67.

THÉORÈME SUR LA LIMITE DU NOMBRE DES RACINES RÉELLES D'UNE CLASSE D'ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES.

[*Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, LVIII. (1864), pp. 494, 495.]

SOIENT $u_1, u_2, \ldots, u_n$ des fonctions linéaires d'une seule variable, à coefficients réels, et supposons qu'on ait l'équation

$$\lambda_1 u_1^{2i} + \lambda_2 u_2^{2i} + \ldots + \lambda_n u_n^{2i} = 0\,;$$

il est évident que si tous les coefficients $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ portent les mêmes signes, le nombre des racines réelles est nul.

En général, supposons que le nombre des signes de même nom soit r, et de nom opposé soit s. Si r est égal ou moindre de s, on peut parler de r comme étant le nombre inférieur des signes semblables de la série $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$; et alors on peut affirmer que le nombre des racines réelles dans l'équation donnée ne peut jamais excéder le double du nombre inférieur de signes semblables dans ses coefficients λ.

Je crois que cette proposition est nouvelle, mais elle n'est qu'une conséquence très-particulière du théorème plus spécifique que voici:

Soient $c_1, c_2, \ldots, c_n$ une série croissante ou décroissante composée avec des quantités réelles, et soit donnée l'équation

$$\lambda_1 (x + c_1)^m + \lambda_2 (x + c_2)^m + \ldots + \lambda_n (x + c_n)^m = 0.$$

Formons la suite $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}, \lambda_n, (-1)^m \lambda_1$: je dis que le nombre des racines réelles dans l'équation donnée ne peut pas excéder *le nombre de variations de signe* dans cette suite, et comme corollaire on déduit aisément que ce nombre dans tous les cas ne peut pas excéder le double du nombre inférieur de signes semblables quand m est pair, ni ce double augmenté de l'unité quand m est impair.

Il est bon de remarquer que le maximum spécifique du nombre des racines réelles donné par la suite *déterminée* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, (-1)^m \lambda_1$ *ne change pas* quand on transforme l'équation donnée en effectuant une substitution homographique réelle quelconque sur la variable x, de sorte qu'on peut dire que chaque *maximum spécifique* est un nombre jouant le rôle d'*invariant*, ce qui n'a pas lieu quand on se sert de la méthode ordinaire pour limiter le nombre des racines réelles de $fx = 0$, en considérant le nombre des racines imaginaires de $f'x = 0$.