40.

NOTE SUR L'INVOLUTION DE SIX LIGNES DANS L'ESPACE.

[*Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, LII. (1861), pp. 815—817.]

DÉSIGNONS six droites par les chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6. Prenons les équations de chacune de ces lignes sous la forme la plus générale (en nous servant de coordonnées tétraédrales). Ainsi, soit la ligne i définie par les équations

$$a_ix + b_iy + c_iz + d_iu = 0, \quad \alpha_ix + \beta_iy + \gamma_iz + \delta_iu = 0\,;$$

et de même la ligne j par les équations

$$a_jx + b_jy + c_jz + d_ju = 0, \quad \alpha_jx + \beta_jy + \gamma_jz + \delta_ju = 0,$$

et sous-entendons par i, j le déterminant

$$\begin{vmatrix} a_i, & b_i, & c_i, & d_i \\ \alpha_i, & \beta_i, & \gamma_i, & \delta_i \\ a_j, & b_j, & c_j, & d_j \\ \alpha_j, & \beta_j, & \gamma_j, & \delta_j \end{vmatrix}.$$

Cela étant fait, formons le déterminant (que je nommerai Δ_6):

$$\begin{vmatrix} & 1,2 & 1,3 & 1,4 & 1,5 & 1,6 \\ 2,1 & & 2,3 & 2,4 & 2,5 & 2,6 \\ 3,1 & 3,2 & & 3,4 & 3,5 & 3,6 \\ 4,1 & 4,2 & 4,3 & & 4,5 & 4,6 \\ 5,1 & 5,2 & 5,3 & 5,4 & & 5,6 \\ 6,1 & 6,2 & 6,3 & 6,4 & 6,5 & \end{vmatrix}.$$

Si les six droites 1, 2, 3, 4, 5, 6 sont en involution, on aura

$$\Delta_6 = 0\,;$$

et réciproquement si $\Delta_6 = 0$, les six lignes seront en involution.

En nous bornant aux cinq chiffres 1, 2, 3, 4, 5, on peut former un déterminant analogue à Δ_6 (disons Δ_5) qui ne contiendra que cinq lignes et cinq colonnes, et qui sera un déterminant mineur du premier ordre du grand déterminant Δ_6. De même pour Δ_4, etc.

Si $\Delta_6 = 0$ et $\Delta_5 = 0$ (sans que *tous* les déterminants mineurs du premier ordre de Δ_6 soient zéro), les cinq lignes 1, 2, 3, 4, 5 formeront un système en involution entre elles. Si tous les déterminants mineurs du premier ordre sont zéro (ce qui ne suppose qu'une seule condition de plus, c'est-à-dire trois conditions en tout), les six lignes de 1 à 6 seront toutes rencontrées par la même droite.

Si $\Delta_6 = 0$, $\Delta_5 = 0$, $\Delta_4 = 0$, alors en général les quatre lignes de 1 à 4 seront en involution entre elles; je n'insisterai pas ici sur les cas possibles d'exception; j'ajouterai seulement que si $\Delta_5 = 0$ sans autre condition, les cinq lignes de 1 à 5 seront toutes rencontrées par la même droite. Si $\Delta_4 = 0$, sans autre condition, les quatre lignes de 1 à 4 n'admettront qu'*une seule transversale* qui les rencontre toutes quatre, au lieu des deux qui existent ordinairement pour quatre droites dans l'espace. C'est M. Cayley qui le premier a fait cette dernière remarque. De plus il a trouvé indépendamment un déterminant qui est égal à la racine carrée de Δ_6 et qui conséquemment sert tout aussi bien que Δ_6 pour définir l'involution.

L'espace me manque pour produire ici cet autre déterminant, mais je dois ajouter que c'est d'une grande utilité dans l'étude analytique de la théorie d'involution.

Je prie qu'il me soit permis de profiter de cette occasion pour rectifier une erreur qui s'est glissée dans l'énoncé d'un théorème donné dans les *Comptes rendus* (26 janvier 1861). Dans le second paragraphe de la Note [p. 229 above], au lieu de "pour numérateurs le cycle toujours répété...par rapport à r," lisez "pour numérateurs le cycle toujours répété des nombres entiers congrus* à $\frac{1}{p}, \frac{2}{p}, \frac{3}{p}, \ldots, \frac{r}{p}$ et compris parmi les nombres $1, 2, 3, \ldots, r$." Et plus bas au lieu de "mais à cause... $10k+2$" lisez: "mais, à cause de $7 \times 3 \equiv 1 \pmod 5$,

$$\equiv \frac{3}{p-1} + \frac{1}{p-2} + \frac{4}{p-3} + \frac{2}{p-4} + \frac{5}{p-5} + \ldots$$

quand p est de la forme $10k+7$."

[* mod. r.]