37.

ADDITION À LA NOTE INSÉRÉE DANS LE PRÉCÉDENT COMPTE RENDU.

[*Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, LII. (1861), pp. 212—214.]

DANS la Note que j'ai eu l'honneur de présenter lundi dernier à l'Académie et qui a été insérée au *Compte rendu*, j'ai fait connaître [p. 231 above] le résidu du nombre E_n par rapport au module p^{i+1}, pour le cas où n contient le facteur $(p-1)p^i$, p étant un nombre premier impair. Il restait à exprimer ce même résidu dans le cas de $p=2$, c'est-à-dire dans le cas où n contient le facteur 2^i. Je trouve alors que E_n est congru à 1 suivant le module 2^{i+1}.

Mais j'ai obtenu en même temps un autre théorème très-général et très-utile pour ce genre de calculs; voici en quoi il consiste. Si n et n' sont des nombres entiers différents de zéro, et que $2n$ et $2n'$ soient congrus suivant le module $(p-1)p^i$, on aura

1° $$(-)^n E_n \equiv (-)^{n'} E_{n'} \,(\text{mod}\ p^{i+1}),$$

lorsque p sera un nombre premier impair,

2° $$E_n = E_{n'} \,(\text{mod}\ 2^i),$$

lorsque l'on aura $p=2$, c'est-à-dire lorsque n et n' seront congrus par rapport à 2^{i-1} *.

Si l'on se rappelle que $E_1=1$ et que l'on combine la dernière partie de ce théorème avec celui qui se trouve énoncé plus haut, on arrive immédiatement à cette conséquence remarquable, que: Tout nombre d'Euler est de la forme $4k+1$. Cette loi si simple paraît avoir échappé à l'illustre inventeur de ces nombres puisque la valeur qu'il a donnée pour E_9 est de la forme $4k-1$. En se reportant aux théorèmes que j'ai obtenus, on ne peut guère commettre

* Un théorème tout à fait analogue doit avoir lieu pour les nombres de Bernoulli du 2^{me} ordre, c'est-à-dire pour les nombres qui multiplient $\frac{x^{2n-1}}{1.2\ldots 2n}$ dans le développement de $\frac{1}{e^x+1}$ en série.

d'erreurs, sans les reconnaître, dans le calcul des nombres E. Par exemple, en partant des quatre valeurs

$$E_1 = 1,\quad E_2 = 5,\quad E_3 = 61,\quad E_4 = 1385,$$

on peut affirmer à priori que E_9 appartient à toutes les formes linéaires

$$5k+1,\quad 11k+1,\quad 13k+9,\quad 16k+1,\quad 17k+1\,;$$

en outre, à cause de la forme du double 18 de l'indice 9, lequel contient les facteurs 6, 2 × 3, 18, on sait que E_9 appartient encore aux formes linéaires

$$7k-2,\quad 9k-2,\quad 19k-2.$$

La valeur 24048 79661 671 obtenue par Euler ne satisfait à aucune de ces huit conditions; celles-ci, au contraire, sont toutes vérifiées par la valeur 24048 79675 441 donnée par M. Rothe. Ainsi on peut non-seulement affirmer que la première valeur est erronée, mais encore on a tout lieu de croire à l'exactitude de la seconde, quoique M. Rothe ne l'ait pas justifiée en présentant les détails de ses calculs.

Je remarquerai, en terminant, que le théorème énoncé plus haut offre le moyen de reconnaître si un nombre premier donné p peut figurer comme facteur dans quelqu'un des termes de la suite indéfinie E, ou dans quelqu'un des termes de la suite $E \pm \alpha$, tirée de la première en augmentant ou en diminuant ses termes d'un même nombre donné α. Car si cette circonstance se présente, à l'égard de l'une de ces suites, p sera nécessairement facteur d'un au moins des $\frac{p-1}{2}$ premiers termes de cette suite, et même de l'un des $\frac{p-3}{2}$ premiers termes dans le cas de $\alpha = 0$. On reconnaît l'exactitude de ce dernier point en se rappelant que tous les nombres premiers $4k+1$ étant facteurs des nombres d'Euler, il n'y a lieu de considérer que les diviseurs $4k-1$; or, d'après le théorème de la Note précédente, $E_{\frac{p-1}{2}}$ ne peut être divisible par p quand ce nombre est de la forme $4k-1$. Par exemple, l'inspection des quatre premiers nombres d'Euler 1, 5, 61, 5 × 277, suffit pour démontrer qu'aucun des nombres de la suite indéfinie E n'est divisible par 3, 7 ou 11.

Des considérations analogues s'appliquent sans difficulté aux diviseurs p^i.