57.

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES. ADDITION À UNE NOTE INSÉRÉE DANS LE COMPTE RENDU DE LA SÉANCE PRÉCÉDENTE SUR UNE FORME NOUVELLE D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ET INTÉGRABLES.

[*Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, LIV. (1862), pp. 170—174.]

En se rappelant la forme du coefficient différentiel de $D_x{}^i y$ par rapport à x que j'ai donnée dans la Note indiquée ci-dessus*, il est aisé de voir qu'on peut arriver, par une méthode directe, à la solution de l'équation

$$D_x{}^i y = Le^{\lambda x} \tag{1}$$

en se servant de l'équation auxiliaire

$$y_i - \lambda y_{i-1} + \mu y_{i-2} + \nu y_{i-3} \ldots + \omega y = 0, \tag{2}$$

$\mu, \nu, \ldots, \omega$ étant des constantes arbitraires.

En prenant, par exemple, $i = 3$, on voit qu'en supposant l'équation $y_3 - \lambda y_2 + \mu y_1 + \nu y = 0$ satisfaite, le déterminant

$$\begin{vmatrix} y, & y_1, & y_2 \\ y_1, & y_2, & y_3 \\ y_2, & y_3, & y_4 \end{vmatrix} \text{ deviendra égal à } \frac{1}{\lambda} \begin{vmatrix} y, & y_1, & y_2 \\ y_1, & y_2, & y_3 \\ y_3, & y_4, & y_5 \end{vmatrix};$$

car, au lieu de y_2, y_3, y_4, dans la dernière ligne du premier de ces déterminants, on peut alors substituer respectivement $\frac{1}{\lambda} y_3, \frac{1}{\lambda} y_4, \frac{1}{\lambda} y_5$, tout simplement.

Donc $\frac{d}{dx}(D_x{}^3 y)$ devient égal à $\lambda D_x{}^3 y$, et l'équation $D_x{}^3 y = Le^{\lambda x}$ peut être satisfaite par l'intégrale de l'équation (2) en déterminant convenablement

[* p. 310 above.]

les rapports entre les constantes arbitraires qui y figurent. De même on voit, en général, que l'intégrale de $D_x^i y = Le^{\lambda x}$ sera

$$y = a_1 e^{\alpha_1 x} + a_2 e^{\alpha_2 x} + \dots + a_i e^{\alpha_i x} \tag{3}$$

avec les conditions
$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_i = \lambda, \tag{4}$$

$$a_1 a_2 \dots a_i (\alpha_1 - \alpha_2)^2 (\alpha_1 - \alpha_3)^2 \dots (\alpha_{i-1} - \alpha_i)^2 = L. \tag{5}$$

Rien n'empêche de prendre un nombre quelconque des α et d'en faire différer les valeurs infiniment peu les unes des autres ; on peut aussi, en général, former plusieurs groupes distincts de cette espèce. En agissant de cette façon, on arrive, par une analyse facile à retrouver et par le moyen d'un lemme que j'exposerai tout à l'heure, à des formes spéciales (pour ne pas dire singulières) de l'équation (3), dont voici le type le plus général :

$$y = Xe^{\alpha x} + X_1 e^{\alpha_1 x} + \dots \tag{6}$$

où
$$X = ax^{n-1} + bx^{n-2} \dots + l,$$

$$X_1 = a_1 x^{n_1 - 1} + b_1 x^{n_1 - 2} \dots + l_1,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

avec les conditions suivantes :

$$\Sigma n = i, \tag{7}$$

$$\Sigma \alpha n = \lambda, \tag{8}$$

$$\Gamma n \,.\, a^n \,.\, \Gamma n_1 \,.\, a_1^{n_1} \,.\, \Gamma n_2 \,.\, a_2^{n_2} \dots (\alpha - \alpha_1)^{2nn_1} (\alpha - \alpha_2)^{2nn_2} (\alpha_1 - \alpha_2)^{2n_1 n_2} \dots = L. \tag{9}$$

Le nombre total de ces formes (l'intégrale générale y comprise) sera le nombre des partitions indéfinies du nombre i ; le nombre de ces formes qui ne doivent contenir qu'un nombre donné $2i - 2 - \omega$ de constantes arbitraires sera le nombre de partitions de i en $i - \omega$ parties, lequel, quand ω n'excède pas $\frac{i}{2}$, est identique avec le nombre des partitions indéfinies de ω.

Le lemme dont il a été question est qui sert pour obtenir l'équation (9) est le suivant :

Si on a un système de n équations de la forme

$$\lambda_1^{\omega} x_1 + \lambda_2^{\omega} x_2 + \dots + \lambda_n^{\omega} x_n = p_{\omega} \quad \text{où} \quad \omega = 0, 1, 2, \dots, n-1, \tag{10}$$

alors, quand les λ deviennent tous infiniment petits, la fonction

$$(\lambda_1 - \lambda_2)^2 (\lambda_1 - \lambda_3)^2 \dots (\lambda_{n-1} - \lambda_n)^2 x_1 x_2 \dots x_n,$$

reste finie et aura pour limite une valeur indépendante de $p_0, p_1, \dots, p_{n-2}$, savoir :

$$(-)^{n \frac{n-2}{2}} p^n{}_{n-1}.$$

J'ajoute que la même méthode suffit également pour trouver et l'intégrale générale et les intégrales spéciales d'une équation d'une forme plus générale, à savoir l'équation

$$D_x{}^i y = \phi\,(P_1, P_2, \ldots, P_{i-1})\, e^{\lambda x},$$

ϕ exprimant une forme de fonction quelconque donnée, et les P étant les fonctions algébriques de $y, y_1, y_2, \ldots, y_{2i-2}$, qui satisfont identiquement aux $(i-1)$ équations

$$y_{i+\omega-2}P_1 + y_{i+\omega-3}P_2 + \ldots + y_\omega P_{i-1} = \lambda y_{i+\omega-1} - y_{i+\omega}, \tag{11}$$

où $\omega = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ i-2.$

Sans insister là-dessus, je passe à la considération plus intéressante de certaines équations différentielles qu'on peut immédiatement réduire à une forme intégrable par le moyen de la formule établie à la fin de la Note précédente, c'est-à-dire

$$D_x{}^{i-1}y \,.\, D_x{}^{i+1}y = D_x{}^i y \,.\left(\frac{d}{dx}\right)^2 D_x{}^i y - \left(\frac{d}{dx}\, D_x{}^i y\right)^2. \tag{12}$$

Pour plus de brièveté, je me servirai du symbole λ pour exprimer $\left(\frac{d}{dx}\right)^2$ log, de sorte que la loi d'opération de λ sur des produits sera identique avec celle de log, c'est-à-dire qu'on aura

$$\lambda\,(uvw\ldots) = \lambda u + \lambda v + \lambda w + \ldots.$$

Je me servirai aussi du symbole D_i pour exprimer ce que j'ai précédemment désigné par $D_x{}^i y$; on aura ainsi par la formule (12)

$$yD_3 = (D_2)^2\,\lambda D_2,\quad D_2 = y^2\lambda y\,;$$

donc
$$D_3 = y^3\,(\lambda y)^2\,\lambda\,(y^2\lambda y) = y^3\,(\lambda y)^2\,(2\lambda y + \lambda^2 y).$$

Ainsi on voit que la solution de l'équation $D_3 = y^3\phi\left(\frac{D_2}{y^2}\right)$ dépendra de celle de l'équation

$$(\lambda y)^2\,(\lambda^2 y + 2\lambda y) = \phi\,(\lambda y)\,; \tag{13}$$

ou bien (en mettant $\lambda y = u$, ce qui donne $y = e^{\int\int u dx^2}$) pourra être ramenée à celle de l'équation

$$u^2\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{u'}{u}\right) + 2u\right] = \phi u. \tag{14}$$

Cette dernière équation, on le voit immédiatement, aura pour intégrale

$$x = \int \frac{du}{\sqrt{\left\{2u^2 \int du \left(\frac{\phi u}{u^3}\right) - 4u^3\right\}}}\,. \tag{15}$$

Ainsi on voit que si

$$\phi u = A + Bu + Du^3 + Eu^4, \tag{16}$$

x deviendra une fonction elliptique de u, et de même que si

$$\phi u = \alpha u + \beta u^{\frac{3}{2}} + \delta u^{\frac{5}{2}} + \epsilon u^3, \tag{17}$$

x deviendra une fonction elliptique de $u^{\frac{1}{2}}$.

Ainsi l'équation

$$D_3 = y^3 \phi\left(\frac{D_2}{y^2}\right) \tag{18}$$

sera intégrable par le moyen de fonctions elliptiques, toutes les fois que l'une ou l'autre des suppositions (16), (17) aura lieu. En prenant successivement $\phi u = A$, $\phi u = A^{\frac{1}{2}} u^{\frac{3}{2}}$, on obtient deux équations que je signalerai (quoiqu'elles ne soient que des cas particuliers) à cause de leur grande simplicité; ce sont les équations

$$D_3 = Ay^3, \tag{19}$$

$$D_3{}^2 = AD_2{}^3, \tag{20}$$

où $\quad D_2 = yy'' - y'^2$ et $D_3 = yy''y^{\text{IV}} - yy'''^2 - y'^2 y^{\text{IV}} - y''^3 + 2y'y''y'''$.

Considérons d'abord l'équation (19); en faisant $\xi = A^{\frac{1}{6}} x$, elle prend la forme

$${}'D_3 = y^3 \tag{21}$$

(${}'D_3$ ne différant de D_3 qu'en ce que ξ y remplace x). Alors par la formule (15) nous aurons $y = e^{\int\int u dx^2}$;

$$\xi + \gamma = \int \frac{du}{\sqrt{(-1 + \lambda_1 u^2 - 4u^3)}} = -\frac{1}{2^{\frac{2}{3}}} \int \frac{dv}{\sqrt{(-1 + \lambda v^2 + v^3)}}$$

$$= -\frac{1}{2^{\frac{2}{3}}} \int \frac{dv}{\sqrt{\left\{(2c + 4c^2 v + v^2)\left(-\frac{1}{2c} + v\right)\right\}}},$$

c et γ étant des constantes arbitraires. En écrivant

$$w = 2c^2 + v = 2c^2 - 2^{\frac{2}{3}} u, \quad C = -\sqrt{(4c^4 - 2c)}, \quad C_1 = 2c^2 + \frac{1}{2c},$$

on obtient immédiatement (en se servant de la substitution $w = C \cos 2\theta$)

$$\frac{C - 2c^2 + 2^{\frac{2}{3}} u}{2C} = \sin^2 \operatorname{am}\left(2^{-\frac{1}{3}} \sqrt{(C + C_1)}\,(\xi + \gamma),\ \sqrt{\frac{2C}{C + C_1}}\right); \tag{22}$$

ce qui donne

$$\log y = 2^{\frac{1}{3}} C \int\int dx^2 \left[\sin^2 \operatorname{am}\left\{2^{-\frac{1}{3}} \sqrt{\left(\frac{C + C_1}{A^{\frac{1}{3}}}\right)}\,(x + \gamma'),\ \sqrt{\frac{2C}{C + C_1}}\right\}\right] + (2c^2 - C)\frac{x^2}{2^{\frac{8}{3}}}.$$

Cette équation est l'intégrale complète de l'équation donnée $D_3 = Ay^3$.

Maintenant considérons l'équation (20), c'est-à-dire $D_3{}^2 = AD_2{}^3$. La formule (15) donne

$$y = e^{\iint dx^2 u}\,;\quad x + \gamma = \int \frac{du}{\sqrt{(-4A^{\frac{1}{2}}u^{\frac{3}{2}} + \lambda_1 u^2 - 4u^3)}},$$

ce qui, en mettant $u = \dfrac{1}{v^2}$, devient

$$x + \gamma = \int \frac{-dv}{\sqrt{(-A^{\frac{1}{2}}v^3 + \lambda v^2 - 1)}}. \tag{23}$$

En supposant $A = 1$ la somme en (23) devient identique avec celle qui a été trouvée plus haut en déterminant la valeur de $\xi + \gamma$, d'où il sera facile de conclure la valeur de log y qui contiendra la reciproque d'une double somme du carré d'une fonction linéaire du $\sin^2$ am d'une fonction linéaire de x, et quant au cas général où A a une valeur quelconque, il se réduit au cas précédent en écrivant $\xi = A^{\frac{1}{6}}x$.

Il existe encore une infinité d'équations d'une forme symétrique et analogue à celle des équations (19) et (20) auxquelles on peut appliquer une pareille méthode, non pas, il est vrai en général, pour les intégrer complétement, mais au moins pour en abaisser le degré de 4 unités. C'est toujours l'équation fondamentale (12) qui sert à effectuer cette réduction.