68.

SUR UNE EXTENSION DE LA THÉORIE DES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES.

[*Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, LVIII. (1864), pp. 689—691.]

QUELQUES recherches que j'ai faites tout récemment sur la règle donnée sans démonstration par Newton dans l'*Arithmetica universalis* (voir le chapitre *De resolutione æquationum*), pour trouver une limite inférieure au nombre de racines imaginaires d'une équation, m'ont conduit forcément à reconnaître l'existence d'un nouveau et très-intéressant genre d'équations algébriques qui ont exactement le même degré de généralité que les équations ordinaires et jouissent de propriétés parfaitement analogues à celles de ces dernières.

Ce sont les équations pour lesquelles, en partant des deux extrémités de la fonction égalée à zéro, les coefficients se composent, deux à deux, de quantités conjuguées de la forme

$$\lambda + i\mu, \quad \lambda - i\mu$$

respectivement, sauf (pour les équations de degré pair) le coefficient central qui reste seul et nécessairement réel.

Une telle équation peut se mettre sous la forme

$$U + iV = 0,$$

et, en supposant que tout facteur algébrique commun à U et V a été préalablement chassé, elle peut être nommée équation conjuguée. Les équations conjuguées ainsi définies ne peuvent contenir ni racines réelles ni paires de racines imaginaires de la forme

$$\rho e^{i\theta}, \quad \rho e^{-i\theta};$$

mais néanmoins leurs racines, comme celles des équations ordinaires, se diviseront en deux classes, c'est-à-dire classe de racines solitaires et classe de racines associées. Ces deux classes seront chacune du même ordre de généralité. Les racines solitaires seront quantités complexes avec l'unité pour module, c'est-à-dire de la forme $e^{i\theta}$; les racines associées seront quantités complexes dont le rapport est réel et les modules réciproques, c'est-à-dire de la forme

$$\rho e^{i\theta}, \quad \frac{1}{\rho} e^{i\theta}.$$

Il va sans dire que les racines solitaires sont les analogues aux racines réelles, et que les racines associées sont les analogues aux racines imaginaires des équations ordinaires. Dans une forme conjuguée du degré n, comme dans une forme ordinaire du même degré, le nombre de paramètres sera évidemment $n+1$. Tous leurs invariants (sauf le facteur i pour quelques-uns) seront réels, et toutes leurs formes, invariants des dérivées, covariants, contre-variants, etc., seront, elles aussi, des formes conjuguées.

Les théorèmes et les propriétés fondamentales des équations ordinaires se reproduisent (sans exception) sous une forme convenablement modifiée dans la théorie des équations conjuguées; je cite comme exemples la règle pour connaître si le nombre des racines réelles renfermées entre deux quantités réelles est pair ou impair, la liaison de position entre les racines réelles des équations et celles de leurs dérivées différentielles, les théorèmes pour reconnaître le nombre ou une limite au nombre des racines réelles, et en particulier la règle de Sturm et la règle merveilleuse et jusqu' aujourd'hui non démontrée de Newton. Je dois ajouter comme auxiliaire à ce genre de recherches un théorème qui donne une loi d'inertie pour les formes quadratiques (à un nombre quelconque de variables) assujetties à subir des substitutions qui peuvent être qualifiées comme étant substitutions conjuguées au lieu de réelles.

Il n'est pas sans intérêt de faire remarquer que, de même que les racines des équations ordinaires peuvent être représentées géométriquement au moyen de points solitaires situés sur une ligne droite, et par des points associés en couples qui se trouvent deux à deux et à distances égales sur les deux côtés de cette ligne, de sorte que ces derniers points constituent, pour ainsi dire, des images optiques les uns aux autres par rapport à la ligne, de même les racines géométriquement représentées des équations conjuguées se divisent en des points simples situés sur la circonférence d'un cercle dont le rayon est l'unité, et des points qui se trouvent deux à deux à des distances réciproques du centre sur les mêmes rayons, et qui constituent ainsi, pour me servir du langage de M. William Thomson, des images électriques les uns des autres. Ces principes auront prochainement leur développement dans un supplément au Mémoire sur le théorème de Newton déjà cité, que j'ai lu récemment devant la Société Royale de Londres.