69.

SUR UNE EXTENSION DE LA THÉORIE DES RÉSULTANTS ALGÉBRIQUES.

[*Comptes Rendus de l'Académie des Sciences,* LVIII. (1864), pp. 1074—1079.]

Je me propose de dire quelques mots sur une nouvelle classe très-bien définie d'invariants appartenant à l'ordre des combinants et admettant des applications importantes pour la Géométrie. Pour fixer les idées, imaginons un système de surfaces de degré quelconque chacune. Commençons avec le cas de quatre surfaces. En général, elles ne se rencontreront pas: pour que cela ait lieu, une condition doit être satisfaite entre les coefficients, ou, si l'on veut bien, une certaine fonction des coefficients des équations qui représentent ces surfaces doit s'évanouir.

Passons au cas de trois surfaces: ces surfaces s'entrecouperont dans un système de points qui en général seront tous-distincts. Mais il peut arriver que deux de ces points se confondent, c'est-à-dire que les trois surfaces se rencontreront en deux points consécutifs, ou, si l'on veut bien, seront toutes trois touchées par la même ligne droite; pour que cela ait lieu, une certaine fonction des coefficients doit s'évanouir, laquelle, pour le moment, manque de nom. Continuons en supprimant encore une surface. Les deux surfaces qui restent se couperont dans une courbe qui, en général, ne possédera aucune singularité. Mais il peut arriver que cette courbe possède un point double, dans lequel cas les deux surfaces seront touchées par le même plan. Pour que cela arrive, une certaine fonction des coefficients doit s'évanouir, à laquelle, comme exprimant la condition de tangence, notre grand géomètre M. Cayley a proposé de donner le nom de *tact-invariant*.

On peut exprimer sous une forme générale la nature des conditions analytiques qui doivent être satisfaites dans tous ces cas, et dans le cas le plus général où il y aura i fonctions $U_1, U_2, \ldots, U_i$ de n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Ecrivons

$$U_1 = 0, \quad U_2 = 0, \quad \ldots, \quad U_i = 0,$$
$$\lambda_1 \delta U_1 + \lambda_2 \delta U_2 + \ldots + \lambda_i \delta U_i = 0,$$

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_i$ étant des quantités indéterminées. Puisque

$$\delta U = \frac{dU}{dx_1}\delta x_1 + \frac{dU}{dx_2}\delta x_2 + \ldots + \frac{dU}{dx_n}\delta x_n,$$

cette dernière équation donne lieu à $(n-i+1)$ équations indépendantes: donc le nombre total des équations homogènes à satisfaire avec les n variables sera

$$(n-i+1)+i=n+1\,;$$

pour que cela soit possible dans le cas général d'un tel nombre d'équations avec un tel nombre de variables, deux conditions entre les coefficients devraient être satisfaites; mais dans le cas actuel une seule sera suffisante, car il existera toujours un rapport syzygétique entre les équations. Dans le cas où il n'y a qu'une seule fonction U, l'équation $U=0$ devient tout à fait superflue, et dans le cas où $i=n$, l'équation $\Sigma\lambda\delta U=0$, qui exprime que la jacobienne des n fonctions est égale à zéro, devient également superflue. Mais dans tout autre cas, quoique en vertu de l'identité

$$U = \Sigma\left(x_1\frac{dU}{dx_1}\right)$$

il existe un rapport syzygétique entre les équations, il n'est pas permis de se passer d'une quelconque d'entre elles, sous peine d'introduire des facteurs étrangers dans l'expression finale. J'espère ne pas trop encourir l'indignation de mon très-honoré confrère M. Poncelet, en donnant un nom spécifique à la fonction dont l'évanouissement exprime la condition suffisante et nécessaire pour que ce système d'équations soit simultanément satisfait, et je propose de lui donner le nom, qui n'est pas tout à fait étranger à la Géométrie, d'*osculant*; ainsi on peut partir de l'osculant d'un système de i fonctions homogènes quelconques de n variables, et on voit que les discriminants, les *tact-invariants* de M. Cayley et les résultants ne sont que des espèces particulières des osculants: pour les discriminants $i=1$, pour les *tact-invariants* $i=2$, pour les résultants $i=n$.

Il importe beaucoup au développement de cette théorie de bien fixer le degré des osculants par rapport à chaque système de coefficients contenu dans les fonctions auxquelles ils appartiennent.

Pour les deux extrémités de l'échelle d'osculants, c'est-à-dire les discriminants et les résultants, les expressions pour ce degré sont très-simples et bien connues. Pour les *tact-invariants* le degré n'a été trouvé (je crois par M. Cayley) que pour le seul cas où $n=3$, c'est-à-dire pour les contacts des courbes. Le théorème suivant donne l'expression absolument générale pour les osculants de chaque ordre n et de chaque classe i.

Soient $m_1, m_2, \ldots, m_i$ les degrés des variables des i fonctions, et pour plus de simplicité écrivons

$$m_1 = 1+\mu_1, \quad m_2 = 1+\mu_2, \quad \ldots, \quad m_i = 1+\mu_i.$$

En général, soit $H_\omega(\mu_2, \mu_3, \ldots, \mu_i)$ la somme des puissances et des produits homogènes de $\mu_2, \mu_3, \ldots, \mu_i$, et soit G_k le degré de l'osculant du système par rapport aux coefficients de la fonction U_k. Alors je dis que

$$\frac{1}{m_2 m_3 \ldots m_i} G_1 = H_{n-i}(\mu_2, \mu_3, \ldots, \mu_i) + 2H_{n-i-1}(\mu_2, \mu_3, \ldots, \mu_i)\,\mu_1 + 3H_{n-i-2}(\mu_2, \mu_3, \ldots, \mu_i)\,\mu_1^2 + \ldots + (n-i)\,H_1(\mu_2, \mu_3, \ldots, \mu_i)\,\mu_1^{n-i-1} + (n-i+1)\,\mu_1^{n-i},$$

et on trouve de même les valeurs de $G_2, G_3, \ldots, G_i$.

Pour les *tact-invariants* $i = 2$, et le théorème devient

$$G_1 = m_2[\mu_2^{n-2} + 2\mu_2^{n-3}\mu_1 + 3\mu_2^{n-4}\mu_1^2 + \ldots + (n-1)\,\mu_1^{n-2}],$$
$$G_2 = m_1[\mu_1^{n-2} + 2\mu_1^{n-3}\mu_2 + 3\mu_1^{n-4}\mu_2^2 + \ldots + (n-1)\,\mu_2^{n-2}],$$

ou, si l'on veut,

$$G_1 = m_2\frac{\mu_2^n - n\mu_2\mu_1^{n-1} + (n-1)\,\mu_1^n}{(\mu_1 - \mu_2)^2},$$

$$G_2 = m_1\frac{\mu_1^n - n\mu_1\mu_2^{n-1} + (n-1)\,\mu_2^n}{(\mu_1 - \mu_2)^2}.$$

Si $n = 3$,

$$G_1 = m_2[(m_2 - 1) + 2(m_1 - 1)] = m_2(m_2 + 2m_1 - 3), \qquad G_2 = m_1(m_1 + 2m_2 - 3):$$

c'est le cas du contact de deux courbes. Quand $n = 4$, c'est-à-dire qu'on veut trouver le degré de la condition pour le contact de deux surfaces, on trouve

$$G_1 = m_2(m_2^2 + 2m_1m_2 + 3m_1^2 - 4m_2 - 8m_1 + 4).$$

Pour trouver les degrés de la condition de rencontre en deux points consécutifs de trois surfaces, il faut prendre $i = 3$, $n = 4$; alors on trouve

$$G_1 = m_2m_3(m_2 + m_3 + 2m_1 - 4).$$

Pour le cas des polaires réciproques, on a

$$i = 2, \quad m_1 = m, \quad m_2 = 1,$$

et on retombe sur les résultats connus pour ce cas. Si on suppose dans le cas général $m_1 = m_2 = \ldots = m_i$, on obtient pour le degré de l'osculant, dans un système quelconque de coefficients,

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-i+1)}{1\,.\,2\ldots i}\,m^{i-1}(m-1)^{n-i}.$$

Pour mettre en plein jour la véritable identité de nature de ce genre compréhensif des osculants, je ferai l'extension à une classe de ces fonctions d'un théorème bien connu pour le discriminant de deux fonctions.

On sait bien que le discriminant du produit de deux fonctions homogènes en x et y est égal au produit de leurs discriminants multiplié par le carré de leur résultant. Ainsi, en se servant de Ω comme le symbole universel de l'osculation et supposant F et F' ces deux fonctions, on peut écrire

$$\Omega(FF') = \Omega F \times \Omega F' \times [\Omega(F, F')]^2.$$

Remarquons bien qu'on ne peut pas étendre ce théorème dans sa forme actuelle à des fonctions de plus de deux variables, car quand F, F' sont des fonctions de 3 ou un plus grand nombre de variables, on a identiquement

$$\Omega(FF') = 0.$$

Or, considérons $F_1, F_2, \ldots, F_i, F_i'$, $(i+1)$ fonctions de $(i+1)$ variables; j'énonce le théorème suivant:

$$\begin{aligned} &\Omega(F_1F_2\ldots F_{i-1}F_iF_i') \\ &= \Omega(F_1, F_2, \ldots, F_{i-1}, F_i) \times \Omega(F_1, F_2, \ldots, F_{i-1}, F_i') \\ &\times [\Omega(F_1, F_2, \ldots, F_i, F_i')]^2, \end{aligned}$$

où on peut remarquer que le dernier des trois facteurs est le carré d'un résultant. De plus, j'affirme que si les F deviennent fonctions de plus de $(i+1)$ variables, la quantité

$$\Omega(F_1F_2\ldots F_{i-1}F_iF_i')$$

s'évanouit identiquement. Mais je passe outre à un autre théorème sur les discriminants d'une fonction vue comme un *quantic* de quantics dont j'ai eu occasion de me servir dans quelques recherches récentes sur le théorème de Newton pour la découverte des racines imaginaires.

Soit F une fonction rationnelle homogène et entière du degré m en ϕ et ψ, ϕ et ψ étant elles-mêmes fonctions rationnelles homogènes et entières du degré μ en x et y. Servons-nous du symbole D pour désigner *discrimination* par rapport à x, y, et de D' pour désigner la même chose par rapport à ϕ, ψ; R sera le symbole du résultant par rapport à x, y, et J représentera la fonction *jacobienne*

$$\frac{d\phi}{dx}\frac{d\psi}{dy} - \frac{d\phi}{dy}\frac{d\psi}{dx}.$$

Alors je trouve que

$$D(F) = [R(\phi, \psi)]^{m^2-2m}[D'(F)]^{\mu}R(F, J).$$

Dans le cas où ϕ, ψ sont des fonctions linéaires de x, y, $R(F, J)$ devient égale à $[R(\phi, \psi)]^m$, et on retombe sur la formule connue pour les transformations linéaires

$$D_{x,y}F = [R(\phi, \psi)]^{m^2-m}D_{\phi,\psi}F.$$

Quand F est une fonction symétrique par rapport à x, y, F sera une fonction homogène et entière de (x^2+y^2) et de xy, dont la jacobienne a pour racines $\frac{x}{y}=\pm 1$, et conséquemment on voit que son discriminant prend la forme

$$I^2 F(1, 1) \,.\, F(1, -1).$$

Or, pour généraliser le théorème, soient F_1, F_2, ..., F_{i-1}, des fonctions homogènes et entières des degrés m_1, m_2, ..., m_{i-1} des i quantités ϕ_1, ϕ_2, ..., ϕ_i, dont chacune est une fonction homogène et entière de degré μ en x_1, x_2, ..., x_i. Servons-nous de Ω pour exprimer osculation par rapport à $x_1, x_2, \ldots, x_i$, Ω' pour exprimer la même chose par rapport à ϕ_1, ϕ_2, ..., ϕ_i, de J pour exprimer la jacobienne de ϕ_1, ϕ_2, ..., ϕ_i par rapport à x_1, x_2, ..., x_i, et soit

$$M=(m_1+m_2+\ldots+m_{i-1}-i)\,(m_1 m_2 \ldots m_{i-1}).$$

Alors on aura l'identité suivante:

$$\Omega\,(F_1, F_2, \ldots, F_{i-1})$$
$$=[\Omega\,(\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_i)]^M \,.\, [\Omega'\,(F_1, F_2, \ldots, F_{i-1})]^{\mu^{i-1}} \,.\, \Omega\,(F_1, F_2, \ldots, F_{i-1}, J).$$

Il me semble qu'on peut reconnaître ici l'approche de la véritable aurore de cette science des formes dont on ne voit qu'une phase bornée et passagère dans la théorie des transformations linéaires. Les actions mutuelles des formes, les unes sur les autres, constituant une espèce de chimie algébrique, me paraît le vrai but de cette science naissante.

P.S. Il n'est pas inutile de remarquer qu'on peut donner une définition des osculants qui montre d'une manière immédiate leur identité avec les discriminants. Soient U_1, U_2, ..., U_i, i fonctions homogènes rationnelles et entières de n variables, et soit R le résultat de l'élimination de $(i-1)$ quelconques des variables entre les équations

$$U_1=0,\ U_2=0,\ \ldots,\ U_i=0.$$

Alors l'osculant du système donné de fonctions U sera contenu comme facteur dans le discriminant de R. De même on peut démontrer que si on combine ensemble $i-k$ des équations $U=0$ et si on prend $(k+1)$ de telles combinaisons, et si pour chaque combinaison on forme un résultant en éliminant les mêmes $i-k-1$ variables, l'osculant du système donné sera contenu comme facteur dans l'osculant de ces $(k+1)$ résultants.