LIEBMANN UND ENGEL

GESCHICHTE UND INVARIANTENTHEORIE

59

1964

Di...

JAHRESBERICHT DER DEUTSCHEN
MATHEMATIKER-VEREINIGUNG

DER ERGÄNZUNGSBÄNDE V. BAND

ENTHALTEND:

H. LIEBMANN UND F. ENGEL

DIE BERÜHRUNGSTRANSFORMATIONEN

GESCHICHTE UND INVARIANTENTHEORIE

LEIPZIG
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1914

DIE BERÜHRUNGSTRANSFORMATIONEN

GESCHICHTE UND INVARIANTENTHEORIE

ZWEI REFERATE
DER DEUTSCHEN MATHEMATIKER-VEREINIGUNG

ERSTATTET VON

H. LIEBMANN UND **F. ENGEL**

LEIPZIG
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1914

Vorwort.

Die beiden hier veröffentlichten Referate sind veranlaßt durch K. Rohn, der als Vorsitzender der Deutschen Mathematikervereinigung die im September 1913 in Wien abzuhaltende Versammlung der Vereinigung vorzubereiten hatte. Es war eben — im November 1912 — an alle Mathematiker die Aufforderung ergangen, auf die geplante Ausgabe der Gesammelten Abhandlungen von Sophus Lie zu subskribieren, und deshalb wünschte Rohn, daß auf der Wiener Versammlung eine der von Lie geschaffenen Theorien in Referaten behandelt werden möchte. Diesem Wunsche entsprechend hat Liebmann eine Übersicht über die Geschichte der Theorie der Berührungstransformationen geliefert, während ich die Liesche Invariantentheorie der Berührungstransformationen behandle. Meine Absicht war dabei, einerseits die von Lie gegebene Darstellung dieser Theorie zu vereinfachen, andererseits zu zeigen, daß die Theorie nach verschiedenen Richtungen hin der Erweiterung fähig ist. Es erscheint mir als eine Pflicht der Gerechtigkeit, auch hier hervorzuheben, daß ich in beiden Beziehungen einigen Abhandlungen S. Kantors wesentliche Anregungen verdanke. Mein Referat ist daher zum Teil geradezu ein Beitrag zum Verständnisse und zur Würdigung dieser Kantorschen Arbeiten, die allem Anscheine nach bisher gänzlich unbeachtet geblieben sind.

F. Engel.

Inhaltsverzeichnis.

Die Entwickelung der Lehre von den Berührungstransformationen.

Von Heinrich Liebmann in München.

(Referat der Deutschen Mathematiker-Vereinigung auf der Jahresversammlung erstattet in Wien, September 1913.)

Die ursprüngliche, lebenspendende Quelle mathematischer Forschung ist und bleibt für alle Zeiten die freie Phantasie. Mögen Anforderungen der Nachbargebiete den ungebunden dahineilenden Bergstrom in bestimmte Bahnen gelenkt und sein Gefälle einzig und allein für ihre Zwecke ausgenützt wissen wollen, mögen im eigenen Lager sich immer wieder Stimmen erheben, die mit ihrem puritanischen „Entweder — Oder", mit ihrem „Richtig oder unhaltbar" das Rauschen jenes Bergstroms übertönen, so bleibt doch wohl die ungebundene Phantasie als Quelle des wissenschaftlichen Fortschritts unentbehrlich.

Im vorgeschriebenen Rahmen dagegen versagt der eigensinnig oder gezwungen auf ein festes Ziel gerichtete Wille zum Schaffen nicht selten. Er muß, um zur vollen, wenn auch nicht lauter haltbare und greifbare Früchte ansetzenden Blüte sich entwickeln zu können, seine Aufgaben selbst wählen und wandeln dürfen, man muß ihm auch zuweilen gestatten, daß er seine Bauten auf Grundlagen errichtet, deren Tragfähigkeit vorerst noch nicht nach allen Regeln der Baupolizei geprüft ist.

Manches schöne Gebäude wird dann freilich später einstürzen, manches andere muß durch Streben gestützt werden, die zunächst einen etwas fremdartigen Eindruck hervorrufen.

Und noch eine andere Ernüchterung bleibt selten aus, die Erkenntnis, daß fast jede Schöpfung vor dem unparteiischen und sichtenden Blick des Historikers an Originalität einbüßt. Wie das Prisma den hellen Sonnenstrahl in das Spektrum auflöst, so finden wir die Gedankenelemente, die erst in ihrer Vereinigung das leuchtende Werk gebildet haben.

Zu diesen etwas zaghaft klingenden Betrachtungen gibt vielleicht die Geschichte weniger Disziplinen so eindringlichen Anlaß, wie gerade das Gebiet der Berührungstransformationen, als Gesamtleistung mit dem Namen Sophus Lie unzertrennlich verknüpft, im einzelnen wohl vorbereitet, ja weiter ausgebaut, als der ehrgeizige norwegische Forscher geahnt hat. Zum Glück blieb ihm dies lange Zeit verborgen, sonst hätte vielleicht Resignation frühzeitig seinen Schwung gelähmt und ihn gar nicht zu seinen großen Entdeckungen gelangen lassen.

Diese allgemeinen Bemerkungen geben die Richtschnur für die Orientierung in unserem Gebiet. Wir müssen uns fragen: Wie weit waren die Berührungstransformationen vor Lie vorbereitet? Was hat er — mit oder ohne Vorkenntnis des bereits Geleisteten — daraus geschaffen? Welche Aufgaben hinterließ er der Zukunft?

Die berufensten Kenner und Mitarbeiter an dem Werke von Lie haben sich über die ersten beiden Fragen mehrfach ausgesprochen, und in mehreren Artikeln der mathematischen Enzyklopädie sind sie bereits so gründlich erörtert, daß nach dieser Seite der Artikel „Berührungstransformationen" zum Teil auf Rekapitulationen, zum Teil auf bescheidene Nachlese angewiesen sein wird. Trotzdem muß an dieser Stelle manches der Vollständigkeit halber gesagt werden, was den meisten von Ihnen nicht viel des Neuen bieten kann, wenn auch kurze Zusammenfassung und schärfere Akzentuierung hoffentlich nicht ganz unwillkommen ist.

Mit Klein möchte ich zwei Quellen namhaft machen: Einmal die *formale* Aufgabe, kanonische Substitutionen für kanonische Differentialgleichungen aufzustellen, wie sie in der Mechanik auftreten — dann aber die *freie Beweglichkeit in der Handhabung der Raumelemente* — beides Gebiete, die schon vor Lie weitgehend ausgearbeitet waren.

1. *Kanonische Substitutionen.* Mit jeder partiellen Differentialgleichung erster Ordnung

$$F(x_1, x_2, \dots x_n, z, p_1, p_2 \dots p_n) = 0$$
$$\left(p_i = \frac{\partial z}{\partial x_i}\right)$$

ist ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen verknüpft, dessen Integration ausreicht, um *jede* Lösung der partiellen Differentialgleichung selbst zu finden. Es ist das zugehörige „kanonische System", welches die Charakteristiken definiert.

Im dreidimensionalen Raum z. B. lautet das zu

$$F(x, y, z, p, q) = 0 \quad \left(p = \frac{\partial z}{\partial x},\ q = \frac{\partial z}{\partial y}\right) \tag{1}$$

gehörige kanonische System

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial p}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{\partial F}{\partial q}, \quad \frac{dz}{dt} = p\frac{\partial F}{\partial p} + q\frac{\partial F}{\partial q}, \\ \frac{dp}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial x} - p\frac{\partial F}{\partial z}, \quad \frac{dq}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial y} - q\frac{\partial F}{\partial z}. \end{aligned} \tag{2}$$

Sieht man jetzt ganz davon ab, daß p und q eigentlich die partiellen Differentialquotienten einer Funktion von z bedeuten sollen, betrachtet man vielmehr die fünf Größen x, y, z, p, q schlechtweg als Veränderliche, so hat die folgende Frage ihren wohlberechtigten Sinn: *Wie müssen die Funktionen*

$$
\begin{aligned}
x_1 &= X(x, y, z, p, q),\\
y_1 &= Y(x, y, z, p, q),\\
z_1 &= Z(x, y, z, p, q),\\
p_1 &= P(x, y, z, p, q),\\
q_1 &= Q(x, y, z, p, q),
\end{aligned}
\tag{3}
$$

beschaffen sein, damit durch diese Transformation aus (2) *wieder ein System von derselben Bauart, ein kanonisches System wird?*

Bezeichnet man die Einführung der neuen Veränderlichen durch Einschließung in eckige Klammern, so wird

$$
\begin{aligned}
\frac{d[f]}{dt} = \left(\frac{\partial[F]}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial[F]}{\partial z_1}\right)[X, f] + \left(\frac{\partial[F]}{\partial y_1} + q_1 \frac{\partial[F]}{\partial z_1}\right)[Y, f]\\
+ \frac{\partial[F]}{\partial p_1}[P, f] + \frac{\partial[F]}{\partial q_1}[Q, f].
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Hierbei ist die Abkürzung gebraucht:

$$
\begin{aligned}
[U, V] = \frac{\partial U}{\partial p}\left(\frac{\partial V}{\partial x} + p\frac{\partial V}{\partial z}\right) + \frac{\partial U}{\partial q}\left(\frac{\partial V}{\partial y} + q\frac{\partial V}{\partial z}\right) - \frac{\partial V}{\partial p}\left(\frac{\partial U}{\partial x} + p\frac{\partial U}{\partial z}\right)\\
- \frac{\partial V}{\partial q}\left(\frac{\partial U}{\partial y} + q\frac{\partial U}{\partial z}\right).
\end{aligned}
$$

Man braucht jetzt nur in (4) der Reihe nach für $[f]$ einzusetzen x_1, y_1, z_1, p_1, q_1, um zu den gesuchten Bedingungen zu gelangen, welche die Funktionen (3) erfüllen müssen, damit *jedes* (zu einem beliebigen $F(x, y, z, p, q)$ gehörige) kanonische System wieder in ein kanonisches System übergeht. Die Bedingungen lauten

$$
\begin{aligned}
&[X, Y] = [X, Z] = [Y, Z] = [X, Q] = [Y, P] = [P, Q] = 0,\\
&[P, X] = [Q, Y] = \varrho,\\
&[P, Z] = \varrho P, \quad [Q, Z] = \varrho Q,
\end{aligned}
\tag{5}
$$

und sie können, beiläufig bemerkt, nach Darboux am einfachsten aus der Forderung gewonnen werden, daß das Gleichungssystem

$$
\begin{aligned}
&dz - p\,dx - q\,dy = 0,\\
&\delta z - p\,\delta x - q\,\delta y = 0,\\
&dx\,\delta p + dy\,\delta q - \delta x\,dp - \delta y\,dq = 0
\end{aligned}
\tag{6}
$$

invariant bleibt. Mit diesem System kann am bequemsten gerechnet werden, und da es in Verbindung mit den aus (1) abgeleiteten Gleichungen

$$\frac{\partial F}{\partial x}\delta x+\frac{\partial F}{\partial y}\delta y+\frac{\partial F}{\partial z}\delta z+\frac{\partial F}{\partial p}\delta p+\frac{\partial F}{\partial q}\delta q$$
$$=\left(\frac{\partial F}{\partial x}+p\frac{\partial F}{\partial z}\right)\delta x+\left(\frac{\partial F}{\partial y}+q\frac{\partial F}{\partial z}\right)\delta y+\frac{\partial F}{\partial p}\delta p+\frac{\partial F}{\partial q}\delta q=0$$

gerade auf das kanonische System (2) führt, so kann eben die Erhaltung des Gleichungssystems (6) als Forderung an die Spitze gestellt werden.

Damit haben wir die eine Grundlage gewonnen: *Erhaltung der kanonischen Form des Systems* (2) *findet statt, wenn die Bedingungen* (5) *erfüllt sind oder das Gleichungssystem* (6) *invariant bleibt.*

Die dritte Gleichung des Systems (6) tritt wohl zum erstenmal bei Schering auf und ist nicht beachtet worden. Statt dessen fordert Lie

$$dz_1-p_1dx_1-q_1dy_1=\varrho(dz-p\,dx-q\,dy) \tag{7}$$

und hat damit eine neue Fassung gefunden.

Übrigens ist vielleicht die Auffassung gestattet, daß mit dieser Forderung erst die gewonnenen Transformationen zu einer *selbständigen Klasse* erhoben werden, daß sie nicht mehr ein *bloßes Anhängsel* an die kanonischen Gleichungen sind.

2. *Der Wechsel des Raumelementes.* Von jenem ersten *formalen* Gedankengang (*Erhaltung der kanonischen Form!*) völlig getrennt verläuft ein anderer. Wir sind gewohnt, als Raumelement den Punkt zu betrachten, in der Geraden oder jeder beliebigen Kurve ein Gebilde aus ∞^1 Punkten, in der Ebene oder jeder beliebigen Fläche ein Gebilde aus ∞^2 Punkten zu sehen. Die Dualität aber, speziell der Übergang von Pol zu Polare beim Kegelschnitt, von Pol zu Polarebene bei einer Fläche zweiten Grades führt dazu, in der Geraden oder der Ebene das konstituierende Raumelement zu sehen. Als ein weiteres Beispiel einer Betrachtung, die zu einem *Wechsel des Raumelementes* führt, nennen wir die *Fußpunkttransformation.* Ordnet man einem Punkt P das aus der Gesamtheit der Fußpunkte der von einem festen Punkt O auf die Geraden durch P gefällten Lote bestehende Gebilde zu, so ist damit ein *Wechsel des Raumelementes* bedingt. Dem Punkt x, y, z entspricht die Kugel

$$x_1^2+y_1^2+z_1^2-xx_1-yy_1-zz_1=0.$$

Wie hängt jetzt dieser „Wechsel des Raumelementes" mit den früher gefundenen Transformationen zusammen?

Der Wechsel des Raumelementes, herbeigeführt durch *eine* Gleichung

$$\Omega(x, y, z, x_1, y_1, z_1)=0$$

führt zunächst einen Punkt in eine Fläche über und eine Fläche

$$z = f(x, y)$$

in ∞^2 Flächen, die selbst wieder im $R_1(x_1, y_1, z_1)$ eine *Enveloppenfläche* besitzen.

Hier gilt dann der einfache, aber vor Lie wohl nicht ausreichend hervorgehobene oder verwertete Satz: Haben zwei Flächen des Raumes $R(x, y, z)$ in einem Punkt die Tangentialebene

$$(\zeta - z) - \frac{\partial f}{\partial x}(\xi - x) - \frac{\partial f}{\partial y}(\eta - y) = 0$$

gemein — oder auch ein Wertsystem

$$x, y, z, p = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial f}{\partial y},$$

so bleibt diese Eigenschaft bei der Abbildung der Flächen auf die zugeordneten Enveloppenflächen erhalten.

In der Tat, wenn

$$z_1 = f_1(x_1, y_1)$$

die zugeordnete Enveloppenfläche ist, so muß zunächst die Funktion f_1 durch Elimination von x und y aus

$$\begin{aligned} &\Omega(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = 0 \\ (8)\qquad &\frac{\partial \Omega}{\partial x} + p\frac{\partial \Omega}{\partial z} = 0 \\ &\frac{\partial \Omega}{\partial y} + q\frac{\partial \Omega}{\partial z} = 0 \end{aligned}$$

bestimmt werden. Die partiellen Differentialquotienten

$$p_1 = \frac{\partial z_1}{\partial x_1}, \quad q_1 = \frac{\partial z_1}{\partial y_1}$$

findet man dann aus

$$d\Omega = \left(\frac{\partial \Omega}{\partial x} + p\frac{\partial \Omega}{\partial z}\right)dx + \left(\frac{\partial \Omega}{\partial y} + q\frac{\partial \Omega}{\partial z}\right)dy + \left(\frac{\partial \Omega}{\partial x_1} + p_1\frac{\partial \Omega}{\partial z_1}\right)dx_1 + \left(\frac{\partial \Omega}{\partial y_1} + q_1\frac{\partial \Omega}{\partial z_1}\right)dy_1 = 0$$

d. h. es sind p_1 und q_1 gegeben durch

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \Omega}{\partial x_1} + p_1\frac{\partial \Omega}{\partial z_1} = 0 \\ (9)\qquad &\frac{\partial \Omega}{\partial y_1} + q_1\frac{\partial \Omega}{\partial z_1} = 0. \end{aligned}$$

Also sind $x_1\, y_1\, z_1\, p_1\, q_1$ durch x, y, z, p, q vollkommen bestimmt, und damit bewiesen: *Zwei in einem bestimmten Punkte eine bestimmte Tangentialebene gemein habende Flächen gehen in eben solche Enveloppenflächen über.*

Dasselbe läßt sich nachweisen für die Punktkurventransformation, die durch zwei Gleichungen

$$(10) \qquad \begin{aligned} \Omega_1(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = 0 \\ \Omega_2(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = 0 \end{aligned}$$

gegeben ist. Einer Fläche des einen Raumes entspricht dabei im andern Raume eine von zweifach unendlich vielen Kurven umhüllte Brennfläche, und für die Beziehung zwischen Fläche und zugeordneter Brennfläche gilt derselbe Satz.

Damit ist der „Wechsel des Raumelementes" ausgebaut zu einer *Berührungstransformation*.

Jetzt erkennen wir auch das enge Band zwischen unsern beiden Betrachtungen: Der Ausbau der mit Wechsel des Raumelementes verbundenen Transformationen (8) oder (9) zu einer Berührungstransformation ist nämlich nichts anderes, als die Herstellung einer Transformation, welche die Bedingung (7) erfüllt.

Dies soll für die Punktflächentransformation gezeigt werden.

Aus

$$\Omega(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = 0$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x} dx + \frac{\partial \Omega}{\partial y} dy + \frac{\partial \Omega}{\partial z} dz + \frac{\partial \Omega}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \Omega}{\partial y_1} dy_1 + \frac{\partial \Omega}{\partial z_1} dz_1 = 0$$

$$dz_1 - p_1 dx_1 - q_1 dy_1 = \varrho(dz - p dx - q dy)$$

folgt ja

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x} : \frac{\partial \Omega}{\partial y} : \frac{\partial \Omega}{\partial z} : \frac{\partial \Omega}{\partial x_1} : \frac{\partial \Omega}{\partial y_1} : \frac{\partial \Omega}{\partial z_1} = \varrho p : \varrho q : -\varrho : -p_1 : -q_1 : 1$$

und hieraus folgen genau die früheren Gleichungen (8) und (9).

Der innere Grund hiervon ist leicht einzusehen: Indem wir zur Berührungstransformation ergänzen, fordern wir ja gerade, daß ein Wertsystem

$$z = f(x, y), \quad p = u(x, y), \quad q = v(x, y)$$

für das

$$u = \frac{\partial f}{\partial x}, \qquad v = \frac{\partial f}{\partial y}$$

oder

$$dz - p dx - q dy = 0$$

ist, in ein Wertsystem übergeht, daß die Forderung

$$dz_1 - p_1 dx_1 - q_1 dy_1 = 0$$

erfüllt.

D. h. also: *Transformationen* (3), *welche die Form der kanonischen Gleichungen* (2) *erhalten, sind identisch mit den aus Wechsel des Raumelementes entstehenden Berührungstransformationen.*

Wenn auch bereits Jacobi den Ausbau eines Gleichungssystems

$$\Omega_i(z, x_1, \cdots x_n, z', x_1', \cdots x_n') = 0 \qquad \binom{i=1,2,\cdots m}{m<n+1}$$

zu kanonischen Substitutionen ausgeführt hat, so *fehlte der leitende geometrische Gedanke*, der erst von Lie erfaßt worden ist.

3. *Das infinitesimale Element und die Elementvereine.* Noch ist einem Einwand zu begegnen, den wir absichtlich bisher unterdrückt haben. *Liefert denn die Gleichung*

$$dz - p\,dx - q\,dy = 0 \tag{11}$$

wirklich nur die Gesamtheit der Punkte einer Fläche mit den zugehörigen Tangentialebenen? und weiter: *Gehen denn wirklich Flächen in Flächen über?*

Das eine ist so wenig der Fall wie das andere!

Zur Erläuterung bedarf man des Begriffes (infinitesimales) *Flächenelement.* Darunter soll eben das Wertsystem x, y, z, p, q verstanden werden, wobei p und q zur Darstellung der den Punkt x, y, z enthaltenden Ebene

$$(\zeta - z) - p(\xi - x) - q(\eta - y) = 0$$

dienen. Das Flächenelement ist der *Inbegriff von Punkt und hindurchgehender Ebene*, wobei es die Vorstellung erleichtert, wenn man von der Ebene nur die nächste Umgebung des Punktes in Betracht zieht, den Grenzfall eines ebenen Flächenstückes also.

(11) definiert, wie Lie sagt, einen „*Verein von Flächenelementen*“ und es gibt von zweidimensionalen Flächenelementvereinen drei verschiedene Klassen.

1. *Die Elemente einer beliebigen Fläche:*

$$z = f(x, y), \quad p = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Sie allein wurden bisher berücksichtigt.

2. *Die Elemente einer Kurve:*

$$y = f(x), \quad z = g(x), \quad g' - p - qf' = 0.$$

3. *Die Elemente eines Punktes:*

x, y, z gegebene Konstanten, p und q willkürlich.

Damit findet auch die zweite Frage ihre volle Erledigung: Bei einer Berührungstransformation brauchen die Flächenelemente einer Fläche nicht wieder in die einer Fläche überzugehen, der aus ihnen gebildete Verein kann in einen Verein übergehen, der als *Trägergebilde* eine *Kurve* oder einen *Punkt* hat.

Charakteristisch für Berührungstransformationen ist nur, daß alle Elementvereine wieder in Elementvereine übergehen.

Bei Lie selbst hat sich die Begriffsbildung erst allmählich vollzogen — heute werden viele Mathematiker auch hier den bekannten Ausspruch anwenden vom Vorrecht des Genies, dessen Gedankengänge späteren Zeiten nicht *kompliziert*, sondern *trivial* erscheinen.

Die erste Punktkurventransformation von Lie ist seine berühmte Geradenkugeltransformation mit den beiden definierenden *aequationes directrices*

$$x_1 + iy_1 + xz_1 + z = 0,$$
$$x(x_1 - iy_1) - z_1 - y = 0,$$

durch welche die Geraden des Raumes x, y, z in die Kugeln des Raumes $x_1, y_1\ z_1$ übergehen. In friedlichstem Wettbewerb mit seinem Freunde Klein löste er gleichzeitig mit ihm durch diese Transformation das Problem der Bestimmung der Haupttangentenkurven der Kummerschen Singularitätenfläche, aber den für uns so einfachen und selbstverständlichen allgemeinen Begriff der Berührungstransformation hatte er damals (1870) noch nicht entwickelt.

Der Umstand eben, daß der nunmehr klassisch gewordene Begriff der Berührungstransformation erst allmählich auch dem dazu berufenen Forscher und Entdecker klar geworden ist, rechtfertigt hoffentlich auch die so ausführliche Darlegung des Werdeganges.

4. *Das fertige Lehrgebäude der Berührungstransformationen.* „Mit voller Musik“, wie Lie selbst sagt, konnte er an die Ausarbeitung gehen, nachdem die Grundlagen gewonnen waren. An dieser Stelle ist wohl, angesichts der Darstellung in den von Engel und Scheffers ausgearbeiteten Werken und mit Rücksicht auf die Enzyklopädieartikel von E. von Weber und G. Fano eine kürzere Fassung erlaubt, es wird die Hervorhebung durch kurze Charakteristik der Hauptfragen genügen.

a) *Vollständige Begründung des Formelsystems* aus der Grundforderung

$$dz' - p_1'\,dz_1' \cdots - p_n' dx_n' = \varrho\,(dz - p_1\,dx_1 \cdots - p_n dx_n). \tag{12}$$

Hierher gehört der Nachweis, daß die $2n + 1$ Funktionen

$$Z, X, \cdots X_n, P, \cdots P_n$$

von

$$z, x, \cdots x_n, p, \cdots p_n$$

dann und nur dann eine Berührungstransformation definieren, wenn die Klammerrelationen

$$[Z, X_i] = [X_i, X_k] = [P_i, X_k] = 0 \qquad {\scriptstyle (i = k)}$$
$$[P_i, X_i] = \varrho, \quad [P_i, Z] = \varrho P_i \qquad {\scriptstyle (i, k = 1, 2 \cdots n)}$$

erfüllt sind, wobei

$$[u, v] = \sum_1^n \left\{ \frac{\partial u}{\partial p_\nu} \left(\frac{\partial v}{\partial x_\nu} + p_\nu \frac{\partial v}{\partial z} \right) - \frac{\partial v}{\partial p_\nu} \left(\frac{\partial u}{\partial x_\nu} + p_\nu \frac{\partial v}{\partial z} \right) \right\}$$

ist, ferner die Erzeugung aus den *aequationes directrices*

$$\Omega_\mu (z, x_1 \cdots x_n, z_1', x_1' \cdots x_n') = 0 \qquad \binom{\mu = 1, 2 \cdots m}{m < n + 1}$$

und die bei Jacobi fehlende Angabe der Unabhängigkeitsbedingungen, welchen die Funktionen Ω_μ zu unterwerfen sind.

b) *Invariantentheorie der Berührungstransformationen*, d. h. Feststellung der Kriterien, welche notwendig und hinreichend dafür sind, daß ein System von Funktionen

$$F_i (x_1, \cdots x_n, z, p_1, \cdots p_n) \qquad (i = 1, 2 \cdots m)$$

durch eine Berührungstransformation in das System

$$\mathfrak{F}_i (x_1', \cdots x_n', z', p_1', \cdots p_n') \qquad (i = 1, 2, \cdots m)$$

überführbar ist.

Dies kann durch Differentiationen und Eliminationen entschieden werden, und zwar auf dem Umweg über *homogene* Funktionensysteme, die durch die Substitutionen

$$\begin{aligned} z &= y_{n+1}, \quad x_i = y_i, \\ & \qquad p_i = \frac{-q_i}{q_{n+1}} \qquad (i = 1, 2 \cdots n) \\ z' &= y'_{n+1}, \quad x_i' = y_i', \\ & \qquad p_i' = \frac{-q_i'}{q_{n+1}'} \end{aligned}$$

erhalten werden. Die homogenen Funktionen müssen durch Klammeroperationen zu einer *Funktionengruppe* ergänzt werden, d. h. zu einem System, das durch Klammeroperation keine neuen unabhängigen Funktionen liefert, und das auf diese Weise aus den homogenisierten F_i nebst Ergänzung abgeleitete System muß dieselbe *Zusammensetzung* aufweisen, wie das entsprechende aus dem F_i abgeleitete, d. h. die Klammeroperation auf je zwei Funktionen des ersten (erweiterten) Systems ausgeführt, muß dieselbe Funktion dieser Funktionen liefern wie beim zweiten.

c) *Infinitesimale Berührungstransformationen und Gruppentheorie.* Die Theorie der Gruppen von Berührungstransformationen ist ein Ausschnitt aus der Theorie der Gruppen von endlichen kontinuierlichen Punkttransformationen in $2n + 1$ Veränderlichen

$$z, x_1 \ldots x_n, p_1 \ldots p_n.$$

Es tritt eben die Nebenbedingung (12) hinzu.

Infinitesimale Berührungstransformationen und damit durch Integration von

$$dx_i : dp_i : dz = \xi_i(x_1 \ldots x_n, z, p_1 \ldots p_n) : \pi_i(x \ldots x_n, z, p_1 \ldots p_n) : \zeta(x_1 \ldots x_n, z, p_1 \ldots p_n)$$

entstehende *eingliedrige* Gruppen werden mit Hilfe einer charakteristischen Funktion

$$W = p_1 \xi_1 + p_2 \xi_2 \cdot\cdot + p_n \xi_n - \zeta$$

erzeugt, dabei ist dann

$$\xi_i = \frac{\partial W}{\partial p_i}, \quad \pi_i = -\frac{\partial W}{\partial x_i} - p_i \frac{\partial W}{\partial z}, \quad \zeta = \sum p_i \frac{\partial W}{\partial p_i} - W.$$

Eine r-gliedrige Gruppe von Berührungstransformationen liegt dann und nur dann vor, wenn die r erzeugenden charakteristischen Funktionen

$$W_1 \,.\,.\, W_r,$$

die keine *lineare Relation mit konstanten Koeffizienten* erfüllen dürfen, die Beziehungen

$$\{W_i W_k\} = \sum_1^r c_{iks} W_s$$

erfüllen. Dabei ist

$$\{W_i W_k\} = [W_i W_k] - W_i \frac{\partial W_k}{\partial z} + W_k \frac{\partial W_i}{\partial z}.$$

5. *Ausführungen im Einzelnen.* Mit diesen drei Elementen ist das tragende abstrakte Gerüst gegeben, es gilt wieder den konkreten Fragen sich zuzuwenden und von der Theorie zur Anwendung überzugehen, feinere Unterscheidungen zu treffen und last not least bestimmte geometrische Aufgaben zu behandeln.

a) *Die Gruppentheorie als Leitgedanke.* Von weitergehenden Klassifikationen ist vor allem die Unterscheidung zwischen *reduzibeln* und *irreduzibeln* Gruppen zu nennen; die ersteren können durch eine Berührungstransformation in Punkttransformationen übergeführt werden, die letzteren nicht.

In der Ebene hat Lie alle irreduzibeln Gruppen von B. T. bestimmt. Die größte ist zehngliedrig und überführbar in die Gruppe, welche die Differentialgleichung gewisser Parabeln oder auch die Differentialgleichung der Kreise in sich überführt. Die beiden andern sind eine 7- und eine 6-gliedrige Untergruppe von ihr. Die zehngliedrige kann durch Abbildung der Linienelemente der Ebene auf die Punkte des R_3 in die projektive Gruppe eines linearen Komplexes übergeführt werden.

In R_n hat Lie die drei Gruppen von irreduzibeln B. T. bestimmt, die als Punkttransformationen im R_{2n+1} der Elemente $x_1 \,.\,.\, x_n, z, p_1 \,.\,.\, p_n$ transitiv sind und zweitens unter denjenigen ihrer infinitesimalen Transformationen, welche den Punkt allgemeiner Lage $x_i = p_i = z = 0$ invariant lassen, möglichst viele, d. h. $n(2n+1)$ solche voneinander unabhängige enthalten, aus denen sich keine infinitesimale linear ableiten läßt, welche jede einzelne Richtung des Bündels $z' = 0$ festhält. Eine dieser Gruppen ist primitiv, die beiden andern imprimitiv.

Aus dieser einen primitiven gibt es im R_3 nur noch eine, die 14-gliedrige von F. Engel.

Von imprimitiven nennen wir die von G. Scheffers bestimmten, welche ein Büschel von partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung

$$f(x, y, z, p, q) = c$$

invariant lassen und die von Oseen bestimmten mit den Gliederanzahlen 8, 9, 11 und 12.

b) *Geometrische Ausgangspunkte.* Die Regeln und Begriffsbildungen der Gruppentheorie möchte ich mit den gestaltenden Naturgesetzen vergleichen, nach denen die *Krystalle* entstehen. — Wenn es gestattet ist, im Bilde zu bleiben, so darf hinzugefügt werden, daß die übrig bleibende Mutterlauge ein reicher Nährboden ist, auf dem ein üppiges *organisches Leben* sich entfaltet.

Fragestellungen der Geometrie sind die Keime und Kerne dieses Lebens, und es möge hier nur die Bestimmung des Bogenelementes aller Flächen genannt werden, bei denen die Kurven konstanter geodätischer Krümmung eine infinitesimale B. T. gestatten, ferner die Bestimmung aller B. T., bei denen den Punkten des einen Raumes die Geraden eines Komplexes im andern entsprechen und umgekehrt, endlich die für die Kinematik bedeutungsvolle Bestimmung aller B. T., welche selbst wieder die Rotation um einen festen Punkt gestatten.

Damit sind wir am Ende unserer Übersicht der Leistungen von Lie im Gebiete der Berührungstransformationen angelangt, die nur eine unvollständige Skizze sein konnte.

Seitdem hat sich die Forschung, wenn wir von einzelnen Untersuchungen absehen, die mehr den Charakter einer Ergänzung haben, in zwei Richtungen bewegt, die — um nur zwei Namen zu nennen — von Study und Engel aufgegriffen und herauspräpariert worden sind aus der Fülle von Fragen, die Lie hinterlassen hat.

6. *Erneute Heranziehung der Liniengeometrie.* Die Liniengeometrie hat für Lie mit seiner Geradenkugeltransformation die Eingangspforte in das Reich der Berührungstransformationen gebildet. Sie wurde in dieser Verbindung selbst ein entwickelungsfähiges Gebiet, das gewissenhafte Kritik, verbunden mit lebendigster Initiative bearbeitet hat.

Die *Kritik* forderte, zunächst nur solche Transformationen als vollwertig anzuerkennen, die eindeutig sind, und die *Unsicherheit*, mit denen die Beantwortung *allgemeinerer* Fragen vielfach noch behaftet ist, durch neue Schöpfungen zu beseitigen. Vor allem gehören hierher *Koordinaten*, die niemals versagen und deren Tragfähigkeit alle „Ausnahmefälle“ beseitigt.

Große und neue Klassen von Berührungstransformationen waren hierfür das geeignete Feld, die *aequilongen* z. B., welche „Speere“ in „Speere“ überführen und dabei den Abstand zweier orientierten Linienelemente auf einem Speer invariant lassen. G. Fano hat eingehend darüber berichtet und die Arbeiten von Laguerre und Scheffers referiert. Study hat ein Programm für derartige Untersuchungen aufgestellt an etwas verborgener Stelle. Seine eigenen Arbeiten und die von ihm angeregten von Coolidge, Blaschke u. a. zeigen die Fruchtbarkeit der hier einschlägigen Fragestellungen.

7. *Die Invariantentheorie der Differentialgleichungen.* An zweiter Stelle ist die Invariantentheorie der Differentialgleichungen aufzuführen. So belehrend die aus der allgemeinen Transformationstheorie herausgeschälten *Gruppen* gewirkt haben, die Beschränkung auf sie kann zur Fessel werden und die allgemeinere *Äquivalenztheorie* muß sich freier bewegen können. *Vereinfachung der Integration* von Differentialgleichungen in dem Sinne, wie ja schon seit Cauchy die Integration einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung auf die Behandlung eines durch bloße Differentiation und Elimination aufstellbaren Systems von gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung zurückgeführt wird — dieses Ziel darf nicht aus den Augen verloren werden. Die Äquivalenztheorie, das heißt die *Invariantentheorie* der Probleme bei der *unendlichen Gruppe* der Punkt- oder Berührungstransformationen bietet die Handhabe.

Ein Beispiel mag dies erläutern, das wir einem längst zum Gemeingut gewordenen Gebiet entnehmen: Die Integration einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung erfordert, wenn die Gleichung linear ist, also die Gestalt hat

$$A_1 p_1 + A_2 p_2 \cdot\cdot + A_n p_n - A = 0$$

nur die Integration von

$$\frac{dx_1}{A_1} = \frac{dx_2}{A_2} \cdot\cdot = \frac{dx_n}{A_n} = \frac{dz}{A}$$

und nicht die eines Systems von $2n$ Gleichungen. Der innere Grund ist, daß die erzeugenden ∞^{2n-1} *charakteristischen Streifen* sich in Büschel von je ∞^{n-1} anordnen, deren jedes als gemeinsamen Träger eine der ∞^n charakteristischen Kurven besitzt. Zwischen den beiden Extremen, nämlich ∞^n und ∞^{2n-1} *Trägerkurven* für die charakteristischen Streifen gibt es alle möglichen Zwischenfälle, und jeder von ihnen muß, wie schon der einfachste, auf Vereinfachungen des Integrationsproblems führen. Man wird also *Kriterien* für das Auftreten eines solchen Falles verlangen —

und das ist eine Frage der *Invariantentheorie*, die auf jeden Fall durch Differentiationen entscheidbar sein muß.

Ferner kann es, auch ohne Reduktion der Mannigfaltigkeit der Trägerkurven, vorkommen, daß Integralmannigfaltigkeiten auftreten, die als Punktmannigfaltigkeiten eine verminderte Dimensionszahl haben — ihre Bestimmung wird einfacher sein als die Integration der partiellen Differentialgleichung selbst, und man wird Kriterien für diese besonderen Fälle verlangen.

Notwendige und *hinreichende Kriterien* für solche und verwandte Fälle, *Äquivalenztheorie* innerhalb der gefundenen Klassen, *Integrationsvereinfachung* bei einem Problem einer Klasse — das sind die drei wesentlichen Aufgaben, über deren teils vollständig durchgeführte, teils vorläufig weitgehend geförderte Lösung der dritte Abschnitt des Artikels III D 7 *Berührungstransformationen* der Math. Enzyklopädie nach einem allgemeinen von Engel angegebenen Verfahren eingehend berichten wird.

Der Bericht aber darf mit der wohlbegründeten Hoffnung geschlossen werden, daß die verfeinerten Methoden in der Handhabung bestimmter Berührungstransformationen und die neuen, für die allgemeine Äquivalenztheorie ausgearbeiteten Hilfsmittel noch für lange Zeit wichtige Entdeckungen zutage fördern werden. Ein Rückblick auf die seit dem frühzeitigen Tod von Lie bereits geleistete Arbeit berechtigt zu dieser Zukunftsperspektive.

Lies Invariantentheorie der Berührungstransformationen und ihre Erweiterung.

Von FRIEDRICH ENGEL in Gießen.[1])

Im Jahre 1872 brachten die Verhandlungen der Gesellschaft der Wissenschaften zu Kristiania eine kurze, kaum drei Seiten umfassende Mitteilung von Sophus Lie: „Zur Invarianten-Theorie der Berührungs-Transformationen". Diese ist in mehr als einer Beziehung denkwürdig. Erstens wegen der überaus wichtigen Anwendungen, die Lie von seiner neuen Theorie auf die Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung gemacht hat. Zweitens aber besonders deshalb, weil es sich um die Invariantentheorie einer speziellen unendlichen Gruppe handelte, um die der Gruppe aller Berührungstransformationen. Bis dahin lag erst ein einziges Beispiel einer solchen Invariantentheorie vor, die von Gauß begonnene, von Codazzi, Mainardi und Beltrami weiter entwickelte, von Riemann, Christoffel und Lipschitz auf beliebig viele Veränderliche übertragene Invariantentheorie der quadratischen Differentialformen. Endlich beachte man drittens, daß Lies Invariantentheorie gerade in der Zeit entstanden war, wo F. Klein die allgemeinen Ideen entwickelte, die er in seinem Erlanger Programme niedergelegt hat, daß also Lie hier an einem wichtigen Beispiele das ausführte, was Klein erst als Programm für die Zukunft aufstellte. Lie kannte zwar diese Ideen zum größten Teil aus Gesprächen mit Klein und hatte selbst zu deren Entwicklung mit beigetragen, aber das Neue an diesen Ideen war für ihn gewesen, daß viele Gebiete der bisherigen Mathematik als Invariantentheorien von Gruppen aufgefaßt werden können, während andererseits die Frage nach den bei einer vorgelegten Gruppe invarianten Eigenschaften der transformierten Gebilde für ihn ganz natürlich gewesen war.

Lies erste Darstellung seiner Invariantentheorie der Berührungstransformationen leidet darunter, daß er noch keine einfache Ableitung der Formeln für die Berührungstransformationen zu geben vermochte, sondern sich dabei auf die allgemeine Theorie des Pfaffschen Problems stützte. Er tat das noch 1874 in der großen Abhandlung in Band VIII der Ma-

1) Referat erstattet der Deutschen Mathematiker-Vereinigung und im Auszuge vorgetragen auf deren Versammlung in Wien, September 1913.

thematischen Annalen. Bald darauf gab Adolph Mayer eine ziemlich einfache, direkte Begründung der Theorie der Berührungstransformationen (Gött. Nachr. 1874), aber Lie konnte sich doch nicht entschließen, die Mayersche Begründung geradezu zu übernehmen. Es ist das eine Eigentümlichkeit, die überhaupt bei Lie hervortritt: er setzte seinen Ehrgeiz darein, seine neuen Theorien nur auf solchen Wegen zu begründen, die er selbst erdacht hatte, und er ging lieber Umwege, als daß er sich Vereinfachungen zunutze machte, die von anderen herrührten. Auf denselben Beweggrund ist offenbar auch die merkwürdige Tatsache zurückzuführen, daß Lie die schon 1869 von Lipschitz[1]) angegebene und dann 1877 von Frobenius[2]) mit so großem Erfolge verwertete bilineare Kovariante eines Pfaffschen Ausdrucks vollständig unbeachtet gelassen und sie niemals benutzt hat. Wie S. Kantor in einer 1901 erschienenen Arbeit[3]) mit Recht hervorhebt, läßt sich aber gerade mit Hilfe dieser Kovariante die Theorie des Pfaffschen Problems und insbesondere auch die Mayersche Begründung der Theorie der Berührungstransformationen ganz außerordentlich vereinfachen, namentlich wenn man außerdem noch beachtet, daß das Poissonsche Klammersymbol als eine zu dieser bilinearen Kovariante kovariante Form in Ebenenkoordinaten aufgefaßt werden kann.

Da auch die im zweiten Bande der Transformationsgruppen gegebene Darstellung der analytischen Theorie der Berührungstransformationen durch die eben geschilderte Eigentümlichkeit Lies stark beeinflußt ist, so scheint es mir nicht überflüssig, die Theorie der Berührungstransformationen und die zugehörige Invariantentheorie so darzustellen, wie es mit den jetzt vorhandenen Hilfsmitteln möglich ist. Allerdings wird dabei auch viel Bekanntes wiederholt werden müssen. Es wird sich aber ergeben, daß die schon von Lie selbst ins Auge gefaßte Verallgemeinerung der Theorie auf den Fall, wo man nicht wie bei den Berührungstransformationen eine bestimmte Normalform des Pfaffschen Ausdrucks zugrunde legt, nicht im geringsten schwieriger ist. Der schon erwähnten Arbeit S. Kantors und einer andern aus dessen Nachlaß veröffentlichten[4]) verdanke ich dabei viele wesentliche Anregungen. Im übrigen kann ich

1) In der Arbeit: „Untersuchungen in Betreff der ganzen homogenen Funktionen von n Differentialen“, Crelles Journal Bd. 70, s. S. 72f.

2) „Über das Pfaffsche Problem“, Crelles Journal Bd. 82, S. 230—315.

3) „Über einen neuen Gesichtspunkt in der Theorie des Pfaffschen Problemes, der Funktionengruppen und der Berührungstransformationen“, Wiener Berichte, Math.-naturw. Klasse, Bd. CX, Abt. IIa, Dezember 1901, S. 1147ff.

4) „Neue Grundlagen für die Theorie und Weiterentwickelung der Lieschen Funktionengruppen“, ebd. Bd. CXII, Abt. IIa, Juli 1903. S. 755ff. Zu dieser Arbeit gehören übrigens offenbar auch S. 678—754 der unmittelbar vorhergehenden (Über eine neue Klasse gemischter Gruppen).

mir freilich die Ansichten S. Kantors keineswegs zu eigen machen. Auch kann ich nicht umhin, zu betonen, daß mir die sehr hohen Ansprüche, mit denen Kantor auftritt, nicht ganz berechtigt erscheinen. Neben vielen guten Ideen findet sich in den Arbeiten, um die es sich hier handelt, auch eine ganze Anzahl verfehlte oder geradezu falsche, und der Mangel an Ordnung in der Darstellung bewirkt, daß das Ganze unter einer Unklarheit leidet, die das Lesen der Arbeiten nichts weniger als erquicklich macht.

§ 1. Die bilineare Kovariante.

Zunächst muß ich kurz auf die bilineare Kovariante eines Pfaffschen Ausdrucks eingehen.

Es sei:

$$D = \sum_1^n {}^i \alpha_i(x_1 \ldots x_n) dx_i \tag{1}$$

ein beliebiger Pfaffscher Ausdruck und derselbe Ausdruck gebildet mit einem anderen Systeme von Differentialen δx_i wurde mit $\varDelta$ bezeichnet:

$$\varDelta = \sum_1^n {}^i \alpha_i(x_1 \ldots x_n) \delta x_i .$$

Setzt man nun:

$$x_i = \varphi_i(y_1 \ldots y_r) \qquad (i = 1 \ldots n) \tag{2}$$

wo die φ_i ganz beliebige Funktionen sind, so verwandelt sich D in einen neuen Pfaffschen Ausdruck in den r Veränderlichen $y_1 \ldots y_r$:

$$D = \sum_1^n {}^i \alpha_i(x_1 \ldots x_n) dx_i = \sum_1^r {}^k \beta_k(y_1 \ldots y_r) dy_k \tag{3}$$

und man erhält daher vermöge (2):

$$\left\{\begin{aligned} d\varDelta - \delta D &= \sum_1^n {}^i (d\alpha_i \delta x_i - \delta \alpha_i dx_i) + \sum_1^n {}^i \alpha_i (d\delta x_i - \delta d x_i) \\ &= \sum_1^r {}^k (d\beta_k \delta y_k - \delta \beta_k dy_k) + \sum_1^r {}^k \beta_k (d\delta y_k - \delta d y_k). \end{aligned}\right. \tag{4}$$

Andrerseits aber ergibt sich aus (2)

$$dx_i = \sum_1^r {}^k \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_k} dy_k ,$$

also wie man leicht sieht:

$$d\delta x_i - \delta d x_i = \sum_1^r {}^k \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_k} (d\delta y_k - \delta d y_k); \tag{5}$$

aus (3) folgt daher:

$$\sum_1^n {}^i \alpha_i(d\delta x_i - \delta d x_i) = \sum_1^r {}^k \beta_k(d\delta y_k - \delta d y_k),$$

so daß Gleichung (4) diese nach sich zieht:

$$(6) \qquad \sum_1^n {}^i (d\alpha_i \delta x_i - \delta\alpha_i d x_i) = \sum_1^r {}^k (d\beta_k \delta y_k - \delta\beta_k d y_k).$$

Hiermit ist gezeigt, daß der Ausdruck

$$(7) \qquad \sum_1^n (d\alpha_i \delta x_i - \delta\alpha_i d x_i) = \sum_{i\nu}^{1\ldots n} \left(\frac{\partial\alpha_i}{\partial x_\nu} - \frac{\partial\alpha_\nu}{\partial x_i}\right) d x_\nu\, \delta x_i$$

zu dem Pfaffschen Ausdruck kovariant ist und zwar nicht bloß bei Einführung neuer unabhängiger Veränderlicher, sondern überhaupt bei jeder Substitution (2), mögen nun die Funktionen φ_i voneinander unabhängig sein oder nicht.

In allen mir bekannten Darstellungen bildet man die bilineare Kovariante von (1), indem man in dem Ausdrucke $d\Delta - \delta D$ die Ausdrücke $d\delta x_i$ und $\delta d x_i$ als gleich betrachtet, und muß dann die Kovarianteneigenschaft erst noch durch Rechnung bestätigen. Hier ergibt sich diese Eigenschaft als unmittelbare Folge der einfachen Tatsache, daß nach (5) die Ausdrücke $d\delta x_i - \delta d x_i$ zu den dx_i und den δx_i kogredient sind. Auch ist es von Wichtigkeit, daß die Kovarianteneigenschaft von (7) nicht bloß bei Einführung neuer unabhängiger Veränderlicher gesichert ist, sondern überhaupt bei jeder beliebigen Substitution von der Form (2).

Bemerkt sei noch, daß die aus (2) folgenden Gleichungen (5), wenn F eine beliebige Funktion von $x_1 \ldots x_n$ bezeichnet, ergeben:

$$\sum_1^n {}^i (d\delta x_i - \delta d x_i) \frac{\partial F}{\partial x_i} = \sum_1^r {}^k (d\delta y_k - \delta d y_k) \frac{\partial F}{\partial y_k}.$$

Versteht man hier unter den dy_k und δy_k die Zuwachse, die die y_k bei zwei beliebigen infinitesimalen Transformationen $Y_1 f$ und $Y_2 f$ in $y_1 \ldots y_r$ erhalten, so erkennt man sofort, daß $d\delta y_k - \delta d y_k$ der Zuwachs ist, den y_k bei der infinitesimalen Transformation erhält, die durch den Klammerausdruck

$$(Y_1 Y_2) = Y_1 Y_2 f - Y_2 Y_1 f$$

dargestellt wird. Die Gleichungen (5) sprechen also die bekannte Tatsache aus, daß dieser Klammerausdruck eine zu den beiden infinitesimalen Transformationen kovariante infinitesimale Transformation darstellt.

§ 2. Das Integrationsproblem einer Pfaffschen Gleichung und eines Pfaffschen Ausdrucks.

Lies erster Schritt in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen 1. O. war der, daß er die ursprüngliche Fragestellung Pfaffs wieder aufnahm, die darauf beruht, daß als Integralmannigfaltigkeit einer Pfaffschen Gleichung:

$$\sum_1^n \alpha_i(x_1 \ldots x_n)\, dx_i = 0$$

jede Mannigfaltigkeit des Raumes $x_1 \ldots x_n$ betrachtet wird, auf der die Pfaffsche Gleichung erfüllt ist. Denkt man sich eine m-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit durch $n - m$ unabhängige Gleichungen

$$\Phi_k(x_1 \ldots x_n) = 0 \qquad (k = 1 \ldots n - m)$$

dargestellt, so ist sie eine Integralmannigfaltigkeit dann und nur dann, wenn jedes Wertsystem: $x_1 \ldots x_n$, $dx_1 \ldots dx_n$, das die Gleichungen: $\Phi_k = 0$, $d\Phi_k = 0$ befriedigt, auch der Gleichung $\Sigma \alpha_i dx_i = 0$ genügt. Denkt man sich andrerseits die Mannigfaltigkeit mit Hilfe von m unabhängigen Veränderlichen $u_1 \ldots u_m$ durch Gleichungen von der Form:

$$x_i = \varphi_i(u_1 \ldots u_m) \qquad (i = 1 \ldots n)$$

dargestellt, so ist sie eine Integralmannigfaltigkeit dann und nur dann, wenn die Gleichung $\Sigma \alpha_i dx_i = 0$ durch die Substitution $x_i = \varphi_i$ zu einer Identität wird.

Es ist zweckmäßig, in entsprechender Weise den Begriff „Integralmannigfaltigkeit eines Pfaffschen Ausdrucks $\Sigma \alpha_i dx_i$" einzuführen und darunter eine solche Mannigfaltigkeit zu verstehen, auf der der Ausdruck $\Sigma \alpha_i dx_i$ ein vollständiges Differential wird.[1])

Erinnert man sich des bekannten Satzes, daß ein Pfaffscher Ausdruck dann und nur dann ein vollständiges Differential ist, wenn seine bilineare Kovariante identisch verschwindet, so erkennt man sofort, daß eine Mannigfaltigkeit:

$$x_i = \varphi_i(u_1 \ldots u_m) \qquad (i = 1 \ldots n)$$

dann und nur dann eine Integralmannigfaltigkeit des Pfaffschen Ausdrucks $\Sigma \alpha_i dx_i$ darstellt, wenn dessen bilineare Kovariante bei der Sub-

1) Diese Formulierung benutze ich schon seit mehreren Jahren in meinen Vorlesungen. Auch sie findet sich übrigens, wie ich erst nachträglich bemerkt habe, schon bei S. Kantor: „Über eine Klasse gemischter Gruppen" a. a. O. Bd. CXII, Abt. IIa, Juli 1903, S. 721 in Nr. 5.

stitution $x_i = \varphi_i$ identisch verschwindet. Hieraus aber ergibt sich wiederum, daß ein Gleichungensystem:

$$\Phi_k(x_1 \ldots x_n) = 0 \qquad (k = 1 \ldots n - m)$$

dann und nur dann eine Integralmannigfaltigkeit darstellt, wenn diese bilineare Kovariante für alle Wertsysteme x_i, dx_i, δx_i verschwindet, die den Gleichungen $\Phi_k = 0$, $d\Phi_k = 0$, $\delta \Phi_k = 0$ genügen.

Hätte Lie den Begriff Integralmannigfaltigkeit eines Pfaffschen Ausdrucks eingeführt, so würde er einen nicht geringen Teil seiner Untersuchungen viel bequemer haben darstellen können.

§ 3. Die Vereine im Raume der Elemente $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$.

Die Integration der partiellen Differentialgleichungen 1. O. in z, $x_1 \ldots x_n$, in denen die unbekannte Funktion z selbst nicht vorkommt, deckt sich mit der Aufgabe, in dem Raume $x_1, \ldots x_n$, $p_1 \ldots p_n$ die n-fach ausgedehnten Integralmannigfaltigkeiten des Pfaffschen Ausdrucks:

$$\sum_1^n{}^i p_i dx_i \tag{8}$$

aufzufinden, die eine oder mehrere vorgelegte Gleichungen zwischen x_1, $\ldots x_n$, $p_1, \ldots p_n$ befriedigen. Wir müssen daher zunächst einiges über die Integralmannigfaltigkeiten von (8) sagen. Ein Wertsystem x_i, p_i nennen wir dabei kurz ein *Element*.

Es leuchtet ein, daß jede Schar von ∞^1 Elementen eine Integralmannigfaltigkeit des Pfaffschen Ausdrucks (8) ist. Durch zwei beliebige unendlich benachbarte Elemente x_i, p_i und $x_i + dx_i$, $p_i + dp_i$ gehen daher stets Integralmannigfaltigkeiten von (8). Verlangen wir dagegen, daß die Integralmannigfaltigkeit noch ein zweites unendlich benachbartes Element $x_i + \delta x_i$, $p_i + \delta p_i$ enthält, so muß nach § 2 die Bedingung:

$$\sum_1^n{}^i (dx_i \delta p_i - dp_i \delta x_i) = 0 \tag{9}$$

erfüllt sein. Von zwei dem Elemente x_i, p_i unendlich benachbarten Elementen, die (9) erfüllen, wollen wir sagen, daß sie *vereinigt liegen* und wollen demgemäß die Integralmannigfaltigkeiten von (8) kurz als *Vereine* bezeichnen.

Ein Verein enthalte jetzt das Element x_i^0, p_i^0 und m unendlich benachbarte Elemente $x_i^0 + d_k x_i$, $p_i^0 + d_k p_i$ $(k = 1 \ldots m)$, die keiner Mannigfaltigkeit von weniger als m Dimensionen angehören, für die also nicht alle m-reihigen Determinanten der Matrix

$$\left| d_k x_1 \ldots d_k x_n \, d_k p_1 \ldots d_k p_n \right|_{(k = 1 \ldots m)} \tag{10}$$

2*

verschwinden. Dann sind erstens die Gleichungen:

$$\sum_1^m {}^k (d_k x_i d_j p_i - d_k p_i d_j x_i) = 0 \qquad (11) \qquad (k, j = 1 \ldots m)$$

erfüllt, und zweitens müssen alle dem Elemente x_i, p_i unendlich benachbarten Elemente des Vereins die m voneinander unabhängigen Gleichungen:

$$\sum_1^n {}^i (d_k x_i dp_i - d_k p_i dx_i) = 0 \qquad (12) \qquad (k = 1 \ldots m)$$

befriedigen. Da andrerseits (12) die m linear unabhängigen Lösungensysteme

$$dx_i = d_k x_i, \quad dp_i = d_k p_i \qquad (k = 1 \ldots m)$$

besitzt, so leuchtet ein, daß $m \leqq n$ sein muß, daß es also keine Vereine von mehr als ∞^n Elementen gibt. Ist aber $m \leqq n$, so gibt es stets Vereine von ∞^m Elementen, die das Element x_i^0, p_i^0 und die m angenommenen unendlich benachbarten Elemente enthalten. Setzt man nämlich

$$d_k x_i = a_k \delta t, \qquad d_k p_i = b_k \delta t,$$

so ist:

$$x_i = x_i^0 + \sum_1^m {}^k a_k u_k, \qquad p_i = p_i^0 + \sum_1^m {}^k b_k u_k \qquad (i = 1 \ldots n),$$

wenn man $u_1 \ldots u_m$ als unabhängige Veränderliche betrachtet, ein solcher Verein.[1])

Aus dem Gesagten geht hervor, daß jeder Verein durch Gleichungen von der Form

$$x_i = \Phi_i(v_1 \ldots v_m), \qquad p_i = X_i(v_1 \ldots v_m) \qquad (i = 1 \ldots n)$$

dargestellt wird, wo $m \leqq n$ ist und wo unter den $2n$ Funktionen Φ_i, X_i m voneinander unabhängig sind. Unter den n Funktionen $\Phi_1 \ldots \Phi_n$ seien gerade $l \leqq m$ voneinander unabhängige vorhanden, dann kann man die Gleichungen $x_i = \Phi_i$ in der Form:

$$x_i = \varphi_i(u_1 \ldots u_l) \qquad (13) \qquad (i = 1 \ldots n)$$

darstellen, von denen l nach $u_1 \ldots u_l$ auflösbar sind. Soll jetzt der Ausdruck

$$\sum_1^n {}^i p_i dx_i = \sum_1^n {}^i p_i d\varphi_i$$

ein vollständiges Differential sein, so kann dieses offenbar keine andern unabhängigen Veränderlichen enthalten als eben $u_1 \ldots u_l$, es muß also werden:

$$\sum_1^n {}^i p_i d\varphi_i = d\Omega(u_1 \ldots u_l),$$

1) Vgl. G. Kowalewski, Leipz. Ber. 1900, S. 96f.

eine Gleichung, die sich in die folgenden:

$$(14) \qquad \sum_1^n i\, p_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_k} = \frac{\partial \Omega}{\partial u_k} \qquad (k = 1 \ldots l)$$

zerlegt. Aber es ist klar, daß die Gleichungen (13) und (14) zusammen stets einen Verein von ∞^n Elementen darstellen, wenn man die Funktionen $\varphi_1 \ldots \varphi_n$ und Ω ganz beliebig wählt und nur dafür sorgt, daß l der Funktionen $\varphi_1 \ldots \varphi_n$ voneinander unabhängig sind. Zugleich leuchtet ein, daß hiermit alle Vereine von ∞^n Elementen gefunden sind, die es überhaupt gibt. Andrerseits muß jeder Verein von ∞^m Elementen ($l \leqq m \leqq n$), unter dessen Gleichungen sich n solche von der Form (13) befinden, einem Vereine angehören, der durch Gleichungen von der Form (13) und (14) bestimmt wird, und da jede Schar von Elementen, die in einem Vereine enthalten ist, offenbar selber einen Verein bildet, so ist hiermit die Bestimmung aller Vereine, die es überhaupt gibt, geleistet. Man erhält sie alle, indem man für alle möglichen Werte von l ($0 \leqq l \leqq n$) die Funktionen $\varphi_1 \ldots \varphi_n$, Ω in allgemeinster Weise wählt und sodann zu den Gleichungen (13) in allgemeinster Weise die Gleichungen:

$$(15) \qquad p_i = \chi_i(u_1 \ldots u_l, u_{l+1} \ldots u_m) \qquad (i = 1 \ldots n)$$

($l \leqq m \leqq n$) so hinzufügt, daß die Gleichungen (14) identisch erfüllt werden.

Die Vereine von ∞^n Elementen, auf denen, wie wir gesehen haben, alle Vereine überhaupt liegen, müssen noch besonders betrachtet werden.

Die Gleichungen:

$$(16) \qquad \Phi_\nu(x_1 \ldots x_n, p_1 \ldots p_n) = 0 \qquad (\nu = 1 \ldots n)$$

seien voneinander unabhängig und x_i^0, p_i^0 sei ein Wertsystem, das (16) befriedigt und das nicht alle n-reihigen Determinanten der Matrix

$$(17) \qquad \left| \begin{matrix} \dfrac{\partial \Phi_\nu}{\partial x_1} \cdots \dfrac{\partial \Phi_\nu}{\partial x_n} & \dfrac{\partial \Phi_\nu}{\partial p_1} \cdots \dfrac{\partial \Phi_\nu}{\partial p_n} \\ (\nu = 1 \ldots n) & \end{matrix} \right|$$

zum Verschwinden bringt. Wann stellt der Inbegriff aller in einer gewissen Umgebung des Elementes x_i^0, p_i^0 liegenden Elemente, die den Gleichungen (16) genügen, einen Verein von ∞^n Elementen dar?

Nach § 2 ist notwendig und hinreichend, daß für alle Wertsysteme $x_i, p_i, dx_i, dp_i, \delta x_i, \delta p_i$, die den Gleichungen $\Phi_\nu = 0$, $d\Phi_\nu = 0$, $\delta \Phi_\nu = 0$, genügen, die Gleichung:

$$(9) \qquad \sum_1^n i\, (dx_i \delta p_i - dp_i \delta x_i) = 0$$

erfüllt ist. Da wir uns nun auf solche Elemente x_i, p_i beschränken, die in einer gewissen Umgebung des Elementes x_i^0, p_i^0 liegen, so können und wollen wir nur solche Elemente x_i, p_i betrachten, die (16) erfüllen und die auch nicht alle n-reihigen Determinanten von (17) zum Verschwinden bringen. Für jedes solche Element x_i, p_i stellen die Gleichungen $d\Phi_\nu = 0$ n unabhängige Gleichungen für die Differentiale dx_i, dp_i dar. Sind die n Wertsysteme $d_k x_i$, $d_k p_i$ $(k=1\ldots n)$ linear unabhängige Lösungensysteme der Gleichungen $d\Phi_\nu = 0$, so sind die n Gleichungen:

$$\sum_1^n {}^i (d_k x_i \delta p_i - d_k p_i \delta x_i) = 0 \qquad (k = 1 \ldots n) \tag{18}$$

voneinander unabhängig, und da diese Gleichungen von allen Wertsystemen δx_i, δp_i befriedigt werden müssen, die den Gleichungen $\delta\Phi_\nu = 0$ genügen, so leuchtet ein, daß das Gleichungensystem (18) mit dem Systeme $\delta\Phi_\nu = 0$ äquivalent sein muß. Hierin liegt, daß die Ausdrücke:

$$dx_i = \sum_1^n {}^\mu \lambda_\mu \frac{\partial \Phi_\mu}{\partial p_i} dt, \qquad dp_i = -\sum_1^n {}^\mu \lambda_\mu \frac{\partial \Phi_\mu}{\partial x_i} dt \tag{19}$$

mit den n willkürlichen Parametern $\lambda_1 \ldots \lambda_n$ das allgemeinste Wertsystem dx_i, dp_i darstellen, das den Gleichungen $d\Phi_\nu = 0$ genügt. Setzen wir daher mit Benutzung des Poissonschen Klammersymbols:

$$\sum_1^n {}^i \left(\frac{\partial \varphi}{\partial p_i}\frac{\partial \chi}{\partial x_i} - \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\frac{\partial \chi}{\partial p_i}\right) = (\varphi\chi), \tag{20}$$

so müssen die Ausdrücke

$$d\Phi_\nu = \sum_1^n {}^\mu \lambda_\mu (\Phi_\mu \Phi_\nu)\, dt$$

bei beliebigen λ_μ verschwinden, das heißt, für die hier betrachteten Wertsyteme x_i, p_i müssen auch alle Ausdrücke $(\Phi_\mu \Phi_\nu)$ verschwinden.

Diese Bedingung ist nun nicht bloß notwendig, sondern auch hinreichend. Ist sie nämlich erfüllt, so stellen offenbar die Gleichungen (19) bei beliebigen λ ein Wertsystem dar, das die Gleichungen $d\Phi_\nu = 0$ befriedigt und zwar das allgemeinste Wertsystem dieser Art; vermöge (19) aber wird:

$$\sum_1^n {}^i (dx_i \delta p_i - \delta p_i \delta x_i) = \sum_1^n {}^\mu \lambda_\mu \delta \Phi_\mu \cdot dt,$$

was vermöge der Gleichungen $\delta\Phi_\nu = 0$ verschwindet.

Damit haben wir den bekannten Satz: *Ist x_i^0, p_i^0 ein Element, das den n unabhängigen Gleichungen* (16) *genügt und das nicht alle n-reihigen Determinanten der Matrix* (17) *zum Verschwinden bringt, so ist die durch* (16) *in der Umgebung des Elements x_i^0, p_i^0 dargestellte Mannigfaltigkeit von*

∞^n *Elementen dann und nur dann ein Verein, wenn für jedes Element* x_i, p_i, *das* (16) *erfüllt und das in einer gewissen Umgebung von* x_i^0, p_i^0 *liegt, auch alle Ausdrücke* $(\Phi_\mu \Phi_\nu)$ $(\mu, \nu = 1 \ldots n)$ *verschwinden, oder kürzer, wenn die Gleichungen* $(\Phi_\mu \Phi_\nu) = 0$ *eine Folge von* (16) *sind.*

Da wir hier auf das Poissonsche Klammersymbol gestoßen sind, so ist es angezeigt, gleich hier auf die einfache aber wichtige Beziehung hinzuweisen, in der dieses Symbol zu der bilinearen Kovariante des Pfaffschen Ausdrucks steht, eine Beziehung auf die, so nahe sie liegt, ebenfalls erst S. Kantor hingewiesen zu haben scheint.

Deutet man nämlich die Größen dx_i, dp_i als homogene Punktkoordinaten in einem ebenen Raume R_{2n-1} von $2n-1$ Dimensionen und definiert man in diesem Raume homogene Ebenenkoordinaten durch die Gleichung:

$$\sum_1^n (u_i dx_i + v_i dp_i) = 0,$$

so lautet die zu der bilinearen alternierenden Form

$$\sum_1^n {}^i (dx_i \delta p_i - dp_i \delta x_i)$$

gehörige kovariante Form in Ebenenkoordinaten

$$\sum_1^n (v_i u_i' - u_i v_i');$$

da nun die Ableitungen zweier Funktionen φ und χ der x_i, p_i nichts anderes sind als zwei Systeme solcher Ebenenkoordinaten, so ist der Poissonsche Klammerausdruck einfach die für diese Ebenenkoordinaten gebildete Kovariante zu der bilinearen Kovariante des Pfaffschen Ausdrucks. Da ferner die Gleichung

$$(9) \qquad \sum_1^n {}^i (dx_i \delta p_i - dp_i \delta x_i) = 0$$

in dem R_{2n-1} einen linearen Komplex darstellt, so sagt die Forderung, daß die Gleichungen $\Phi_\nu = 0$ einen Verein bestimmen sollen, offenbar aus, daß alle Geraden der $(n-1)$-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit:

$$(21) \qquad \sum_1^n \left(\frac{\partial \Phi_\nu}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial \Phi_\nu}{\partial p_i} dp_i \right) = 0 \qquad (\nu = 1 \ldots n)$$

des R_{2n-1} diesem Komplexe angehören. Das aber ist gleichbedeutend damit, daß die n ebenen $(2n-2)$-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten des R_{2n-1}, deren Schnitt (21) ist, die Gleichungen $(\Phi_\mu \Phi_\nu) = 0$ erfüllen.

Die Wichtigkeit dieser Beziehung zwischen der bilinearen Kovariante und dem Poissonschen Klammerausdrucke beruht besonders darauf, daß sie sich ohne weiteres auf jeden Pfaffschen Ausdruck in $2n$ Veränderlichen übertragen läßt, der die Normalform $p_1 dx_1 + \cdots + p_n dx_n$ erhalten kann.

Wir haben gesehen, daß ein System von n unabhängigen Gleichungen:

$$\Phi_\nu(x_1 \ldots x_n, p_1 \ldots p_n) = 0 \qquad (\nu = 1 \ldots n) \tag{16}$$

dann und nur dann einen Verein von ∞^n Elementen darstellt, wenn alle Ausdrücke $(\Phi_\mu \Phi_\nu)$ vermöge (16) verschwinden. Da jedes mit (16) äquivalente Gleichungensystem denselben Verein darstellt, so muß es diese Eigenschaft ebenfalls besitzen, insbesondere muß das also von jedem Gleichungensysteme gelten, das aus (16) durch Auflösung hervorgeht.

Wir wollen annehmen, daß sich (16) nach gerade m von den p_i auflösen läßt, daß es also die Form:

$$p_{i_\mu} + \varphi_\mu(x_1 \ldots x_n, p_{i_{m+1}} \cdots p_{i_n}) = 0 \qquad (\mu = 1 \ldots m)$$

$$\chi_k(x_1 \ldots x_n) = 0 \qquad (k = 1 \ldots n-m)$$

erhalten kann, unter $i_1 \ldots i_n$ irgendeine Anordnung der Zahlen $1 \ldots n$ verstanden. Ließe sich nun aus den Gleichungen $\chi_k = 0$ eine Relation zwischen $x_{i_1} \ldots x_{i_m}$ allein ableiten, etwa diese:

$$x_{i_m} + \omega(x_{i_1} \ldots x_{i_{m-1}}) = 0,$$

so könnten die Gleichungen des Vereins eine solche Form erhalten, daß die beiden Gleichungen $p_{i_m} + \varphi_m = 0$, $x_{i_m} + \omega = 0$ aufträten. Dann aber müßte der Ausdruck:

$$(p_{i_m} + \varphi_m, x_{i_m} + \omega) = 1$$

vermöge der Gleichungen des Vereins verschwinden, was unmöglich ist. Demnach lassen sich die Größen $x_{i_{m+1}} \ldots x_{i_n}$ aus den $n-m$ Gleichungen $\chi_k = 0$ nicht eliminieren und die Gleichungen unseres Vereins oder überhaupt jedes Vereins von ∞^n Elementen können auf die Form:

$$\begin{cases} p_{i_\mu} + \varphi_\mu(x_{i_1} \cdots x_{i_m}, p_{i_{m+1}} \cdots p_{i_n}) = 0 \\ x_{i_{m+k}} + \chi_k(x_{i_1} \cdots x_{i_m}) \qquad\qquad = 0 \\ \qquad (\mu = 1 \ldots m;\ k = 1 \ldots n-m) \end{cases} \tag{22}$$

gebracht werden. Hier aber sind die Klammerausdrücke aus den linken Seiten Funktionen von $x_{i_1} \ldots x_{i_m}$, $p_{i_{m+1}} \cdots p_{i_n}$ allein und müssen also, da sie vermöge (22) verschwinden sollen, identisch Null sein.

Von zwei Funktionen φ und χ, für die der Klammerausdruck $(\varphi\chi)$ identisch verschwindet, sagt man, daß sie *in Involution liegen*. Demnach können wir unser Ergebnis auch so ausdrücken:

Die Gleichungen eines Vereines von ∞^n Elementen können immer auf eine solche Form

$$\Omega_\nu(x_1 \ldots x_n, p_1 \ldots p_n) = 0 \qquad (\nu = 1 \ldots n)$$

gebracht werden, daß die Funktionen $\Omega_1 \ldots \Omega_n$ paarweise in Involution liegen.

Hiermit ist gezeigt, daß es Systeme von n unabhängigen Funktionen der x, p gibt, die paarweise in Involution liegen. Ist $X_1 \ldots X_n$ ein solches System, so stellen offenbar die Gleichungen:

$$(23) \qquad X_\nu(x_1 \ldots x_n, p_1 \ldots p_n) = a_\nu \qquad (\nu = 1 \ldots n)$$

stets einen Verein von ∞^n Elementen dar, welche Werte man auch den n willkürlichen Konstanten $a_1 \ldots a_n$ erteilt. Man hat daher eine Schar von ∞^n Vereinen von je ∞^n Elementen, und es ist klar, daß durch die Gleichungen (23) der Raum der ∞^{2n} Elemente x, p derart in ∞^n Vereine von je ∞^n Elementen zerlegt ist, daß jedes Element x, p einem und im allgemeinen nur einem dieser Vereine angehört.

Weiß man umgekehrt, daß die Gleichungen (23), in denen die X_ν unabhängige Funktionen sind, für beliebige Werte der a_ν lauter Vereine darstellen, so kann man schließen, daß die X_ν paarweise in Involution liegen, denn die Ausdrücke

$$(X_\mu - a_\mu, X_\nu - a_\nu) = (X_\mu X_\nu)$$

müssen bei beliebigen a_ν stets vermöge (23) verschwinden, was nur möglich ist, wenn sie identisch verschwinden.

Man kann übrigens das allgemeinste Gleichungensystem (23), das ∞^n Vereine von je ∞^n Elementen darstellt, leicht bilden. Man braucht nur in den Gleichungen (13) und (14) die Funktionen φ_i und Ω als Funktionen von l Veränderlichen $u_1 \ldots u_l$ und n Parametern $a_1 \ldots a_n$ in allgemeinster Weise so zu wählen, daß die Gleichungen (13), (14) nach $u_1 \ldots u_l, a_1 \ldots a_n$ auflösbar werden.

Stellen die Gleichungen (23) bei beliebiger Wahl der Konstanten a_ν Vereine von ∞^n Elementen dar, und sind $\Phi_1 \ldots \Phi_m$ $(m < n)$ beliebige Funktionen, die nur voneinander und von den X_ν unabhängig sind, so stellen offenbar auch die Gleichungen:

$$X_1 = a_1, \ldots, X_n = a_n, \quad \Phi_1 = b_1, \ldots, \Phi_m = b_m$$

für beliebige Werte der a, b Vereine dar und zwar solche von je ∞^{n-m} Elementen. Es gibt daher sicher Gleichungensysteme von der Form:

$$(24) \qquad F_\nu(x_1 \ldots x_n, p_1 \ldots p_n) = a_\nu \qquad (\nu = 1 \ldots n+m, \quad 0 \leqq m < n),$$

die bei beliebigen Werten der a_ν Vereine bestimmen. Der Raum der ∞^{2n} Elemente x, p wird durch ein solches Gleichungensystem in eine Schar von ∞^{n+m} Vereinen von je ∞^{n-m} Elementen zerlegt derart, daß jedes Element x, p einem und im allgemeinen nur einem dieser Vereine angehört.

Es seien $\psi_1 \dots \psi_{n-m}$ Funktionen der x, p, die voneinander und von $F_1 \dots F_{n+m}$ unabhängig sind. Setzen wir dann:

$$\psi_k(x_1 \dots x_n, p_1 \dots p_n) = u_k \qquad (k = 1 \dots n-m), \tag{25}$$

so lassen sich die Gleichungen (24), (25) nach den x, p auflösen und wir erhalten durch diese Auflösung:

$$\begin{cases} x_i = \Phi_i(u_1 \dots u_{n-m}, a_1 \dots a_{n+m}) \\ p_i = X_i(u_1 \dots u_{n-m}, a_1 \dots a_{n+m}) \end{cases} \quad (i = 1 \dots n), \tag{26}$$

eine neue Darstellung unserer ∞^{n+m} Vereine, bei der $u_1 \dots u_{n-m}$ als unabhängige Veränderliche zu betrachten sind. Das Gleichungensystem (26) läßt sich dabei offenbar nach den u und den a auflösen und liefert dadurch wieder die Gleichungen (24) und (25).

Da die Gleichungen (24) bei beliebigen Werten der a Vereine darstellen, so ist der Ausdruck $\Sigma X_i d\Phi_i$ ein vollständiges Differential in den Veränderlichen u, also ist

$$\sum_1^n {}^i X_i \sum_1^{n-m} {}^k \frac{\partial \Phi_i}{\partial u_k} du_k \equiv \sum_1^{n-m} {}^k \frac{\partial \Omega(u_1 \dots u_{n-m}, a_1 \dots a_{n+m})}{\partial u_k} du_k. \tag{27}$$

Machen wir in dieser Identität die Substitution $a_\nu = F_\nu$, $u_k = \psi_k$, die wir durch Einschließen in eckige Klammern andeuten wollen, und bedenken wir, daß $[\Phi_i] \equiv x_i$, $[X_i] \equiv p_i$ ist, so erhalten wir in den Veränderlichen x, p eine Identität von der Form:

$$\sum_1^n {}^i p_i dx_i - \sum_1^n {}^i p_i \sum_1^{n+m} {}^\nu \left[\frac{\partial \Phi_i}{\partial a_\nu}\right] dF_\nu \equiv d[\Omega] - \sum_1^{n+m} {}^\nu \left[\frac{\partial \Omega}{\partial a_\nu}\right] dF_\nu,$$

oder, wenn wir

$$\begin{cases} [\Omega] = -\omega(x_1 \dots x_n, p_1 \dots p_n) \\ \sum_1^n {}^i p_i \left[\frac{\partial \Phi_i}{\partial a_\nu}\right] - \left[\frac{\partial \Omega}{\partial a_\nu}\right] = f_\nu(x_1 \dots x_n, p_1 \dots p_n) \end{cases} \tag{28}$$

setzen, eine Identität:

$$\sum_1^{n+m} {}^\nu f_\nu dF_\nu \equiv \sum_1^n {}^i p_i dx_i + d\omega, \tag{29}$$

die es deutlich zum Ausdruck bringt, daß die Gleichungen (24) eine Schar von ∞^{n+m} Vereinen darstellen.

Hier ist die Funktion Ω durch (27) bestimmt bis auf eine additive willkürliche Funktion ϑ von $a_1 \dots a_{n+m}$, demnach kann man ω ersetzen durch $\omega + \vartheta(F_1 \dots F_{n+m})$, wobei (29) die Form:

$$\sum_1^{n-m} {}^{\nu} \left(f_\nu + \frac{\partial \vartheta}{\partial F_\nu}\right) dF_\nu \equiv \sum_1^n p_i dx_i + d(\omega + \vartheta)$$

annimmt. Es ist auch leicht zu sehen, daß wir hiermit die allgemeinste Form dieser Identität von der Gestalt (29) gefunden haben. Ist nämlich:

$$\sum_1^{n+m} {}^{\nu} \bar{f}_\nu dF_\nu \equiv \sum_1^n {}^{i} p_i dx_i + d\bar{\omega},$$

so ist:

$$\sum_1^{n+m} {}^{\nu} (\bar{f}_\nu - f_\nu) dF_\nu \equiv d(\bar{\omega} - \omega)$$

also gleich einem vollständigen Differentiale, und da die F_ν unabhängige Funktionen der x, p sind, so ist $\bar{\omega} - \omega$ eine Funktion ϑ von $F_1 \dots F_{n+m}$ allein, also

$$\bar{f}_\nu - f_\nu = \frac{\partial \vartheta(F_1 \dots F_{n+m})}{\partial F_\nu} \qquad (\nu = 1 \dots n+m).$$

Hat man ω durch die früher besprochene Quadratur, zu der allerdings gewisse Eliminationen hinzukommen, gefunden, so findet man die f_ν aus den $2n$ linearen Gleichungen:

$$\sum_1^{n+m} {}^{\nu} f_\nu \frac{\partial F_\nu}{\partial x_i} = p_i + \frac{\partial \omega}{\partial x_i}$$

$$\sum_1^{n+m} {}^{\nu} f_\nu \frac{\partial F_\nu}{\partial p_i} = \frac{\partial \omega}{\partial p_i},$$

in die sich (29) zerlegt. Unter diesen Gleichungen, die sicher miteinander verträglich sind, gibt es nämlich wegen der Unabhängigkeit der F_ν gerade $n + m$ voneinander unabhängige.

Stellen also die Gleichungen (24) bei beliebiger Wahl der a_ν Vereine von je ∞^{n-m} Elementen dar, so besteht immer eine Identität von der Form (29), wo ω durch eine Quadratur gefunden werden muß, während die f_ν nach Auffindung von ω durch lineare Gleichungen bestimmt sind.[1])

Bilden wir von den beiden Seiten der Identität (29) die bilinearen Kovarianten, die selbstverständlich wieder identisch gleich sind, so erhalten wir die neue Identität:

$$(30) \qquad \sum_1^{n+m} {}^{\nu} (df_\nu \delta F_\nu - \delta f_\nu dF_\nu) \equiv \sum_1^n {}^{i} (dp_i \delta x_i - dx_i \delta p_i).$$

1) Vgl. Lie, Math. Ann. Bd. XI, S. 465 f.

In dieser setzen wir:

$$\delta x_i = \frac{\partial \varphi}{\partial p_i}\delta t, \quad \delta p_i = -\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\delta t,$$

unter φ eine willkürliche Funktion verstanden, dann ergibt sich:

$$(31) \qquad \sum_1^{n+m}{}^{\nu}((\varphi F_\nu)df_\nu - (\varphi f_\nu)dF_\nu) \equiv d\varphi$$

und hieraus wieder durch die Substitution:

$$dx_i = \frac{\partial \chi}{\partial p_i}dt, \quad dp_i = -\frac{\partial \chi}{\partial x_i}dt,$$

die Identität:

$$(32) \qquad \sum_1^{n+m}{}^{\nu}\{(\varphi F_\nu)(\chi f_\nu) - (\varphi f_\nu)(\chi F_\nu)\} \equiv (\chi\varphi),$$

welche Funktionen auch φ und χ sein mögen. Besteht umgekehrt (32) identisch für alle Funktionen φ und χ, so ist offenbar auch (30) identisch erfüllt, und es besteht also zugleich eine Identität von der Form (29).

Nehmen wir jetzt insbesondere $m = 0$ an, betrachten wir also den Fall, daß die Gleichungen (24), oder wie wir sie jetzt schreiben wollen:

$$(24') \qquad X_\nu(x_1 \ldots x_n, p_1 \ldots p_n) = a_\nu \qquad (\nu = 1 \ldots n)$$

eine Schar von ∞^n Vereinen von je ∞^n Elementen darstellen, so sind alle $(X_\mu X_\nu) \equiv 0$. Schreiben wir daher noch die Identität (29) in der Form:

$$(29') \qquad \sum_1^{n}{}^{\nu} P_\nu dX_\nu \equiv \sum_1^{n} p_\nu dx_\nu + d\omega,$$

so liefert die Identität (31) für $\varphi = X_\mu$ und $\varphi = P_\mu$ diese:

$$(33) \qquad \begin{cases} \sum_1^{n}{}^{\nu} (P_\nu X_\mu)dX_\nu \equiv dX_\mu \\ \sum_1^{n}{}^{\nu} \{(P_\mu X_\nu)dP_\nu - (P_\mu P_\nu)dX_\nu\} \equiv dP_\mu \end{cases} \qquad (\mu = 1 \ldots n).$$

Hieraus aber folgt wegen der Unabhängigkeit der X_ν zunächst:

$$(P_\nu X_\mu) = \varepsilon_{\mu\nu},$$

wo $\varepsilon_{\mu\nu} = 0$ oder $= 1$ ist, je nachdem $\mu \neq \nu$ oder $\mu = \nu$, sodann aber:

$$(P_\mu P_\nu) \equiv 0.$$

Setzen wir endlich in (29′) an Stelle der dx_i, dp_i die vorhin benutzten

Ausdrücke, so kommt für jede beliebige Funktion χ:

$$\sum_1^n {}^\nu P_\nu(\chi X_\nu) \equiv \sum_1^n {}^\nu p_\nu \frac{\partial \chi}{\partial p_\nu} + (\chi \omega).$$

Damit haben wir den bekannten:

Satz: *Sind $X_1 \ldots X_n$ unabhängige Funktionen von $x_1 \ldots x_n$, $p_1 \cdots p_n$, die paarweise in Involution liegen oder, was auf dasselbe hinauskommt, stellen die Gleichungen: $X_\nu = a_\nu (\nu = 1 \ldots n)$ bei beliebigen a_ν Vereine von je ∞^n Elementen dar, so besteht eine Identität von der Form:*

$$(29') \qquad \sum_1^n {}^i P_i d X_i = \sum_1^n {}^i p_i dx_i + d\omega,$$

wo ω durch eine Quadratur gefunden wird, während die P_i nachher durch Auflösung linearer Gleichungen erhalten werden. Zwischen den Funktionen X_i, P_i und ω bestehen dabei die Relationen:

$$(34) \qquad (X_i X_\nu) = 0, \quad (P_i X_\nu) = \varepsilon_{i\nu}, \quad (P_i P_\nu) = 0, \qquad {\scriptstyle (i, \nu = 1 \ldots n)}$$

und

$$(35) \qquad \begin{cases} (\omega X_i) = \sum_1^n {}^\mu p_\mu \dfrac{\partial X_i}{\partial p_\mu} \\ (\omega P_i) = \sum_1^n {}^\mu p_\mu \dfrac{\partial P_i}{\partial p_\mu} - P_i \end{cases} \qquad {\scriptstyle (i = 1 \ldots n),}$$

außerdem gilt die Identität:

$$(32') \qquad \sum_1^n {}^\nu \{(P_\nu \varphi)(X_\nu \chi) - (X_\nu \varphi)(P_\nu \chi)\} \equiv (\varphi \chi),$$

welche Funktionen der x, p auch φ und χ sein mögen[1]).

Aus dem Bestehen der Relationen (34) folgt übrigens, daß alle $2n$ Funktionen $X_1 \ldots X_n$, $P_1 \ldots P_n$ voneinander unabhängig sind. Bildet man nämlich das Quadrat der Funktionaldeterminante der X, P in bezug auf die x, p, indem man diese Determinante in den beiden Formen:

$$\begin{pmatrix} P_1 \ldots P_n & X_1 \ldots X_n \\ p_1 \ldots p_n & x_1 \ldots x_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} X_1 \ldots X_n & -P_1 \ldots -P_n \\ x_1 \ldots x_n & p_1 \ldots p_n \end{pmatrix}$$

schreibt und beide miteinander multipliziert, so erhält man eine Determinante, die wegen (34) den Wert 1 besitzt.

---

1) Die Identität (32′) scheint merkwürdigerweise bisher noch nicht beachtet worden zu sein.

Besteht umgekehrt eine Identität von der Form (29′), so ist klar, daß die Gleichungen

$$X_1 = \text{const.}, \quad \cdots, \quad X_n = \text{const.}$$

Vereine darstellen. Wären hier die Funktionen $X_1 \cdots X_n$ nicht voneinander unabhängig, so bestände jeder dieser Vereine aus mehr als ∞^n Elementen, was unmöglich ist, also können wir schließen, daß $X_1 \cdots X_n$ voneinander unabhängig sind und paarweise in Involution liegen. Dann aber folgt zugleich, daß die Gleichungen (34), (35) und (32′) bestehen.

Sind endlich $2n$ Funktionen $X_1 \cdots X_n$, $P_1 \cdots P_n$ vorgelegt, die den Relationen

$$(34) \qquad (X_i X_\nu) = 0, \quad (P_i X_\nu) = \varepsilon_{i\nu}, \quad (P_i P_\nu) = 0 \qquad {\scriptstyle (i,\, \nu = 1 \cdots n)}$$

genügen, so sind, wie wir gesehen haben, alle diese Funktionen voneinander unabhängig.

Man kann infolgedessen jede beliebige Funktion φ der x, p durch $X_1 \cdots X_n$, $P_1 \cdots P_n$ ausdrücken und erhält:

$$(36) \qquad (\varphi X_i) = \frac{\partial \varphi}{\partial P_i}, \qquad (\varphi P_i) = -\frac{\partial \varphi}{\partial X_i} \qquad {\scriptstyle (i = 1 \cdots n).}$$

Nimmt man noch eine zweite Funktion χ hinzu, so kommt:

$$(37) \qquad \begin{cases} (\varphi\chi) = \sum\limits_1^n \left\{ (\varphi X_i) \dfrac{\partial \chi}{\partial X} + (\varphi P_i) \dfrac{\partial \chi}{\partial P_i} \right\} \\[2ex] \qquad = \sum\limits_1^n{}^i \left\{ \dfrac{\partial \varphi}{\partial P_i} \dfrac{\partial \chi}{\partial X_i} - \dfrac{\partial \varphi}{\partial X_i} \dfrac{\partial \chi}{\partial P_i} \right\}, \end{cases}$$

wofür wir auch schreiben können:

$$(32') \qquad (\varphi\chi) \equiv \sum_1^n{}^i \{ (P_i\varphi)(X_i\chi) - (X_i\varphi)(P_i\chi) \} \cdot$$

Aber wie wir vorhin bemerkten, folgt aus dem Bestehen von (32) für beliebige Funktionen φ, χ die Identität (30), also folgt aus (32′) die Identität:

$$\sum_1^n{}^i (dx_i \delta p_i - dp_i \delta x_i) = \sum_1^n{}^i (dX_i \delta P_i - dP_i \delta X_i).$$

Darin liegt, daß die beiden Ausdrücke $\Sigma p_i dx_i$ und $\Sigma P_i dX_i$ dieselben bilinearen Kovarianten haben, daß sie sich also selber nur um ein vollständiges Differential unterscheiden. Folglich besteht eine Identität von der Form:

$$(29') \qquad \sum_1^n P_i dX_i \equiv \sum_1^n{}^i p_i dx_i + d\omega,$$

wo die Funktion ω die $2n$ Gleichungen:

$$(35)\quad \begin{cases} (\omega X_i) = \sum_1^n {}^\mu p_\mu \dfrac{\partial X_i}{\partial p_\mu}, \\ (\omega P_i) = \sum_1^n {}^\mu p_\mu \dfrac{\partial P_i}{\partial p_\mu} - P_i \\ \qquad (i = 1 \cdots n) \end{cases}$$

befriedigt, durch die ihre $2n$ Ableitungen bestimmt sind. Also:

Satz: *Befriedigen die $2n$ Funktionen X_i, P_i Relationen von der Form* (34), *so sind sie voneinander unabhängig und es besteht eine Identität von der Form* (29'), *wo die Funktion ω den Gleichungen* (35) *genügt.*

Zeigte sich der große Nutzen der bilinearen Kovariante schon bei der Ableitung der Gleichungen (34) aus der Identität (29'), so wird er noch viel deutlicher bei dem Beweise der Umkehrung, daß die Gleichungen (34) eine Identität von der Form (29') nach sich ziehen. Gerade den Beweis dieser Umkehrung mußte Lie durch ziemlich umständliche Betrachtungen führen[1].

§ 4. Die Berührungstransformationen in den x, p.

Als eine Berührungstransformation in den x, p bezeichnen wir jede Transformation

$$(38)\quad x_i' = X_i(x_1 \cdots x_n, p_1 \cdots p_n), \quad p_i' = P_i(x_1 \cdots x_n, p_1 \cdots p_n) \quad (i = 1 \cdots n),$$

bei der der Pfaffsche Ausdruck $\Sigma p_i dx_i$ bis auf hinzutretendes vollständiges Differential invariant bleibt, bei der also eine Relation von der Form:

$$(39)\quad \sum_1^n {}^i p_i' dx_i' = \sum_1^n {}^i p_i dx_i + d\omega(x, p)$$

besteht.

Aus (39) folgt, daß vermöge (38) eine Gleichung von der Form

$$(40)\quad \sum_1^n {}^i (dp_i' \delta x_i' - dx_i' \delta p_i') = \sum_1^n {}^i (dp_i \delta x_i - dx_i \delta p_i)$$

besteht, die ihrerseits wiederum eine von der Form (39) nach sich zieht. Die Berührungstransformationen in den x, p können daher auch definiert werden als die Gruppe aller Transformationen in den x, p, die die bilineare Kovariante des Pfaffschen Ausdrucks $\Sigma p dx$ invariant lassen. Zugleich ist klar, daß unsere Berührungstransformationen jedes Element

1) Vgl. Transformationsgruppen Bd. II, S. 126—130.

x, p mit zwei unendlich benachbarten $x + dx, p + dp$ und $x + \delta x, p + \delta p$, die vereinigt liegen, in eben solche Elemente überführt und außerdem jeden Verein von Elementen in einen Verein.

Ist (38) eine Berührungstransformation in den x, p, so besteht eine Identität von der Form (29′), folglich sind die Funktionen X_i, P_i, ω durch die Relationen (34) und (35) verknüpft. Umgekehrt ziehen aber nach S. 29 die Gleichungen (34) die Unabhängigkeit der $2n$ Funktionen X_i, P_i und das Bestehen einer Relation von der Form (29′) nach sich, wo ω die Gleichungen (35) befriedigt. Demnach stellen die Gleichungen (38) dann und nur dann eine Berührungstransformation in den x, p dar, wenn sie die Gleichungen (34) befriedigen. Aus (34) aber folgt, wie wir vorhin sahen, die Identität (37), also die Gleichung:

$$\sum_1^n {}_i \left(\frac{\partial \varphi}{\partial p_i}\frac{\partial \chi}{\partial x_i} - \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\frac{\partial \chi}{\partial p_i}\right) = \sum_1^n {}_i \left(\frac{\partial \varphi}{\partial p_i'}\frac{\partial \chi}{\partial x_i'} - \frac{\partial \varphi}{\partial x_i'}\frac{\partial \chi}{\partial p_i'}\right),$$

oder kürzer geschrieben:

$$(\varphi \chi)_{xp} = (\varphi \chi)_{x'p'}. \tag{41}$$

Die Berührungstransformationen in den x, p lassen also den Poissonschen Klammerausdruck invariant.

Umgekehrt ist offenbar jede Transformation in den x, p, bei der der Poissonsche Klammerausdruck invariant bleibt, eine Berührungstransformation in den x, p. Die Gruppe aller Berührungstransformationen in den x, p kann daher auch durch die Invarianz dieses Klammerausdrucks definiert werden, was bei der Beziehung dieses Ausdrucks zu der bilinearen Kovariante nicht überraschen wird.

Ist jetzt:

$$\delta x_i = \xi_i \delta t, \quad \delta p_i = \pi_i \delta t \qquad (i = 1 \cdots n)$$

oder:

$$Xf = \sum_1^n {}_i \left(\xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \pi_i \frac{\partial f}{\partial p_i}\right)$$

eine infinitesimale Berührungstransformation, so ist:

$$\delta(\Sigma p_i dx_i) = du(x, p) \cdot \delta t$$

also:

$$\sum_1^n {}_i (p_i d\xi_i + \pi_i dx_i) = du$$

oder:

$$\sum_1^n {}_i (\pi_i dx_i - \xi_i dp_i) = d(u - \Sigma p_i \xi_i).$$

Setzen wir daher: $u - \Sigma p_i \xi_i = - U$, so wird:

$$\xi_i = \frac{\partial U}{\partial p_i}, \qquad \pi_i = - \frac{\partial U}{\partial x_i},$$

mithin:

(42) $$Xf = (Uf).$$

Die Funktion U ist hier offenbar ganz willkürlich wählbar und es ist:

(43) $$X(\Sigma p_i dx_i) = d(\Sigma p_i U_{p_i} - U).$$

Aus der Invarianz des Poissonschen Klammerausdrucks folgt noch, daß die Funktion U gegenüber jeder endlichen Berührungstransformation mit der infinitesimalen Transformation Xf invariant verknüpft ist.

Wir wollen U die zu der infinitesimalen Berührungstransformation gehörige *Charakteristik* nennen und bemerken noch, daß U bei gegebenem Xf durch eine Quadratur gefunden wird, denn es ist

(44) $$dU = \sum_1^n {}^i (\xi_i dp_i - \pi_i dx_i).$$

Wählen wir auch die Transformation (38) infinitesimal mit der Charakteristik V, so ist

$$x_i' = x_i + \frac{\partial V}{\partial p_i} \delta t, \qquad p_i' = p_i - \frac{\partial V}{\partial x_i} \delta t,$$

also wird für jede Funktion $f(x, p)$

$$f' = f(x', p') = f + (Vf)_{xp} \delta t, \quad f = f' - (V'f')_{x'p'} \delta t.$$

Nun aber ist:

$$\begin{aligned} (Uf)_{xp} &= (Uf)_{x'p'} \\ &= (U' - (V'U')\delta t,\ \ f' - (V'f')\delta t)_{x'p'} \\ &= (U'f')_{x'p'} - (U'(V'f'))_{x'p'} \delta t - ((V'U')f')_{x'p'} \delta t \\ &= (Uf) + \{(V(Uf)) - (U(Vf)) - ((VU)f)\} \delta t, \end{aligned}$$

also ergibt sich die berühmte Jacobische Identität:

(45) $$(U(Vf)) - (V(Uf)) \equiv ((UV)f),$$

die für drei beliebige Funktionen U, V, f der x, p gilt.

Dieser von Lie herrührende Beweis der Identität kann offenbar nicht durch einen begrifflich einfacheren ersetzt werden.

§ 5. Differentialgleichungen in $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$.

Es sei jetzt ein Gleichungensystem:

$$F_k(x_1 \dots x_n, p_1 \dots p_n) = 0 \qquad (k = 1 \dots l)$$

vorgelegt und es sollen alle Vereine von ∞^n Elementen gefunden werden die diesem Gleichungensysteme genügen, oder kürzer: alle zugehörigen

Integralvereine von ∞^n Elementen. Dann versteht es sich nach S. 22 von selbst, daß diese Vereine auch alle Gleichungen von der Form:

$$(F_k F_j) = 0 \qquad (k, j = 1 \ldots l)$$

befriedigen. Ergibt sich durch die Bildung dieser und der daraus folgenden Gleichungen kein Widerspruch, so findet man schließlich, daß die gestellte Aufgabe immer auf die andre hinauskommt, alle Integralvereine von ∞^n Elementen eines Systems von der Form:

$$F_\mu(x_1 \ldots x_n, p_1 \ldots p_n) = 0 \qquad (\mu = 1 \ldots m) \tag{46}$$

zu finden, wo die $(F_\mu F_\nu)$ sämtlich vermöge (46) verschwinden. Ein solches Gleichungensystem aber nennt man ein *m-gliedriges Involutionssystem.*

Bilden die Gleichungen (46) ein m-gliedriges Involutionssystem in diesem Sinne, so hat jedes aequivalente Gleichungensystem: $\Phi_1 = 0, \ldots, \Phi_m = 0$ dieselbe Eigenschaft.

In der Tat, die Gleichungen $dF_1 = 0, \ldots, dF_m = 0$ stellen in dem R_{2n-1} der dx_i, dp_i eine $(2n-m-1)$-fach ausgedehnte ebene Mannigfaltigkeit E_{2n-m-1} dar und zwar als Schnitt von m $(2n-2)$-fach ausgedehnten ebenen Mannigfaltigkeiten. Beschränken wir uns nun auf solche Elemente x_i, p_i, die (46) befriedigen, so ist $(F_\mu F_\nu) = 0$ $(\mu, \nu = 1 \ldots m)$, das heißt, je zwei durch E_{2n-m-1} gehende ebene $(2n-2)$-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeiten u_i, v_i und u_i', v_i' befriedigen immer die Gleichung: $\Sigma(v_i u_i' - u_i v_i') = 0$. Andererseits stellen die Gleichungen: $d\Phi_1 = 0, \ldots, d\Phi_m = 0$ dieselbe Mannigfaltigkeit E_{2n-m-1} dar, nur als Schnitt von m andern $(2n-2)$-fach ausgedehnten ebenen Mannigfaltigkeiten; demnach müssen unter der über die x_i, p_i gemachten Voraussetzung auch alle $(\Phi_\mu \Phi_\nu)$ verschwinden.

Denken wir uns jetzt das Gleichungensystem (46) aufgelöst, so ergibt sich, wie auf S. 24, daß die Auflösung die Form:

$$\begin{cases} x_{i_\lambda} + \varphi_\lambda(x_{i_{l+1}} \ldots x_{i_m}) = 0, \\ p_{i_{l+k}} + \chi_k(x_{i_{l+1}} \ldots x_{i_n}, p_{i_1}, \ldots p_{i_l}, p_{i_{m+1}} \ldots p_{i_n}) = 0 \end{cases} \tag{46'}$$
$$(\lambda = 1 \ldots l;\ k = 1 \ldots m - l)$$

erhalten kann, wo $i_1 \ldots i_n$ irgendeine Anordnung der Zahlen $1 \ldots n$ bedeutet. Hier aber sind die Klammerausdrücke aus den linken Seiten frei von $x_{i_1}, \ldots x_{i_l}, p_{i_{l+1}} \ldots p_{i_m}$ und müssen, da sie vermöge (46′) nicht verschwinden können, identisch verschwinden.

Demnach läßt sich jedes m-gliedrige Involutionssystem auf eine solche Form

$$\Omega_\mu(x_1 \ldots x_n, p_1 \ldots p_n) = 0 \qquad (\mu = 1 \ldots m) \tag{46''}$$

bringen, daß die Funktionen $\Omega_1 \ldots \Omega_m$ paarweise in Involution liegen.

Ersetzt man das Involutionssystem (46) durch seine aufgelöste Form (46′), so gehen allerdings alle etwaigen Integralvereine von ∞^n Elementen verloren, die die Funktionaldeterminante

$$D = \begin{pmatrix} F_1 \dots F_l & F_{l+1} \dots F_m \\ x_{i_1} \dots x_{i_l} & p_{i_{l+1}} \dots p_{i_m} \end{pmatrix}$$

zum Verschwinden bringen. Da aber diese Integralvereine die Gleichungen:

$$F_1 = 0, \quad \dots, \quad F_m = 0, \quad D = 0$$

befriedigen, so kommt ihre Bestimmung auf die Integration eines mindestens $(m+1)$-gliedrigen Involutionssystems hinaus, und man kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit sagen, daß die Bestimmung der Integralvereine von ∞^n Elementen eines vorgelegten Gleichungensystems immer auf das Normalproblem zurückgeführt werden kann:

Ein Involutionssystem von der Form (46″) *soll integriert werden, bei dem die Funktionen $\Omega_1 \dots \Omega_m$ paarweise in Involution liegen.*

Was dieses Normalproblem angeht, so wollen wir uns hier mit dem Nachweise begnügen, daß es vollständige Lösungen besitzt, daß also die ∞^{2n-m} Elemente, die (46″) erfüllen, immer in ∞^{n-m} Vereine von je ∞^n Elementen angeordnet werden können. Aus einer solchen vollständigen Lösung können nämlich alle Integralvereine ohne Integration gefunden werden.

Es kommt also darauf an, zu den Gleichungen (46″) solche Gleichungen:

$$\Omega_{m+k}(x_1 \dots x_n, p_1 \dots p_n) = a_k \qquad (k = 1 \dots n-m)$$

hinzuzufügen, daß die Ω_{m+k} von $\Omega_1 \dots \Omega_m$ und voneinander unabhängig sind und sowohl mit $\Omega_1 \dots \Omega_m$ als untereinander in Involution liegen. Nun aber sind die m Gleichungen:

(47)
$$A_\mu f = (\Omega_\mu f) = 0 \qquad (\mu = 1 \dots m)$$

offenbar voneinander unabhängig und bilden wegen:

$$A_\mu A_\nu f - A_\nu A_\mu f = (\Omega_\mu(\Omega_\nu f)) - (\Omega_\nu(\Omega_\mu f)) = ((\Omega_\mu \Omega_\nu) f) \equiv 0$$

ein m-gliedriges vollständiges System. Demnach findet man eine Funktion Ω_{m+1}, indem man eine von $\Omega_1 \dots \Omega_m$ unabhängige Lösung dieses vollständigen Systems sucht, sodann erhält man Ω_{m+2} durch Bestimmung einer von $\Omega_1 \dots \Omega_{m+1}$ unabhängigen Lösung des $(m+1)$-gliedrigen vollständigen Systems:

$$(\Omega_1 f) = 0, \quad \dots, \quad (\Omega_{m+1} f) = 0$$

und so fort.

Erwähnt sei noch, daß die Integration des Involutionssystems (46′) im Falle $l > 0$ immer auf die eines $(m-l)$-gliedrigen Involutionssystems in $2(n-l)$ Veränderlichen zurückgeführt werden kann.

Setzt man:

$$x'_{i_\lambda} = x_{i_\lambda} + \varphi_\lambda \qquad (\lambda = 1 \ldots l) \tag{48}$$

so verwandelt sich der Pfaffsche Ausdruck $\Sigma p_i dx_i$ in:

$$\sum_1^l{}^\lambda p_{i_\lambda}(dx'_{i_\lambda} - d\varphi_\lambda) + \sum_1^{n-l}{}^k p_{i_{l+k}} dx_{i_{l+k}}.$$

Setzt man daher noch:

$$\left\{\begin{aligned} & x'_{i_{l+k}} = x_{i_{l+k}} \qquad (k = 1 \ldots n-l) \\ & p'_{i_\lambda} = p_{i_\lambda} \qquad (\lambda = 1 \ldots l) \\ & p'_{i_{l+j}} = p_{i_{l+j}} - \sum_1^l{}^\mu p_{i_\mu} \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x_{i_{l+j}}} \qquad (j = 1 \ldots m-l) \\ & p'_{i_{m+\tau}} = p_{i_{m+\tau}} \qquad (\tau = 1 \ldots n-m) \end{aligned}\right. \tag{49}$$

so stellen die Gleichungen (48) und (49) zusammengenommen eine Transformation dar, bei der der Pfaffsche Ausdruck $\Sigma p_i dx_i$ sogar invariant bleibt, also sicher eine Berührungstransformation. Da bei dieser der Klammerausdruck $(\varphi\chi)$ invariant bleibt, so ist klar, daß die neue Form:

$$x'_{i_\lambda} = 0, \quad p'_{i_{l+k}} + \bar{\chi}_k(x'_{i_{l+1}} \ldots x'_{i_n}, p'_{i_1} \ldots p'_{i_l}, p'_{i_{m+1}} \ldots p'_{i_n}) = 0$$
$$(\lambda = 1 \ldots l, \quad k = 1 \ldots m-l)$$

die das Involutionssystem (46′) erhält, wieder ein m-gliedriges Involutionssystem ist. Daraus aber folgt, daß die $\bar{\chi}_k$ von $p'_{i_1} \ldots p'_{i_l}$ frei sind, daß also die Gleichungen:

$$p'_{i_{l+k}} + \bar{\chi}_k(x'_{i_{l+1}} \ldots x'_{i_n}, p'_{i_{m+1}} \ldots p'_{i_n}) = 0 \qquad (k = 1 \ldots m-l)$$

für sich ein $(m-l)$-gliedriges Involutionssystem in den $2(n-l)$ Veränderlichen $x'_{i_{l+k}}, p'_{i_{l+k}}$ bilden, dessen Integration die des Involutionssystems (46′) nach sich zieht.

Ist $l = m$, so erfordert die Bestimmung der n-fach ausgedehnten Integralvereine von (46′) überhaupt keine Integration. In den neuen Veränderlichen bekommt nämlich (46′) die Form: $x'_{i_\lambda} = 0$ $(\lambda = 1 \ldots l)$. Der Pfaffsche Ausdruck $\Sigma p'_i dx'_i$ reduziert sich daher auf

$$\sum_1^{n-l}{}^k p'_{i_{l+k}} dx'_{i_{l+k}}$$

und es bleibt nur übrig, alle Vereine von ∞^{n-l} Elementen in den zurückgebliebenen $2n - 2l$ Veränderlichen x', p' zu bestimmen. Das aber ist eine ausführbare Operation.

§ 6. Die Invariantentheorie der Berührungstransformationen in den x, p.

Wir haben gesehen, daß die Integration eines Systems von Gleichungen in den x, p immer auf die Integration von Involutionssystemen zurückgeführt werden kann, diese aber wiederum kann dadurch geleistet werden, daß man nacheinander von einer Reihe von vollständigen Systemen je eine Lösung aufsucht. Dabei hatte jedes dieser vollständigen Systeme die Form:

$$(\Omega_\mu f) = 0 \qquad (\mu = 1 \ldots m) \tag{47}$$

wo die Funktionen $\Omega_1 \ldots \Omega_m$ voneinander unabhängig waren und paarweise in Involution lagen.

Wenn man nun zufällig von einem dieser vollständigen Systeme nicht bloß eine Lösung findet, sondern deren mehrere, so erhebt sich die Frage, wie man diesen Umstand möglichst für die Erledigung des Integrationsproblems verwertet. Dadurch, daß er sich diese Frage stellte, ist Lie zur Entwicklung seiner Invariantentheorie der Berührungstransformationen veranlaßt worden.

Aus der Form (47) des vollständigen Systems und aus der Invarianz des Poissonschen Klammersymbols bei Berührungstransformationen in den x, p geht hervor, daß alle die auftretenden vollständigen Systeme (47) mit dem ursprünglich zur Integration vorgelegten Gleichungensysteme in den x, p invariant verknüpft sind gegenüber allen Berührungstransformationen. Kennt man daher mehrere Lösungen eines solchen Systems (47), so liegt die Frage nahe, welche gegenüber allen Berührungstransformationen in den x, p invarianten Eigenschaften besitzt der Inbegriff der bekannten Lösungen des Systems (47)?

Kennt man von dem Systeme (47) außer den selbstverständlichen Lösungen $\Omega_1 \ldots \Omega_m$ noch eine Anzahl anderer $u_1 \ldots u_l$, die voneinander und von den Ω_μ unabhängig sind, so ist erstens überhaupt jede willkürliche Funktion von $\Omega_1, \ldots, \Omega_m, u_1 \ldots u_l$ ebenfalls eine Lösung und zweitens zeigt die Jacobische Identität:

$$((\Omega_\mu \varphi) f) - ((\Omega_\mu f) \varphi) \equiv (\Omega_\mu (\varphi f)),$$

daß mit φ und f zugleich stets auch (φf) eine Lösung ist. Das ist eben das berühmte Poisson-Jacobische Theorem. Demnach sind auch alle die Ausdrücke

$$(\Omega_\mu \Omega_\nu), \quad (\Omega_\mu u_k), \quad (u_k u_j)$$

Lösungen des vollständigen Systems. Von diesen Lösungen sind freilich die $(\Omega_\mu \Omega_\nu)$ und $(\Omega_\mu u_k)$ identisch Null, aber die anderen $(u_k u_j)$ sind möglicherweise neu. Fügt man die unter den Ausdrücken $(u_k u_j)$ enthaltenen neuen, das heißt von $\Omega_1 \ldots \Omega_m, u_1 \ldots u_l$ und voneinander unabhängigen

Lösungen zu $u_1 \dots u_l$ hinzu, wendet man abermals das Poisson-Jacobische Theorem an und fährt man so fort, so sind nur zwei Fälle möglich: Entweder man findet $2n - m$ unabhängige Lösungen von (47), also alle vorhandenen, oder man findet so viele neue Lösungen $u_{l+1} \dots u_r$, daß zwar $m + r < 2n - m$ ist, daß sich aber alle $(u_k u_j)$ $(k, j = l \dots r)$ durch $\Omega_1 \dots \Omega_m$, $u_1 \dots u_r$ allein ausdrücken lassen.

Im ersten Falle erfordert die Integration des Involutionssystems: $\Omega_1 = a_1, \dots, \Omega_m = a_m$ nur ausführbare Operationen, was für $m = 1$ allerdings längst bekannt war, für $m > 1$ aber erst von Lie bewiesen worden ist, ein Satz, auf dem die von ihm angegebene Erweiterung der Cauchyschen Integrationsmethode beruht. Im zweiten Falle ist noch eine Anzahl Lösungen von (47) unbekannt und es handelt sich darum, die gefundenen Lösungen möglichst zu verwerten; dazu ist es eben nötig, die invarianten Eigenschaften zu ermitteln, die der Inbegriff der bekannten Lösungen, also der Inbegriff aller Funktionen von $\Omega_1 \dots \Omega_m$, $u_1 \dots u_r$ gegenüber allen Berührungstransformationen in den x, p besitzt.

Das Funktionensystem $\Omega_1 \dots \Omega_m$, $u_1 \dots u_r$, zu dem man hier gelangt ist, hat die Eigenschaft, daß der Klammerausdruck aus je zwei Funktionen des Systems durch die Funktionen des Systems allein ausdrückbar ist. Aber es ist ein ganz spezielles System dieser Art, weil $\Omega_1 \dots \Omega_m$ untereinander und mit $u_1 \dots u_r$ in Involution liegen. Es liegt daher nahe, gleich ganz allgemein Systeme von r unabhängigen Funktionen $u_1 \dots u_r$ der x, p zu betrachten, die so beschaffen sind, daß Relationen von der Form:

(50) $$(u_i u_k) = \omega_{ik}(u_1 \dots u_r) \qquad (i, k = 1 \dots r)$$

bestehen. Der Inbegriff aller Funktionen der Funktionen $u_1 \dots u_r$ eines solchen Systems ist das, was Lie eine *r-gliedrige Funktionengruppe in* $x_1 \dots x_n$, $p_1 \dots p_n$ genannt hat. Die Bedeutung seiner in der Einleitung erwähnten kurzen Arbeit von 1872 besteht darin, daß alle invarianten Eigenschaften, die eine solche r-gliedrige Funktionengruppe gegenüber der Gruppe aller Berührungstransformationen besitzt, ermittelt werden.

Es ist hier nicht der Ort, diese Invariantentheorie einer r-gliedrigen Funktionengruppe zu entwickeln, das würde doch im wesentlichen auf eine Wiederholung der Darstellung hinauskommen, die Lie im zweiten Bande der Transformationsgruppen gegeben hat. Ich begnüge mich daher mit den folgenden Andeutungen:

Der grundlegende Satz der Theorie ist der, daß die r voneinander unabhängigen Gleichungen:

(51) $$(u_k f) = 0 \qquad (k = 1 \cdots r)$$

ein r-gliedriges vollständiges System mit $2n - r$ unabhängigen Lösungen

$v_1 \cdots v_{2n-r}$ bilden und daß der Inbegriff aller Lösungen von (51), also der Inbegriff aller Funktionen von $v_1 \cdots v_{2n-r}$ eine $(2n-r)$-gliedrige Funktionengruppe bildet, die zur Gruppe $u_1 \cdots u_r$ reziproke Gruppe $v_1 \cdots v_{2n-r}$. Die beiden Funktionengruppen gemeinsamen Funktionen sind innerhalb jeder Gruppe die Funktionen der Gruppe, die mit allen Funktionen der Gruppe in Involution liegen; sie heißen die *ausgezeichneten Funktionen* jeder Gruppe.

Die Gliederzahl r einer Funktionengruppe und die Zahl m der voneinander unabhängigen ausgezeichneten Funktionen, die die Gruppe enthält, sind die beiden einzigen invarianten Eigenschaften der Gruppe gegenüber allen Berührungstransformationen. Zwei Funktionengruppen, zu denen dieselben Zahlen r und m gehören, können stets durch Berührungstransformationen in den x, p ineinander übergeführt werden. Den Beweis dieses Satzes führt Lie dadurch, daß er zeigt, daß jede r-gliedrige Funktionengruppe auf eine kanonische Form gebracht werden kann. Nennen wir mit S. Kantor jedes System von r unabhängigen Funktionen einer r-gliedrigen Funktionengruppe eine *Basis* der Funktionengruppe, so können wir uns auch so ausdrücken: Zu jeder r-gliedrigen Funktionengruppe kann eine *kanonische Basis* bestimmt werden, also r unabhängige, der Gruppe angehörende Funktionen

$$X_1 \cdots X_l, \quad P_1 \cdots P_l, \quad X_{l+1} \cdots X_{l+m} \qquad (2l+m=r)$$

die in den kanonischen Beziehungen:

(52) $$(X_i X_k) = 0, \quad (P_i X_k) = \varepsilon_{ik}, \quad (P_i P_k) = 0$$

stehen. Dabei sind die Funktionen von $X_{l+1} \cdots X_{l+m}$ die ausgezeichneten Funktionen der Gruppe; es ergibt sich also, daß die Differenz zwischen der Gliederzahl r und der Zahl der unabhängigen ausgezeichneten Funktionen stets gerade ist.

Durch die Erledigung der Invariantentheorie der Funktionengruppen in den x, p wird Lie dann noch in den Stand gesetzt, zu ermitteln, welche invarianten Eigenschaften ein beliebiges vorgelegtes System

$$\varphi_k(x_1 \cdots x_n, p_1 \cdots p_n) \qquad (k=1\cdots m)$$

von Funktionen der x, p gegenüber allen Berührungstransformationen besitzt. Man kann das Ergebnis zu dem er dabei gelangt, kurz so ausdrücken:

Zu $\varphi_1 \cdots \varphi_m$ füge man alle Funktionen

$$(\varphi_i \varphi_k), \; ((\varphi_i \varphi_k)\varphi_j), \; ((\varphi_i \varphi_k)(\varphi_j \varphi_l)), \cdots$$

hinzu so lange, bis die Bildung der Klammerausdrücke aus je zwei vorhandenen Funktionen nur solche Funktionen liefert, die sich durch die schon vorhandenen allein ausdrücken lassen. Man gelangt auf diese Weise zu einem System

$$\varphi_1 \cdots \varphi_m, \quad \varphi_{m+1} \cdots \varphi_r,$$

dessen Funktionen nicht voneinander unabhängig zu sein brauchen, das aber die Eigenschaft hat, daß alle $(\varphi_i \varphi_k)$ durch $\varphi_1 \cdots \varphi_r$ allein ausdrückbar sind. Die sämtlichen invarianten Eigenschaften des Systems $\varphi_1 \cdots \varphi_m$ werden dann dargestellt durch den Inbegriff aller Relationen, die zwischen $\varphi_1 \cdots \varphi_r$ und allen $(\varphi_i \varphi_k)$ $(i, k = 1 \cdots r)$ bestehen. Mit anderen Worten:

Ist $\chi_1 \cdots \chi_m$ ein zweites Funktionensytem, so gibt es dann und nur dann eine Berührungstransformation in den x, p, bei der $\chi_1 \cdots \chi_r$ der Reihe nach in $\varphi_1 \cdots \varphi_r$ übergehen, wenn die folgende Forderung erfüllt ist:

Zu $\chi_1 \cdots \chi_m$ füge man alle die Ausdrücke $(\chi_i \chi_k)$, $((\chi_i \chi_k) \chi_j)$, $\cdots$ in derselben Reihenfolge hinzu, wie man sie vorhin aus den φ_i gebildet hat, und bezeichne sie mit den entsprechenden Nummern als $\chi_{m+1} \cdots \chi_r$. Dann müssen zwischen $\chi_1 \cdots \chi_r$ und allen $(\chi_i \chi_k)$ $(i, k = 1 \cdots r)$ dieselben Relationen bestehen, die zwischen den entsprechenden Größen $\varphi_1 \cdots \varphi_r$ und $(\varphi_i \varphi_k)$ bestehen.

§ 7. Andere Behandlung der Theorie der Funktionengruppen. Die Kantorsche Verallgemeinerung des Problems.

Da eine r-gliedrige Funktionengruppe mit der Basis $u_1 \cdots u_r$ aus dem Inbegriffe aller Funktionen von $u_1 \cdots u_r$ besteht, so liegt es nahe, daß man, statt die Gruppe durch eine solche Basis zu definieren, das $(2n - r)$-gliedrige vollständige System als gegeben betrachtet, dessen allgemeinste Lösung eine willkürliche Funktion von $u_1 \cdots u_r$ ist. Der Unterschied zwischen diesen beiden Standpunkten ist genau derselbe, als wenn man das eine Mal mit den Wurzeln einer algebraischen Gleichung operiert, das andere Mal nur die algebraische Gleichung als gegeben ansieht. Jedenfalls erscheint es wünschenswert, die Theorie der Funktionengruppen auch von diesem neuen Gesichtspunkte aus zu behandeln.

Lie selbst hat gelegentlich diesen Standpunkt eingenommen; zum Beispiel zeigt er schon 1877, daß man, wenn irgendein vollständiges System vorgelegt ist, stets das vollständige System aufstellen kann, dessen Lösungen aus allen Funktionen bestehen, die mit den Lösungen des vorgelegten vollständigen Systems in Involution liegen.[1]) Insbesondere kann man also, wenn eine Funktionengruppe durch ein vollständiges System definiert ist, immer das vollständige System aufstellen, das die reziproke

1) Neue Integrations-Methode der Monge-Ampèreschen Gleichung, Archiv for Math. og Naturvid. Band II, S. 4.

Funktionengruppe definiert. Dagegen ist Lie allerdings niemals genauer auf die Fragen, die hier auftreten, eingegangen. Erst S. Kantor stellt sich in den früher erwähnten Arbeiten grundsätzlich auf den Standpunkt, die Funktionengruppen durch vollständige Systeme zu definieren, und nimmt das sogar zum Anlaß, die ganze Theorie außerordentlich zu verallgemeinern. Wir müssen uns hier mit einigen Andeutungen begnügen.

Bekanntlich besteht zwischen den Systemen von Pfaffschen Gleichungen und den Systemen von linearen homogenen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung ein Entsprechen. In n Veränderlichen ist jedem m-gliedrigen Systeme der ersten Art ein $(n-m)$-gliedriges System der zweiten Art eindeutig umkehrbar zugeordnet, und zwar ist es dabei ganz gleichgültig, ob die betreffenden Systeme integrabel oder vollständige Systeme sind oder nicht.

In dem Raume $x_1 \cdots x_n, p_1 \cdots p_n$ kommt nun zu diesem Entsprechen noch eine andere Art von Reziprozität hinzu, die bestimmt wird durch die bilineare Kovariante:

$$\sum_1^n {}^i (dx_i \delta p_i - dp_i \delta x_i)$$

des Pfaffschen Ausdrucks $\Sigma p_i dx_i$ oder auch durch die zugehörige Kovariante

$$\sum_1^n {}^i (v_i u_i' - u_i v_i')$$

in Ebenenkoordinaten. In der Tat es sei:

$$(53) \qquad \sum_1^n {}^i (\alpha_{ki} dx_i + \beta_{ki} dp_i) = 0 \qquad (k = 1 \cdots m)$$

ein m-gliedriges Pfaffsches System und

$$(54) \qquad \sum_1^n {}^i \left(\varrho_{ji} \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sigma_{ji} \frac{\partial f}{\partial p_i}\right) = 0 \qquad (j = 1 \cdots 2n - m)$$

sei das zugehörige $(2n-m)$-gliedrige System von linearen partiellen Differentialgleichungen, so daß zwischen den Funktionen $\alpha, \beta, \varrho, \sigma$ die $m(2n-m)$ Identitäten:

$$(55) \qquad \sum_1^n {}^i (\alpha_{ki} \varrho_{ji} + \beta_{ki} \sigma_{ji}) = 0 \qquad (k = 1 \cdots m,\ j = 1 \cdots 2n - m)$$

bestehen. Bedenkt man nun, daß die $\varrho_{ji}, \sigma_{ji}$ ebenso transformiert werden wie die Punktkoordinaten dx_i, dp_i, die α_{ki}, β_{ki} und die Ableitungen von f

nach den x_i und p_i ebenso wie die Ebenenkoordinaten u_i, v_i, so erkennt man, daß die Form $\Sigma(v_i u_i' - u_i v_i')$ dem System (53) ein kovariantes m-gliedriges System von linearen partiellen Differentialgleichungen

$$\sum_1^n {}^i \left(\beta_{ki}\frac{\partial f}{\partial x_i} - \alpha_{ki}\frac{\partial f}{\partial p_i}\right) = 0 \tag{53'} \qquad (k = 1 \cdots m)$$

zuordnet und die Form $\Sigma(dx_i\delta p_i - dp_i\delta x_i)$ dem Systeme (54) ein kovariantes $(2n - m)$-gliedriges Pfaffsches System:

$$\sum_1^n {}^i (\sigma_{ji}dx_i - \varrho_{ji}dp_i) = 0 \tag{54'} \qquad (j = 1 \cdots 2n - m).$$

Zugleich ist klar, daß man das System (53′) auch dadurch erhält, daß man in der Gleichung

$$\sum_1^n {}^i \left(\frac{\partial \varphi}{\partial p_i}\frac{\partial f}{\partial x_i} - \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial p_i}\right) = 0$$

die Ableitungen von φ den Relationen

$$\sum_1^n {}^i \left(\varrho_{ji}\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \sigma_{ji}\frac{\partial \varphi}{\partial p_i}\right) = 0 \tag{54} \qquad (j = 1 \cdots 2n - m$$

unterwirft, sonst aber diese Ableitungen als willkürlich betrachtet. Auch sieht man, daß in entsprechender Weise das System (54′) aus (53) durch Benutzung der Gleichung $\Sigma(dx_i\delta p_i - dp_i\delta x_i) = 0$ hervorgeht.

Das ist die allgemeine Reziprozität zwischen den Systemen (53) und (54′) und den zugehörigen Systemen (54) und (53′), auf die zuerst S. Kantor hingewiesen hat.

Besitzt das System (54) eine Lösung u, so ist u zugleich eine Integralfunktion des Pfaffschen Systems (53), es gibt also Multiplikatoren χ_k derart, daß

$$\sum_1^m {}^k \chi_k \sum_1^n {}^i (\alpha_{ki}dx_i + \beta_{ki}dp_i) \equiv du.$$

Dann aber wird augenscheinlich

$$\sum_1^m {}^k \chi_k \sum_1^n {}^i \left(\beta_{ki}\frac{\partial f}{\partial x_i} - \alpha_{ki}\frac{\partial f}{\partial p_i}\right) \equiv (uf),$$

das heißt, das System (53′) enthält die Gleichung $(uf) = 0$. Enthält umgekehrt (53′) eine Gleichung von der Form $(uf) = 0$, so ist u eine Integralfunktion von (53) und also eine Lösung von (54). Besitzt das System (54) zwei Lösungen u_1, u_2 so enthält (53′) die beiden Gleichungen $(u_1 f) = 0$,

$(u_2 f) = 0$ und, wenn es überdies vollständig ist, auch die Gleichung:

$$(u_1(u_2 f)) - (u_2(u_1 f)) \equiv ((u_1 u_2) f) = 0.$$

Darin liegt, daß die Lösungen von (54) jedenfalls dann eine Funktionengruppe bilden, wenn das reziproke System (53′) vollständig ist.

Soll das System (54) insbesondere eine m-gliedrige Funktionengruppe definieren, so muß es m unabhängige Lösungen $u_1 \cdots u_m$ haben, es muß also vollständig sein, und außerdem muß auch jedes $(u_\mu u_\nu)$ $(\mu, \nu = 1 \cdots m)$ eine Lösung sein. Dann aber enthält das m-gliedrige reziproke System (53′) die m unabhängigen Gleichungen $(u_\mu f) = 0$ $(\mu = 1 \cdots m)$ und zugleich auch jede Gleichung

$$((u_\mu u_\nu) f) = (u_\mu(u_\nu f)) - (u_\nu(u_\mu f)) = 0 \qquad (\mu, \nu = 1 \cdots m)$$

es ist also ebenfalls vollständig. Man kann daher schließen, daß (54) dann und nur dann eine m-gliedrige Funktionengruppe definiert, wenn die reziproken Systeme (54) und (53′) beide vollständig sind.

Diese Kriterien finden sich bereits bei S. Kantor.

Hat (54) eine Lösung u und (53′) eine Lösung v, so enthält (53′) die Gleichung $(uf) = 0$ und (54) die Gleichung $(vf) = 0$, es ist also $(uv) = 0$. Demnach ist (53′) das Gleichungensystem, das schon Lie aufzustellen gelehrt hat und das zu Lösungen alle Funktionen hat, die mit allen Lösungen von (54) in Involution liegen. Dabei wird allerdings noch vorausgesetzt, daß (54) ein $(2n - m)$-gliedriges vollständiges System ist.

Ist das System (54) vollständig und definiert es eine m-gliedrige Funktionengruppe, so kann man, wie Lie gezeigt hat, für diese Funktionengruppe eine kanonische Basis $X_1 \ldots X_{l+h}$, $P_1 \ldots P_l$ $(2l + h = m)$ bestimmen, für die die kanonischen Relationen:

$$(52) \qquad (X_i X_k) = 0, \quad (P_i X_k) = \varepsilon_{ik}, \quad (P_i P_k) = 0$$

bestehen. Das vollständige System (53′), das die reziproke Gruppe definiert, kann dann die Form erhalten

$$(X_\mu f) = 0, \quad (P_k f) = 0 \qquad (\mu = 1 \ldots l + h;\ k = 1 \ldots l$$

wo die Koeffizienten der einzelnen Gleichungen die Gleichungen (52) befriedigen. Ebenso erhält man für die reziproke Gruppe eine kanonische Basis: $X_{l+1} \ldots X_n$, $P_{l+h+1} \ldots P_n$, so daß also das System (54) die Form:

$$(X_{l+k} f) = 0, \quad (P_{l+h+j} f) = 0 \qquad (k = 1 \ldots n - l;\ j = 1 \ldots n - l - h)$$

bekommen kann.

S. Kantor verallgemeinert das auf den Fall, wo das System (54) ganz beliebig ist. Er nennt zwei Gleichungen

$$\sum \left(\varrho_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sigma_i \frac{\partial f}{\partial p_i} \right) = 0, \quad \sum \left(\varrho_i' \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sigma_i' \frac{\partial f}{\partial p_i'} \right) = 0$$

konjugiert, wenn die Kovariante $\Sigma(\varrho_i \sigma_i' - \sigma_i \varrho_i')$ verschwindet. Sind daher die Gleichungen (54) nicht paarweise konjugiert, so kann man in diesem Systeme eine Gleichung

$$\sum\left(\varrho_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sigma_i \frac{\partial f}{\partial p_i}\right) = 0 \tag{56}$$

auswählen, die nicht zu allen Gleichungen des Systems konjugiert ist, und kann dann eine Gleichung

$$\sum\left(\varrho_i' \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sigma_i' \frac{\partial f}{\partial p_i}\right) = 0 \tag{57}$$

des Systems derart bestimmen, daß $\Sigma(\varrho_i \sigma_i' - \sigma_i \varrho_i') = 1$ wird. Hat man (56) und (57) so gewählt, so überzeugt man sich leicht, daß das System (54) gerade $2n - m - 2$ unabhängige Gleichungen enthält, die sowohl zu (56) als zu (57) konjugiert sind. Behandelt man dieses neue System ebenso wie das ursprüngliche (54) und fährt man so fort, so erhält man schließlich (54) in der Form dargestellt:

$$X_1 f = 0, \ldots, X_{l+h} f = 0, \quad P_1 f = 0, \ldots, P_l f = 0 \quad (2l + h = 2n - m), \tag{58}$$

wo die Kovariante $\Sigma(\varrho_i \sigma_i' - \sigma_i \varrho_i')$ für je zwei Gleichungen $X_i f = 0$ und $X_k f = 0$ und für je zwei Gleichungen $P_i f = 0$ und $P_k f = 0$ verschwindet, während sie für je zwei Gleichungen $X_i f = 0$ und $P_k f = 0$ den Wert ε_{ik} hat. Mit S. Kantor nennen wir (58) *eine kanonische Basis* des Systems (54) und: $X_{l+1} f = 0, \ldots, X_{l+h} f = 0$ nennen wir *die ausgezeichneten Gleichungen* des Systems.

Das zu (54) reziproke System (53′) besteht aus allen Gleichungen, die zu allen Gleichungen von (54) konjugiert sind. Infolgedessen sind die ausgezeichneten Gleichungen $X_{l+1} f = 0, \ldots, X_{l+h} f = 0$ die einzigen Gleichungen, die beiden Systemen (54) und (53′) zugleich angehören, und das System (53′) enthält daher eine kanonische Basis

$$X_{l+1} f = 0, \ldots, X_n f = 0, \quad P_{l+h+1} f = 0, \ldots, P_n f = 0 \quad (n - l + n - l - h = m) \tag{59}$$

derart, daß die $2n - h$ Gleichungen

$$X_1 f = 0, \ldots, X_n f = 0, \; P_1 f = 0, \ldots, P_l f = 0, \; P_{l+h+1} f = 0, \ldots, P_n f = 0 \tag{60}$$

voneinander unabhängig sind.

Man kann schließlich noch das System (60) durch Hinzufügung von h Gleichungen $P_{l+1} f = 0, \ldots, P_{l+h} f = 0$ zu einem Systeme von $2n$ unabhängigen Gleichungen

$$\left\{\begin{aligned} X_i f &= \sum_1^n {}^{\nu} \left(\varrho_{i\nu} \frac{\partial f}{\partial x_\nu} + \sigma_{i\nu} \frac{\partial f}{\partial p_\nu}\right) = 0 \\ P_i f &= \sum_1^n {}^{\nu} \left(\tau_{i\nu} \frac{\partial f}{\partial x_\nu} + v_{i\nu} \frac{\partial f}{\partial p_\nu}\right) = 0 \qquad (i = 1 \ldots n) \end{aligned}\right. \tag{61}$$

ergänzen, das eine kanonische Basis des $2n$gliedrigen Systems:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial p_1} = 0, \ldots, \frac{\partial f}{\partial p_n} = 0$$

darstellt, für das also die Relationen

$$(62) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \sum_1^n{}^{\nu} (\varrho_{i\nu}\sigma_{k\nu} - \sigma_{i\nu}\varrho_{k\nu}) = 0 \\ \sum_1^n{}^{\nu} (\tau_{i\nu}\, v_{k\nu} - v_{i\nu}\tau_{k\nu}) = 0 \\ \sum_1^n{}^{\nu} (\varrho_{i\nu} v_{k\nu} - \sigma_{i\nu}\tau_{k\nu}) = \varepsilon_{ik} \\ \qquad\qquad (i, k = 1 \ldots n) \end{array} \right.$$

bestehen.

Genau dieselben Betrachtungen kann man offenbar auch für die Pfaffschen Systeme (53) und (54′) anstellen, indem man zwei Pfaffsche Gleichungen

$$\sum_1^n{}^{i} (\alpha_i dx_i + \beta_i dp_i) = 0, \quad \sum_1^n{}^{i} (\alpha_i' dx_i' + \beta_i' dp_i') = 0$$

konjugiert nennt, sobald der Ausdruck $\Sigma(\alpha_i\beta_i' - \beta_i\alpha_i')$ verschwindet. Schneller aber und zugleich vollständiger kommt man zum Ziele, wenn man, was immer und nur auf eine Art möglich ist, zu den $2n$ Ausdrücken $X_i f$ und $P_i f$ in (61) solche $2n$ voneinander unabhängige Pfaffsche Ausdrücke D_i, E_i hinzufügt, daß für jede Funktion f die Gleichung

$$(63) \qquad \sum_1^n{}^{i} (D_i P_i f - E_i X_i f) = df$$

identisch erfüllt ist.

Setzt man nämlich in dieser Identität, die für alle dx_i, dp_i und für alle Werte der Ableitungen von f gilt:

$$\frac{\partial f}{\partial x_\nu} = \sigma_{k\nu}, \qquad \frac{\partial f}{\partial p_\nu} = -\varrho_{k\nu},$$

so verschwinden nach (62) alle $X_i f$ und ebenso werden alle $P_i f$ gleich Null außer $P_k f$, das den Wert -1 bekommt. Es ergibt sich also:

$$(64) \qquad D_k = \sum_1^n{}^{\nu} (\varrho_{k\nu} dp_\nu - \sigma_{k\nu} dx_\nu) \qquad (k = 1 \ldots n)$$

und in entsprechender Weise:

$$(64') \qquad E_k = \sum_1^n{}^{\nu} (\tau_{k\nu} dp_\nu - v_{k\nu} dx_\nu) \qquad (k = 1 \ldots n),$$

das heißt die D_k und E_k gehen aus den $X_k f$ und $P_k f$ hervor, wenn man für die Ableitungen f_{x_ν} und f_{p_ν} der Reihe nach setzt: dp_ν und $-dx_\nu$, und durch die umgekehrte Substitution erhält man die $X_k f$ und $P_k f$ aus den D_k und E_k.

Es liegt auf der Hand, daß die $2n$ Gleichungen: $D_i = 0$, $E_i = 0$ eine kanonische Basis des Systems: $dx_i = 0$, $dp_i = 0$ $(i = 1 \ldots n)$ bilden. Überdies findet man, wenn man die Ausdrücke (64), (64′) und (61) in (63) einsetzt, daß die Größen $\varrho_{ki}, \ldots$ auch noch den Relationen:

$$(62') \qquad \left\{ \begin{aligned} &\sum_1^n{}^{\nu} (\varrho_{\nu i} \tau_{\nu k} - \tau_{\nu i} \varrho_{\nu k}) = 0 \\ &\sum_1^n{}^{\nu} (\sigma_{\nu i} v_{\nu k} - v_{\nu i} \sigma_{\nu k}) = 0 \\ &\sum_1^n{}^{\nu} (\varrho_{\nu i} v_{\nu k} - \tau_{\nu i} \sigma_{\nu k}) = \varepsilon_{ik} \\ &\qquad (i, k = 1 \ldots n) \end{aligned} \right.$$

genügen, die also aus den Relationen (62) folgen, sobald die $2n$ Gleichungen (61) voneinander unabhängig sind.

Ersetzt man in (63) die dx_ν, dp_ν durch $-\varphi_{p_\nu}$ und φ_{x_ν} und kehrt in der entstehenden Gleichung auf beiden Seiten die Vorzeichen um, so ergibt sich:

$$(65) \qquad (\varphi f) \equiv \sum_1^n{}^{i} \{ P_i \varphi \, X_i f - X_i \varphi \, P_i f \}.$$

Ersetzt man andererseits in (63) die f_{x_ν}, f_{p_ν} durch $\delta p_\nu, -\delta x_\nu$ und bezeichnet man das, was aus D_k und E_k wird, wenn man δ für d schreibt, mit Δ_k und E_k, so kommt:

$$(66) \qquad \sum_1^n (dx_i \delta p_i - dp_i \delta x_i) \equiv \sum_1^n{}^{i} (D_i \mathsf{E}_i - E_i \Delta_i).$$

Durch das Bestehen der beiden Identitäten (65) und (66) sind die beiden Systeme von Ausdrücken $X_i f$, $P_i f$ und D_i, E_i als kanonische Basen charakterisiert. Da nämlich z. B. (65) für beliebige Werte der Ableitungen von φ und f gilt, so kann man φ_{p_i} durch $X_k x_i$ und φ_{x_i} durch $-X_k p_i$ ersetzen, wobei sich (φf) in $X_k f$ verwandelt, und weil auf der rechten Seite von (65) ebenfalls $X_k f$ herauskommen muß, so ergibt sich, daß bei der ausgeführten Substitution alle $X_i \varphi$ verschwinden und alle $P_i \varphi$ ebenfalls, mit Ausnahme von $P_k \varphi$, das gleich 1 wird. Entsprechendes gilt, wenn man φ_{p_i} und φ_{x_i} durch $P_k x_i$ und $-P_k p_i$ ersetzt.

Die Identität (65) zeigt unmittelbar, daß das zu dem Systeme (58) reziproke System aus den Gleichungen (59) besteht. Für:

(67) $$X_k\varphi = 0, \quad P_i\varphi = 0 \qquad {\scriptstyle (k=1\ldots, l+h;\ i=1\ldots l)}$$

verwandelt sich nämlich (65) in:

$$(\varphi f) = \sum_1^{n-l} P_{l+i}\varphi \cdot X_{l+i}f - \sum_1^{n-l-h} X_{l+h+i}\varphi \cdot P_{l+h+i}f,$$

also ist (59) das Gleichungensystem, das man erhält, wenn man verlangt, daß (φf) verschwinde, während die Ableitungen von φ nur durch die Relationen (67) verknüpft sind.

Andererseits erkennt man aus (63), daß das zu (58) gehörige Pfaffsche System die Form hat:

(58′) $$E_{l+h+1} = 0, \ldots, E_n = 0, \; D_{l+1} = 0, \ldots, D_n = 0$$

und das zu (59) gehörige Pfaffsche System die Form:

(59′) $$E_1 = 0, \ldots, E_l = 0, \; D_1 = 0, \ldots, D_{l+h} = 0;$$

(66) aber zeigt, daß die Systeme (58′) und (59′) zueinander reziprok sind in bezug auf die Gleichung $\Sigma(dx_i\delta p_i - dp_i\delta x_i) = 0$.

Die hier entwickelten Betrachtungen über reziproke Systeme und über kanonische Basen bei Systemen von linearen partiellen Differentialgleichungen und bei Pfaffschen Systemen finden sich dem Wesen der Sache nach schon bei S. Kantor, nur ist dort die Darstellung wenig übersichtlich und insbesondere hat Kantor die Identitäten (63), (65), (66) nicht, während doch gerade diese erst alle Beziehungen zwischen den Systemen deutlich hervortreten lassen.

Kantor knüpft daran noch Bemerkungen über eine Klassifikation der Systeme (58) gegenüber der Gruppe aller Berührungstransformationen, wobei er von den Zahlen ausgeht, die angeben, wieviele unabhängige Lösungen die Systeme (58) und (59) besitzen. Aber was er da beibringt, sind offenbar nur die allerersten Anfänge der Invariantentheorie eines beliebigen Systems von linearen partiellen Differentialgleichungen gegenüber jener Gruppe, und da die Entwicklung dieser Invariantentheorie in voller Allgemeinheit sicher ganz neue Hilfsmittel erfordert, so wollen wir uns hier nicht auf diese Kantorschen Betrachtungen einlassen. Erwähnt sei jedoch, daß sich Lie selbst schon sehr früh mit der Invariantentheorie eines vollständigen Systems gegenüber der Gruppe aller Berührungstransformationen beschäftigt hat: er hat nämlich Untersuchungen über solche vollständige Systeme angestellt, die gegenüber jener Gruppe mit einer vorgelegten

Funktionengruppe invariant verknüpft sind.[1]) Es würde sich gewiß lohnen, diese Untersuchungen wieder aufzunehmen und fortzusetzen.

Wir kehren jetzt noch einmal zu den Funktionengruppen zurück. Es sei ein $(2n-m)$-gliedriges vollständiges System in den x, p vorgelegt und (58) sei eine dazugehörige kanonische Basis. Nach dem früher erwähnten Satze von Kantor definiert dieses vollständige System dann und nur dann eine m-gliedrige Funktionengruppe, wenn das reziproke m-gliedrige System (59) auch vollständig ist. Aber beim Beweise dieses Satzes haben wir, wie auch Kantor es tut, die Lösungen des Systems (58) benutzt. Es ist offenbar wünschenswert, das zu vermeiden und also den Kantorschen Satz ohne Benutzung der Lösungen zu beweisen. Um aber das ausführen zu können, müssen wir erst einige allgemeine Eigenschaften der $2n$-gliedrigen kanonischen Basis (61) ableiten.

Da die $2n$ Gleichungen (61) voneinander unabhängig sind, so bestehen Relationen von der Gestalt:

$$(68)\qquad \begin{cases} (X_i X_k)f = \sum\limits_{1}^{n}{}^{\mu}(a_{ik\mu} X_\mu f + b_{ik\mu} P_\mu f) \\ (X_i P_k)f = \sum\limits_{1}^{n}{}^{\mu}(a'_{ik\mu} X_\mu f + b'_{ik\mu} P_\mu f) \\ (P_i P_k)f = \sum\limits_{1}^{n}{}^{\mu}(a''_{ik\mu} X_\mu f + b''_{ik\mu} P_\mu f) \\ \qquad\qquad (i, k = 1 \ldots n) \end{cases}$$

wo $(X_i X_k)f$ für $X_i X_k f - X_k X_i f$ geschrieben ist und wo die $a_{ik\mu}, \ldots$ gewisse Funktionen der x, p sind.

Bildet man nun unter zweimaliger Benutzung der Identität (65) den Ausdruck $((\varphi\chi)\psi)$, so erhält man

$$\begin{aligned} ((\varphi\chi)\psi) = & \sum_{i\nu}^{1\ldots n} \{P_\nu P_i\varphi \cdot X_i\chi + P_\nu X_i\chi \cdot P_i\varphi - P_\nu P_i\chi \cdot X_i\varphi - P_\nu X_i\varphi \cdot P_i\chi\} X_\nu\psi \\ & - \sum_{i\nu}^{1\ldots n} \{X_\nu P_i\varphi \cdot X_i\chi + X_\nu X_i\chi \cdot P_i\varphi - X_\nu P_i\chi \cdot X_i\varphi - X_\nu X_i\varphi \cdot P_i\chi\} P_\nu\psi \end{aligned}$$

und die Jacobische Identität zwischen φ, χ, ψ liefert daher die Gleichung:

$$\begin{aligned} \sum\sum_{i\nu}^{1\ldots n} \{ & (P_\nu P_i)\varphi \cdot X_i\chi \cdot X_\nu\psi + (X_\nu X_i)\varphi \cdot P_i\chi \cdot P_\nu\psi - \\ & - (P_\nu X_i)\varphi \cdot P_i\chi \cdot X_\nu\psi - (X_\nu P_i)\varphi \cdot X_i\chi \cdot P_\nu\psi\} = 0, \end{aligned}$$

1) „Diskussion aller Integrationsmethoden der partiellen Differentialgleichungen 1. O." Ges. d. Wiss. zu Kristiania 1875, S. 16ff. Die Sätze, die diese Arbeit über die Invariantentheorie vollständiger Systeme enthält, sind in die große Abhandlung in Bd. XI der Annalen nur zum Teil aufgenommen.

wo das erste Σ die zyklische Summe in bezug auf φ, χ, ψ andeutet. Setzt man hier die aus (68) folgenden Werte der Klammerausdrücke ein und berücksichtigt man, daß die a, b, a'', b'' das Vorzeichen wechseln, wenn man die ersten beiden Indizes vertauscht, was bei den a', b' nicht der Fall zu sein braucht, so kommt nach Multiplikation mit 2:

$$\begin{aligned}
&\sum_{s i \nu}^{1\ldots n} a''_{\nu i s} \left| X_s\varphi X_i\chi X_\nu\psi \right| \\
+&\sum_{s i \nu}^{1\ldots n} b_{\nu i s} \left| P_s\varphi P_i\chi P_\nu\psi \right| \\
+&\sum_{s i \nu}^{1\ldots n} (a_{\nu i s} - b'_{i s \nu} + b'_{\nu s i}) \left| X_s\varphi P_i\chi P_\nu\psi \right| \\
+&\sum_{s i \nu}^{1\ldots n} (b''_{\nu i s} + a'_{s i \nu} - a'_{s \nu i}) \left| P_s\varphi X_i\chi X_\nu\psi \right| \equiv 0 .
\end{aligned}$$

Hier sind die Funktionen φ, χ, ψ ganz willkürlich, wegen der Unabhängigkeit der Gleichungen (61) ist daher diese Identität mit den folgenden Relationen gleichbedeutend:

$$(69)\qquad \begin{cases} b_{\nu i s} + b_{i s \nu} + b_{s i \nu} = 0 \\ a''_{\nu i s} + a''_{i s \nu} + a''_{s \nu i} = 0 \\ a_{\nu i s} - b'_{i s \nu} + b'_{\nu s i} = 0 \\ b''_{\nu i s} + a'_{s i \nu} - a'_{s \nu i} = 0 \\ \qquad (\nu, i, s = 1 \ldots n) . \end{cases}$$

Für jede kanonische Basis $X_\nu f$, $P_\nu f$ sind also die Koeffizienten der Gleichungen (68) durch die Relationen (69) verknüpft; doch sagen diese Relationen (69) offenbar weiter nichts aus, als daß für die alternierende bilineare Differentialquotientenform:

$$(70)\qquad \sum_1^n {}^i (P_i\varphi \cdot X_i\chi - P_i\chi \cdot X_i\varphi) = \{\varphi\chi\}$$

eine Identität von der Form:

$$\{\{\varphi\chi\}\psi\} + \{\{\chi\psi\}\varphi\} + \{\{\psi\varphi\}\chi\} \equiv 0$$

gilt.

Ist jetzt Zf eine beliebige infinitesimale Transformation in den x, p, so enthält der aus den beiden infinitesimalen Transformationen $Z\chi$ und $(\varphi\chi)$ gebildete Klammerausdruck: $Z(\varphi\chi) - (\varphi, Z\chi)$ keine Ableitungen zweiter Ordnung von χ, wohl aber noch solche von φ, dagegen wird der Ausdruck:

$$Z(\varphi\chi) - (Z\varphi, \chi) - (\varphi, Z\chi)$$

sowohl von χ als von φ nur Ableitungen erster Ordnung enthalten. Rechnet man diesen Ausdruck mit Hilfe von (65) aus, so findet man:

$$(71)\quad \left\{\begin{array}{l}\sum_1^n{}^k \{(ZP_k)\varphi \cdot X_k\chi + (ZX_k)\chi \cdot P_k\varphi - \\ -(ZX_k)\varphi \cdot P_k\chi - (ZP_k)\chi \cdot X_k\varphi\},\end{array}\right.$$

demnach wird wegen (68):

$$\begin{aligned} X_i(\varphi\chi) - (X_i\varphi, \chi) - (\varphi, X_i\chi) = \\ = \sum_{k\mu}^{1\ldots n} a'_{ik\mu}(X_\mu\varphi \cdot X_k\chi - X_k\varphi \cdot X_\mu\chi) \\ + \sum_{k\mu}^{1\ldots n} (b'_{ik\mu} + a_{i\mu k})(P_\mu\varphi \cdot X_k\chi - X_k\varphi \cdot P_\mu\chi) \\ + \sum_{k\mu}^{1\ldots n} b_{ik\mu}(P_k\varphi \cdot P_\mu\chi - P_\mu\varphi \cdot P_k\chi) \\ P_i(\varphi\chi) - (P_i\varphi, \chi) - (\varphi, P_i\chi) = \\ = \sum_{k\mu}^{1\ldots n} a''_{ik\mu}(X_\mu\varphi \cdot X_k\chi - X_k\varphi \cdot X_\mu\chi) \\ + \sum_{k\mu}^{1\ldots n} (b''_{ik\mu} - a'_{\mu ik})(P_\mu\varphi \cdot X_k\chi - X_k\varphi \cdot P_\mu\chi) \\ - \sum_{k\mu}^{1\ldots n} b'_{ki\mu}(P_k\varphi \cdot P_\mu\chi - P_\mu\varphi \cdot P_k\chi), \end{aligned}$$

was unter Benutzung von (69) in der einfacheren Form:

$$(72)\quad \left\{\begin{aligned} X_i(\varphi\chi) - (X_i\varphi, \chi) - (\varphi, X_i\chi) = -\sum_{k\mu}^{1\ldots n} b''_{k\mu i} X_k\varphi \cdot X_\mu\chi \\ + \sum_{k\mu}^{1\ldots n} b'_{k\mu i}(P_k\varphi \cdot X_\mu\chi - P_k\chi \cdot X_\mu\varphi) \\ - \sum_{k\mu}^{1\ldots n} b_{k\mu i} P_k\varphi \cdot P_\mu\chi \\ P_i(\varphi\chi) - (P_i\varphi, \chi) - (\varphi, P_i\chi) = \sum_{k\mu} a''_{k\mu i} X_k\varphi \cdot X_\mu\chi \\ - \sum_{k\mu}^{1\ldots n} a'_{k\mu i}(P_k\varphi \cdot X_\mu\chi - P_k\chi \cdot X_\mu\varphi) \\ + \sum_{k\mu}^{1\ldots n} a_{k\mu i} P_k\varphi \cdot P_\mu\chi \\ {\scriptstyle (i=1\ldots n)} \end{aligned}\right.$$

geschrieben werden kann.

Die Formeln (72) geben an, wie sich der Klammerausdruck $(\varphi\chi)$ verhält, wenn man die infinitesimalen Transformationen $X_i f$, $P_i f$ auf ihn ausführt. Wir wollen aber auch noch ermitteln, wie sich bei diesen Operationen die Pfaffschen Ausdrücke D_k, E_k verhalten. Dazu führt uns die Identität:

$$df \equiv \sum_1^n {}^k (D_k P_k f - E_k X_k f). \tag{63}$$

Wir finden nämlich:

$$X_i df = d X_i f = \sum_1^n {}^k (D_k P_k X_i f - E_k X_k X_i f)$$

$$= \sum_1^n {}^k (X_i D_k \cdot P_k f - X_k E_k \cdot X_k f)$$

$$+ \sum_1^n {}^k (D_k \cdot X_i P_k f - E_k \cdot X_i X_k f)$$

oder:

$$\sum_1^n {}^k (X_i D_k \cdot P_k f - X_i E_k \cdot X_k f) = - \sum_1^n {}^k \{ D_k (X_i P_k) f - E_k (X_i X_k) f \}$$

eine Gleichung, die sich wegen (68) in die folgenden zerlegt:

$$\text{(73)} \quad \begin{cases} X_i D_s = - \sum_1^n {}^k (b'_{iks} D_k - b_{iks} E_k) \\ X_i E_s = \quad \sum_1^n {}^k (a'_{iks} D_k - a_{iks} E_k) \\ \qquad (i, s = 1 \ldots n). \end{cases}$$

Genau ebenso ergibt sich:

$$\text{(73')} \quad \begin{cases} P_i D_s = - \sum_1^n {}^k (b''_{iks} D_k + b'_{kis} E_k) \\ P_i E_s = \quad \sum_1^n {}^k (a''_{iks} D_k + a'_{kis} E_k) \\ \qquad (i, s = 1 \ldots n). \end{cases}$$

Alle die gefundenen Gleichungen (69), (72), (73), (73′) bestehen, wenn die $X_i f$, $P_i f$ eine kanonische Basis bilden und wenn die D_i, E_i die zugehörige kanonische Basis von Pfaffschen Ausdrücken sind. Es wäre erwünscht zu wissen, ob die $X_i f$, $P_i f$ durch diese Gleichungen als eine kanonische Basis charakterisiert werden; doch scheint die Beantwortung dieser Frage nicht so einfach zu sein.

Wir können nunmehr zur Behandlung der Funktionengruppen übergehen.

Es mögen die Gleichungen:

$$(58)\qquad X_1 f = 0, \quad \ldots, \quad X_{l+h} f = 0, \quad P_1 f = 0, \quad \ldots, \quad P_l f = 0$$

ein $(2l+h)$-gliedriges vollständiges System bilden. Soll dieses System eine $(2n-2l-h)$-gliedrige Funktionengruppe definieren, so ist notwendig und hinreichend, daß jedesmal, wenn φ und χ Lösungen von (58) sind, auch $(\varphi\chi)$ eine Lösung sei. Da aber, wenn φ eine ganz beliebige Lösung des vollständigen Systems (58) ist, zwischen $X_{l+h+1}\varphi, \ldots, X_n\varphi$, $P_{l+1}\varphi \ldots, P_n\varphi$ keine lineare homogene Relation bestehen kann, so kommt diese Forderung wegen (72) auf die Gleichungen hinaus:

$$(74)\qquad \begin{cases} b''_{k\mu i} = 0 & (k, \mu = l+h+1, \ \ldots, \ n; \ i = 1, \ \ldots, \ l+h) \\ b'_{k\mu i} = 0 & (k = l+1, \ \ldots, \ n; \ \mu = l+h+1, \ \ldots, \ n; \ i = 1, \ \ldots, \ l+h) \\ b_{k\mu i} = 0 & (k, \mu = l+1, \ \ldots, \ n; \ i = 1, \ \ldots, \ l+h) \\ a''_{k\mu i} = 0 & (k, \mu = l+h+1, \ \ldots, \ n; \ i = 1 \ldots l) \\ a'_{k\mu i} = 0 & (k = l+1, \ \ldots, \ n; \ \mu = l+h+1, \ \ldots, \ n; \ i = 1, \ \ldots l) \\ a_{k\mu i} = 0 & (k, \mu = l+1, \ \ldots, \ n; \ i = 1 \ldots l), \end{cases}$$

die ihrerseits nichts anderes aussagen, als daß das zu (58) reziproke System:

$$(59)\qquad X_{l+1} f = 0, \quad \ldots, \quad X_n f = 0, \quad P_{l+h+1} f = 0, \quad \ldots, \quad P_n f = 0$$

ein $(2n-2l-h)$-gliedriges vollständiges System ist.

Damit haben wir wieder den Kantorschen Satz, daß ein $(2n-m)$-gliedriges vollständiges System in den x, p dann und nur dann eine m-gliedrige Funktionengruppe bestimmt, wenn auch das m-gliedrige reziproke System vollständig ist. Der gewünschte Beweis, bei dem die Lösungen nicht benutzt werden, ist damit erbracht.

Daß auch das vollständige System (59) eine Funktionengruppe definiert, liegt nunmehr auf der Hand. Ist φ eine Lösung von (58) und χ eine von (59), so ist nach (65) augenscheinlich $(\varphi\chi) \equiv 0$, also sind die beiden Funktionengruppen zueinander reziprok.

Unsere Betrachtungen leisten aber noch mehr. Wissen wir nämlich von dem Systeme (58) bloß, daß sein $(2n-2l-h)$-gliedriges reziprokes System vollständig ist, so wissen wir damit zugleich, daß die Gleichungen (74) bestehen, dann aber ergibt sich aus (72), daß die Ausdrücke:

$$X_i(\varphi\chi) \quad (i = 1 \ldots l+h), \qquad P_k(\varphi\chi) \quad (k = 1 \ldots l)$$

immer verschwinden, wenn φ und χ Lösungen des Systems (58) sind. Also erhalten wir auch den Kantorschen Satz wieder:

Hat das System (58) *Lösungen, so bildet der Inbegriff dieser Lösun-*

gen jedenfalls dann eine Funktionengruppe, wenn das reziproke System (59) *vollständig ist.*

Wieder sei das reziproke System (59) vollständig, so daß die Gleichungen (74) bestehen. Verbinden wir diese mit (69), so ergibt sich Folgendes:

Nach (74) ist insbesondere:

$$b'_{ik\mu} = 0 \quad (i, \mu = l+1, \ldots, l+h;\ k = l+h+1, \ldots, n),$$

demnach wird wegen der vorletzten Gleichung (69) für alle diese Werte von i, μ, k auch $a_{i\mu k} = 0$. Andrerseits ist nach (74)

$$b_{k\mu i} = 0 \quad (k = l+1, \ldots n;\ \mu, i = l+1, \ldots, l+h)$$

und daher auch $b_{ik\mu} = -b_{ki\mu} = 0$. Aus der ersten Gleichung (69) folgt mithin $b_{\mu ik} = 0$ für die betreffenden Werte von μ, i, k. Darin liegt, wenn man sich überdies an (74) erinnert, daß die ausgezeichneten Gleichungen

(75) $$X_{l+1}f = 0, \quad \ldots, \quad X_{l+h}f = 0$$

des Systems (59) ihrerseits ein h-gliedriges vollständiges System bilden.

Wir sind hier nur deshalb von dem reziproken Systeme (59) ausgegangen, weil wir die Bedingungen (74) für die Vollständigkeit dieses Systems zur Hand hatten. Da nun dieses reziproke System ebenso allgemein ist wie das System (58), so gilt offenbar der Satz:

Enthält ein vollständiges System in den x, p ausgezeichnete Gleichungen, so bildet deren Inbegriff wieder ein vollständiges System.

Sind die Systeme (58) und (59) beide vollständig, definieren sie also zwei reziproke Funktionengruppen, so bilden die Gleichungen (75) nach dem eben bewiesenen Satze gleichfalls ein vollständiges System; doch ist das hier eigentlich selbstverständlich, da (75) den Inbegriff aller Gleichungen bestimmt, die zwei vollständigen Systemen gemeinsam sind. Dieses System (75) besitzt $2n - h$ unabhängige Lösungen und wird andrerseits von allen Lösungen von (58) und von allen Lösungen von (59) befriedigt. Es läßt sich zeigen, daß es sonst keine Lösungen besitzt, daß also alle seine Lösungen durch die von (58) und (59) ausdrückbar sind.

Man sieht das am schnellsten ein, wenn man zu den Pfaffschen Systemen übergeht, die unsern vollständigen Systemen entsprechen. In der Tat, den vollständigen Systemen (58) und (59) entsprechen die beiden unbeschränkt integrabeln Pfaffschen Systeme:

(58′) $$D_{l+1} = 0, \quad \ldots, \quad D_n = 0, \quad E_{l+h+1} = 0, \quad \ldots, \quad E_n = 0$$

und:

(59′) $$D_1 = 0, \quad \ldots, \quad D_{l+h} = 0, \quad E_1 = 0, \quad \ldots, \quad E_l = 0$$

und es sind zum Beispiel die Integralfunktionen von (58′) die Lösungen von (58), das heißt die Funktionen der durch (58) definierten Funktionengruppe. Andrerseits entspricht dem vollständigen Systeme (75) das unbeschränkt integrable Pfaffsche System

$$(75') \qquad \begin{cases} D_1 = 0, \quad \ldots, \quad D_n = 0, \\ E_1 = 0, \quad \ldots, \quad E_l = 0, \quad E_{l+h+1} = 0, \quad \ldots, \quad E_n = 0, \end{cases}$$

das durch Vereinigung von (58′) und (59′) entsteht. Da nun unter den $2n-2l-h+(2l+h)=2n$ Gleichungen (58′) und (59′) gerade $2n-h$ voneinander unabhängige vorhanden sind, nämlich die Gleichungen (75′), so ist klar, daß das System, das aus den Lösungen von (58) und aus denen von (59) besteht, gerade $2n-h$ voneinander unabhängige Funktionen enthält, also gerade soviel, als es unabhängige Lösungen von (75) gibt.

Die Lösungen von (75) sind somit alle die Funktionen, die sich durch die Funktionen der beiden durch (58) und (59) definierten Funktionengruppen ausdrücken lassen. Aber der Inbegriff dieser Funktionen bildet augenscheinlich wiederum eine Funktionengruppe, also ergibt sich, daß das vollständige System (75) seinerseits eine $(2n-h)$-gliedrige Funktionengruppe definiert. Hieraus endlich folgt, daß das zu (75) reziproke System:

$$(76) \qquad \begin{cases} X_1 f = 0, \quad \ldots, \quad X_n f = 0, \\ P_1 f = 0, \quad \ldots, \quad P_l f = 0, \quad P_{l+h+1} f = 0, \quad \ldots, \quad P_n f = 0 \end{cases}$$

vollständig ist und seinerseits eine Funktionengruppe definiert.

Es ist (75) die kleinste unsere beiden reziproken Funktionengruppen (58) und (59) umfassende Funktionengruppe und (76) die Funktionengruppe, die aus allen jenen reziproken Funktionengruppen gemeinsamen Funktionen besteht, oder anders ausgedrückt: (76) besteht aus den ausgezeichneten Funktionen jeder der beiden reziproken Funktionengruppen. Die Lösungen von (76) liegen daher paarweise in Involution.

Die Tatsache, daß auch (76) ein vollständiges System ist, hat zur Folge, daß unter den Koeffizienten $a_{ik\mu}, \ldots$ in (68) noch eine ganze Reihe verschwinden. Es ist mir gelungen, das Verschwinden dieser Koeffizienten noch auf einem anderen Wege zu beweisen als dem eingeschlagenen. Aus den Gleichungen (69) und aus den Bedingungen für die Vollständigkeit der Systeme (58) und (59) folgt es nämlich auch.

Um die Theorie der Funktionengruppen in der neuen Behandlung vollständig zum Abschlusse zu bringen, müßte jetzt noch gezeigt werden, daß zwei vollständige Systeme, die Funktionengruppen von gleicher Gliederzahl definieren und die gleich viele ausgezeichnete Gleichungen enthalten, stets durch eine Berührungstransformation in den x, p in einander überführbar sind. Wir wollen jedoch auf diese Untersuchung nicht eingehen, sondern nur noch einige Bemerkungen über die Invariantentheorie beliebiger vollständiger Systeme hinzufügen.

Ist das System (58) vollständig, während jedoch seine Lösungen keine Funktionengruppe bilden, so kann man folgendermaßen ein gegenüber allen Berührungstransformationen in den x, p kovariantes vollständiges System bilden: Man sucht das vollständige System, das zu Lösungen hat erstens alle Lösungen von (58) und zweitens alle Ausdrücke $(\varphi\chi)$, wo φ und χ beliebige Lösungen von (58) sind.

Jede Gleichung des neuen Systems gehört dem Systeme (58) an und hat daher die Form:

$$Zf = \sum_1^{l+h}{}_i \alpha_i X_i f + \sum_1^{l}{}_k \beta_k P_k f = 0.$$

Wir brauchen nun nur die Funktionen α_i, β_k in allgemeinster Weise so zu bestimmen, daß der mit Hilfe von (72) gebildete Ausdruck:

$$Z(\varphi\chi) - (Z\varphi, \chi) - (\varphi, Z\chi)$$

immer identisch verschwindet, sobald φ und χ ganz beliebige Lösungen von (58) sind. Das gibt eine Anzahl linearer homogener Gleichungen für die α_i, β_k, also kann das verlangte vollständige System immer aufgestellt werden. Definiert es noch keine Funktionengruppe, so kann man es ebenso behandeln und gelangt so schließlich zu dem vollständigen Systeme, das die von den Lösungen von (58) erzeugte Funktionengruppe definiert. Das zugehörige reziproke System umfaßt das reziproke System (59) von (58) und ist das kleinste vollständige System von der Form $(u_\mu f) = 0$ $(\mu = 1 \ldots r)$, in dem (59) enthalten ist.

In der Abhandlung „Neue Grundlagen usw.", Wiener Berichte, Bd. CXII, Abt. IIa, S. 782 spricht Kantor von der größten Funktionengruppe, die in dem Inbegriffe aller Lösungen eines vollständigen Systems enthalten ist. Es ist jedoch keineswegs sicher, daß es immer eine solche größte Funktionengruppe gibt.

Von besonderem Interesse sind die vollständigen Systeme, deren Lösungen gleich willkürlichen Konstanten gesetzt eine Schar von Vereinen darstellen. Soll (58) ein solches vollständiges System sein, so ist notwendig und hinreichend, daß das zugehörige Pfaffsche System (58′) zusammen mit dem Systeme:

$$(58'') \qquad \Delta_{l+1} = 0, \quad \ldots, \quad \Delta_n = 0, \quad \mathsf{E}_{l+h+1} = 0, \quad \ldots, \quad \mathsf{E}_n = 0$$

die bilineare Kovariante $\Sigma(dx_i \delta p_i - dp_i \delta x_i)$ zum Verschwinden bringe. Wegen (66) wird aber vermöge (58′) und (58″):

$$\sum_1^{n}{}_i (dx_i \delta p_i - dp_i \delta x_i) = \sum_1^{l}{}_i (D_i \mathsf{E}_i - E_i \Delta_i),$$

was nur dann verschwindet, wenn $l=0$ ist. Die allgemeine Form eines vollständigen Systems von der angegebenen Beschaffenheit ist also:

(77) $$X_1 f = 0, \quad \ldots, \quad X_h f = 0 \qquad {\scriptstyle (h \leqq n)}$$

unter $X_1 f \ldots X_n f$, $P_1 f \ldots P_n f$ eine geeignete kanonische Basis verstanden.

Das zugehörige unbeschränkt integrable Pfaffsche System hat die Form:

(77′) $$D_1 = 0, \quad \ldots, \quad D_n = 0, \quad E_{h+1} = 0, \quad \ldots, \quad E_n = 0$$

und dessen reziprokes System ist:

(78) $$D_1 = 0, \quad \ldots, \quad D_h = 0.$$

Jedoch wird (78) dann und nur dann unbeschränkt integrabel sein, wenn die Lösungen von (77) überdies eine Funktionengruppe bilden.

In der Invariantentheorie der durch (77) definierten Schar von Vereinen spielt selbstverständlich das Pfaffsche System (78) eine große Rolle.

Da unsere Schar von Vereinen auch durch das Pfaffsche System (77′) definiert werden kann, so muß es möglich sein, gewisse Funktionen α_i, β_k, ω so zu bestimmen, daß eine Identität von der Form:

(79) $$\sum_1^n {}^i\, p_i dx_i = \sum_1^n {}^i\, \alpha_i D_i + \sum_1^{n-h} {}^k\, \beta_k E_{h+k} + d\omega$$

besteht. Ersetzt man hier die willkürlichen Differentiale dx_i, dp_i durch die Zuwachse, die x_i und p_i bei $X_\nu f$, $P_\nu f$ erhalten, so findet man:

(80) $$\begin{cases} \sum_1^n {}^i\, p_i \varrho_{\mu i} = X_\mu \omega & {\scriptstyle (\mu = 1 \ldots h)} \\ \sum_1^n {}^i\, p_i \varrho_{h+k, i} = -\beta_k + X_{h+k}\omega & {\scriptstyle (k = 1 \ldots n-h)} \\ \sum_1^n {}^i\, p_i \tau_{\nu i} = \alpha_\nu + P_\nu \omega & {\scriptstyle (\nu = 1 \ldots n).} \end{cases}$$

Demnach ist ω aus den Gleichungen

(81) $$X_\mu \omega = \sum_1^n {}^i\, p_i \varrho_{\mu i} \qquad {\scriptstyle (\mu = 1 \ldots h)}$$

zu bestimmen, die auf ein h-gliedriges vollständiges System in den $2n+1$ Veränderlichen x_i, p_i, ω hinauskommen. Ist ω bestimmt, so sind die α_ν, β_k ohne weiteres bekannt. Kennt man die Lösungen von (77), so findet man ω durch eine Quadratur.

Der auf S. 27 bewiesene Satz ist hiermit auf neue Weise abgeleitet.

Eigentlich wären jetzt noch die homogenen Berührungstransformationen und ihre Invariantentheorie zu behandeln, wir wollen jedoch darauf verzichten und wenden uns zu einer andern Verallgemeinerung der Invariantentheorie der Berührungstransformationen.

§ 8. Die Invariantentheorie der Berührungstransformationen übertragen auf Pfaffsche Ausdrücke in $2n$ Veränderlichen.

Es war Lie vollkommen bekannt, daß für jeden Pfaffschen Ausdruck in $2n$ Veränderlichen:

$$\sum_{1}^{2n}{}^{i}\, \alpha_i(x_1 \dots x_{2n})\, dx_i, \tag{82}$$

der die Normalform $p_1 dx_1 + \cdots + p_n dx_n$ erhalten kann, eine ganz ähnliche Invariantentheorie entwickelt werden kann, er ist aber nicht dazu gekommen, es auszuführen. S. Kantor hat diese Verallgemeinerung zwar schon behandelt, doch scheint es mir angebracht, auch sie kurz darzustellen.

Der Pfaffsche Ausdruck (82) sei zunächst ganz beliebig und:

$$\sum_{i\nu}^{1\dots 2n} \alpha_{i\nu}\, dx_i\, \delta x_\nu \tag{83}$$

sei seine bilineare Kovariante, wo

$$\alpha_{i\nu} = \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_\nu} - \frac{\partial \alpha_\nu}{\partial x_i} \tag{84}$$

gesetzt ist. Wir benutzen ferner, indem wir unter $i_1 \dots i_{2m}$ irgend $2m$ Zahlen der Reihe $1 \dots 2n$ verstehen, die von Jacobi eingeführten Bezeichnungen: $\alpha_{i\nu} = (i\nu)$ und:

$$\left\{\begin{aligned} (i_1 \dots i_{2m}) &= \frac{1}{(2m)!}\, \Sigma \pm (i_1 i_2)(i_3 i_4) \dots (i_{2n-1} i_{2n}), \\ &= \sum_{2}^{2n}{}^{\nu} (i_1 i_\nu)(i_{\nu+1} \dots i_{2m},\, i_2 \dots i_{\nu-1}), \end{aligned}\right. \tag{85}$$

die das Symbol $(i_1 \dots i_{2m})$ allgemein definieren; dabei ist die $\Sigma \pm$ so zu bilden, daß man $i_1 \dots i_{2m}$ auf alle möglichen Arten permutiert und vor jede gerade Permutation das $+$ Zeichen setzt, vor jede ungerade das $-$ Zeichen. Insbesondere wollen wir setzen:

$$(1, 2, \dots, 2n) = A \tag{86}$$

und wollen die Größen $A_{i\nu}$ durch die Formeln

$$A = \sum_{1}^{2n}{}^{\nu} \alpha_{i\nu} A_{i\nu} \qquad (i = 1 \dots 2n)$$

definieren, so daß $A_{i\nu} + A_{\nu i} = 0$ ist und allgemein wird:

$$(87) \qquad \sum_1^{2n} {}^{\nu} \alpha_{i\nu} A_{k\nu} = \sum_1^{2n} {}^{\nu} \alpha_{\nu i} A_{\nu k} = \varepsilon_{ik} A \qquad (i, k = 1 \ldots 2n).$$

Für $i < \nu$ ist dann insbesondere:

$$A_{i\nu} = (-1)^{i+\nu-1} \; (1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, \nu-1, \nu+1, \ldots, 2n).$$

Wir bemerken noch, daß der Ausdruck, der aus den A_{ik} genau so gebildet ist, wie A aus den α_{ik}, den Wert A^{n-1} hat.

Wir fragen nach den Integralmannigfaltigkeiten von (82), also nach den Mannigfaltigkeiten, auf denen (82) ein vollständiges Differential wird und infolgedessen (83) identisch verschwindet.

Ist x_i ein Punkt einer solchen Mannigfaltigkeit und $x_i + dx_i$ ein unendlich benachbarter, so muß jeder andere unendlich benachbarte die Gleichung:

$$(88) \qquad \sum_1^{2n} {}^{\nu} \left\{ \sum_1^{2n} {}^{i} \alpha_{i\nu} dx_i \right\} \delta x_\nu = 0$$

befriedigen. Wenn daher die dx_i den Gleichungen:

$$(89) \qquad \sum_1^{2n} {}^{i} \alpha_{i\nu} dx_i = 0 \qquad (\nu = 1 \ldots n)$$

genügen, so ergibt sich für die δx_ν gar keine Bedingung. Aber es ist:

$$\sum_1^{2n} {}^{\nu} A_{k\nu} \sum_1^{2n} {}^{i} \alpha_{i\nu} dx_i \equiv A dx_k,$$

also können die Gleichungen (89) nur dann bestehen, ohne daß alle dx_i verschwinden, wenn $A = 0$ ist. Da andererseits, wenn (82) die Normalform $p_1 dx_1 + \cdots + p_n dx_n$ erhalten kann, die bilineare Kovariante $\Sigma(dx_i \delta p_i - dp_i \delta x_i)$ bei beliebigen $\delta x_i, \delta p_i$ nur dann verschwindet, wenn alle dx_i, dp_i gleich Null gesetzt werden, so ist klar, daß diese Normalform für $A \equiv 0$ sicher nicht möglich ist.

Es sei also nunmehr $A \not\equiv 0$, überdies wollen wir uns auf solche Integralmannigfaltigkeiten von (82) beschränken, auf denen A im allgemeinen einen von Null verschiedenen Wert besitzt.

Eine solche Mannigfaltigkeit enthalte außer dem Punkte x_i, in dem A nicht verschwindet, noch m unendlich benachbarte Punkte $x_i + d_k x_i$, die keiner durch x_i gehenden ebenen $(m-1)$-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit angehören, so daß also in der Matrix:

$$(90) \qquad \left| d_k x_1 \ldots d_k x_{2n} \right| \qquad (k = 1 \ldots m)$$

nicht alle m-reihigen Determinanten verschwinden. Dann bestehen erstens die Gleichungen:

(91) $$\sum_1^n {}^{\nu} \left\{ \sum_1^n {}^{i} \alpha_{i\nu} d_k x_i \right\} d_j x_\nu = 0 \qquad (k, j = 1 \ldots m)$$

und zweitens muß jeder andere dem Punkte x_i unendlich benachbarte Punkt $x_i + \delta x_i$ der Mannigfaltigkeit die m Gleichungen:

(92) $$\sum_1^n {}^{\nu} \left\{ \sum_1^n {}^{i} \alpha_{i\nu} d_k x_i \right\} \delta x_\nu = 0 \qquad (k = 1 \ldots m)$$

befriedigen. Setzen wir aber hier:

$$\sum_1^n {}^{i} \alpha_{i\nu} d_k x_i = d_k u_\nu \qquad (\nu = 1 \ldots 2n)$$

so lassen sich diese Gleichungen nach $d_k x_1 \ldots d_k x_n$ auflösen, und da nicht alle m-reihigen Determinanten der Matrix (90) verschwinden, so können sicher auch nicht alle m-reihigen Determinanten der Matrix:

$$\left| d_k u_1 \ldots d_k u_{2n} \right| \atop {(k = 1 \ldots m)}$$

verschwinden. Folglich sind die m Gleichungen (92) für die δx_i voneinander unabhängig und besitzen genau $2n - m$ linear unabhängige Lösungensysteme. Nach (91) besitzen sie aber deren schon m, also ist $m \leqq 2n - m$ und $m \leqq n$. Das heißt, der Pfaffsche Ausdruck (82) besitzt sicher keine Integralmannigfaltigkeit von mehr als n Dimensionen, die A nicht zum Verschwinden bringt.

Es sei nun:

(93) $$F_\nu (x_1 \ldots x_{2n}) = 0 \qquad (\nu = 1 \ldots n)$$

eine n-fach ausgedehnte Integralmannigfaltigkeit von (82), die A nicht zum Verschwinden bringt, wenn es wirklich solche gibt. Dann müssen alle Wertsysteme x_i, dx_i, δx_i, die den Gleichungen: $F_\nu = 0$, $dF_\nu = 0$, $\delta F_\nu = 0$ genügen, auch (88) befriedigen.

Sind aber $d_k x_i$ $(k = 1 \ldots n)$ n linear unabhängige Wertsysteme, die den Gleichungen $dF_1 = 0, \ldots, dF_n = 0$ genügen, so sind die n Gleichungen:

$$\sum_1^{2n} {}^{\nu} \left\{ \sum_1^{2n} {}^{i} \alpha_{i\nu} d_k x_i \right\} \delta x_\nu = 0 \qquad (k = 1 \ldots n)$$

voneinander unabhängig und müssen daher ein System bilden, das mit dem Systeme der n Gleichungen $\delta F_1 = 0, \ldots, \delta F_n = 0$ aequivalent ist.

Demnach gibt es für jedes Wertsystem $dx_1 \ldots dx_n$, das $dF_1 = 0, \ldots, dF_n = 0$ erfüllt, n solche Multiplikatoren $\lambda_1 \ldots \lambda_n$, daß

$$\sum_1^{2n} {}^i \alpha_{i\nu} dx_i = \sum_1^n {}^\mu \lambda_\mu \frac{\partial F_\mu}{\partial x_\nu} \cdot dt \qquad (\nu = 1 \ldots 2n) \tag{94}$$

wird, und da diese Gleichungen nach den dx_i auflösbar sind:

$$dx_k = \sum_1^n {}^\mu \lambda_\mu \sum_1^{2n} {}^\nu \frac{A_{k\nu}}{A} \frac{\partial F_\mu}{\partial x_\nu} dt \qquad (k = 1 \ldots 2n) \tag{95}$$

so ist klar, daß (95), wenn man die λ_μ als Parameter betrachtet, das allgemeinste Wertsystem dx_k darstellt, das $dF_1 = 0, \ldots, dF_n = 0$ befriedigt. Daraus aber folgt, da die λ_μ willkürlich sind:

$$\sum_{k\nu}^{1 \ldots 2n} \frac{A_{k\nu}}{A} \frac{\partial F_i}{\partial x_k} \frac{\partial F_\mu}{\partial x_\nu} = 0 \qquad (i, \mu = 1 \ldots n). \tag{96}$$

Diese Gleichungen müssen also eine Folge von (93) sein, wenn (93) eine n-fach ausgedehnte Integralmannigfaltigkeit von (82) sein soll.

Ist umgekehrt (96) eine Folge von (93), so stellt augenscheinlich (95) bei willkürlichen λ_μ ein Wertsystem dar, das $dF_1 = 0, \ldots, dF_n = 0$ befriedigt und zwar das allgemeinste Wertsystem dieser Art, denn aus (95) folgt rückwärts (94) und aus den Gleichungen (94) folgen gerade n und nicht mehr von $\lambda_1 \ldots \lambda_n$ freie Gleichungen, denn wir setzen selbstverständlich voraus, daß in der Matrix der Ableitungen von $F_1 \ldots F_n$ nach $x_1 \ldots x_{2n}$ nicht alle n-reihigen Determinanten vermöge (93) verschwinden. Aus (95) endlich ergibt sich:

$$\sum_{k\pi}^{1 \ldots 2n} \alpha_{k\pi} dx_k \delta x_\pi = \sum_1^n {}^\mu \lambda_\mu \sum_1^{2n} {}^\nu \sum_{k\pi}^{1 \ldots 2n} \frac{A_{k\nu} \alpha_{k\pi}}{A} \frac{\partial F_\mu}{\partial x_\nu} \delta x_\pi dt$$
$$= \sum_1^n {}^\mu \lambda_\mu \sum_1^{2n} {}^\nu \frac{\partial F_\mu}{\partial x_\nu} \delta x_\nu \cdot dt,$$

was für alle Wertsysteme δx_ν, die $\delta F_1 = 0, \ldots, \delta F_n = 0$ befriedigen, verschwindet.

Sollen die n voneinander unabhängigen Gleichungen (93), *vermöge deren A nicht verschwindet, eine Integralmannigfaltigkeit von* (82) *darstellen, so ist notwendig und hinreichend, daß sie die Gleichungen* (96) *nach sich ziehen.*

Sollen insbesondere die n voneinander unabhängigen Gleichungen:

$$F_\nu(x_1 \ldots x_{2n}) = a_\nu \qquad (\nu = 1 \ldots n) \tag{97}$$

bei willkürlichen Werten der Konstanten a_ν] Integralmannigfaltigkeiten von (82) *darstellen, so ist notwendig und hinreichend, daß die Ausdrücke:*

$$\sum_{k\nu}^{1\ldots n} \frac{A_{k\nu}}{A} \frac{\partial F_i}{\partial x_k} \frac{\partial F_\mu}{\partial x_\nu} \qquad (i, \mu = 1 \ldots n)$$

identisch verschwinden.

Damit ist freilich das Vorhandensein solcher n-fach ausgedehnter Integralmannigfaltigkeiten noch nicht bewiesen.

Es sei nunmehr:

$$x_i' = \Phi_i(x_1 \ldots x_{2n}) \qquad (98) \qquad (i = 1 \ldots n)$$

eine Transformation, die unsern Pfaffschen Ausdruck $\Sigma \alpha_i dx_i$ bis auf ein additives vollständiges Differential invariant läßt, so daß vermöge (98) eine Gleichung von der Form:

$$\sum_1^{2n} {}^i \alpha_i' dx_i' = \sum_1^{2n} {}^i \alpha_i dx_i + d\omega(x_1 \ldots x_{2n}) \qquad (99)$$

besteht. Dann ist nach § 1 zugleich

$$\sum_{i\nu}^{1\ldots 2n} \alpha_{i\nu}(\Phi_1 \ldots \Phi_{2n}) d\Phi_i \delta \Phi_\nu \equiv \sum_{i\nu}^{1\ldots 2n} \alpha_{i\nu} dx_i \delta x_\nu \qquad (100)$$

für alle Werte der dx_i, δx_i.

Faßt man jetzt in der Gleichung: $\Sigma \alpha_{i\nu} dx_i \delta x_\nu = 0$ die dx_i, δx_ν als homogene Punktkoordinaten eines R_{2n-1} auf, so hat man eine Dualität, die jedem Punkte dx_i eine $(2n-2)$-fach ausgedehnte Ebene des R_{2n-1} zuordnet. Betrachtet man in der Gleichung $\Sigma u_i \delta x_i = 0$ dieser Ebene die u_i als Ebenenkoordinaten, so hat man für den Übergang von Ebenen- zu Punktkoordinaten Gleichungen von der Form:

$$u_\nu dt = \sum_1^{2n} {}^i \alpha_{i\nu} dx_i \qquad (101)$$

oder aufgelöst:

$$dx_\mu = \sum_1^{2n} {}^\nu \frac{A_{\mu\nu}}{A} u_\nu dt. \qquad (101')$$

Hieraus ergibt sich für jede Funktion Φ:

$$d\Phi = \sum_{\mu\nu}^{1\cdots 2n} \frac{A_{\mu\nu}}{A} \frac{\partial \Phi}{\partial x_\mu} u_\nu dt \qquad (102)$$

und außerdem:

$$\sum_{i\nu}^{1\cdots 2n} \alpha_{i\nu} dx_i \delta x_\nu = \sum_1^{2n} {}^\nu u_\nu \delta x_\nu dt, \qquad (103)$$

oder, wenn man noch:

$$\delta x_\mu = \sum_1^{2n} {}^{\nu} \frac{A_{\mu\nu}}{A} v_\nu \, \delta t$$

setzt:

$$\sum_{i\nu}^{1\cdots 2n} \alpha_{i\nu} \, dx_i \delta x_\nu = \sum_{\mu\nu}^{1\cdots 2n} \frac{A_{\mu\nu}}{A} u_\mu v_\nu dt \delta t. \tag{104}$$

Aus der Identität (100) folgt jetzt:

$$\sum_{i\nu}^{1\cdots 2n} \alpha_{i\nu}(\Phi_1 \cdots \Phi_{2n}) \sum_{kj}^{1\cdots 2n} \frac{A_{kj}}{A} \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_k} u_j \delta \Phi_\nu \equiv \sum_1^{2n} {}^{\nu} u_\nu \, \delta x_\nu \,, \tag{105}$$

bei beliebigen u_ν und δx_i, außerdem aber:

$$\sum_{i\nu}^{1\cdots 2n} \alpha_{i\nu}(\Phi_1 \cdots \Phi_{2n}) \sum_{kj}^{1\cdots 2n} \frac{A_{kj}}{A} \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_k} u_j \sum_{\lambda\tau}^{1\cdots 2n} \frac{A_{\lambda\tau}}{A} \frac{\partial \Phi_\nu}{\partial x_\lambda} v_\tau \equiv \sum_{\mu\nu}^{1\cdots 2n} \frac{A_{\mu\nu}}{A} u_\mu v_\nu, \tag{106}$$

bei beliebigen u_μ und v_μ. Umgekehrt folgt aus dem Bestehen von (106) rückwärts (105) und (100).

Setzt man in (105) und (106) für die u_ν und v_ν die Ableitungen zweier beliebiger Funktionen von $x_1 \cdots x_{2n}$ und benutzt man die Abkürzung:

$$\sum_{i\nu}^{1\cdots 2n} \frac{A_{i\nu}}{A} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial \chi}{\partial x_\nu} = |\varphi \chi| , \tag{107}$$

so erhält man aus (105) und (106) die Identitäten:

$$\sum_{i\nu}^{1\cdots 2n} \alpha_{i\nu}(\Phi_1 \cdots \Phi_{2n}) |\Phi_i \varphi| \, \delta \Phi_\nu \equiv \delta \varphi \tag{105'}$$

$$\sum_{i\nu}^{1\cdots 2n} \alpha_{i\nu}(\Phi_1 \cdots \Phi_{2n}) |\Phi_i \varphi| \cdot |\Phi_\nu \chi| \equiv |\varphi \chi|. \tag{106'}$$

Besteht umgekehrt (106′) für beliebige φ, χ, so besteht (106) für beliebige u_μ, v_μ und also auch (100) für beliebige $dx_i, \delta x_i$.

Setzt man in (105′) $\varphi = \Phi_k$ und berücksichtigt, daß $\Phi_1 \cdots \Phi_{2n}$ unabhängige Funktionen sind, so ergibt sich:

$$\sum_1^{2n} {}^{i} \alpha_{i\nu}(\Phi_1 \cdots \Phi_{2n}) \, |\Phi_i \Phi_k| \equiv \varepsilon_{\nu k} \qquad (\nu, k = 1, \cdots 2n) \tag{108}$$

mithin:

$$|\Phi_i \Phi_k| = \frac{A_{ik}(\Phi_1 \cdots \Phi_{2n})}{A(\Phi_1 \cdots \Phi_{2n})} \qquad (i, k = 1 \cdots 2n), \tag{109}$$

wo der Nenner rechts sicher nicht identisch verschwindet. Denkt man sich endlich in (106′) φ und χ durch $\Phi_1 \cdots \Phi_{2n}$ ausgedrückt, so wird:

$$|\Phi_i \varphi| = \sum_1^{2n} {}^{\nu} |\Phi_i \Phi_\nu| \frac{\partial \varphi}{\partial \Phi_\nu} = \sum_1^{2n} {}^{\nu} \frac{A_{i\nu}(\Phi)}{A(\Phi)} \frac{\partial \varphi}{\partial \Phi_\nu},$$

mithin:

$$(106'') \qquad |\varphi \chi| \equiv \sum_{i\nu}^{1 \cdots 2n} \frac{A_{i\nu}(\Phi_1 \cdots \Phi_{2n})}{A(\Phi_1 \cdots \Phi_{2n})} \frac{\partial \varphi}{\partial \Phi_i} \frac{\partial \chi}{\partial \Phi_\nu}.$$

Das heißt, bei der Transformation (98) besteht die Gleichung:

$$(110) \qquad |\varphi \chi|_x = |\varphi \chi|_{x'},$$

die aussagt, daß das Klammersymbol $|\varphi \chi|$ invariant bleibt.

Setzt man schließlich noch in der Identität:

$$\sum_1^{2n} {}^{i} \alpha_i(\Phi_1 \cdots \Phi_{2n}) d\Phi_i \equiv \sum_1^{2n} \alpha_i^{1} dx_i + d\omega$$

an Stelle der dx_ν die Ausdrücke (101′) und für die u_ν die Ableitungen von Φ_k, so erhält man die $2n$ Identitäten:

$$|\omega \Phi_k| \equiv \sum_1^{2n} {}^{i} \alpha_i(\Phi_1 \cdots \Phi_{2n}) |\Phi_i \Phi_k| - \sum_{i\nu}^{1 \cdots 2n} \frac{\alpha_i A_{i\nu}}{A} \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_\nu}$$

oder:

$$(111) \qquad |\omega \Phi_k| = \sum_1^{2n} {}^{i} \alpha_i(\Phi) \frac{A_{ik}(\Phi)}{A(\Phi)} - \sum_{i\nu}^{1 \cdots 2n} \frac{\alpha_i(x) A_{i\nu}(x)}{A(x)} \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_\nu} \qquad (k = 1 \cdots 2n)$$

die die $2n$ Ableitungen von ω bestimmen.

Es seien jetzt umgekehrt $2n$ Funktionen $\Phi_1 \cdots \Phi_{2n}$ vorgelegt, von denen wir voraussetzen, daß sie Relationen von der Form (109) befriedigen, selbstverständlich ohne daß $A(\Phi_1 \cdots \Phi_{2n})$ identisch verschwindet. Die Funktionen $A(x)$ und $A_{ik}(x)$ sollen dabei die Ausdrücke sein, die wir vorhin aus den $\alpha_{ik}(x)$ abgeleitet haben.

Wir bilden den Ausdruck:

$$\frac{1}{(2n)!} \sum \pm |\Phi_1 \Phi_2| \, |\Phi_3 \Phi_4| \cdots |\Phi_{2n-1} \Phi_{2n}|,$$

indem wir uns die Zahlen $1 \cdots 2n$ auf alle möglichen Arten permutiert denken und die Zeichen $\pm$ in bekannter Weise wählen. Dieser wird:

$$\sum_{\mu_1 \cdots \mu_{2n}}^{1 \cdots 2n} \frac{1}{(2n)! A^n} A_{\mu_1 \mu_2} A_{\mu_3 \mu_4} \cdots A_{\mu_{2n-1} \mu_{2n}} \sum \pm \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_{\mu_1}} \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_{\mu_2}} \cdots \frac{\partial \Phi_{2n-1}}{\partial x_{\mu_{2n-1}}} \frac{\partial \Phi_{2n}}{\partial x_{\mu_{2n}}}.$$

Hier bleiben von der inneren Summe $\Sigma \pm$ nur die Glieder übrig, in denen $\mu_1 \cdots \mu_{2n}$ alle Zahlen $1 \cdots 2n$ sind, also können wir unseren Ausdruck schreiben:

$$\begin{pmatrix} \Phi_1 \cdots \Phi_{2n} \\ x_1 \cdots x_{2n} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{(2n)!\,A^n} \sum \pm A_{12} A_{34} \cdots A_{2n-1,2n}.$$

Andererseits wird unser Ausdruck wegen (109) gleich:

$$\frac{1}{(2n)!} \frac{\Sigma \pm A_{12}(\Phi) \cdots A_{2n-1,2n}(\Phi)}{[A(\Phi)]^n}.$$

Aber, wie wir auf S. 58 erwähnt haben, hat der Ausdruck:

$$\frac{1}{(2n)!} \sum \pm A_{12} A_{34} \cdots A_{2n-1,2n}$$

den Wert A^{n-1}, also ergibt sich schließlich:

$$(112) \qquad \begin{pmatrix} \Phi_1 \cdots \Phi_{2n} \\ x_1 \cdots x_{2n} \end{pmatrix} = \frac{A(x_1 \cdots x_{2n})}{A(\Phi_1 \cdots \Phi_{2n})}.$$

Damit ist bewiesen, daß $2n$ Funktionen $\Phi_1 \cdots \Phi_{2n}$ die den Gleichungen (109) genügen und die $A(\Phi_1 \cdots \Phi_{2n})$ nicht zum Verschwinden bringen, immer voneinander unabhängig sind[1]), daß also die Gleichungen:

$$(113) \qquad x_i' = \Phi_i(x_1 \cdots x_{2n}) \qquad (i = 1 \cdots n)$$

eine Transformation darstellen.

Nunmehr folgt aus (109) weiter für zwei beliebige Funktionen φ, χ von $x_1 \cdots x_{2n}$:

$$(114) \qquad |\varphi\chi| = \sum_{ik}^{1 \cdots 2n} \frac{A_{ik}(\Phi_1 \cdots \Phi_{2n})}{A(\Phi_1 \cdots \Phi_{2n})} \frac{\partial \varphi}{\partial \Phi_i} \frac{\partial \chi}{\partial \Phi_\nu},$$

das heißt, unsere Transformation läßt den Ausdruck $|\varphi\chi|$ invariant. Außerdem folgt noch:

$$(108) \qquad \sum_1^{2n} \alpha_{i\nu}(\Phi_1 \cdots \Phi_{2n}) \, |\Phi_i \Phi_k| \equiv \varepsilon_{\nu k}$$

und somit:

$$\sum_1^{2n} {}^i \alpha_{i\nu}(\Phi_1 \cdots \Phi_{2n}) \, |\Phi_i \chi| \equiv \frac{\partial \chi}{\partial \Phi_\nu},$$

also ergibt sich:

$$|\varphi\chi| \equiv \sum_{\mu\nu}^{1 \cdots 2n} \frac{A_{\mu\nu}(\Phi)}{A(\Phi)} \frac{\partial \varphi}{\partial \Phi_\mu} \sum_1^{2n} {}^i \alpha_{i\nu}(\Phi) \, |\Phi_i \chi|,$$

1) Die eben durchgeführte Betrachtung zeigt, daß die auf S. 29 betrachtete Funktionaldeterminante den Wert $+1$ hat.

das heißt:

$$|\varphi\chi| \equiv \sum_{1}^{2n} {}_{\mu} \frac{\partial\varphi}{\partial\Phi_\mu} |\Phi_\mu\chi|$$

und somit:

(106′)
$$|\varphi\chi| \equiv \sum_{\mu\nu}^{1\cdots 2n} \alpha_{\nu\mu}(\Phi) |\Phi_\nu\varphi| |\Phi_\mu\chi|.$$

Daraus endlich folgt, wie wir vorhin bemerkt haben:

$$\sum_{i\nu}^{1\cdots 2n} \alpha_{i\nu}(x) dx_i \delta x_\nu \equiv \sum_{i\nu}^{1\cdots 2n} \alpha_{i\nu}(\Phi) d\Phi_i \delta\Phi_\nu,$$

es besteht mithin eine Identität von der Form:

$$\sum_{1}^{2n} {}_{i}\, \alpha_i(\Phi) d\Phi_i \equiv \sum_{1}^{2n} {}_{i}\, \alpha_i(x) dx_i + d\omega(x),$$

wo ω den Gleichungen (111) genügt.

Die Gleichungen $x'_i = \Phi_i(x)$ *stellen daher dann und nur dann eine Transformation dar, die den Pfaffschen Ausdruck* $\Sigma\alpha_i dx_i$ *bis auf ein vollständiges Differential invariant läßt, wenn* $A(\Phi_1 \cdots \Phi_{2n}) \not\equiv 0$ *ist und wenn die Gleichungen* (109) *bestehen.*

Auch können wir diese Transformationen als diejenigen charakterisieren, die den Ausdruck $|\varphi\chi|$ invariant lassen.

Wir müssen jetzt noch die infinitesimalen Transformationen der hier betrachteten Art bestimmen.

Ist

$$Xf = \sum_{1}^{2n} {}_{i}\, \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

eine infinitesimale Transformation, für die eine Identität von der Form:

$$X\left(\sum_{1}^{2n} {}_{i}\, \alpha_i dx_i\right) = du(x_1 \cdots x_{2n})$$

besteht, so muß werden:

$$\sum_{1}^{2n} {}_{i}\, X\alpha_i dx_i + \sum_{1}^{2n} {}_{i}\, \alpha_i d\xi_i = du$$

also:

$$\sum_{1}^{2n} {}_{i}\, (X\alpha_i dx_i - \xi_i d\alpha_i) = d\left(u - \sum_{1}^{2n} {}_{i}\, \alpha_i \xi_i\right)$$

oder:

$$\sum_{i\nu}^{1\cdots 2n} \alpha_{i\nu}\xi_\nu dx_i = d\left(u - \sum_1^{2n}{}^i \alpha_i\xi_i\right).$$

Setzen wir daher:

(115) $$u - \sum_1^{2n}{}^i \alpha_i\xi_i = U,$$

so ergibt sich:

$$\sum_1^{2n}{}^\nu \alpha_{i\nu}\xi_\nu = \frac{\partial U}{\partial x_i},$$

mithin:

$$\xi_\mu = \sum_1^{2n}{}^i \frac{A_{i\mu}}{A}\frac{\partial U}{\partial x_i}$$

und

(116) $$Xf = |\,Uf\,|,$$

wo U ganz willkürlich bleibt und wo

(117) $$X\sum_1^{2n}{}^i \alpha_i dx_i = d\left(U + \sum_{i\mu}^{1\cdots 2n} \frac{A_{i\mu}}{A}\frac{\partial U}{\partial x_i}\alpha_\mu\right)$$

ist.

Die Funktion U nennen wir die *Charakteristik* der infinitesimalen Transformation Xf. Führen wir in Xf neue Veränderliche x_i' ein vermöge einer endlichen Transformation von der vorhin betrachteten Art, so wird

$$|\,Uf\,|_x = |\,Uf\,|_{x'},$$

also ist die Charakteristik U mit der infinitesimalen Transformation Xf invariant verknüpft gegenüber jeder endlichen Transformation jener Art.

Führen wir in Xf neue Veränderliche x_i' ein vermöge einer infinitesimalen Transformation

$$x_i' = x_i + \sum_1^{2n}{}^\mu \frac{A_{\mu i}}{A}\frac{\partial V}{\partial x_\mu}\delta t \qquad (i=1\ldots 2n)$$

mit der Charakteristik V, so wird:

$$f' = f + |\,Vf\,|\,\delta t,\quad f = f' - |\,V'f'\,|_{x'}\delta t,$$

also:

$$|\,Uf\,| = |\,U'f'\,|_{x'} + \|\,U'f'\,|\,V'\,|_{x'}\delta t.$$

Andererseits aber wird:

$$|\,Uf\,| = |\,Uf\,|_{x'} = |\,U' + |\,U'V'\,|_{x'}\,\delta t,\ f' + |\,f'V'\,|_{x'}\,\delta t\,|_{x'}$$
$$= |\,U'f'\,|_{x'} + \{\|\,U'V'\,|\,f'\,|_{x'} + |\,U'\,|\,f'V'\,\|_{x'}\}\,\delta t,$$

also kommt:

(118) $$|\,U\,|\,Vf\,\| - |\,V\,|\,Uf\,\| \equiv \|\,UV\,|\,f\,|$$

oder

(119) $$\| UV \| W | + \| VW \| U | + \| WU \| V | \equiv 0,$$

was die Verallgemeinerung der Jacobischen Identität ist.[1])

Das Symbol $| UV |$ hat also die wichtige Eigenschaft, daß die Identität (119) besteht. Mit Kantor bemerken wir, daß jeder bilineare alternierende Ausdruck:

(120) $$\{\varphi\chi\} = \sum_{ik}^{1\dots n} \omega_{ik}(x_1 \dots x_n) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial \chi}{\partial x_k} \qquad (\omega_{ik} + \omega_{ki} = 0)$$

eine trilineare Kovariante:

(121) $$\{\varphi\{\chi\psi\}\} + \{\chi\{\psi\varphi\}\} + \{\psi\{\varphi\chi\}\}$$

besitzt. Hier ist
$$\{\varphi\{\chi\psi\}\} - \{\chi\{\varphi\psi\}\}$$
frei von den zweiten Ableitungen von ψ und da $\{\psi\{\varphi\chi\}\}$ überhaupt nur erste Ableitungen von ψ enthält, so kommen in (121) nur die ersten Ableitungen von ψ vor und ebenso natürlich nur die ersten Ableitungen von χ und von φ. Das Symbol $|\varphi\chi|$ ist also dadurch ausgezeichnet, daß seine trilineare Kovariante (121) identisch verschwindet.

Es ist nunmehr ein Leichtes, zu beweisen, daß unser Pfaffscher Ausdruck $\Sigma\alpha_i dx_i$ wirklich Scharen von n-fach ausgedehnten Integralmannigfaltigkeiten von der Form (97) besitzt. Die Funktionen $F_1 \dots F_n$ müssen nämlich hier voneinander unabhängig sein und paarweise in den Beziehungen $|F_i F_\nu| \equiv 0$ stehen. Wählen wir daher F_1 beliebig und setzen wir F_2 gleich einer beliebigen von F_1 unabhängigen Lösung der Gleichung $|F_1 f| = 0$, so muß F_3 den beiden Gleichungen:
$$A_1 f = |F_1 f| = 0, \quad A_2 f = |F_2 f| = 0$$
genügen. Diese aber sind offenbar voneinander unabhängig und bilden wegen:
$$\begin{aligned} A_1 A_2 f - A_2 A_1 f &= |F_1 | F_2 f \| - |F_2 | F_1 f \| \\ &= \| F_1 F_2 | f | \equiv 0 \end{aligned}$$
ein zweigliedriges vollständiges System mit $2n - 2$ unabhängigen Lösungen, von denen zwei, nämlich F_1 und F_2, schon bekannt sind. Wir wählen daher F_3 gleich einer von F_1 und F_2 unabhängigen Lösung dieses vollständigen Systems und fahren so fort, bis wir n unabhängige Funktionen $F_1 \dots F_n$ von der verlangten Beschaffenheit gefunden haben. Das n-gliedrige vollständige System $|F_i f| = 0$ $(i = 1 \dots n)$ hat dann nur solche Lösungen, die sich durch $F_1 \dots F_n$ allein ausdrücken lassen.

1) Diese Identität (119) findet sich schon in Clebschs zweiter Abhandlung über das Pfaffsche Problem. Crelle Bd. 61 (1863).

Damit ist gezeigt, wie man die allgemeinste Schar von ∞^n n-fach ausgedehnten Integralmannigfaltigkeiten finden kann, die den ganzen Raum $x_1 \dots x_{2n}$ gerade einmal ausfüllt.

Man kenne eine solche Schar von ∞^n Integralmannigfaltigkeiten (97) und verstehe unter $\Psi_1 \dots \Psi_n$ n beliebige voneinander und von den F_i unabhängige Funktionen. Setzt man dann:

$$\Psi_i(x_1 \dots x_{2n}) = u_i \qquad (i = 1 \dots n) \tag{122}$$

und denkt sich die Gleichungen (97) und (122) nach den x aufgelöst, so hat man:

$$x_i = \varphi_i(u_1 \dots u_n,\ a_1 \dots a_n) \qquad (i = 1 \dots 2n), \tag{123}$$

und diese Gleichungen stellen bei beliebigen Werten der a_k Integralmannigfaltigkeiten dar, also wird $\Sigma \alpha_i dx_i$ bei der Substitution (123) zu einem vollständigen Differential in den u:

$$\sum_1^{2n} {}^i \alpha_i(\varphi_1 \dots \varphi_{2n}) \sum_1^n {}^\nu \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_\nu} du_\nu \equiv \sum_1^n {}^\nu \frac{\partial \Omega(u,a)}{\partial u_\nu} du_\nu . \tag{124}$$

Macht man hier die Substitution (97), (122), so kommt:

$$\sum_1^{2n} {}^i \alpha_i(x_1 \dots x_n)\, dx_i \equiv d\Omega(\Psi, F) - \sum_1^n {}^\nu \left\{ \frac{\partial \Omega(u,a)}{\partial a_\nu} - \sum_1^n {}^i \alpha_i(x) \frac{\partial \varphi_i}{\partial a_\nu} \right\}_{\substack{a=F \\ u=\Psi}} dF_\nu ,$$

also besteht eine Identität von der Form:

$$\sum_1^{2n} {}^i \alpha_i(x) dx_i \equiv \sum_1^n {}^i f_i(x) dF_i(x) + d\omega(x), \tag{125}$$

wo ω durch eine Quadratur gefunden werden kann.

Aus (125) folgt jetzt:

$$\sum_{i\nu}^{1 \dots 2n} \alpha_{i\nu} dx_\nu \delta x_i \equiv \sum_1^n {}^\nu (df_i \delta F_i - dF_i \delta f_i)$$

oder wenn man hier setzt (vgl. (101′) und (103)):

$$\delta x_i = \sum_1^{2n} {}^\mu \frac{A_{i\mu}}{A} \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu} \delta t$$

die Identität:

$$d\varphi \equiv \sum_1^n {}^i \{ |F_i \varphi| df_i - |f_i \varphi| dF_i \}, \tag{126}$$

aus der wiederum, wenn man

$$dx_i = \sum_1^{2n} {}^\mu \frac{A_{i\mu}}{A} \frac{\partial \chi}{\partial x_\mu} dt$$

setzt, folgt:

$$|\varphi\chi| \equiv \sum_1^n{}^i \{|F_i\varphi|\,|f_i\chi| - |f_i\varphi|\,|F_i\chi|\}. \tag{127}$$

Die Identität (126) ergibt, wenn man $\varphi = F_k$ setzt und bedenkt, daß $F_1 \ldots F_n$ voneinander unabhängig und alle $|F_iF_k| = 0$ sind:

$$|F_if_k| = \varepsilon_{ik}$$

und sodann für $\varphi = f_k$:

$$|f_if_k| = 0.$$

Demnach sind die $2n$ Funktionen F_i, f_i in (125) durch die Relationen:

$$|F_iF_k| = 0 \quad |F_if_k| = \varepsilon_{ik}, \quad |f_if_k| = 0 \qquad {\scriptstyle (i,k=1\,\ldots n)} \tag{128}$$

verknüpft, woraus auf dieselbe Weise wie auf S. 63f. geschlossen werden kann, daß sie voneinander unabhängig sind.

Sind umgekehrt $2n$ Funktionen $f_1 \ldots f_n, F_1 \ldots F_n$ vorgelegt, die in den Beziehungen (128) stehen, so sind sie sicher voneinander unabhängig. Ferner besteht (126) für jede Funktion φ, es ist also für beliebige u_ν und dx_ν:

$$\sum_1^{2n}{}^\nu u_\nu\, dx_\nu \equiv \sum_1^n{}^i \sum_{\mu\nu}^{1\ldots 2n} \frac{A_{\mu\nu}}{A}\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_\mu} df_i - \frac{\partial f_i}{\partial x_\mu} dF_i\right) u_\nu.$$

Setzt man hier:

$$u_\nu\, \delta t = \sum_1^{2n}{}^k \alpha_{k\nu}\, \delta x_k,$$

so kommt:

$$\sum_{k\nu}^{1\ldots 2n} \alpha_{k\nu}\, dx_\nu\, \delta x_k \equiv \sum_1^n{}^i (df_i\,\delta F_i - dF_i\,\delta f_i)$$

für alle $dx_i, \delta x_i$, also zieht das Bestehen der Relationen (128) das einer Identität von der Form (125) nach sich.

Setzt man die Ausdrücke:

$$dx_\mu = \sum_1^{2n}{}^\nu \frac{A_{\mu\nu}}{A} \frac{\partial\varphi}{\partial x_\nu} dt$$

in (125) ein, so erhält man noch die Identität:

$$\sum_{\mu\nu}^{1\ldots 2n} \frac{\alpha_\mu A_{\mu\nu}}{A} \frac{\partial\varphi}{\partial x_\nu} \equiv \sum_1^n{}^i f_i\,|F_i\varphi| + |\omega\varphi|, \tag{129}$$

die für $\varphi = F_k$ und $\varphi = f_k$ die folgenden liefert:

$$\begin{cases} |\omega F_k| = \mathsf{A} F_k \\ |\omega f_k| = \mathsf{A} f_k - f_k \end{cases} \quad {\scriptstyle (k=1\ldots n),} \tag{130}$$

wo der Ausdruck:

$$(131) \qquad \mathsf{A}f = \sum_{\mu\nu}^{1\ldots 2n} \frac{\alpha_\mu A_{\mu\nu}}{A} \frac{\partial f}{\partial x_\nu},$$

der unter den hier gemachten Voraussetzungen sicher nicht identisch verschwindet, das Symbol einer infinitesimalen Transformation ist.

Da die F_i, f_i voneinander unabhängig sind, so sind es auch die Gleichungen (130); sie bestimmen daher die Funktion ω durch eine Quadratur. Das Bestehen der Relationen (128) und (130) ist demnach notwendig und hinreichend für das Bestehen der Identität (125).

Wie auf S. 49f. erkennt man, daß der Ausdruck:

$$(132) \qquad \mathsf{A}|\varphi\chi| - |\mathsf{A}\varphi, \chi| - |\varphi, \mathsf{A}\chi|$$

nur die ersten Ableitungen von φ und χ enthält. Nach (129) aber ist:

$$\mathsf{A}\varphi \equiv \sum_1^n f_i |F_i\varphi| + |\omega\varphi|,$$

also auch:

$$\mathsf{A}|\varphi\chi| \equiv \sum_1^n f_i |F_i|\varphi\chi|| + |\omega|\varphi\chi||$$

$$|\mathsf{A}\varphi, \chi| \equiv \sum_1^n \{f_i ||F_i\varphi|\chi| + |f_i\chi||F_i\varphi|\} + ||\omega\varphi|\chi|$$

$$|\varphi, \mathsf{A}\chi| \equiv \sum_1^n \{f_i |\varphi|F_i\chi|| + |\varphi f_i||F_i\chi|\} + |\varphi|\omega\chi||.$$

Hieraus ergibt sich für (132) durch Benutzung der Identität (119) der Wert:

$$\sum_1^n \{|f_i\varphi||F_i\chi| - |f_i\chi||F_i\varphi|\} = -|\varphi\chi|,$$

nach (127). Somit steht die infinitesimale Transformation $\mathsf{A}f$ zu dem Symbole $|\varphi\chi|$ in der Beziehung:

$$(133) \qquad \mathsf{A}|\varphi\chi| \equiv |\mathsf{A}\varphi, \chi| + |\varphi, \mathsf{A}\chi| - |\varphi\chi|,$$

die auch so geschrieben werden kann:

$$(133') \qquad \mathsf{A}|Uf| - |U, \mathsf{A}f| \equiv |\mathsf{A}U - U, f|$$

und aus der hervorgeht, daß $\mathsf{A}f$ den Inbegriff aller infinitesimalen Transformationen $|Uf|$ invariant läßt.

Daß es so sein muß, ergibt sich auf andere Weise noch schneller.

Ist nämlich Xf eine beliebige infinitesimale Transformation, so gilt die Gleichung:

(134) $$X\sum_1^{2n}{}^{\nu}\alpha_\nu dx_\nu = \sum_{i\,n}^{1\ldots 2n}\alpha_{\nu i}\xi_i dx_\nu + d\sum_1^{2n}{}^{\nu}\alpha_\nu\xi_\nu,$$

für $Xf = \mathsf{A}f$ kommt daher insbesondere:

(135) $$\begin{cases} \mathsf{A}\sum_1^{2n}{}^{\nu}\alpha_\nu dx_\nu = \sum_{i\nu\mu}^{1\ldots 2n}\frac{\alpha_{\nu i}\,\alpha_\mu A_{\mu i}}{A}dx_\nu \\ \qquad = \sum_1^{2n}{}^{\nu}\alpha_\nu dx_\nu, \end{cases}$$

man erkennt sogar, daß $\mathsf{A}f$ die einzige infinitesimale Transformation Xf ist, für die $\Sigma\alpha_\nu\xi_\nu$ verschwindet und außerdem die Relation (135) besteht.

Setzt man nunmehr $|Uf| = Xf$, so ist nach (117):

(117′) $$X\sum_1^{2n}{}^{\nu}\alpha_\nu dx_\nu = d(U - \mathsf{A}U)$$

und daher, wenn man noch für den Augenblick:

$$\mathsf{A}|Uf| - |U, \mathsf{A}f| = \mathsf{A}Xf - X\mathsf{A}f = (\mathsf{A}X) = Zf$$

setzt:

$$\begin{aligned} Z\sum_1^{2n}{}^{\nu}\alpha_\nu dx_\nu &= d(\mathsf{A}U - \mathsf{A}\mathsf{A}U) - d(U - \mathsf{A}U) \\ &= d(\mathsf{A}U - U - \mathsf{A}(\mathsf{A}U - U)), \end{aligned}$$

das heißt, Zf hat die Form $|Vf|$. Dagegen ergibt sich allerdings auf diesem Wege nur, daß die Charakteristik V von Zf der Gleichung

$$V - \mathsf{A}V = \mathsf{A}U - U - \mathsf{A}(\mathsf{A}U - U)$$

genügt, nicht daß sie, wie wir vorhin sahen, den Wert $\mathsf{A}U - U$ hat.

Wir fragen jetzt insbesondere, ob eine Identität von der Form (125) auch dann bestehen kann, wenn ω gleich Null sein soll.

Notwendig und hinreichend hierfür ist, daß außer den Gleichungen (128) auch noch diese:

(130′) $$\mathsf{A}F_k = 0, \quad \mathsf{A}f_k = f_k \qquad (k=1\ldots n)$$

bestehen. Es genügt aber schon, wenn man n unabhängige Funktionen $\mathfrak{F}_1 \ldots \mathfrak{F}_n$ bestimmen kann, die den Gleichungen:

(136) $$|\mathfrak{F}_i\mathfrak{F}_k| = 0, \quad \mathsf{A}\mathfrak{F}_i = 0 \qquad (i,k=1\ldots n)$$

genügen. Hat man nämlich n solche Funktionen, so besteht, wie wir auf S. 68f. gesehen haben, eine Identität von der Form:

(137) $$\sum_1^{2n}{}^{i}\alpha_i dx_i \equiv \sum_1^{n}{}^{\nu}\mathfrak{f}_\nu d\mathfrak{F}_\nu + d\vartheta$$

und es ist:

$$|\mathfrak{F}_i \mathfrak{F}_k| = 0, \qquad |\mathfrak{F}_i \mathfrak{f}_k| = \varepsilon_{ik}, \qquad |\mathfrak{f}_i \mathfrak{f}_k| = 0$$
$$|\vartheta \mathfrak{F}_k| = \mathsf{A}\mathfrak{F}_k = 0, \qquad |\vartheta \mathfrak{f}_k| = \mathsf{A}\mathfrak{f}_k - \mathfrak{f}_k \,.$$

Da hier die $\mathfrak{F}_i$, $\mathfrak{f}_i$ voneinander unabhängig sind, so kann man sich ϑ durch diese $2n$ Funktionen ausgedrückt denken und erhält:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \mathfrak{f}_k} = 0, \qquad \frac{\partial \vartheta}{\partial \mathfrak{F}_k} = \mathsf{A}\mathfrak{f}_k - \mathfrak{f}_k,$$

so daß ϑ eine Funktion von $\mathfrak{F}_1 \ldots \mathfrak{F}_n$ allein wird. Die Identität (137) besitzt daher die Gestalt:

(137′) $$\sum_1^{2n} {}^i \alpha_i \, dx_i \equiv \sum_1^{n} {}^\nu \mathsf{A}\mathfrak{f}_\nu \cdot d\mathfrak{F}_\nu,$$

also gerade die verlangte.

Zu zeigen bleibt noch, daß man die Gleichungen (136) durch n unabhängige Funktionen $\mathfrak{F}_1 \ldots \mathfrak{F}_n$ befriedigen kann. Nun aber kann man, jedenfalls für $m = 1$, immer m unabhängige Funktionen $\mathfrak{F}_1 \ldots \mathfrak{F}_m$ so bestimmen, daß die Gleichungen:

$$|\mathfrak{F}_\mu \mathfrak{F}_\nu| = 0, \qquad \mathsf{A}F_\mu = 0 \qquad\qquad (\mu, \nu = 1 \ldots m)$$

erfüllt sind. Dann sind die m Gleichungen:

$$|\mathfrak{F}_\mu \mathfrak{F}| = 0 \qquad\qquad (\mu = 1 \ldots m)$$

sicher voneinander unabhängig und bilden wegen der Identität (119) ein m-gliedriges vollständiges System. Aber auch die $m+1$ Gleichungen:

(138) $$|\mathfrak{F}_\mu \mathfrak{F}| = 0, \quad (\mu = 1 \ldots m), \qquad \mathsf{A}\mathfrak{F} = 0$$

sind voneinander unabhängig, solange $m < n$ ist. Wären sie es nämlich nicht, so beständen $2n$ Identitäten von der Form:

$$\sum_1^{2n} {}^i \frac{\alpha_i A_{i\nu}}{A} \equiv \sum_1^{m} {}^\mu \varrho_\mu \sum_1^{2n} {}^i \frac{A_{i\nu}}{A} \frac{\partial \mathfrak{F}_\mu}{\partial x_i}$$

aus denen folgte:

$$\alpha_k \equiv \sum_1^{m} {}^\mu \varrho_\mu \frac{\partial \mathfrak{F}_\mu}{\partial x_k}$$

also:

$$\sum_1^{2n} {}^k \alpha_k \, dx_k \equiv \sum_1^{m} {}^\mu \varrho_\mu \, d\mathfrak{F}_\mu,$$

es stellten also die Gleichungen $\mathfrak{F}_\mu = \text{const.}$ $(\mu = 1 \ldots m)$ eine Schar von $(2n-m)$-fach ausgedehnten Integralmannigfaltigkeiten des Pfaffschen Ausdrucks $\Sigma \alpha_\nu dx_\nu$ dar, was für $m < n$ unmöglich ist. Endlich folgt aus den Identitäten (119) und (133′), daß die $m+1$ Gleichungen (138) ein $(m+1)$-gliedriges vollständiges System bilden, das $2n - m - 1$ unabhängige Lösungen besitzt. Da nun unter den gemachten Voraussetzungen $\mathfrak{F}_1 \cdots \mathfrak{F}_m$ unabhängige Lösungen von (138) sind, so besitzt das System (138) solange $2n - m - 1 > m$, das heißt, solange $m < n$ ist, sicher eine von $\mathfrak{F}_1 \cdots \mathfrak{F}_m$ unabhängige Lösung.

Wendet man diesen Satz wiederholt an, nachdem man zuerst eine Lösung $\mathfrak{F}_1$ der Gleichung $\mathsf{A}F = 0$ bestimmt hat, so gelangt man schließlich zu n unabhängigen Funktionen $\mathfrak{F}_1 \ldots \mathfrak{F}_n$, die (136) genügen, was zu zeigen war.

Damit haben wir den Satz:

Soll eine Identität von der Form:

$$\sum_1^{2n} \alpha_i dx_i \equiv \sum_1^{n} f_\nu dF_\nu \tag{139}$$

bestehen, so ist notwendig und hinreichend, daß die Gleichungen (128) *und* (130′) *bestehen. Hat man n unabhängige Funktionen $F_1 \ldots F_n$, die den Gleichungen:*

$$|F_i F_k| = 0, \qquad \mathsf{A}F_i = 0 \qquad\qquad (i,k=1\ldots n) \tag{140}$$

genügen, so besteht immer eine Identität von der Form (139) *und man findet $f_1 \ldots f_n$ durch Auflösung linearer Gleichungen.*

Da die $2n$ Funktionen f_i, F_i voneinander unabhängig sind, so ist hiermit zugleich gezeigt, daß der Ausdruck $\Sigma \alpha_i dx_i$ immer, wenn A nicht identisch verschwindet, durch eine Transformation:

$$x_i' = F_i, \qquad p_i' = f_i \qquad\qquad (i=1\ldots n)$$

auf die Normalform $p_1' dx_1' + \cdots + p_n' dx_n'$ gebracht werden kann.

Es ist jetzt sehr leicht, die Theorie der Funktionengruppen auf den Fall eines Pfaffschen Ausdrucks $\Sigma \alpha_i dx_i$ mit nicht verschwindendem A zu übertragen.

Wir sagen, daß m unabhängige Funktionen $u_1 \ldots u_m$ von $x_1 \ldots x_{2n}$ eine m-gliedrige Funktionengruppe bestimmen, wenn Relationen von der Form:

$$|u_i u_k| = \omega_{ik}(u_1 \ldots u_m) \qquad\qquad (i,k=1\ldots m)$$

bestehen. Alle Entwicklungen über die reziproke Funktionengruppe, über die ausgezeichneten Funktionen, über die Herstellung einer kanonischen Basis gestalten sich genau so wie für die Funktionengruppen in den x, p. Dasselbe gilt auch von dem Satze, daß zwei m-gliedrige Funktionengruppen dann und nur dann durch eine Transformation, die $\Sigma \alpha_i dx_i$ bis auf ein vollständiges Differential invariant läßt, ineinander überführbar sind, wenn sie dieselbe Gliederzahl und dieselbe Zahl von ausgezeichneten Funktionen haben.

Es ist nicht nötig, alles das näher auszuführen, es genügt, auf das Kapitel 13 des zweiten Bandes der Transformationsgruppen zu verweisen, wo die erforderlichen Entwicklungen fast alle tatsächlich gemacht sind, wenn auch dort scheinbar eine ganz andre Aufgabe behandelt wird.

Erwähnt sei nur, daß $2n$ unabhängige Funktionen $\Phi_1 \ldots \Phi_{2n}$, die in den Beziehungen (109) stehen, eine $2n$-gliedrige Funktionengruppe bestimmen. Um das allgemeinste Funktionensystem $\Phi_1 \ldots \Phi_{2n}$ dieser Art zu finden, muß man zunächst eine kanonische Basis dieser Funktionengruppe aufstellen. Sind $F_1 \ldots F_n, f_1 \ldots f_n$ solche Funktionen der x, die in den kanonischen Beziehungen (128) stehen, so bilden die Ausdrücke $F_i(\Phi_1 \ldots \Phi_{2n}), f_i(\Phi_1 \ldots \Phi_{2n})$ eine solche kanonische Basis. Ist endlich $\mathfrak{F}_1 \ldots \mathfrak{F}_n, \mathfrak{f}_1 \ldots \mathfrak{f}_n$ das allgemeinste System von Funktionen der x, das die kanonischen Gleichungen (128) erfüllt, so bestimmen die Gleichungen:

$$F_i(\Phi) = \mathfrak{F}_i, \quad f_i(\Phi) = \mathfrak{f}_i \qquad (i = 1 \ldots n)$$

das allgemeinste Funktionensystem $\Phi_1 \ldots \Phi_{2n}$, das (109) befriedigt.

Jetzt mögen noch einige Andeutungen darüber folgen, wie sich die Kantorsche Erweiterung der Theorie der Funktionengruppen für den vorliegenden Fall gestaltet.

Zwei Pfaffsche Gleichungen:

$$\sum_1^{2n} {}^i \lambda_i dx_i = 0, \qquad \sum_1^{2n} {}^i \lambda_i' dx_i = 0$$

nennen wir *konjugiert*, wenn die Gleichung:

$$(141) \qquad \sum_{i\nu}^{1\ldots 2n} \frac{A_{i\nu}}{A} \lambda_i \lambda_\nu' = 0$$

erfüllt ist. Ebenso nennen wir zwei lineare partielle Differentialgleichungen:

$$\sum_1^{2n} {}^i \varrho_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0, \qquad \sum_1^{2n} {}^i \varrho_i' \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$$

konjugiert, wenn die Gleichung:

$$(142) \qquad \sum_{i\nu}^{1\ldots 2n} \alpha_{i\nu} \varrho_i \varrho_\nu' = 0$$

besteht.

Haben wir nun ein System von m unabhängigen linearen partiellen Differentialgleichungen, so können wir für dieses System immer eine kanonische Basis:

$$(143) \qquad \begin{cases} X_i f = \sum_1^{2n} {}^\nu \varrho_{i\nu} \dfrac{\partial f}{\partial x_\nu} = 0 & (i = 1 \ldots l + h) \\ P_k f = \sum_1^{2n} {}^\nu \sigma_{k\nu} \dfrac{\partial f}{\partial x_\nu} = 0 & (k = 1 \ldots l) \end{cases}$$
$$(2l + h = m)$$

so bestimmen, daß je zwei dieser Gleichungen immer konjugiert sind, ausgenommen allein: $X_k f$ und $P_k f$ $(k=1\ldots l)$, für die immer:

(144) $$\sum_{i\nu}^{1\ldots 2n} \alpha_{i\nu}\sigma_{ki}\varrho_{k\nu} = 1 \qquad (k=1\ldots l)$$

wird.

Der Inbegriff aller zu allen Gleichungen (143) konjugierten Gleichungen bildet das zu (143) reziproke System, daß $(2n-m)$-gliedrig ist und für das wir eine kanonische Basis von der Form:

(143') $$X_{l+1}f=0,\quad \ldots,\quad X_n f=0,\quad P_{l+h+1}f=0,\quad \ldots,\quad P_n f=0$$

bestimmen können. Endlich können wir noch $P_{l+1}f \ldots P_{l+h}f$ so wählen, daß alle $2n$ Gleichungen $X_i f=0$, $P_i f=0$ voneinander unabhängig sind und eine kanonische Basis bilden.

Nunmehr gibt es $2n$ eindeutig bestimmte Pfaffsche Ausdrücke D_i, E_i derart, daß

(145) $$df \equiv \sum_1^n {}^i (D_i P_i f - E_i X_i f)$$

wird. Ersetzt man in dieser Identität f_{x_μ} durch:

$$\sum_1^{2n} {}^\nu \varrho_{k\nu}\alpha_{\mu\nu} \qquad (\mu=1\ldots 2n),$$

so verschwinden alle $X_i f$ und zugleich alle $P_i f$ außer $P_k f$, das gleich 1 wird, also erhält man:

(146) $$D_k = \sum_{\mu\nu}^{1\ldots 2n} \alpha_{\mu\nu}\varrho_{k\nu}\,dx_\mu \qquad (k=1\ldots n)$$

und ähnlich findet man:

(147) $$E_k = \sum_{\mu\nu}^{1\ldots 2n} \alpha_{\mu\nu}\sigma_{k\nu}\,dx_\mu \qquad (k=1\ldots n),$$

wo nunmehr die D_k, E_k ihrerseits als eine kanonische Basis betrachtet werden können, denn es sind je zwei unter ihnen konjugiert mit Ausnahme jedes Paares D_k, E_k $(k=1\ldots n)$, für diese nämlich wird:

$$\sum_{\mu\nu}^{1\ldots 2n} \frac{A_{\mu\nu}}{A} \sum_{\pi\tau}^{1\ldots 2n} \alpha_{\mu\pi}\sigma_{k\pi}\alpha_{\nu\tau}\varrho_{k\tau} = \sum_{\pi\tau} \alpha_{\pi\tau}\sigma_{k\pi}\varrho_{k\tau} = 1\,.$$

Setzt man dann noch in (145)

$$dx_\nu = \sum_1^{2n} {}^\mu \frac{A_{\mu\nu}}{A}\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}\,dt,$$

so kommt:

$$|\varphi f| \equiv \sum_1^n{}^i (P_i\varphi \cdot X_i f - X_i\varphi \cdot P_i f), \tag{148}$$

und endlich ergibt sich, wenn man in (145) für f_{x_μ} setzt:

$$\sum_1^{2n}{}^\nu \alpha_{\mu\nu}\,\delta x_\nu$$

die Identität:

$$\sum_{\mu\nu}^{1\ldots 2n} \alpha_{\mu\nu}\,dx_\mu\,\delta x_\nu \equiv \sum_1^n{}^i (E_i \Delta_i - D_i \mathrm{E}_i). \tag{149}$$

Jetzt gestaltet sich alles genau so wie auf S. 47—54, nur daß man dort überall das Symbol ( ) durch | | zu ersetzen hat. Zum Beispiel ergibt sich, daß ein m-gliedriges vollständiges System (143) dann und nur dann eine $(2n-m)$-gliedrige Funktionengruppe definiert, wenn das reziproke System (143′) auch vollständig ist, und so weiter. Kurz es verhält sich so, daß für einen beliebigen Pfaffschen Ausdruck, für den A nicht identisch verschwindet, die ganze Theorie vollständig analog und ebenso einfach wird, wie für den Ausdruck $\Sigma p_i dx_i$.

Nachtrag.

Auf S. 53 f. beweise ich allerdings, daß, sobald (58) und (59) vollständige Systeme sind, auch (76) ein solches ist, aber das benutzte Beweisverfahren paßt nicht in den Rahmen der neuen Begründung der Theorie der Funktionengruppen. Eigentlich müßte gezeigt werden, daß die Gleichungen, die zwischen den Koeffizienten von (68) bestehen, wenn (58) und (59) vollständige Systeme sind, verbunden mit den Gleichungen (69) zur Folge haben, daß auch (76) ein vollständiges System ist. Dies zu zeigen ist mir erst jetzt gelungen, ich möchte daher die Betrachtungen, die zum Beweise führen, noch nachtragen.

Ist sowohl (58) wie (59) ein vollständiges System, so hat man zunächst $b_{ik\mu} = 0$ für:

$k, \mu = 1, \cdots, l+h;\; i = l+1, \cdots n$ und: $k, \mu = l+1, \cdots, n;\; i = 1, \cdots, l+h,$

also ist $b_{k\mu i} = b_{i\mu k} = 0$ für:

$$k = 1 \cdots l;\; \mu = l+1, \cdots, l+h;\; i = l+1, \cdots, n,$$

da aber $b_{\mu ik} = -b_{i\mu k}$ ist, so ergibt sich aus (69), daß für dieselben Werte von i, k, μ auch $b_{i,k,\mu}$ verschwindet.

Es ist ferner $a'_{k\mu i} = 0$ für:

$$k = 1, \cdots, l+h;\quad \mu = 1 \cdots l;\quad i = l+h+1, \cdots n$$

und für:

$$k = l + 1, \cdots n; \quad \mu = l + h + 1, \cdots n; \quad i = 1 \cdots l,$$

mithin:

$$a'_{k\mu i} = a'_{ki\mu} = 0$$
$$(k = l + 1, \cdots, l + h; \quad \mu = l + h + 1, \cdots, n; \quad i = 1 \cdots l)$$

und demnach wegen (69)

$$b''_{\mu ik} = a'_{k\mu i} - a'_{ki\mu} = 0$$

für dieselben Werte von μ, i, k.

Endlich ist $a_{k\mu i} = 0$ für:

$k, \mu = 1 \cdots, l + h$; $i = l + h + 1, \cdots n$ und $k, \mu = l + 1, \cdots n$; $i = 1 \cdots l$, folglich nach (69) für dieselben Werte von k, μ, i zugleich: $b'_{\mu ik} = b'_{ki\mu}$. Aber es ist überdies $b'_{\mu ik} = 0$ für:

$$\mu = 1 \cdots l + h; \quad i = 1 \cdots l; \quad k = l + 1, \cdots n$$

und für:

$$\mu = l + 1, \cdots n; \quad i = l + h + 1, \cdots n; \quad k = 1 \cdots l + h,$$

demnach $b'_{ki\mu} = 0$ für:

$$i = 1 \cdots l; \quad k = l + 1, \cdots n; \quad \mu = l + 1, \cdots, l + h$$

und für:

$$i = l + h + 1, \cdots n; \quad k = 1 \cdots l + h; \quad \mu = l + 1, \cdots, l + h.$$

Hierin liegt, daß auch (76) ein vollständiges System ist.

Da nun das zu (76) reziproke System (75) ebenfalls vollständig ist, so definieren (75) und (76) zwei reziproke Funktionengruppen, und zwar besteht (76) aus allen Funktionen, die den beiden Funktionengruppen (58) und (59) gemein sind, während (75) diese beiden Funktionengruppen umfaßt, aber nur solche Funktionen enthält, die durch Funktionen beider Funktionengruppen ausdrückbar sind.

Gießen, den 25. November 1913.

Sachregister zu dem Referat von Liebmann.

Namenregister zu dem Referat von Liebmann.

Sachregister zu dem Referat von Engel.

Namenregister zu dem Referat von Engel.