# 29.

## NOTE SUR CERTAINES SÉRIES QUI SE PRÉSENTENT DANS LA THÉORIE DES NOMBRES.

[*Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, L. (1860), p. 650.]

SOIT $E\left(\frac{p}{q}\right)$ le plus grand nombre entier contenu dans la fraction $\frac{p}{q}$, et faisons

$$F(p, q, k, l) = E\left(\frac{p}{q}\right) + E\left(2\frac{p}{q}\right) + \ldots + E\left(l\frac{q-1}{k}\frac{p}{q}\right),$$

en supposant $q-1$ divisible par $k$. Il existe entre trois fonctions quelconques $F$, qui ont les mêmes valeurs de $p, q, k$, mais où la quantité $l$ varie en restant moindre que $k$, l'équation algébrique suivante :

$$\frac{k-l'-l''}{(l-l')(l-l'')}F(p, q, k, l) + \frac{k-l''-l}{(l'-l'')(l'-l)}F(p, q, k, l') + \frac{k-l-l'}{(l''-l)(l''-l')}F(p, q, k, l'') = \frac{(p-1)(q-1)}{2k}.$$

Quand $l'+l''=k$, cette relation devient

$$F(p, q, k, l) - F(p, q, k, k-l) = (2l-k)\frac{(p-1)(q-1)}{2k},$$

ce qu'on peut vérifier par un procédé tout élémentaire. Il existe aussi entre les fonctions $F$, où $k$ et $l$ restent les mêmes, $p$ et $q$ étant changés entre eux, l'équation

$$F(p, q, k, l) + F(q, p, k, l) = \frac{l^2(p-1)(q-1)}{2k^2}.$$

Pour le cas de $l=1$, ce théorème a été déjà donné par Eisenstein, qui a exprimé alors la fonction $F$ par une série trigonométrique finie. Mais quel que soit $l$, je suis parvenu à exprimer d'une manière analogue cette fonction, et dans le même ordre d'idées, c'est également par une série trigonométrique que j'ai été amené à représenter les valeurs de $p'$ et $q'$, moindres que $p$ et $q$, satisfaisant à l'équation

$$p'q - q'p = 1,$$

valeurs qu'on obtient habituellement par le procédé du plus grand commun diviseur.