} \lg^3 (\lg y)} \, . \, e^{\frac{m}{1.2.3.4} \lg^4 (\lg y)} \, \ldots\ldots$$

Dla logarytmu iloczyn nieskończony nie istnieje, gdyż w tym przypadku wzór (15) da nam

$$\frac{\lg \lg (a^{e^x})}{\lg \lg a} = 1 + \frac{x}{\lg \lg a} \, ,$$

co jest widoczną tożsamością.

Dla funkcyi wykładniczej

$$f(y) = e^y$$

łatwo zauważyć, że

$$(U_k)_e = e \, , \qquad (k = 1, 2, 3 \ldots) \, ,$$

będzie więc

$$e^y = e \, . \, e^{\lg y} \, . \, e^{\frac{1}{1.2} \lg^2 y} \, . \, e^{\frac{1}{1.2.3} \lg^3 y} \, . \, e^{\frac{1}{1.2.3.4} \lg^4 y} \, \ldots\ldots$$

Z ostatniego związku widoczna

$$y = 1 + \lg y + \frac{1}{1 \, . \, 2} \lg^2 y + \frac{1}{1.2.3} \lg^3 y + \frac{1}{1.2.3.4} \lg^4 y + \ldots\ldots$$

Szereg ten jest dobrze znany i z rachunku różniczkowego, możnaby więc zrobić zarzut, że te szeregi, które spotykamy w rachunku wykładniczkowym, nic nowego nie przedstawiają i ostatecznie prowadzą do związków skądinąd już znanych. Sądzę, że zarzut taki byłby oparty na szczególnych przypadkach i byłby niesłuszny.

Wybraliśmy przykłady najprostsze i otrzymaliśmy związki znane z zasad rachunku różniczkowego, lecz gdyby funkcya była więcej złożona lub gdyby dana była funkcya trygonometryczna, albo kołowa, natenczas iloczyn nieskończony byłby w postaci bardziej złożonej i nieznanej z zasad rachunku różniczkowego. Ta zgodność wyników, otrzymanych powyżej za pomocą rachunku wykładniczkowego z tem, co wiadomem już było z zasad rachunku różniczkowego, przedstawia rzetelny sprawdzian, okazujący, że cała teorya i te określenia, które daliśmy w rachunku wykładniczkowym, są dobre i zupełnie zgodne z istotą rzeczy.

§ 2. *Funkcye wielu zmiennych niezależnych.*

Możemy z łatwością rozszerzyć całkowitą teoryę rachunku wykładniczkowego, stosując ją do funkcyi wielu zmiennych niezależnych.

Niech będzie dana funkcya dwóch zmiennych

$$z = f(x, y),$$

piszemy natenczas

$$z^{gz} = \lim \left. \frac{f(x^{1+\alpha}, y^{1+\beta})}{f(x, y)} \right|_{\alpha=0,\, \beta=0}, \tag{17}$$

oznaczając przez gz *wykładniczek zupełny*.

Oprócz tego, zgodnie z teoryą, wyłożoną w § 1 niniejszego rozdziału, ustanowimy następujące związki dla *wykładniczków częściowych*

$$z^{\frac{gz}{gx} \cdot gx} = \lim \left. \frac{f(x^{1+\alpha}, y)}{f(x, y)} \right|_{\alpha=0}, \tag{18}$$

$$z^{\frac{gz}{gy} \cdot gy} = \lim \left. \frac{f(x, y^{1+\beta})}{f(x, y)} \right|_{\beta=0}. \tag{19}$$

Takim sposobem, $\frac{gz}{gx}$ oznaczać będzie nadpochodną, wziętą tylko względem x tak, jakby y było ilością stałą; $\frac{gz}{gy}$ będzie oznaczać nadpochodną względem samej zmiennej y. Przy pomocy wzmiankowanych oznaczeń wykładniczki częściowe piszemy w kształcie

$$\frac{gz}{gx} \cdot gx, \qquad \frac{gz}{gy} \cdot gy,$$

lub krócej

$$g_x z, \qquad g_y z.$$

Wykładniczek częściowy rzędu 2-go, wzięty nasamprzód względem ilości x, a potem względem y, otrzymamy z (18), kładąc po drugiej stronie $y^{1+\beta}$ zamiast y i następnie dzieląc tak otrzymane wyrażenie przez wartość pierwotną. Będzie więc

$$(20) \qquad z^{\frac{g^2 z}{gx\, gy} \cdot gx\, gy} = \lim \left[\frac{f(x^{1+\alpha}, y^{1+\beta})}{f(x, y^{1+\beta})} : \frac{f(x^{1+\alpha}, y)}{f(x, y)} \right]_{\alpha=0,\ \beta=0} .$$

Zamiast wykładniczka częściowego w kształcie

$$\frac{g^2 z}{gx\, gy}\, gx\, gy$$

można krócej pisać

$$g^2{}_{x,y}\ z .$$

Będziemy używać obydwóch sposobów pisania. Związek (20) można także otrzymać z (19), kładąc po drugiej stronie $x^{1+\alpha}$ zamiast x i następnie dzieląc przez wartość pierwotną, będzie wówczas

$$z^{\frac{g^2 z}{gy \cdot gx} \cdot gy \cdot gx} = \lim \left[\frac{f(x^{1+\alpha}, y^{1+\beta})}{f(x^{1+\alpha}, y)} : \frac{f(x, y^{1+\beta})}{f(x, y)} \right]_{\alpha=0,\ \beta=0} .$$

Wypada więc z tego, że

$$g^2{}_{x,y}\, z = g^2{}_{y,x}\, z ,$$

stąd mamy widocznie

$$\frac{g^2 z}{gx\, gy} = \frac{g^2 z}{gy \cdot gx} .$$

Jestto prawo, dotyczące porządku kolejnych wykładniczkowań.

Mnożąc odpowiedniemi stronami równości (18), (19) i (20), otrzymamy

$$z^{\frac{gz}{gx} gx + \frac{gz}{gy} gy + \frac{g^2 z}{yx\, gy} \cdot gx\, gy} = \lim \left. \frac{f(x^{1+\alpha}, y^{1+\beta})}{f(x, y)} \right|_{\alpha=0,\ \beta=0} .$$

Porównawszy ostatnie równanie z (17), będziemy mieli

$$z^{\frac{gz}{gx} gx + \frac{gz}{gy} gy + \frac{g^2 z}{gx\, gy} gx\, gy} = z^{gz} ,$$

czyli

$$(21)\qquad gz = \frac{gz}{gx}\,gx + \frac{gz}{gy}\,gy + \frac{g^2 z}{gx\,gy}\,gx\,gy\,.$$

Wzór ten przedstawia wartość wykładniczka zupełnego rzędu 1-go funkcyi dwóch zmiennych niezależnych i, jak widzimy, ma tutaj miejsce zupełna analogia do wzoru różniczki zupełnej.

Ten sam wzór moglibyśmy jeszcze otrzymać z wzoru (21, IV), pisząc

$$\Gamma f = \frac{\Gamma_x f}{\Gamma x}\,.\,\Gamma x + \frac{\Gamma_y f}{\Gamma y}\,.\,\Gamma y + \frac{\Gamma^2_{x,y} f}{\Gamma x\,.\,\Gamma y}\,\Gamma x\,.\,\Gamma y\,.$$

Jeżeli przejdziemy do granic, natenczas z ostatniego będzie

$$gf = \frac{gf}{gx}\,gx + \frac{gf}{gy}\,gy + \frac{g^2 f}{gx\,gy}\,gx\,gy\,.$$

Tą metodą wyprowadzaliśmy wzory różniczek zupełnych; tej samej drogi moglibyśmy trzymać się we wszystkich naszych rozumowaniach, dotyczących zasad rachunku wykładniczkowego.

Użyliśmy jednak metody odmiennej tylko dla tego, ażeby ułatwić zrozumienie całej teoryi.

Z teoryi, wyłożonej na poprzedzającej stronicy, wypadają następujące związki dla *nadpochodnych*:

$$z^{\frac{gz}{gx}} = \lim \left[\frac{f(x^{1+\alpha}, y)}{f(x, y)}\right]^{\frac{1}{\alpha}}_{\alpha=0},$$

$$z^{\frac{gz}{gy}} = \lim \left[\frac{f(x, y^{1+\beta})}{f(x, y)}\right]^{\frac{1}{\beta}}_{\beta=0},$$

$$z^{\frac{g^2 z}{gx\,gy}} = \lim \left[\frac{f(x^{1+\alpha}, y^{1+\beta})\,.\,f(x, y)}{f(x^{1+\alpha}, y)\,.\,f(x, y^{1+\beta})}\right]^{\frac{1}{\alpha\beta}}_{\alpha=0,\,\beta=0}.$$

W pierwszej granicy, z pomiędzy wyżej napisanych, uważamy y, jako ilość stałą; w drugiej granicy uważamy x, jako stałą; w trzeciej szukamy naprzód granicy względem α tak, jak gdyby β było ilością stałą, później dopiero szukamy granicy po raz drugi względem β. Postępowanie takie objaśnimy na przykładzie.

Niech będzie dane

$$z = \sin(x+y),$$

$$z^{\frac{g^2 z}{gx\,gy}} = \lim \left[\frac{\sin(x^{1+\alpha} + y^{1+\beta}) \,.\, \sin(x+y)}{\sin(x^{1+\alpha} + y) \,.\, \sin(x + y^{1+\beta})}\right]^{\frac{1}{\alpha\beta}}_{\alpha=0\ ,\ \beta=0} = U\,.$$

Trzeba znaleźć granicę

$$\lg U$$

$$= \lim \frac{\lg\sin(x^{1+\alpha}+y^{1+\beta}) + \lg\sin(x+y) - \lg\sin(x^{1+\alpha}+y) - \lg\sin(x+y^{1+\beta})}{\alpha\beta}\Bigg|_{\substack{\alpha=0\\ \beta=0}}\,.$$

Uważając β jako stałą, znajdziemy nasamprzód granicę względem α

$$\lg U = \lim \frac{x\lg x \operatorname{cotg}(x+y^{1+\beta}) - x\lg x\operatorname{cotg}(x+y)}{\beta}\Bigg|_{\beta=0}\,.$$

Granica względem β będzie

$$\lg U = -\frac{xy\lg x\lg y}{\sin^2(x+y)}\,,$$

wskutek tego mamy

$$z^{\frac{g^2 z}{gx\,gy}} = e^{-\frac{xy\lg x \lg y}{\sin^2(x+y)}}\,,$$

czyli

$$\frac{g^2 z}{gx\,gy} = -\frac{xy\lg x\lg y}{\sin^2(x+y)\,.\,\lg\sin(x+y)}\,.$$

Tym sposobem wykładniczek zupełny danej funkcyi będzie mieć kształt

$$gz = \frac{x\lg x\operatorname{cotg}(x+y)}{\lg\sin(x+y)}\,gx + \frac{y\lg y\operatorname{cotg}(x+y)}{\lg\sin(x+y)}\,gy$$

$$-\frac{xy\lg x\lg y}{\sin^2(x+y)\lg\sin(x+y)}\,.\,gx\,.\,gy\,.$$

Ażeby wyprowadzić wzór *wykładniczka zupełnego rzędu 2-go* napiszemy następujące związki:

(22) $$z^{g^2{}_{x,x}z} = \lim \frac{f(x^{(1+\alpha)^2}, y) \, . \, f(x, y)}{\{f(x^{1+\alpha}, y)\}^2}\Bigg|_{\alpha=0},$$

(23) $$z^{g^2{}_{x,y}z} = \lim \frac{f(x^{1+\alpha}, y^{1+\beta}) \, f(x, y)}{f(x^{1+\alpha}, y) \, . \, f(x, y^{1+\beta})}\Bigg|_{\alpha=0,\ \beta=0},$$

(24) $$z^{g^2{}_{y,y}z} = \lim \frac{f(x, y^{(1+\beta)^2}) \, . \, f(x, y)}{\{f(x, y^{1+\beta})\}^2}\Bigg|_{\beta=0}.$$

Następnie, kładąc w (22) $y^{1+\beta}$ zamiast y we wszystkich wyrazach po drugiej stronie znaku równości i dzieląc przez wartość pierwotną, otrzymamy wyrażenie, które według przyjętych określeń oznaczymy przez

$$z^{g^3{}_{x,x,y}z},$$

będzie więc

(25) $$z^{g^3{}_{x,x,y}z} = \lim \frac{f(x^{(1+\alpha)^2}, y^{1+\beta}) \, . \, f(x, y^{1+\beta}) \, . \, \{f(x^{1+\alpha}, y)\}^2}{\{f(x^{1+\alpha}, y^{1+\beta})\}^2 \, . \, f(x^{(1+\alpha)^2}, y) \, . \, f(x, y)}.$$

Podobnie z (24), pisząc $x^{1+\alpha}$ zamiast x we wszystkich wyrazach po drugiej stronie znaku równości i potem dzieląc przez wartość początkową, będziemy mieli

(26) $$z^{g^3{}_{y,y,x}z} = \lim \frac{f(x^{1+\alpha}, y^{(1+\beta)^2}) \, . \, f(x^{1+\alpha}, y) \, . \, \{f(x, y^{1+\beta})\}^2}{\{f(x^{1+\alpha}, y^{1+\beta})\}^2 \, . \, f(x, y^{(1+\beta)^2}) \, . \, f(x, y)}.$$

Nakoniec, kładąc w (25) $y^{1+\beta}$ zamiast y we wszystkich wyrazach z drugiej strony znaku równości i podzieliwszy potem przez wartość początkową, otrzymamy

$$z^{g^4{}_{x,x,y,y}z}$$

(27) $$= \lim \frac{f(x^{(1+\alpha)^2}, y^{(1+\beta)^2}) . f(x, y^{(1+\beta)^2}) . \{f(x^{1+\alpha}, y^{1+\beta})\}^4 . f(x^{(1+\alpha)^2}, y) . f(x, y)}{\{f(x^{1+\alpha}, y^{(1+\beta)^2})\}^2 . \{f(x^{(1+\alpha)^2}, y^{1+\beta})\}^2 . \{f(x, y^{1+\beta})\}^2 . \{f(x^{1+\alpha}, y)\}^2}.$$

Drugą stronę równania (27) możnaby było otrzymać z (26), pisząc we wszystkich wyrazach $x^{1+\alpha}$ zamiast x i dzieląc przez wartość pierwotną. Stąd łatwo wyprowadzamy wniosek, że

$$g^4{}_{x,x,y,y}\, z = g^4{}_{y,y,x,x}\, z$$

czyli pisząc szczegółowiej, będzie

$$\frac{g^4 z}{gx^2\, gy^2}\, gx^2\, gy^2 = \frac{g^4 z}{gy^2\, gx^2}\, gy^2\, gx^2 .$$

Stąd widoczna, że

$$\frac{g^4 z}{gx^2\, gy^2} = \frac{g^4 z}{gy^2\, gx^2} .$$

Tak samo, drugą stronę w (25) można otrzymać z (23) kładąc we wszystkich wyrazach $x^{1+\alpha}$ zamiast x i następnie dzieląc przez całą wartość początkową; wypada więc z tego

$$g^3{}_{x,x,y}\, z = g^3{}_{x,y,x}\, z ,$$

czyli będzie także

$$\frac{g^3 z}{gx^2\, gy} = \frac{g^3 z}{gx\, gy\, gx} .$$

Podobnie, jeżeli w (23) we wszystkich wyrazach po drugiej stronie napiszemy $y^{1+\beta}$ na miejscu y i podzielimy przez wartość początkową, natenczas zauważymy, że

$$g^3{}_{x,y,y}\, z = g^3{}_{y,y,x}\, z .$$

Stąd wypływa

$$\frac{g^3 z}{gx\, gy^2} = \frac{g^3 z}{gy^2 \cdot gx}.$$

i t. p.

Widzimy więc, że prawo o porządku kolejnych wykładniczkowań zgadza się zupełnie z odpowiednim prawem symbolów, które mieliśmy w rachunku różniczkowym. Jednakże pamiętać trzeba bacznie, że znaczenie symbolów g jest całkiem inne, aniżeli d w rachunku różniczkowym, oraz, że nie może mieć miejsca prawo

$$\frac{g^k}{gy^k}\left(\frac{g^i f}{gx^i}\right) = \frac{g^{k+i} f}{gx^i\, gy^k},$$

które jest zawsze prawdziwem dla symbolów d, w rachunku różniczkowym.

Podniósłszy do kwadratów równania (23), (25) i (26) i dodawszy otrzymane wypadki do odpowiednich stron równań (22), (24) i (27), spostrzeżemy łatwo, że

$$z^{g^2_{x,x}z + 2g^2_{x,y}z + g^2_{y,y}z + 2g^3_{x,x,y}z + 2g^3_{y,y,x}z + g^4_{x,x,y,y}z}$$

$$= \lim \left.\frac{f\left(x^{(1+\alpha)^2},\ y^{(1+\beta)^2}\right) . f(x, y)}{\left\{f\left(x^{1+\alpha},\ y^{1+\beta}\right)\right\}^2}\right|_{\substack{\alpha=0\\ \beta=0}}.$$

Jeżeli przyjmiemy, jako definicyę *wykładniczka zupełnego* rzędu 2-go, związek:

$$z^{g^2 z} = \lim \left.\frac{f\left(x^{(1+\alpha)^2},\ y^{(1+\beta)^2}\right) . f(x, y)}{\left\{f\left(x^{1+\alpha},\ y^{1+\beta}\right)\right\}^2}\right|_{\alpha=0,\ \beta=0},$$

natenczas z porównania dwóch ostatnich związków, wypadnie

$$g^2 z = g^2_{x,x} z + 2g^2_{x,y} z + g^2_{y,y} z + 2g^3_{x,x,y} z + 2g^3_{y,y,x} z + g^4_{x,x,y,y} z.$$

Pisząc bardziej szczegółowo, z ostatniego otrzymamy

$$\text{(28)}\quad \begin{aligned} g^2 z = {} & \frac{g^2 z}{gx^2} \cdot gx^2 + 2\,\frac{g^2 z}{gx\, gy} \cdot gx \cdot gy + \frac{g^2 z}{gy^2} \cdot gy^2 + 2\,\frac{g^3 z}{gx^2 gy} \cdot gx^2\, gy \\ & + 2\,\frac{g^3 z}{gy\, gx^2} \cdot gy \cdot gx^2 + \frac{g^4 z}{gx^2\, gy^2} \cdot gx^2 \cdot gy^2 . \end{aligned}$$

Jestto wartość wykładniczka zupełnego rzędu 2-go funkcyi dwóch zmiennych niezależnych. Taki sam wzór, jak powyższy, można otrzymać wprost z (28, IV), przypuszczając, że głoski Γ oznaczają nieskończenie małe i przechodząc do granic; będzie wówczas

$$g^2 f = g^2_{x,x} f + 2g^2_{x,y} f + g^2_{y,y} f + 2g^3_{x,x,y} f + 2g^3_{y,y,x} f + g^4_{x,x,y,y} f \cdot$$

Podobnym sposobem, z wzoru (29, IV), przeszedłszy do granic, będziemy mieli

$$g^3 f = g^3_{x^{(3)}} f + 3g^3_{x^{(2)},y} f + 3g^3_{x,y^{(2)}} f + g^3_{y^{(3)}} f + 3g^4_{x^{(3)},y} f$$
$$+ 6\, g^4_{x^{(2)},y^{(2)}} f + 3g^4_{x,y^{(3)}} f + 3g^5_{x^{(2)},y^{(3)}} f + 3g^5_{x^{(3)},y^{(2)}} f + g^6_{x^{(3)},y^{(3)}} f,$$

lub bardziej szczegółowo

$$g^3 f = \frac{g^3 f}{gx^3} \cdot gx^3 + 3\,\frac{g^3 f}{gx^2 . gy}\, gx^2\, gy + 3\,\frac{g^3 f}{gx\, gy^2}\, gx\, gy^2 + \frac{g^3 f}{gy^3}\, gy^3$$
$$(29) \qquad + 3\,\frac{g^4 f}{gx^3 gy}\, gx^3\, gy + 6\,\frac{g^4 f}{gx^2 gy^2}\, gx^2\, gy^2 + 3\,\frac{g^4 f}{gx\, gy^3}\, gx\, gy^3$$
$$+ 3\,\frac{g^5 f}{gx^2\, gy^3}\, gx^2\, gy^3 + 3\,\frac{g^5 f}{gx^3 gy^2}\, gx^3\, gy^2 + \frac{g^6 f}{gx^3\, gy^3}\, gx^3\, gy^3 .$$

Wzór powyższy przedstawia wartość wykładniczka zupełnego rzędu 3-go funkcyi dwóch zmiennych niezależnych. Wyprowadzenie wzorów, odpowiadających wykładniczkom zupełnym rzędów wyższych, nie przedstawia żadnych trudności, tylko pisanie wspomnianych wzorów staje się coraz bardziej zawiłe.

W szczególnym przypadku, gdy będzie jedna zmienna niezależna, związana układem równań:

$$z = f(x, y),$$

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t),$$

natenczas wzory wykładniczków zupełnych przechodzą we wzory nadpochodnych i przybierają kształt bardziej prosty.

W rzeczy samej, z wzoru (21), który wyprowadziliśmy w rozdziale niniejszym, będziemy mieli w przypadku jednej zmiennej niezależnej

$$\frac{gz}{gt} = \frac{gz}{gx} \cdot \frac{gx}{gt} + \frac{gz}{gy} \cdot \frac{gy}{gt} + \frac{g^2 z}{gx\, gy} \cdot \frac{gx}{gt} \cdot gy .$$

Równanie to otrzymaliśmy z (21), dzieląc wszystkie wyrazy przez gt, atoli wiemy, że stosunki nieskończenie małych $\frac{gz}{gx}, \frac{gz}{gy}, \frac{gz}{gt}$ są ilości skończone, przeto wzór powyższy nie może zawierać ostatniego wyrazu

$$\frac{g^2 z}{gx\, gy} \cdot \frac{gx}{gt} \cdot gy\,,$$

gdyż wyraz ten jest zawsze wielkością nieskończenie małą, która w równaniu pomiędzy ilościami skończonemi musi zniknąć.

Widzimy więc, że będzie tylko

$$\frac{gz}{gt} = \left(\frac{gz}{gx}\right) \cdot \frac{gx}{gt} + \left(\frac{gz}{gy}\right) \cdot \frac{gy}{gt}\,, \tag{30}$$

gdzie $\left(\frac{gz}{gx}\right)$ oznacza nadpochodną, wziętą tak, jak gdyby y było ilością stałą i podobnie $\left(\frac{gz}{gy}\right)$ oznacza nadpochodną, wziętą tylko względem y tak, jakby x było stałą. Dla odróżnienia od rzeczywistych nadpochodnych piszemy powyższe w nawiasach.

Względem nadpochodnej rzędu drugiego i wyższych metody granic stosować nie możemy, gdyż w tym szczególnym przypadku wykładniczki gx oraz gy są również pewne funkcye zmiennej niezależnej t, wskutek tego wzór staje się więcej zawiły.

W rozdziale IV wyprowadziliśmy wzór (17), który możemy napisać w kształcie:

$$\frac{\lg f\left(x^{(1+\gamma x)^n},\ y^{(1+\gamma y)^n}\right)}{\lg f(x, y)} = 1 + n\left(\frac{\gamma f}{\gamma x} \cdot \gamma x + \frac{\gamma f}{\gamma y}\gamma y + \frac{\gamma^2 f}{\gamma x . \gamma y} \cdot \gamma x \gamma y\right)$$

$$+ \frac{n\,(n-1)}{1\,.\,2}\left(\frac{\gamma^2 f}{\gamma x^2}\gamma x^2 + 2\,\frac{\gamma^2 f}{\gamma x . \gamma y} \cdot \gamma x \cdot \gamma y + \frac{\gamma^2 f}{\gamma y^2}\gamma y^2 + 2\,\frac{\gamma^3 f}{\gamma x^2 . \gamma y} \cdot \gamma x^2 \cdot \gamma y\right.$$

$$\left. + 2\,\frac{\gamma^3 f}{\gamma x . \gamma y^2} \cdot \gamma x \cdot \gamma y^2 + \frac{\gamma^4 f}{\gamma x^2 . \gamma y^2}\gamma x^2 \cdot \gamma y^2\right) + \ldots\ldots,$$

gdzie głoski γ oznaczają ilości nieskończenie małe.

Przypuszczając, że

$$n \,.\, \gamma x = h\,, \quad n \,.\, \gamma y = k\,,$$

$$n = \infty\,,$$

i wiedząc, że

$$\left(1 + \frac{h}{n}\right)^n_{n=\infty} = e^h\,, \quad \text{tudzież} \quad \left(1 + \frac{k}{n}\right)^n_{n=\infty} = e^k\,,$$

z powyższego łatwo otrzymamy w granicy:

$$\frac{\lg f(x^{e^h}, y^{e^k})}{\lg f(x, y)}$$

$$= 1 + \left(h \cdot \frac{gf}{gx} + k \cdot \frac{gf}{gy}\right) + \frac{1}{1.2}\left(h^2 \cdot \frac{g^2 f}{gx^2} + 2hk \cdot \frac{g^2 f}{gxgy} + k^2 \cdot \frac{g^2 f}{gy^2}\right)$$

$$+ \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.$$

Wzór ten wyraża związek pomiędzy samemi wielkościami skończonemi i z powodu tego po przejściu do granic ilości nieskończenie małe zniknęły.

Wszystkie wyrazy ostatniego szeregu po kolei pisać łatwo, gdyż prawo tworzenia ich jest zupełnie takie same, jak w szeregu Taylora dla funkcyi dwóch zmiennych. Wskutek tego, symboliczna postać szeregu będzie podobna do tej, jaką ma szereg Taylora

$$\frac{\lg f(x^{e^h}, y^{e^k})}{\lg f(x, y)}$$

$$= 1 + \left(h\frac{gf}{gx} + k\frac{gf}{gy}\right) + \frac{1}{1.2}\left(h\frac{gf}{gx} + k\frac{gf}{gy}\right)^{(2)} + \frac{1}{1.2.3}\left(h\frac{gf}{gx} + k\frac{gf}{gy}\right)^{(3)}$$

$$+ \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.$$

Dla prawdziwości tego wzoru koniecznem i wystarczającem będzie, gdy napisany szereg jest zbieżnym.

Widzimy, że rachunek wykładniczkowy dla funkcyj dwóch zmiennych niezależnych wprowadza szeregi nieskończone, należące do typu innego, aniżeli w rachunku różniczkowym. Jednakże postać zewnętrzna szeregów w obu rachunkach pozostaje podobną. W napisanym wyżej wzorze możemy zrobić zamiany głosek h na x, k na y i odwrotnie, będzie wówczas:

$$\frac{\lg f(h^{e^x}, k^{e^y})}{\lg f(h, k)} = 1 + \left[x\left(\frac{gf}{gx}\right)_h + y\left(\frac{gf}{gy}\right)_k\right]$$

$$+ \frac{1}{1.2}\left[x\left(\frac{gf}{gx}\right)_h + y\left(\frac{gf}{gy}\right)_k\right]^{(2)} + \frac{1}{1.2.3}\left[x\left(\frac{gf}{gx}\right)_h + y\left(\frac{gf}{gy}\right)_k\right]^{(3)} + \;.\;.\;.\;.$$

Jestto zmieniona postać poprzedniego szeregu; ilości h i k oznaczają pewne stałe, x i y zmienne; $\left(\frac{gf}{gx}\right)_h$, $\left(\frac{gf}{gy}\right)_k$ znaczy to, że nasamprzód trzeba znaleść nadpochodne $\frac{gf}{gx}$, tudzież $\frac{gf}{gy}$, a dopiero potem podstawić h na miejsce x, oraz k na miejsce y.

Podobnie, jak dla funkcyi jednej zmiennej niezależnej, moglibyśmy napisać ostatni szereg w postaci iloczynu nieskończonego; rzecz tę, jako mniej ważną i łatwą do wykonania, w wykładzie niniejszym pomijamy.

Przejdziemy teraz do funkcyj trzech zmiennych niezależnych.

Niech będzie dana funkcya

$$u = f(x, y, z).$$

Jako definicyę wykładniczka zupełnego rzędu 1-go przyjmujemy związek następujący:

$$u^{gu} = \lim \left. \frac{f(x^{1+\alpha}, y^{1+\beta}, z^{1+\gamma})}{f(x, y, z)} \right|_{\alpha=0,\ \beta=0,\ \gamma=0} . \tag{31}$$

Oprócz tego, zgodnie z całą teoryą, na poprzedzających stronicach wyłożoną, będziemy mieli dla wykładniczków częściowych rzędu 1-go:

$$u^{\frac{gu}{gx} gx} = \lim \left. \frac{f(x^{1+\alpha}, y, z)}{f(x, y, z)} \right|_{\alpha=0} , \tag{32}$$

$$u^{\frac{gu}{gy} gy} = \lim \left. \frac{f(x, y^{1+\beta}, z)}{f(x, y, z)} \right|_{\beta=0} , \tag{33}$$

$$u^{\frac{gu}{gz} gz} = \lim \left. \frac{f(x, y, z^{1+\gamma})}{f(x, y, z)} \right|_{\gamma=0} , \tag{34}$$

oraz dla wykładniczków częściowych rzędu 2-go będzie:

$$u^{\frac{g^2u}{gx\, gy} gx\, gy} = \lim \left[\frac{f(x^{1+\alpha}, y^{1+\beta}, z)}{f(x, y^{1+\beta}, z)} : \frac{f(x^{1+\alpha}, y, z)}{f(x, y, z)} \right]_{\alpha=0,\ \beta=0} , \tag{35}$$

$$u^{\frac{g^2u}{gx\, gz} gx\, gz} = \lim \left[\frac{f(x^{1+\alpha}, y, z^{1+\gamma})}{f(x, y, z^{1+\gamma})} : \frac{f(x^{1+\alpha}, y, z)}{f(x, y, z)} \right]_{\alpha=0,\ \gamma=0} , \tag{36}$$

$$u^{\frac{g^2u}{gy\, gz} gy\, gz} = \lim \left[\frac{f(x, y^{1+\beta}, z^{1+\gamma})}{f(x, y, z^{1+\gamma})} : \frac{f(x, y^{1+\beta}, z)}{f(x, y, z)} \right]_{\beta=0,\ \gamma=0} . \tag{37}$$

Z powyższych równań wypadają takie związki dla nadpochodnych:

$$(38)\quad \left\{\begin{aligned} u^{\frac{g^2u}{gx\,gy}} &= \lim\left[\frac{f(x^{1+\alpha}, y^{1+\beta}, z)\,.\,f(x, y, z)}{f(x, y^{1+\beta}, z)\,.\,f(x^{1+\alpha}, y, z)}\right]^{\frac{1}{\alpha\beta}}_{\alpha=0,\ \beta=0}, \\ u^{\frac{g^2u}{gx\,gz}} &= \lim\left[\frac{f(x^{1+\alpha}, y, z^{1+\gamma})\,.\,f(x, y, z)}{f(x, y, z^{1+\gamma})\,.\,f(x^{1+\alpha}, y, z)}\right]^{\frac{1}{\alpha\gamma}}_{\alpha=0,\ \gamma=0}, \\ u^{\frac{g^2u}{gy\,gz}} &= \lim\left[\frac{f(x, y^{1+\beta}, z^{1+\gamma})\,.\,f(x, y, z)}{f(x, y, z^{1+\gamma})\,.\,f(x, y^{1+\beta}, z)}\right]^{\frac{1}{\beta\gamma}}_{\beta=0,\ \gamma=0}. \end{aligned}\right.$$

Z symetrycznego kształtu wyżej napisanych związków, jako też ze sposobów tworzenia się, łatwo zauważyć, że

$$\frac{g^2u}{gx\,gy} = \frac{g^2u}{gy\,gx},\quad \frac{g^2u}{gx\,gz} = \frac{g^2u}{gz\,gx},\quad \frac{g^2u}{gy\,gz} = \frac{g^2u}{gz\,gy}.$$

Jakim sposobem znajdują się wartości granic (38), o tem mówiliśmy już szczegółowo, mając funkcye dwóch zmiennych niezależnych. Sposób postępowania był objaśniony na przykładzie; w przypadku trzech zmiennych niezależnych metoda pozostanie bez zmiany.

Dalej, dla wykładniczka częściowego rzędu 3-go mamy

$$(39)\quad u^{\frac{g^3u}{gx\,gy\,gz}gx\,gy\,gz} = \lim\left[\frac{f(x^{1+\alpha}, y^{1+\beta}, z^{1+\gamma})\,.\,f(x, y, z^{1+\gamma})}{f(x, y^{1+\beta}, z^{1+\gamma})\,.\,f(x^{1+\alpha}, y, z^{1+\gamma})} : \frac{f(x^{1+\alpha}, y^{1+\beta}, z)\,.\,f(x, y, z)}{f(x, y^{1+\beta}, z)\,.\,f(x^{1+\alpha}, y, z)}\right]_{\substack{\alpha=0\\ \beta=0\\ \gamma=0}}.$$

Drugą stronę powyższego otrzymaliśmy z (35), kładąc we wszystkich wyrazach $z^{1+\gamma}$ zamiast z i następnie dzieląc przez wartość początkową całego ułamku.

Dla nadpochodnej rzędu 3-go z równania (39) otrzymamy

$$u^{\frac{g^3u}{gx\,gy\,gz}} = \lim\left[\frac{f(x^{1+\alpha}, y^{1+\beta}, z^{1+\gamma})\,.\,f(x, y, z^{1+\gamma})\,.\,f(x, y^{1+\beta}, z)\,f(x^{1+\alpha}, y, z)}{f(x, y^{1+\beta}, z^{1+\gamma})\,.\,f(x^{1+\alpha}, y, z^{1+\gamma})\,.\,f(x^{1+\alpha}, y^{1+\beta}, z)\,.\,f(x, y, z)}\right]^{\frac{1}{\alpha\beta\gamma}}_{\substack{\alpha=0\\ \beta=0\\ \gamma=0}}.$$

Z symetrycznego kształtu ostatniego równania łatwo wywnioskować, że

$$\frac{g^3 u}{gx\, gy\, gz} = \frac{g^3 u}{gy\, gx\, gz} = \frac{g^3 u}{gy\, gz\, gx} = \frac{g^3 u}{gz\, gx\, gy} = \text{etc.}$$

Ażeby znaleźć wartość granicy, która odpowiada nadpochodnej $\frac{g^3 u}{gx\, gy\, gz}$, należy nasamprzód szukać granicy względem α tak, jakby β i γ były ilości stałe; następnie szukać trzeba granicy, po raz drugi, względem β, uważając jeszcze γ za stałą, nakoniec po raz trzeci znajdujemy granicę względem γ. Postępowanie takie w praktyce nie nasuwa żadnych trudności.

Mnożąc odpowiedniemi stronami równania (32), (33), (34), (35), (36), (37), i (39), będziemy mieli następujący związek

$$u^{\frac{gu}{gx} gx + \frac{gu}{gy} gy + \frac{gu}{gz} gz + \frac{g^2 u}{gx gy} gx\, gy + \frac{g^2 u}{gx gz} gx\, gz + \frac{g^2 u}{gy gz} gy\, gz + \frac{g^3 u}{gx\, gy\, gz} gx\, gy\, gz}$$

$$= \lim \frac{f\,(x^{1+\alpha}, y^{1+\beta}, z^{1+\gamma})}{f\,(x, y, z)}\,.$$

Porównawszy ostatnie równanie z (31), widzimy, że

$$(40)\qquad \begin{aligned} gu = \frac{gu}{gx} gx + \frac{gu}{gy} gy + \frac{gu}{gz} gz + \frac{g^2 u}{gx\, gz} gx\, gz + \frac{g^2 u}{gx gy} gx\, gy \\ + \frac{g^2 u}{gy gz} gy\, gz + \frac{g^3 u}{gx\, gy\, gz} gx\, gy\, gz\,. \end{aligned}$$

Jestto wartość wykładniczka zupełnego rzędu 1-go funkcyi trzech zmiennych niezależnych. Ten sam wzór można także otrzymać wprost z (41, IV), przechodząc do granic, będzie w tym przypadku

$$gF = g_x\, F + g_y\, F + g_z\, F + g^2{}_{x,y}\, F + g^2{}_{x,z}\, F + g^2{}_{y,z}\, F + g^3{}_{x,y,z}\, F$$

lub, pisząc bardziej szczegółowo, będziemy mieć

$$\begin{aligned} gF = \frac{gF}{gx} gx + \frac{gF}{gy} gy + \frac{gF}{gz} gz + \frac{g^2 F}{gx\, gy} gx\, gy + \frac{g^2 F}{gx gz} gx\, gz \\ + \frac{g^2 F}{gy gz} gy\, gz + \frac{g^3 F}{gx\, gy\, gz} gx\, gy\, gz\,. \end{aligned}$$

Wzór ten przedstawia zupełnie to samo, co wzór (40), otrzymaliśmy go jednak z odpowiedniego wzoru teoryi przyrostków wykładniczych, przy pomocy granic.

Podobnie, z wzoru (42, IV) w granicy otrzymamy:

$$
\begin{aligned}
g^2F = {} & g^2{}_{x^{(2)}}F + 2g^2{}_{x,y}F + g^2{}_{y^{(2)}}F + 2g^2{}_{x,z}F + 2g^2{}_{y,z}F + g^2{}_{z^{(2)}}F \\
& + 2g^3{}_{x^{(2)},y}F + 2g^3{}_{x^{(2)},z}F + 2g^3{}_{x,y^{(2)}}F + 2g^3{}_{y^{(2)},z}F + 2g^3{}_{x,z^{(2)}}F + 2g^3{}_{y,z^{(2)}}F \\
& + 6g^3{}_{x,y,z}F + g^4{}_{x^{(2)},y^{(2)}}F + g^4{}_{x^{(2)},z^{(2)}}F + g^4{}_{y^{(2)},z^{(2)}}F + 4g^4{}_{x^{(2)},y,z}F \\
& + 4g^4{}_{x,y^{(2)},z}F + 4g^4{}_{x,y,z^{(2)}}F + 2g^5{}_{x^{(2)},y^{(2)},z}F + 2g^5{}_{x^{(2)},y,z^{(2)}}F \\
& + 2^5g_{x,y^{(2)},z^{(2)}}F + g^6{}_{x^{(2)},y^{(2)},z^{(2)}}F.
\end{aligned}
$$

lub bardziej szczegółowo

$$
(41)\quad \left\{
\begin{aligned}
g^2F = {} & \frac{g^2F}{gx^2}gx^2 + 2\frac{g^2F}{gx\,gy}gx\,gy + \frac{g^2F}{gy^2}gy^2 + 2\frac{g^2F}{gx\,gz}gx\,gz \\
& + 2\frac{g^2F}{gy\,gz}gy\,gz + \frac{g^2F}{gz^2}gz^2 + 2\frac{g^3F}{gx^2gy}gx^2\,gy + 2\frac{g^3F}{gx^2gz}gx^2\,gz \\
& + 2\frac{g^3F}{gxgy^2}gx\,gy^2 + 2\frac{g^3F}{gy^2gz}gy^2\,gz + 2\frac{g^3F}{gxgz^2}gx\,gz^2 \\
& + 2\frac{g^3F}{gygz^2}gy\,gz^2 + 6\frac{g^3F}{gx\,gy\,gz}gx\,gy\,gz + \frac{g^4F}{gx^2\,gy^2}gx^2\,gy^2 \\
& + \frac{g^4F}{gx^2\,gz^2}gx^2\,gz^2 + \frac{g^4F}{gy^2\,gz^2}gy^2\,gz^2 + 4\frac{g^4F}{gx^2\,gy\,gz}gx^2\,gy\,gz \\
& + 4\frac{g^4F}{gx\,gy^2\,gz}gx\,gy^2\,gz + 4\frac{g^4F}{gx\,gy\,gz^2}gx\,gy\,gz^2 \\
& + 2\frac{g^5F}{gx^2\,gy^2\,gz}gx^2\,gy^2\,gz + 2\frac{g^5F}{gx^2\,gy\,gz^2}gx^2\,gy\,gz^2 \\
& + 2\frac{g^5F}{gx\,gy^2\,gz^2}gx\,gy^2\,gz^2 + \frac{g^6F}{gx^2\,gy^2\,gz^2}gx^2\,gy^2\,gz^2.
\end{aligned}
\right.
$$

Tym sposobem otrzymaliśmy wartość wykładniczka zupełnego rzędu 2-go funkcyi trzech zmiennych niezależnych. Wykładniczki zupełne rzędów wyższych mają postać więcej zawiłą, wskutek tego ograniczymy się tylko przypadkami, roztrząsanymi powyżej.

Jeżeli będzie jedna tylko zmienna niezależna t

$$u = F(x, y, z),$$

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t),$$

natenczas wszystkie wzory upraszczają się znacznie.

W rzeczy samej, wszystkie wyrazy równania (40) będziemy mogli podzielić przez gt

$$\frac{gu}{gt} = \frac{gu}{gx}\frac{gx}{gt} + \frac{gu}{gy}\frac{gy}{gt} + \frac{gu}{gz}\frac{gz}{gt} + \frac{g^2u}{gx\,gz} \cdot \frac{gx}{gt} \cdot gz$$

$$+ \frac{g^2u}{gx\,gy} \cdot \frac{gx}{gt} \cdot gy + \ldots$$

Ponieważ jednak w tym szczególnym przypadku wzór powyższy wyraża związek pomiędzy samemi ilościami skończonemi z przyczyny, że pierwsza strona $\frac{gu}{gt}$ jest ilością skończoną, będzie więc tylko

$$\frac{gu}{gt} = \left(\frac{gu}{gx}\right) \cdot \frac{gx}{gt} + \left(\frac{gu}{gy}\right) \cdot \frac{gy}{gt} + \left(\frac{gu}{gz}\right) \cdot \frac{gz}{gt}.$$

Pozostałe wyrazy, jako ilości nieskończenie małe, zniknąć muszą.

Dalej, wzór (33, IV) możemy napisać w kształcie

$$\frac{\lg F\left(x^{(1+\gamma x)^n}, y^{(1+\gamma y)^n}, z^{(1+\gamma z)^n}\right)}{\lg F(x, y, z)}$$

$$= 1 + n\left(\frac{\gamma F}{\gamma x}\gamma x + \frac{\gamma F}{\gamma y}\gamma y + \frac{\gamma F}{\gamma z}\gamma z + \frac{\gamma^2 F}{\gamma x \gamma y}\gamma x\,\gamma y + \ldots\right)$$

$$+ \frac{n(n-1)}{1.2}\left(\frac{\gamma^2 F}{\gamma x^2}\gamma x^2 + 2\frac{\gamma^2 F}{\gamma x \gamma y}\gamma x\,\gamma y + \frac{\gamma^2 F}{\gamma y^2}\gamma y^2 + 2\frac{\gamma^2 F}{\gamma x \gamma z}\gamma x\,\gamma z\right.$$

$$\left. + 2\frac{\gamma^2 F}{\gamma y \gamma z}\gamma y\,\gamma z + \frac{\gamma^2 F}{\gamma z^2}\gamma z^2 + \ldots\right) + \ldots$$

Zakładamy następnie:

$$n \,.\, \gamma x = h, \quad n \,.\, \gamma y = k, \quad n \,.\, \gamma z = l,$$

$$n=\infty\,;\quad \gamma x,\ \gamma y,\ \gamma z\ \text{ są ilości nieskończenie małe,}$$

dalej wiemy, że

$$\left(1+\frac{h}{n}\right)^n_{n=\infty}=e^h,\ \left(1+\frac{k}{n}\right)^n_{n=\infty}=e^k,\ \left(1+\frac{l}{n}\right)^n_{n=\infty}=e^l.$$

Wskutek tego, gdy przejdziemy do granic, z ostatniego wzoru wypadnie

$$\frac{\lg F(x^{e^h}, y^{e^k}, z^{e^l})}{\lg F(x,y,z)}$$

$$=1+\left(h\frac{gF}{gx}+k\frac{gF}{gy}+l\,\frac{gF}{gz}\right)+\frac{1}{1.2}\left(h^2\frac{g^2F}{gx^2}+2hk\,\frac{g^2F}{gx\,gy}\right.$$

$$\left.+k^2\frac{g^2F}{gy^2}+2hl\,\frac{g^2F}{gx\,gz}+2kl\,\frac{g^2F}{gy\,gz}+l^2\,\frac{g^2F}{gz^2}\right)+\ldots.$$

Postać symboliczna wyżej napisanego szeregu będzie taka:

$$\frac{\lg F(x^{e^h}, y^{e^k}, z^{e^l})}{\lg F(x,y,z)}$$

$$=1+\left(h\frac{gF}{gx}+k\frac{gF}{gy}+l\,\frac{gF}{gz}\right)+\frac{1}{1.2}\left(h\frac{gF}{gx}+k\frac{gF}{gy}+l\,\frac{gF}{gz}\right)^{(2)}$$

$$+\frac{1}{1.2.3}\left(h\frac{gF}{gx}+k\frac{gF}{gy}+l\,\frac{gF}{gz}\right)^{(3)}+\ldots..$$

Jeżeli zrobimy zamianę głosek h na x i odwrotnie, k na y i odwrotnie, tudzież l na z i naodwrót, natenczas otrzymamy nową postać szeregu:

$$\frac{\lg F(h^{e^x}, k^{e^y}, l^{e^z})}{\lg F(h,k,l)}$$

$$=1+\left[x\left(\frac{gF}{gx}\right)_h+y\left(\frac{gF}{gy}\right)_k+z\left(\frac{gF}{gz}\right)_l\right]+\frac{1}{1.2}\left[x\left(\frac{gF}{gx}\right)_h+y\left(\frac{gF}{gy}\right)_k+z\left(\frac{gF}{gz}\right)_l\right]^{(2)}$$

$$+\frac{1}{1.2.3}\left[x\left(\frac{gF}{gx}\right)_h+y\left(\frac{gF}{gy}\right)_k+z\left(\frac{gF}{gz}\right)_l\right]^{(3)}+\ldots..$$

x, y, z oznaczają wielkości zmienne, h, k, l pewne stałe.

§ 3. *Objaśnienie geometryczne.*

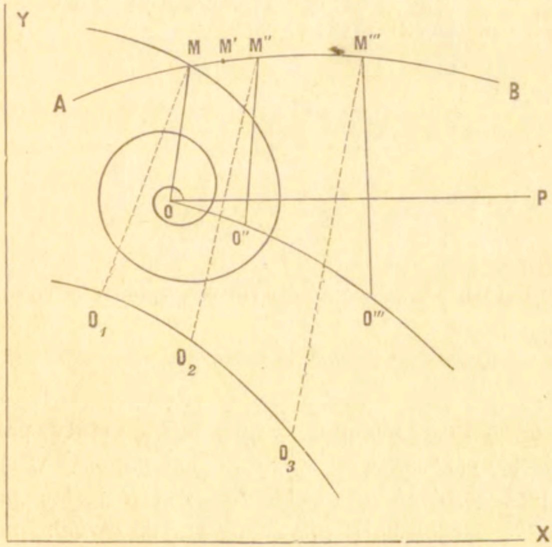
Rachunek wykładniczkowy przedstawia zmienność innego rodzaju, aniżeli rachunek różniczkowy. Wiemy, że równanie

(1) $$y = f(x) \quad \text{lub} \quad x = \varphi(y)$$

geometrycznie wyobraża krzywą, której rzędną jest y, a odciętą x. Dajmy na to, że krzywa powyższa jest wykreślona na figurze w kształcie linii AB i niech będzie punkt $M(x, y)$ wzięty na krzywej AB.

Oznaczmy jeszcze drugi punkt M' nieskończenie bliski względem M.

Dla punktu M' współrzędne x i y ulegną pewnej zmianie czyli otrzymają odpowiednie przyrostki Δx i Δy.



Jednak zamiast zwiększać y o przyrostek Δy, możemy y mnożyć przez y^β; tak samo zamiast nadawania przyrostka Δx, można pomnożyć x przez x^α, byłeby tylko α i β były ilości nieskończenie małe, znikające razem z Δx i Δy.

Takim sposobem zmienność y przedstawi równanie

$$y^\beta = \frac{f(x^{1+\alpha})}{f(x)},$$

oraz zmienność wielkości x wyrazi się równaniem

$$x^\alpha = \frac{\varphi\,(y^{1+\beta})}{\varphi\,(y)} \,.$$

Równania powyższe możemy także pisać w kształcie

tudzież

$$\left.\begin{aligned} y^{\frac{\beta}{\alpha}} &= \left[\frac{f\,(x^{1+\alpha})}{f\,(x)}\right]^{\frac{1}{\alpha}} \\ x^{\frac{\alpha}{\beta}} &= \left[\frac{\varphi\,(y^{1+\beta})}{\varphi\,(y)}\right]^{\frac{1}{\beta}} . \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Są to dwa odmienne stany jednego i tego samego równania. Oba otrzymać możemy z danego związku (1); wskutek tego możemy rozważać tylko pierwsze z równań (2), pisząc krócej

$$y^{\frac{\beta}{\alpha}} = U \,,$$

lub

(3) $$e^{\frac{\beta}{\alpha} \cdot \lg y} = U \,.$$

Równanie ostatnie jest szczególnym przypadkiem równania ogólnego

(4) $$e^{\omega \lg y} = R \,,$$

w którem ω i R są ilości zmienne, a $\lg y$ pewien stały parametr. Wiadomo, że równanie (4) przedstawia *spiralnę logarytmową* w spółrzędnych biegunowych; ω jest wielkość kąta czyli łuk, zaś R jestto promień wodzący punktu bieżącego. Jeżeli zatrzymamy uwagę na dwóch punktach M i M', nieskończenie zbliżających się, natenczas, przeszedłszy do granicy, zauważymy, że ilości α i β znikają, lecz pomimo to ich wzajemny stosunek nie zniknie. Równanie (3) staje się wówczas takiem:

$$e^{\frac{gy}{gx} \cdot \lg y} = W \,,$$

albowiem granicą stosunku $\frac{\beta}{\alpha}$ jest zawsze $\frac{gy}{gx}$; głoską W oznaczyliśmy granicę ilości U. Widzimy więc, że dla punktu wspólnego pomiędzy spiralną i krzywą AB mamy:

$$\text{łuk} \quad \omega = \frac{gy}{gx},$$

$$\text{promień} \quad R = W,$$

$$\text{parametr równa się} \quad \lg y.$$

Mówiąc innemi słowy nadpochodna $\frac{gy}{gx}$ geometrycznie oznacza łuk, odpowiadający kątowi MOP, funkcyał wykładniczkowy W ma znaczenie promienia MO. Logarytm zasady czyli rzędnej y oznacza stały parametr lub pewne znamię spiralnej, zapomocą którego dana spiralna odróżnia się od innych tym podobnych linij.

Asymptotyczny punkt 0 jest biegunem spiralnej. Tym sposobem, jakikolwiek punkt, dowolnie wzięty na krzywej AB, posiadać będzie odpowiedni sobie biegun, który łatwo wykreślić, znajdując dla każdego punktu zosobna wartość nadpochodnej $\frac{gy}{gx}$ tudzież wartość funkcyału $e^{\frac{gy}{gx}\lg y}$. Dla punktu M znajdziemy biegun O, dla punktu M'' będzie O'', dla M''' będzie O''' i t. d.

Miejsce geometryczne wszystkich punktów O, O'', O''', ... będzie pewna krzywa, którą nazywać możemy *biegunową rzędu 1-go*. Punktowi M będzie odpowiadać jeszcze druga spiralna, podobna do pierwszej, lecz posiadająca inny punkt asymptotyczny. Dla tej drugiej spiralnej będzie

$$\text{łuk} \quad \omega = \frac{g^2y}{gx^2},$$

$$\text{promień} \quad W_2 = e^{\frac{g^2y}{gx^2}\lg y},$$

$$\text{parametr pozostaje bez zmiany} \quad \lg y.$$

Dla punktu M będzie drugi biegun O_1, dla M'' biegun O_2 dla M'' biegun O_3 i t. d. Miejsce geometryczne wszystkich biegunów O_1, O_2, O_3, ... znowu przedstawia pewną krzywą, którą nazywać możemy *biegunową rzędu 2-go*. Podobnie, biorąc dla danych punktów wartości nadpochodnej rzędu 3-go, będziemy w możności wykreślić *biegunową rzędu 3-go*, i t. d.

Tak więc, rachunek wykładniczkowy ze sposobu widzenia geometrycznego daje środek kreślenia pewnych linij, które pochodzą z danej krzywej. Gdybyśmy jednak pragnęli otrzymać równania biegunowych, to zadanie takie wogóle należeć będzie do bardzo trudnych. Nie możemy także powiedzieć, jakie praktyczne zastosowania będą miały linie biegunowe, lecz wiemy, że nauka rozumowa nie liczy się z zastosowaniami do praktyki i nie zwraca uwagi na tę ostatnią.

VI. Rachunki odwrotne.

Zadaniem rachunku odwrotnego względem rachunku przyrostków wykładniczych skończonych będzie znalezienie funkcyi pierwotnej, której przyrost wykładniczy jest wiadomy.

Jako symbol wspomnianego rachunku możemy wziąść głoskę Π. Takim sposobem, mając

$$\Gamma f = \varphi (x),$$

będziemy mieli

$$\Pi \varphi (x) = f (x, \Gamma x).$$

Podobnie, dla funkcyj wielu zmiennych, jeżeli mamy dane

$$\Gamma f = \psi (x, y, z, \ldots).$$

natenczas w rachunku odwrotnym będziemy pisać

$$\Pi \psi (x, y, z, \ldots) = F (x, y, z, \ldots, \Gamma x, \Gamma y, \Gamma z, \ldots).$$

Najogólniejszem zadaniem będzie ten przypadek, gdy przyrostki wykładnicze związane są między sobą równaniem. Tak naprzykład, może być dane równanie z jedną zmienną niezależną:

$$f (x, y, \Gamma x, \Gamma y) = 0$$

i trzeba znaleźć funkcyę y taką, ażeby równanie zamieniło się na tożsamość.

Może być także dane równanie rzędu n-go z jedną zmienną niezależną w kształcie:

$$\psi\,(x, y, \Gamma x, \Gamma y, \Gamma^2 y, \Gamma^3 y, \ldots, \Gamma^n y) = 0\,;$$

zagadnienie będzie zasadzać się na tem, ażeby znaleźć funkcyę y która zamienia równanie, napisane wyżej, na tożsamość.

W przypadku wielu zmiennych niezależnych ogólny kształt równania jest taki:

$$\Phi\,(x, y, z, \ldots, f, \Gamma x, \Gamma y, \Gamma z, \ldots, \Gamma f, \Gamma^2 f, \Gamma^3 f, \ldots, \Gamma^n f) = 0\,,$$

gdzie f oznacza funkcyę wszystkich zmiennych $x, y, z, \ldots$ Należy znaleźć f w takim kształcie, ażeby powyższe równanie zamieniło się na tożsamość. Zamiast jednego równania może być także dany cały układ równań.

§ 1. *Rachunek zasad.*

Przejdziemy w dalszym ciągu do rachunku nieskończenie małych. Rachunek odwrotny względem wykładniczkowego nazywać będziemy *rachunkiem zasad* lub *rachunkiem zasadowym.* Zagadnienie tego rachunku będzie polegać na tem, ażeby znaleźć funkcyę pierwotną czyli *zasadę,* mając dany *wykładniczek.* Symbolem rachunku zasadowego będzie $\Big\rceil$; znak ten utworzyliśmy z początkowej litery słowa „*zasada*“.

Przy pomocy umówionego wyżej znaku piszemy

$$y = \Big\rceil f\,(x)\, gx\,,$$

wyrażając tym sposobem, że zasadą dla wykładniczka

$$f\,(x)\,.\, gx$$

jest wielkość y. Funkcya $f\,(x)$ oznacza nadpochodną.

Możemy nasamprzód dowieść, że jakikolwiek byłby kształt funkcyi $f\,(x)$, zasada zawsze istnieć będzie.

W rzeczy samej, widzieliśmy na poprzedzających stronicach, że

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y \lg y}{x \lg x} \cdot \frac{gy}{gx},$$

będzie więc

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y \lg y}{x \lg x} \cdot f(x)$$

czyli

$$\frac{dy}{y \lg y} = \frac{f(x)}{x \lg x} dx.$$

Całkując ostatnie równanie, otrzymamy

$$\lg \lg y = \int \frac{f(x)}{x \lg x} dx$$

czyli

(1) $$y = e^{e^{\int \frac{f(x)}{x \lg x} dx}}.$$

Ponieważ wiemy z wykładu rachunku całkowego, że całka

$$\int \frac{f(x)}{x \lg x} dx$$

istnieje zawsze, chociażbyśmy nawet nie umieli znaleźć jej pod postacią skończoną, wnioskujemy stąd, że zasada y zawsze istnieć musi.

Pierwsze wzory rachunku zasadowego otrzymamy, odwracając odpowiednie wzory, wzięte z rachunku wykładniczkowego. Tak więc będzie

$$ga = 0, \qquad a = \text{const.},$$

$$g\,(a+x) = \frac{x \lg x \, gx}{(a+x) \lg (a+x)}, \qquad \Big\rceil \frac{x \lg x \, gx}{(a+x) \lg (a+x)} = (a+x)^c,$$

$$g\,(ax) = \frac{\lg x}{\lg a x} gx, \qquad \Big\rceil \frac{\lg x}{\lg a x} gx = (ax)^c.$$

$$g\,(x^m) = gx, \qquad \Big\rceil gx = x^c.$$

$$g\,(\lg x) = \frac{gx}{\lg \lg x}\,, \qquad \Big\rceil \frac{gx}{\lg \lg x} = (\lg x)^c\,.$$

$$g\,(a^x) = \lg x\; gx\,, \qquad \Big\rceil \lg x\; gx = c^x\,.$$

$$g\,(\sin x) = \frac{x \operatorname{cotg} x \lg x}{\lg \sin x}\, gx\,, \qquad \Big\rceil \frac{x \operatorname{cotg} x \lg x}{\lg \sin x}\, gx = (\sin x)^c\,.$$

$$g\,(\cos x) = -\frac{x \operatorname{tg} x \lg x}{\lg \cos x}\, gx\,, \qquad \Big\rceil \frac{-x \operatorname{tg} x \lg x}{\lg \cos x}\, gx = (\cos x)^c\,.$$

$$g\,(\operatorname{tg} x) = \frac{2x \lg x}{\sin 2x \lg \operatorname{tg} x}\, gx\,, \qquad \Big\rceil \frac{2x \lg x}{\sin 2x \lg \operatorname{tg} x}\, gx = (\operatorname{tg} x)^c\,.$$

$$g\,(\operatorname{cotg} x) = -\frac{2x \lg x}{\sin 2x \lg \operatorname{cotg} x}\, gx\,, \qquad \Big\rceil \frac{-2x \lg x}{\sin 2x \lg \operatorname{cotg} x}\, gx = (\operatorname{cotg} x)^c\,.$$

$$g\,(\sec x) = \frac{x \lg x \operatorname{tg} x}{\lg \sec x}\, gx\,, \qquad \Big\rceil \frac{x \lg x \operatorname{tg} x}{\lg \sec x}\, gx = (\sec x)^c\,.$$

$$g\,(\operatorname{cosec} x) = -\frac{x \lg x \operatorname{cotg} x}{\lg \operatorname{cosec} x}\, gx\,, \qquad \Big\rceil \frac{-x \lg x \operatorname{cotg} x}{\lg \operatorname{cosec} x}\, gx = (\operatorname{cosec} x)^c\,.$$

$$g\,(\operatorname{arc} \sin x) = \frac{x \lg x \,.\, gx}{\sqrt{1-x^2} \operatorname{arc} \sin x \lg \operatorname{arc} \sin x}\,, \qquad \Big\rceil \frac{x \lg x \,.\, gx}{\sqrt{1-x^2} \operatorname{arc} \sin x \lg \operatorname{arc} \sin x}$$

$$= (\operatorname{arc} \sin x)^c\,.$$

$$g\,(\operatorname{arc} \cos x) = \frac{-x \lg x\; gx}{\sqrt{1-x^2}\,.\, \operatorname{arc} \cos x \lg \operatorname{arc} \cos x}\,, \qquad \Big\rceil \frac{-x \lg x\; gx}{\sqrt{1-x^2} \operatorname{arc} \cos x \lg \operatorname{arc} \cos x}$$

$$= (\operatorname{arc} \cos x)_c\,.$$

$$g\,(\operatorname{arc} \operatorname{tg} x) = \frac{x \lg x \,.\, gx}{(1+x^2) \operatorname{arc} \operatorname{tg} x \lg \operatorname{arc} \operatorname{tg} x}\,, \qquad \Big\rceil \frac{x \lg x \,.\, gx}{(1+x^2) \operatorname{arc} \operatorname{tg} x \lg \operatorname{arc} \operatorname{tg} x}$$

$$= (\operatorname{arc} \operatorname{tg} x)^c\,.$$

We wszystkich wzorach powyższych c oznacza stałą dowolną. Oprócz tego, stosując wzór (1) możemy jeszcze łatwo znaleźć

$$\rceil\!\lfloor (\lg x)^a \,.\, gx = e^{ce^{\frac{1}{a}(\lg x)^a}}, \quad \rceil\!\lfloor xe^{ax} \lg x \,.\, gx = e^{ce^{\frac{1}{a}e^{ax}}},$$

$$\rceil\!\lfloor x \lg^2 x \,.\, gx = e^{ce^{x\lg x - x}}, \quad \rceil\!\lfloor x \sin x \lg x \,.\, gx = e^{ce^{-\cos x}},$$

$$\rceil\!\lfloor x \cos x \lg x \,.\, gx = e^{ce^{\sin x}}, \quad \rceil\!\lfloor a \,.\, gx = e^{c(\lg x)^a}, \quad \rceil\!\lfloor x^a \lg x \,.\, gx = e^{ce^{\frac{x^a}{a}}}.$$

Tak prosty związek rachunku zasadowego z rachunkiem całkowym istnieje tylko w tym przypadku, gdy pod znakiem $\rceil\!\lfloor$ mamy napisaną funkcyę nadpochodną rzędu 1-go. Jeżeli zaś zasada będzie dana w kształcie

$$y = \rceil\!\lfloor \varphi(x) \,.\, gx^m,$$

gdzie $\varphi(x)$ oznacza nadpochodną rzędu m-go ($m > 1$), natenczas związek zasady z rachunkiem całkowym będzie bardzo zawiły i wyrazi się równaniem różniczkowem, którego całkować nie umiemy. Tak naprzykład, gdy $m=2$, wówczas $\varphi(x)$ przedstawiać będzie nadpochodną rzędu 2-go. Widzieliśmy w rozdziale V (wzór 13), że w tym przypadku będzie:

$$(2) \qquad \varphi(x) = \frac{x^2 y \lg^2 x \dfrac{d^2y}{dx^2} + xy\lg^2 x \dfrac{dy}{dx} + xy\lg x \dfrac{dy}{dx} - x^2 \lg^2 x \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}{y^2 \lg y}.$$

Ażeby znaleźć zasadę y, trzeba całkować powyższe równanie różniczkowe; niestety, sposoby całkowania są nam tutaj zupełnie nieznane. Odwrotnie, gdybyśmy umieli znaleźć zasadę

$$y = \rceil\!\lfloor \varphi(x) \,.\, gx^2$$

niezależnie od rachunku całkowego, natenczas wiadomym nam będzie sposób całkowania równań różniczkowych, napisanych w kształcie (2).

Ogólniejszem zadaniem rachunku odwrotnego będzie to, gdy mamy dane *równanie wykładniczkowe*

$$(3) \qquad F\left(x, y, \frac{gy}{gx}\right) = 0.$$

Napisane wyżej równanie jest rzędu 1-go, gdyż zawiera nadpochodną rzędu 1-go. Kształt prostszy otrzymamy, rozwiązując (3) względem $\frac{gy}{gx}$, będzie wówczas

$$\frac{gy}{gx} = -\frac{M}{N},$$

czyli

$$M\,gx + N\,gy = 0,$$

M i N oznaczają pewne funkcye zmiennych x i y.

Rozwiązanie równania zawsze przedstawiać się będzie w postaci

$$y = [f(x)]^c,$$

gdzie c stała dowolna.

Może być także równanie rzędu 2-go

$$\Phi\left(x, y, \frac{gy}{gx}, \frac{g^2y}{gx^2}\right) = 0$$

lub wogóle rzędu n-go

$$\Psi\left(x, y, \frac{gy}{gx}, \frac{g^2y}{gx^2}, \frac{g^3y}{gx^3}, \ldots, \frac{g^ny}{gx^n}\right) = 0.$$

Równania o wykładniczkach zupełnych mają kształt podobny do równań o różniczkach zupełnych:

$$X\,gx + \sum_i^{1,\ldots,n} X_i\,gx_i = 0.$$

x jest zmienna zależna, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ zmienne niezależne. $X, X_i, \ldots$ oznaczają pewne funkcye wszystkich zmiennych.

Równania, zawierające nadpochodne częściowe, będą miały kształt

$$F\left(x, x_1, x_2, \ldots, x_n, \frac{gx}{gx_1}, \frac{gx}{gx_2}, \ldots, \frac{gx}{gx_n}, \frac{g^2x}{gx_1\,gx_2}, \frac{g^2x}{gx_1\,gx_3}, \ldots \right.$$
$$\left. \ldots, \frac{g^i\,x}{gx_i\,gx_k\ldots}, \ldots, \frac{g^n\,x}{gx_i\,gx_k\ldots}\right) = 0.$$

Zamiast jednego równania może być także dany cały układ równań.

§ 2. O głównych prawach algorytmii.

W zakończeniu dziełka niniejszego zestawimy najgłówniejsze prawa algorytmu matematycznego. Prawem pierwszorzędnego znaczenia w algorytmii jest *prawo Newtona*. Po raz pierwszy Newton odkrył wzmiankowane prawo w słynnym dwumianie. Według prawa Newtona kształtują się bardzo ważne wzory rachunku różnic, tak naprzykład:

$$f(x+n\Delta x) = f(x) + n\,\Delta f + \frac{n(n-1)}{1.2}\,\Delta^2 f + \ldots + \Delta^n f,$$

$$F(x+n\Delta x,\ y+n\Delta y) = F(x, y) + n\Delta F + \frac{n(n-1)}{1.2}\,\Delta^2 F + \ldots + \Delta^n F,$$

$$\Phi(x+n\Delta x,\ y+n\Delta y,\ z+n\Delta z) = \Phi(x, y, z) + n\,\Delta\Phi + \frac{n(n-1)}{1.2}\,\Delta^2\,\Phi + \ldots$$

$$\ldots + \Delta^n\,\Phi.$$

i t. p.

Podobnie także w teoryi przyrostków wykładniczych spotykamy to samo prawo:

$$\frac{\lg f\left(x^{(1+\Gamma x)^n}\right)}{\lg f(x)} = 1 + n\,\Gamma f + \frac{n(n-1)}{1.2}\,\Gamma^2 f + \ldots + \Gamma^n f,$$

$$\frac{\lg F\left(x^{(1+\Gamma x)^n},\ y^{(1+\Gamma y)^n}\right)}{\lg F(x, y)} = 1 + n\,\Gamma F + \frac{n(n-1)}{1.2}\,\Gamma^2 F + \ldots + \Gamma^n F.$$

i t. p.

Oprócz tego, wiele wzorów tak w rachunku różniczkowym, jak i w rachunku wykładniczkowym zawierają prawo Newtona. Wzorów tych nie będziemy tutaj wymieniać, gdyż bardzo łatwo je wskazać.

Niezależnie od tego, prawo Newtona w rachunkach nieskończonościowych przechodzi w *prawo Taylora*.

Prawo Taylora jest więc drugim ważnem prawem algorytmii i spotyka się we wszystkich szeregach rachunku różniczkowego, jak naprzykład

$$f(x+h) = f(x) + h\,f'(x) + \frac{h^2}{1.2}\,f''(x) + \ldots$$

$$F(x+h, y+k) = F(x, y) + \frac{1}{1}\left(h\frac{dF}{dx} + k\frac{dF}{dy}\right) + \frac{1}{1.2}\left(h\frac{dF}{dx} + k\frac{dF}{dy}\right)^{(2)} + \dots$$

i t. p.
tudzież w rachunku wykładniczkowym

$$\frac{\lg f(x^{e^h})}{\lg f(x)} = 1 + h\,\frac{gf}{gx} + \frac{h^2}{1.2}\,\frac{g^2 f}{gx^2} + \dots,$$

$$\frac{\lg F(x^{e^h}, y^{e^k})}{\lg F(x, y)} = 1 + \frac{1}{1}\left(h\,\frac{gF}{gx} + k\,\frac{gF}{gy}\right) + \frac{1}{1.2}\left(h\,\frac{gF}{gx} + k\,\frac{gF}{gy}\right)^{(2)} + \dots.$$

i t. p.

Dwa wielkie prawa rozumowe, 1) N e w t o n a, 2) T a y l o r a, rządzą wszelkiemi symbolami rachunkowemi we wszystkich gałęziach matematyki.

ZAKOŃCZENIE.

Życząc sobie, ażeby praca niniejsza była dokładnie zrozumianą przez czytelników, dodam jeszcze słów kilka wyjaśnień, dotyczących rozdziałów I i II.

Różnicowaniem nazywamy działanie, wyrażone symbolem Δ. Działanie to, jak widzieliśmy, ma znaczenie następujące: Jeżeli mamy funkcyę jednej zmiennej niezależnej Φ, natenczas, ażeby zastosować różnicowanie do tej funkcyi, kładziemy we wszystkich jej wyrazach $x+\Delta x$ zamiast x i odciągamy wartość początkową

$$\Delta\Phi = \Phi_{x+\Delta x} - \Phi \,.$$

Jestto definicya ogólna. Funkcya Φ może nawet zawierać stały przyrostek Δx, określenie działania pozostanie zawsze tem samem. Tak naprzykład, gdyby było

$$\Phi = F_1\,(x+i\Delta x) + F_2\,(x+k\Delta x) + F_3\,(x+l\Delta x) + \ldots\,,$$

wówczas mamy

$$\Delta\Phi = F_1\,[x + (i+1)\,\Delta x] + F_2\,[x + (k+1)\,\Delta x] + F_3\,[x + (l+1)\,\Delta x] + \ldots$$

$$\ldots - F_1\,(x + i\,\Delta x) - F_2\,(x + k\,\Delta x) - F_3\,(x+l\Delta x) - \ldots\,;$$

Δx jest zawsze ilość stała, zaś $\Delta\Phi$ wyraża wielkość zmienną, przedstawioną powyższem działaniem.

Jeżeli dana będzie funkcya wielu zmiennych niezależnych $x_1, x_2, \ldots x_n$, natenczas rozróżniamy *różnicowanie zupełne* oraz *częściowe*. Różnicę zupełną przedstawiamy tak:

$$\Delta \Psi = \Psi_{x_1+\Delta x_1,\, x_2+\Delta x_2,\, x_3+\Delta x_3, \ldots} - \Psi,$$

co znaczy, że wszystkie zmienne x_i zastąpiliśmy odpowiednio przez $x_i + \Delta x_i$ i następnie odciągnęliśmy pierwotną wartość całej funkcyi Ψ.

Różnicowaniem częściowem nazwaliśmy działanie, odpowiadające ściśle jednej tylko ze zmiennych x_i, tak naprzykład

$$\Delta_{x_i} \Psi = \Psi_{x_i + \Delta x_i} - \Psi,$$

wszystkie inne zmienne, wchodzące w tę samą funkcyę Ψ, uważamy w tym przypadku za ilości stałe. Pomiędzy różnicowaniem zupełnem i różnicowaniami częściowemi istnieje zawsze zależność, którą wyrażamy tak:

$$\Delta \Psi = \sum_{i}^{1,\ldots,n} \Delta_{x_i} \Psi + \sum_{i,k}^{1,\ldots,n} \Delta^2_{x_i, x_k} \Psi + \sum_{i,k,l}^{1,\ldots,n} \Delta^3_{x_i, x_k, x_l} \Psi + \ldots$$

$$\ldots + \Delta^n_{x_1, x_2, \ldots, x_n} \Psi,$$

gdzie sumy odnoszą się tylko do kombinacyj liczb $1, 2, \ldots, n$.

Wzoru tego dowiedliśmy tylko dla przypadków szczególnych, gdy mamy funkcye dwóch lub trzech zmiennych niezależnych. Dowodzenie jest zupełnie takie same dla czterech, pięciu i wogóle dla n zmiennych niezależnych. Poczytując to za rzecz łatwą, pozostawiamy wspomniane dowodzenie samym czytelnikom. Wzór powyższy dla funkcyj dwóch zmiennych niezależnych daje

$$\Delta f = \Delta_x f + \Delta_y f + \Delta^2_{x,y} f.$$

Podobnie, dla różnicy rzędu 2-go będzie

$$\Delta\Delta f = \Delta\,(\Delta_x f + \Delta_y f + \Delta^2_{x,y} f)$$

czyli

$$\Delta^2 f = \Delta_x (\Delta_x f + \Delta_y f + \Delta^2_{x,y} f) + \Delta_y (\Delta_x f + \Delta_y f + \Delta^2_{x,y} f)$$

$$+ \Delta^2_{x,y} (\Delta_x f + \Delta_y f + \Delta^2_{x,y} f).$$

Stąd po wykonaniu wskazanych różnicowań będzie

$$\Delta^2 f = \Delta^2_{x,x} f + \Delta^2_{x,y} f + \Delta^3_{x,x,y} f + \Delta^2_{x,y} f + \Delta^2_{y,y} f + \Delta^3_{x,y,y} f$$
$$+ \Delta^3_{x,x,y} f + \Delta^3_{x,y,y} f + \Delta^4_{x,x,y,y} f,$$

czyli

$$\Delta^2 f = \Delta^2_{x,x} f + 2\,\Delta^2_{x,y} f + \Delta^2_{y,y} f + 2\,\Delta^3_{x,x,y} f + 2\,\Delta^3_{x,y,y} f$$
$$+ \Delta^4_{x,x,y,y} f.$$

Wzór ten inną metodą otrzymaliśmy w rozdziale I.

Chcąc otrzymać różnicę rzędu 3-go, postępujemy znowu podług tych samych prawideł, stosując je do $\Delta^2 f$. Tym sposobem można wyprowadzić wzory wszelkich różnic rzędów wyższych. Tych kilka powyżej podanych wyjaśnień nie uważamy za zbyteczne dla dobrego zrozumienia rozdziału I.

W rozdziale I mówiliśmy kilkakrotnie, że wzór

$$f(x+n\Delta x,\ y+n\Delta y,\ z+n\Delta z, \ldots) = f(x, y, z, \ldots) + n\,\Delta f + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 f$$
$$\text{(Q)} \qquad + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\Delta^3 f + \ldots + \Delta^n f$$

niemoże podlegać żadnej wątpliwości, gdyż jest bezpośrednim następstwem przyjętych definicyj różnic Δf, $\Delta^2 f$, . . . , $\Delta^n f$ i wskutek tego może być uważany za powszechną definicyę wszystkich różnic. Pomimo takiego zapatrywania wzór powyższy bardzo łatwo można ogólnie i ściśle udowodnić. Jeżeli wzór ten jest prawdziwy dla liczby n, natenczas utrzymuje się także i dla liczby $n+1$. W rzeczy samej, stosując symbol Δ do każdego wyrazu równania (Q), otrzymamy

$$\Delta f(x+n\Delta x,\ y+n\Delta y,\ z+n\Delta z, \ldots) = \Delta f + n\,\Delta^2 f + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^3 f$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\Delta^4 f + \ldots + \Delta^{n+1} f,$$

czyli

$$f[x+(n+1)\Delta x,\ y+(n+1)\Delta y,\ z+(n+1)\Delta z, \ldots]$$
$$- f(x+n\Delta x,\ y+n\Delta y,\ z+n\Delta z, \ldots) = \Delta f + n\,\Delta^2 f$$
$$+ \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^3 f + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\Delta^4 f + \ldots + \Delta^{n+1} f.$$

Po wyrugowaniu z ostatniego równania $f(x+n\Delta x, y+n\Delta y, z+n\Delta z, \ldots)$ przy pomocy wzoru (Q) będziemy mieli widocznie

$$f[x+(n+1)\Delta x, y+(n+1)\Delta y, z+(n+1)\Delta z, \ldots] = f(x, y, z, \ldots)$$

$$+ (n+1)\Delta f + \frac{(n+1)n}{1.2}\Delta^2 f + \frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3}\Delta^3 f + \ldots + \Delta^{n+1} f.$$

Dowiedliśmy więc, że wzór (Q) jest prawdziwym zawsze i postać zewnętrzna tego wzoru pozostaje bez zmiany tak dla funkcyj wielu zmiennych niezależnych, jak i dla funkcyj jednej zmiennej.

Widzimy, że *różnicowanie* jest działaniem, które podobnie, jak *różniczkowanie*, możemy stosować do wszelkich funkcyj. Otrzymujemy rachunek równie rozległy, jak rachunek różniczkowy. Współcześni matematycy zajmowali się przeważnie rachunkiem różniczkowym, pozostawili więc odłogiem całą niwę *rachunku różnicowego*. Zdaje się, że ten ostatni rachunek jest narzędziem badań niemniej subtelnem, aniżeli rachunek różniczkowy. Rachunek sum całkowych, sumy całkowe oznaczone w granicach od x_0 do X, teorya równań różnicowych są to wdzięczne pola badań, nadzwyczaj ciekawych i prawie jeszcze nietkniętych ręką uczonych. Łatwość, z jaką obliczają się sumy całkowe oznaczone, wprowadzanie w rachunek odwrotny funkcyj dowolnych peryodycznych są to fakty, zapewniające rachunkowi sum całkowych przyszłość w zastosowaniu do nauk fizycznych. Mniemam, że równania różnicowe, jako zachodzące między ilościami skończonemi, będą przedstawiać większą łatwość w zbadaniu własności i natury całek, nawet gdyby kształty tych całek nie były bliżej znane, jak w teoryi równań różniczkowych. Oprócz tego zdaje się, że teorya równań różnicowych wyjaśni wiele zagadnień, dotyczących samych równań różniczkowych, bowiem od jednych do drugich można zawsze przechodzić zapomocą metody granic.

W końcu uważam za konieczne zrobić pewne sprostowanie wzorów różniczkowych dla funkcyj złożonych

$$f = f(x, y), \quad x = \varphi(t), \quad y = \psi(t).$$

Dla pochodnej rzędu 1-go dowiedliśmy w rozdziale II wzoru

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt};$$

jednak dalej dla pochodnej rzędu 2-go zrobiliśmy nieprawidłowe przejście za pomocą metody granic, której w tym szczególnym przypadku używać nienależy. Różniczkując jeszcze raz wzór, powyżej napisany, łatwo otrzymamy

$$\frac{d^2 f}{dt^2} = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}\right)^{(2)} + \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{d^2 y}{dt^2}.$$

Dwa ostatnie wyrazy zostały nieumyślnie opuszczone w rozdziale II i błąd ten niniejszą uwagą prostujemy.

To samo sprostowanie dotycze także wzoru pochodnej rzędu 2-go dla funkcyi złożonej o trzech zmiennych, który mieści się na stronicy 36.

Z toku naszego rozumowania w rozdziale II i V wypadło bezpośrednio, że tak *różniczki zupełne*, jak i *wykładniczki zupełne* funkcyj wielu zmiennych niezależnych nie przedstawiają sobą wzorów jednorodnych względem nieskończenie małych. Tak naprzykład, różniczka zupełna rzędu 1-go funkcyi dwóch zmiennych niezależnych oprócz dwóch innych wyrazów zawiera także iloczyn w kształcie $A\, dx\, dy$, który jest nieskończenie małą rzędu 2-go. Podobny wyraz zawiera i odpowiedni wykładniczek zupełny. Jeżeli jednak uważać za niewątpliwe następujące twierdzenie:

„*Wiedząc, że stosunki ilości nieskończenie małych jednakowego rzędu mają wartości skończone i dając równanie*

$$M = N,$$

które nie jest tożsamością, powiadam, że gdy M jest funkcyą samych ilości nieskończenie małych rzędu k-go, natenczas i N musi być funkcyą ilości nieskończenie małych tylko rzędu k-go";

to z takiego punktu widzenia wszystkie te wyrazy, które naruszają jednorodność we wzorach różniczek tudzież wykładniczków zupełnych powinny być opuszczane bez nadwerężenia ścisłości, jako nieskończenie małe rzędów wyższych. Nie mając jednakże niewzruszonej pewności co do powyżej wysłowionego twierdzenia, wolałem był wzory różniczek oraz wykładniczków pisać tak, jak się one przedstawiają wprost przy rozumowem wyprowadzeniu. Mniemam, że ta kwestya przez innych matematyków ostatecznie wyświetloną będzie i dowody wyżej omówionego twierdzenia staną się jasne i niewątpliwe.

W rozdziale III powiedziałem, że wzory sum całkowych pod postacią skończoną znane są tylko dla funkcyj wymiernych całkowitych. Zauważyłem jednak później, że w „*Traktacie rachunku różniczkowego i całkowego*" (*Traité élémentaire de calcul différentiel*) S. F. Lacroix r. 1806 są między innemi podane wzory sum dla funkcyj wykładniczych i trygonometrycznych.

KONIEC.

ERRATA.

Str. 3 wiersz ostatni: zamiast $\Delta^3 F = (x + 3\Delta x)$ — etc... powinno być: $\Delta^3 F = F(x + 3\Delta x)$ — etc...

Str. 4 wiersz 10-ty z góry: zamiast $\Delta^k F = \Delta(x + k\Delta x)$ — etc... powinno być $\Delta^k F = F(x + k\Delta x)$ — etc...

Str. 21 wiersz 10-ty z góry: zamiast $a\dfrac{d_k F}{dx^k}$ powinno być $a\dfrac{d^k F}{dx^k}$.

Str. 20 wiersz 19 z góry; zamiast: Twierdzenie, powinno być: Twierdzenia.

Str. 90 wiersz 5 z góry: zamiast $y^{\frac{\beta}{\alpha}}$ powinno być $y^{\frac{\beta}{\gamma}}$.

Str. 111 we wzorze ostatnim w liczniku zamiast $f(x^{(1+\alpha)^1}, y)$ powinno być $f(x^{(1+\alpha)^2}, y)$.

TREŚĆ.

STODÓŁKIEWICZ — ZASADY RACHUNKÓW WYŻSZYCH