# 15.

## RECHERCHES SUR LES SOLUTIONS EN NOMBRES ENTIERS POSITIFS OU NÉGATIFS DE L'ÉQUATION CUBIQUE HOMOGÈNE À TROIS VARIABLES.

[*Annali di Scienze Matematiche e Fisiche* (Tortolini), VII. (1856), pp. 398—400.]

J'AI l'honneur de vous envoyer pour être inséré dans votre journal estimable, si vous les jugéz dignes, les énoncés de quelques théorèmes que j'ai trouvé dans mes recherches sur les solutions en nombres entiers positifs ou négatifs de l'équation cubique homogène à trois variables.

On sait selon *Fermat* que l'équation

$$x^3 + y^3 + z^3 = 0$$

n'est pas résoluble en nombres entiers.

On peut ajouter la même chose pour les équations

$$x^3 + y^3 + 2z^3 = 0,$$
$$x^3 + y^3 + 3z^3 = 0\,;$$

j'ajoute que l'équation

$$x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz = 0$$

est irrésoluble : aussi l'équation

$$2\,(x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz) = 27nxyz,$$

quand $$27n^2 - 8n + 4$$

est un nombre premier, est irrésoluble : aussi l'équation

$$4\,(x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz) = 27vxyz$$

est irrésoluble quand

$$27v^2 - 36v + 16$$

est un nombre premier.

De plus l'équation

$$x^3 + y^3 + Az^3 = Mxyz$$

est irrésoluble dans les circonstances suivantes.

Posons $$M^3 - 27A = \Delta^3\Delta',$$
où $\Delta'$ ne contient nul facteur cubique. Alors si $\Delta'$ est pair et ne contient nul nombre de la forme
$$f^2 + 3g^2,$$
et si $A$ est un nombre premier, l'équation est irrésoluble, excepté dans les cas que $\sqrt{\frac{-M}{A}}$ soit un nombre entier, et dans ce cas-là on peut donner la solution général de l'équation.

La même chose a lieu quand, $\Delta'$ restant assujétie aux mêmes conditions qu'auparavant, $A$ est une puissance d'un nombre premier de la forme $p^{3\omega\pm1}$.

La même chose a aussi lieu sans que $\Delta'$ soit pair, pourvu qu'il ne contient nul facteur $f^2 + 3g^2$, et que
$$A = 2^{3\omega\pm1}.$$
La même chose a lieu encore pourvu que $\Delta'$ ne contient nul nombre de la forme $f^2 + 3g^2$ avec les conditions suivantes:
$$\begin{cases} \frac{A}{2} = \text{un nombre premier de la forme } qi \pm 4, \\ \frac{M}{9} = \text{un nombre entier,} \end{cases}$$
ou
$$\begin{cases} \frac{A}{4} = \text{un nombre premier de la forme } qi \pm 2, \\ \frac{M}{18} = \text{un nombre entier,} \end{cases}$$

ou si $A$ étant un nombre premier on a $A$, $B$ respectivement de la forme
$$qn + 2,\ qn + 6,$$
ou bien de la forme $$qn - 2,\ qn - 6,$$
ou bien de la forme $$qn + 4,\ qn + 3,$$
ou de la forme $$qn - 4,\ qn - 3,$$
ou de la forme $$qn \pm 3,\ qn.$$