

RECTIFICATION ET DÉMONSTRATION D'UN THÉORÈME
D'ARITHMÉTIQUE DONNÉ DANS LE COMPTE RENDU DU
15 MAI.

[*Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, LX. (1865), pp. 1121—1125.]

UNE erreur s'est glissée dans l'énoncé que j'ai eu l'honneur de donner tout récemment dans les *Comptes rendus*; je me hâte de la corriger en ajoutant en même temps la démonstration du théorème auquel il se rapporte.

Considérons l'équation cubique

$$\phi u = au^3 + 3bu^2 + 3cu + d = 0.$$

Supposons a, b, c, d tous positifs. Il est évident que si les racines sont toutes réelles et distinctes, on peut faire varier à volonté d'une quantité infinitésimale ou b ou c , sans que les racines cessent d'être réelles. Mais quand ϕ possède deux racines égales ρ , en faisant

$$\phi u + 3\delta b \cdot u^2 = 0,$$

pour déterminer si les racines sont ou non toutes réelles, il faut considérer l'équation

$$\phi''\rho \cdot \frac{(d\rho)^2}{2} + 3\delta b \cdot \rho^2 = 0,$$

et les racines resteront réelles ou non, selon que $-\phi''\rho$ et δb auront les mêmes signes ou des signes contraires. De même, la réalité des racines de l'équation

$$\phi u + 3\delta c \cdot u = 0$$

dépend de la circonstance que $-\phi''\rho$ et $\delta b \cdot \rho$ aient ou non les mêmes signes, c'est-à-dire, puisque ρ est nécessairement négatif, dans le cas où ϕu possède deux racines égales, il sera toujours possible, ou en diminuant infiniment peu b ou en diminuant infiniment peu c , de conserver la réalité des trois racines. Si en diminuant b cela a lieu, il n'en sera pas de même quand on diminue c , et *vice versa*, c'est-à-dire en diminuant une des quantités b, c , par exemple b , et en augmentant l'autre c , les racines restent réelles; au contraire, en augmentant b et en diminuant c , deux des racines deviennent imaginaires.

J'ai supposé que deux seulement des racines de ϕ sont égales; si toutes trois sont égales, la chose marche autrement, car dans ce cas on

aura nonseulement $\phi\rho = 0$, $\phi'\rho = 0$, mais aussi $\phi''\rho = 0$, et en faisant varier en même temps b et c , on trouve

$$\phi'''\rho \cdot \frac{(\delta\rho)^3}{6} + 3\delta b \cdot \rho^2 + 3\delta c \cdot \rho = 0.$$

Donc, en faisant ou $\delta b = 0$ ou $\delta c = 0$, il serait impossible d'empêcher que deux des trois racines deviennent imaginaires. Afin de conserver la réalité de ces trois racines, il faut prendre $\delta b \cdot \rho + \delta c = \theta$, où θ est ou zéro ou une quantité infinitésimale d'un certain degré *i au moins*, par rapport à δb ou δc ; alors la réalité de ces racines dépendra de la circonstance que $2\delta b \cdot \rho + \delta c$ soit du signe contraire à $\phi'''\rho$, c'est-à-dire négatif, ainsi donc δc , et conséquemment δb sera positif, et en même temps $\frac{\delta b}{\delta c} \rho + 1$ infiniment près de zéro.

Or, commençons avec l'équation $\phi u = 0$, en possession de deux racines réelles, et supposons que c'est b qu'on peut diminuer sans introduire des racines imaginaires: allons toujours en diminuant b tant que cela sera possible, c'est-à-dire jusqu'à ce que ϕu ait deux racines égales; à cet instant, on ne peut plus diminuer b , mais on peut diminuer c sans perdre de racines réelles, et le diminuer jusqu'à ce que deux des racines deviennent égales; alors il faut recommencer avec b , et ainsi de suite pour c et b tour à tour. Je dis qu'en continuant ces opérations, ni b ni c ne peut devenir zéro, car dans ce cas on sait que l'équation en u ne pourrait avoir qu'une seule racine réelle, il faut en effet se rappeler que quand b deviendrait zéro, c serait positif, et *vice versa*. De plus, il est évident, les variations de b et c n'étant pas simultanées, qu'on ne peut pas tomber *exactement* sur le cas de trois racines réelles. Donc, en commençant avec b et c , on tombe sur une série double prolongée à l'infini $bc, b_1c_1, b_2c_2, b_3c_3, \dots$, telle, que tous les b décroissent et tous les c décroissent, mais sans que ou b ou c dépasse jamais une certaine limite fixe pour l'une et pour l'autre. J'ai supposé que c'était b qui commençait à décroître; si b ne peut pas être diminué, on sera nécessairement en droit de commencer avec c , et on trouvera la série double

$$cb, {}_1c_1b, {}_2c_2b, \dots$$

Ainsi on voit qu'on peut toujours former deux paires de séries

$$b, b_1, b_2, b_3, \dots, c, c_1, c_2, \dots,$$

$$c, {}_1c, {}_2c, {}_3c, \dots, b, {}_1b, {}_2b, \dots,$$

et que l'équation

$$au^3 + 3xu^2 + 3yu + d = 0$$

aura deux racines réelles quand

$$x = b_i, \quad y = c_i,$$

ou bien

$$x = b_{i+1}, \quad y = c_{i+1},$$

et aussi quand $x = i b, \quad y = i c,$
 ou bien $x = i b, \quad y = i_{+1} c.$

Dans l'une des deux paires de séries les b et les c croîtront, comme il est facile de démontrer, sans limite; dans l'autre paire, il y aura une limite pour les b et une limite pour les c , vers lesquelles ces quantités tendent continuellement.

La condition que $ax^3 + 3xu^2 + 3yu + d = 0$ ait deux racines égales sera

$$a^2 d^2 + 4ay^3 + 4dx^3 - 3x^2 y^2 - 6adxy = 0,$$

disons $F(x, y) = 0$.

En supposant cette équation satisfaite par les valeurs positives $x = b, y = c$, pour obtenir la première paire de séries, on écrit :

$$F(x, c) = 0, \text{ qui donnera } x = b, x = b_1, \text{ } b_1 \text{ étant positif,}$$

$$F(b_1, y) = 0, \text{ qui donnera } y = c, y = c_1, \text{ } c_1 \text{ étant positif,}$$

$$F(x, c_1) = 0, \text{ qui donnera } x = b_1, x = b_2, \text{ } b_2 \text{ étant positif,}$$

et ainsi de suite. De cette manière, on peut trouver les séries $b, b_1, b_2, \dots, c, c_1, \dots$, et semblablement l'autre paire.

De plus, on remarquera que ces séries se développent par le moyen de la solution d'équations quadratiques, car dans les équations cubiques $F(x, A) = 0$, ou $F(B, y) = 0$, dont il est question, une des racines est toujours connue d'avance.

Il reste seulement à fixer la valeur de la limite pour chaque série décroissante, ce qui est bien facile. Car si b_n diffère infiniment peu de b_{n+1} , c'est que deux racines de $F(x, c_n)$ seront infiniment près l'une de l'autre, c'est-à-dire que le discriminant de F sera infiniment voisin de zéro.

Or le discriminant du discriminant

$$a^2 d^2 + 4ac^3 + 4db^3 - 3b^2 c^2 - 6abcd$$

par rapport à b , on le trouve facilement (à un facteur positif numérique près) égal à $(ad^2 - c^3)^2$; donc la limite de c_n , quand n devient infini, sera nécessairement $\sqrt[3]{(ad^2)}$; de même, la valeur limite de b_n sera $\sqrt[3]{(a^2 d)}$, de sorte que, comme on aurait pu le deviner *a priori*, la fonction limite de ϕu est la forme pour laquelle toutes ces trois racines deviennent égales.

Ainsi on voit que les valeurs limites des b et des c sont indépendantes de la valeur initiale de l'une ou de l'autre. On voit aussi que par ce théorème on se trouve approcher continuellement de la racine cubique d'un nombre quelconque donné et de son carré *sans tâtonnement* et sans autre procédé que l'extraction de la racine positive d'une suite infinie d'équations *quadratiques*. Pour cela, tout ce qui est nécessaire est de commencer avec l'équation

$$\phi u = (u + \lambda)^2 \left(u + \frac{D}{\lambda^2} \right),$$

λ étant arbitraire. Cela donnera

$$a = 1, \quad d = D, \quad b = 2\lambda + \frac{D}{\lambda^2}, \quad c = \lambda^2 + \frac{2D}{\lambda}.$$

Alors l'une ou l'autre des deux paires de séries, commençant avec les valeurs données pour b , c , aura nécessairement $\sqrt[3]{(D)}$, $\sqrt[3]{(D^2)}$ pour limites respectives.

Puisque b et c décroissent continuellement vers leurs limites respectives, on voit que le théorème suppose que quand l'équation

$$a^2d^2 + 4ac^3 + 4db^3 - 6abcd - 3b^2c^2 = 0$$

est satisfaite par des valeurs positives a , b , c , d , on aura nécessairement

$$b > \sqrt[3]{(a^2d)}, \quad c > \sqrt[3]{(ad^2)}.$$

Cela se confirme très-simplement. Car en traitant cette équation comme une équation en b , puisqu'une racine positive existe, toutes les racines seront réelles; donc le discriminant par rapport à b sera négatif, c'est-à-dire $(ad^2 - c^3)^3$ sera négatif; conséquemment $c^3 > ad^2$, et de même on démontre que $b^3 > a^2d$.

A l'aide des principes expliqués plus haut, on démontre sans difficulté qu'en supposant $\sqrt[3]{(a^2d)}$, $\sqrt[3]{(ad^2)}$ les limites de b_n et c_n , quand on écrit

$$\beta_n = \sqrt[3]{(a^2d)} - b_n, \quad \gamma_n = \sqrt[3]{(ad^2)} - c_n,$$

$\frac{\beta_{n+1} - \beta_n}{\beta_n}$, $\frac{\gamma_{n+1} - \gamma_n}{\gamma_n}$ seront tous les deux infiniment petits quand n devient infini; et, de plus, $\frac{\sqrt[3]{(d)}\beta_n - \sqrt[3]{(a)}\gamma_n}{\beta_n \text{ ou } \gamma_n}$ sera infiniment petit sous la même supposition.

Je prends la liberté d'ajouter que le théorème ici donné ressort tout naturellement d'une étude approfondie que j'ai eu récemment occasion de faire sur les conditions que la variation d'une fonction rationnelle doit remplir pour qu'elle n'amène pas une perte de racines réelles. C'est M. Hermite qui, à ce qu'il me paraît, a été le premier à se servir du grand principe de la variation des coefficients pour l'étude de la nature des formes algébriques. En poursuivant cette théorie dans ses détails, j'ai déjà réussi avec son aide à établir le théorème de Newton pour la découverte de racines imaginaires jusqu'au septième degré inclusivement, et il est bien probable que dans un court délai on réussira (moi ou quelque autre) à établir ce grand théorème dans toute sa généralité pour les équations d'un degré quelconque.