28.

THÉORIE DES NOMBRES.

(*Extrait d'une Lettre adressée à* M. HERMITE *par* M. SYLVESTER.)

[*Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, L. (1860), p. 489.]

LA somme $\sum_{i=1}^{i=\frac{q-1}{2}} E\left(i\frac{p}{q}\right)$ où $E(x)$ désigne, suivant l'usage, l'entier contenu dans la quantité x, et qui joue un si grand rôle dans la théorie des résidus quadratiques, peut se calculer complétement par la méthode suivante, plus simple et plus facile que celle d'Eisentein pour déterminer seulement si la somme est paire ou impaire. Je développe $\frac{p}{q}$ sous la forme d'une fraction continue avec ces conditions, que le nombre des quotients soit impair et que chaque quotient de rang impair après le premier soit pair, ce qu'on réalisera en faisant le premier quotient congru à p suivant le module 2. Soit donc ainsi :

$$\frac{p}{q} = a_0 + \cfrac{\epsilon_1}{a_1 + \cfrac{\epsilon_2}{a_2 + \cfrac{\vdots}{+\cfrac{\epsilon_{2\omega}}{a_{2\omega}}}}}.$$

Les quotients $a_2, a_4, \ldots, a_{2\omega}$ étant pairs, a_1, a_3, etc., quelconques, et ϵ_1, ϵ_2, etc., égaux à ± 1, on aura, en faisant $\lambda_i = \epsilon_1, \epsilon_2, \ldots \epsilon_i$,

$$\sum_{i=1}^{i=\frac{q-1}{2}} E\left(i\frac{p}{q}\right) = \frac{1}{8}\left[(p-2)\,q - \Sigma\,\{2\lambda_{2i-1} + (a_{2i}-2)\,\lambda_{2i}\}\right].$$

A cette proposition je joindrai la suivante qui en est une généralisation.

Soit k un diviseur quelconque de $q-1$; et supposons que dans le développement en fraction continue

$$\frac{p}{q} = a_0 + \cfrac{\epsilon_1}{a_1 + \cfrac{\epsilon_2}{a_2 + \cfrac{\vdots}{+\cfrac{\epsilon_{2\omega}}{a_{2\omega}}}}},$$

tous les quotients à partir de a_1 soient multiples de k, le premier a_0 étant congru à p module k; alors on aura

$$E\left(\frac{p}{q}\right) + E\left(2\frac{p}{q}\right) + \ldots + E\left(\frac{q-1}{k}\cdot\frac{p}{q}\right)$$

$$= \frac{(q-2)\,p + k\,(p-q) - \Sigma\,[k\lambda_{2i-1} + \{(k-1)\,a_{2i} - k\}\,\lambda_{2i}]}{2k^2}.$$

Les conditions énoncées seront toujours d'ailleurs possibles, si l'on a $k < 5$.