Zasady rachunku iteracyjnego.

1. Iteracje funkcji i ich znakowanie.

Wzór $y=f(x)$ wskazuje, że na zmiennej *x* wykonano pewne działanie *f.*

Działanie to mogę powtórzyć, otrzymam w wyniku wzór $z=f(y)$.

Działanie to mogę powtórzyć, otrzymam w wyniku wzór $t=f(z)$ i t. d.

Celem lepszego zorjentowania się zastosujemy odpowiednią pisownię.

Napiszmy szereg wzorów

$$z_1=f(z)=f(z)$$

$$z_2=f(z_1)=ff(z)$$

$$z_3=f(z_2)=fff(z)$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$z_n=f(z_{n-1})=fff\ldots.ff(z).$$

Wzory te wskazują, że do zmiennej *z* działanie *f* zastosowano *n* razy, innemi słowy na zmiennej *z* działanie *f* wykonano *n* razy, powtórzono *n* razy, iterowano *n* razy.

Otrzymany wynik nazywamy rc-tą iteracją zmiennej *z* przy podstawowym działaniu /, albo też n-tą iteracją funkcji AO-

Otrzymany wynik jest widocznie jakąś funkcją wykładnika w, wskazującego, ile razy działanie *f* iterowano; argument *z,* na którym działanie *f* w-krotnie iterowano.

Otrzymany wynik zależy również od tego, jakie działanie było iterowane.

Wzór: „z_n jest n-tą iteracją zmiennej *z* przy podstawie /*“, oznaczamy symbolem

$$z_n = I^{n}_{f(t)}(z)$$

przyczym wykładnik *n* piszemy u góry, u dołu zaś podstawowe działanie, t. j. przejście np. od zmiennej *t* do zmiennej /*(/) (użyliśmy innej litery, aby uniknąć nieporozumień). Można też posługiwać się symbolem skróconym

*«=/■»(*)

powszechnie dziś przyjętym.

2. Iteracje najprostszych funkcji.

Wiemy, że n-ta iteracja funkcji *f(z)* jest jakąś funkcją zarówno argumentu *z,* jak wykładnika n, nie wiemy jednak w ogólności, jaką mianowicie funkcją. Zakres wyrachowalnych iteracji jest bardzo szczupły. Należą do nich następujące przykłady zasadnicze.

I. Iteracje funkcji f(z)=z~\-a.

Ze wzorów

$$z_1 = z + a = z + a$$
$$z_2 = z_1 + a = z + 2a$$
$$z_3 = z_2 + a = z + 3a$$
$$z_4 = z_3 + a = z + 4a$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

wnosimy w drodze indukcyi, że

$$z_n = z + na\,.$$

A zatym: Jeżeli $z_1 = z + a$, to $z_n = z + na$. łnnemi słowy: n-tą i t e-racją funkcji $f(z) = z + a$, jest funkcja $f_n(z) = z + na$.

II. Iteracje funkcji f(z)—az. —

Ze wzorów

$$z_1 = az = az$$
$$z_2 = az_1 = a^2 z$$
$$z_3 = az_2 = a^3 z$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$,\ ,\ ,\ ,\ ,\ ,\ ,$$

wnosimy w drodze indukcji, że

$$z_n=a^n z\,.$$

A zatym: Jeżeli $z_v=az_y$ to $z_n=za^n z$. Innemi słowy w-tą iteracją funkcji $f\{z)=az$, jest funkcja $f_n(z)={}_a{}^n z$.

III. Iteracje funkcji f{z)=^.

Z wzorów $2_1=2^r$, ^2=^i==^r3, ²'s=^=2T'.... wnosimy w drodze indukcji $z_n=z^{rn}$.

A zatym: Jeżeli $z_i=z^r{}_y$ to $z_n=z^{r^n}$. Innemi słowy: n-tą iteracją funkcji $f(z) = z^r$, jest funkcja $f_n(z)=z^{rn}$.

IV. Iteracje funkcji f(z)=az-}-b.

Ze wzorów

$$\begin{aligned}
z_1&=az\;+b\\
z_2&=az_1+b=a^2z+(a+1)b\\
z_3&=az_2+b=a^3z+(a^2+a+1)b\\
z_4&=az_3+b=a^4z+(a^3+a^2+a+1)b\\
&\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

wnosimy w drodze indukcji, że

$$z^n=a^nz+(a^{n-1}+a^{n-2}+\ldots+a+1)b$$

czyli

$$z_n=a^nz+\frac{a^n-1}{a-1}\,b\,.$$

A zatym: J e ż e l i $z_1=az+b$, to $z_n=a^nz+\dfrac{a^n-1}{a-1}\,b$.

Innemi słowy, n-tą iteracją funkcji *f(z)—az-\-b* jest funkcja $f_n(z)=a^nz+\dfrac{a^n-1}{a-1}\,b$.

r. *Iteracje funkcji* $f(z)=az^r$.

Ze wzorów

$$\begin{aligned}
z_1&=az^r\\
z_2&=az_1^r=a^{r+1}z^{r^2}\\
z_3&=az_2^r=a^{r^2+r+1}z^{r^3}\\
z_4&=az_3^r=a^{r^3+r^2+r+1}z^{r^4}\\
&\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

wnosimy w drodze indukcji, że

$$z_n = a^{r^{n-1}+r^{n-2}+\dots+r+1} z^{r^n} = a^{\frac{r^n-1}{r-1}} z^{r^n}.$$

A zatym: Jeżeli $z_1 = az^r$, to $z_n = a^{\frac{r^n-1}{r-1}} z^{r^n}$. Innemi słowy: w-tą iteracją funkcji $f(z) = az^r$ jest funkcja $f_n(z) = a^{\frac{r^n-1}{r-1}} z^{r^n}$.

3. Zasada dodawania iteracji.

Twierdzenie 1. Jeżeli liczba A jest w-tą iteracją liczby *B* przy podstawie *f(z* liczba zaś Z? jest w-tą iteracją liczby *C* p r z y tejże podstawie /(^), to liczba 2 je'st (m-j-w)-tą iteracją liczby *O* przy tejże podstawie *f(z).*

A zatym: Jeżeli $A = f_m(B)$

$B = f_n(C)$

to $A = f_{m+n}(C)$.

Jakoż: $A = f_m(B) = f_m f_n(C) = \overbrace{f \dots f}^{m \text{ razy}} \overbrace{ff \dots f}^{n \text{ razy}} = \overbrace{f \dots fff \dots f}^{m+n \text{ razy}}(C) = f_{m+n}(C)$

a więc $A = f_{m+n}(C)$, co było do dow.

Twierdzenie 2. Złożenie dwu iteracji tej samej funkcji podstawowej o wykładnikach w i w jest iteracją tej samej funkcji podstawowej o wykładniku $m+n$.

A zatym $f_m f_n(z) = f_{m+n}(z)$.

Jest to twierdzenie zasadniczej wagi. Prowadzi ono do następujących wniosków:

1. Łączy rachunek iteracyjny z teorją grup.

Grupą wielu funkcji nazywamy taki układ funkcji, w którym złożenie d w u c h k t ó r y c h k o l w i e k funkcji jest nową funkcją, również do tego układu należącą.

Na mocy naszego twierdzenia o dodawaniu, wnosimy, że

Iteracje danej podstawy tworzą grupę funkcji.

Jakoż iteracje

$$f(z),\ f_2(z),\ f_3(z),\ f_4(z),\ f_5(z),\ f_6(z), \dots$$

tworzą taki szereg funkcji, w którym dodanie któryclikolwiek dwu, np.

$$f_2 f_4(z) = f_6(z),$$

daje trzecią funkcję, również do tego szeregu należącą.

W ten sposób rachunek iteracyjny staje jako jeden z członków rozległej dziedziny nauk matematycznych, ujętej wspólną nazwą Teorji Grup.

2. Prowadzi do zasady przemienności.

Twierdzenie 3. Iteracje tej samej funkcji podstawowej są funkcjami między sobą przemienne mi.

Jakoż
$$f_m f_n(z) = f_{m+n}(z) = f_{n+m}(z)$$
$$f_n f_m(z) = f_{n+m}(z) = f_{m+n}(z)$$
a więc
$$f_m f_n(z) = f_n f_m(z), \text{ co było do dow.}$$

Wniosek. Dwie funkcje wtedy i tylko wtedy mogą być iteracjami jednej i tej samej funkcji podstawowej, gdy są między sobą przemiennemi.

O dwu funkcjach *F(z)* oraz 0(2) wtedy tylko możemy powiedzieć, że są iteracjami jakiejś trzeciej funkcji cp(^), gdy spełniają warunek

$$F\Phi(z) = \Phi F(z).$$

Czy ten konieczny warunek jest także dostateczny — jest to kwestja otwarta...

Szczególną wartość ma ta zasada, gdy chodzi o iterowanie funkcji rozwiniętych na szeregi potęgowe —pozwala ona odnośne rachunki systematycznie przeprowadzić.

4. Zasada mnożenia iteracji.

Twierdzenie. Jeżeli funkcja *F(z)* jest m-tą iteracją funkcji 0(2), a funkcja 0(2) jest *n-tą* iteracją funkcji f(2), to funkcja *F(z)* jest m.n iteracją funkcji /‘(2).

Dowód. Jeżeli $F(z) = \Phi_m(z)$, zaś $\Phi(z) = f_n(z)$, to

$$F(z) = \Phi\Phi...\Phi(z) = f_n f_n \ldots f_n(z) = f_{n+n+\ldots+n}(z) = f_{mn}(z), \text{ a więc } F(z) = f_{mn}(z),$$

co było do dow.

II*niosek 1.* Jeżeli funkcje ^(2), oraz tp(2) s ą m-tą, względnie n-tą iteracją tej samej funkcji *f(z* to

$$\varphi_n(z) = \psi_m(z).$$

Nawzajem mamy

II*niosek 2.* Dwie funkcje ^(2) oraz ^(2) wtedy i tylko wtedy mogą spełnić warunek

$$\varphi_a(z) = \psi_b(z)$$

gdy obie są iteracjami jakiejś trzeciej funkcji/'(«) o wykładnikach odwrotnie proporcjonalnych do *a* i *b*.

Zasadę mnożenia najlepiej ocenimy, gdy ją połączymy z następującym problematem:

Wzór

$$\mathop{\Large I}^{m}_{I^{n}_{f(u)}(v)}(z) = I^{mn}_{f(t)}(z)$$

(litery *u, v, t*... nie mają żadnego rachunkowego znaczenia, są to tylko znaki orjentacyjne, dotyczące działań iterowanych) daje nam prawo pisania

$$I^{k}_{f(t)}(z) = I^{\frac{kN}{N}}_{f(t)}(z) = \mathop{\Large I}^{N}_{I^{\frac{k}{N}}_{f(u)}(v)}(z) .$$

gdzie jest N jakąkolwiek liczbą całkowitą dodatnią.

Piszemy więc

$$I^{k}_{f(t)}(z) = \lim_{N=\infty} \mathop{\Large I}^{N}_{I^{\frac{k}{N}}_{f(a)}(v)}(z)$$

Chodzi tylko o to, co znaczy ten rachunek in limite A^T=oo. Odpowiedź na to pytanie daje nam

Postulat. Każda funkcja /J/) posiada swoją pomocniczą funkcję $\Phi(z)$, t. zw. jej funkcja! iteracyjny, spełniają c y wzór

$$f(z) = \lim_{N=\infty} I^{N}_{t+\frac{\Phi(t)}{N}}(z)$$

pociągający za sobą wzór

$$f_k(z) = I^{k}_{f(t)}(z) = \lim_{N=\infty} I^{N}_{t+\frac{k\Phi(t)}{N}}(z) .$$

Ku postulatowi temu prowadzi następujące rozumowanie:

Jeżeli iteracje

$$f(z),\ f_2(z),\ f_3(z),\ f_4(z)....$$

tworzą grupę, to one jako takie winny należeć do pewnej jednoczęściowej ciągłej grupy funkcji.

Grupę tą stanowią iteracje

AO)

o dowolnym wykładniku v, zdolnym do zmienności nieograniczonej i ciągłej. Bezpośredniego określenia tego pojęcia nie mamy. Idziemy więc drogą pośrednią.

Szukajmy analogji.

Znajdujemy ją na potęgach.

Potęgi znamy z bezpośrednich wzorów:

$$x^2 = x.x;\ x^3 = x.x.x,$$

$$x^4 = x.x.x.x \text{ i t. d.}$$

Co znaczy jednak potęga x^v o wykładniku, zdolnym do zmienności nieograniczonej i ciągłej. Na to mamy odpowiedź.

Każdej liczbie *x* odpowiada pomocnicza jej liczba £, jej logarytm naturalny ^=*logx,* spełniająca wzór:

$$x = \lim_{N=\infty} \left(1 + \frac{\xi}{N}\right)^N.$$

pociągający za sobą wzór:

$$x^v = \lim_{N=\infty} \left(1 + \frac{v\xi}{N}\right)^\Lambda.$$

Postulat nasz jest zatym uogólnieniem nauki o logarytmach naturalnych i jej zastosowaniach analitycznych. Na mocy zasady przemienności iteracji tej samej funkcji, ze wzoru

$$f(z) = \lim_{N=\infty} I^N_{t+\frac{\Phi(t)}{N}}(z)$$

otrzymujemy równanie granicowe

$$\lim_{N=\infty} f\left(z + \frac{\Phi(z)}{N}\right) = \lim_{N=\infty} \left[f(z) + \frac{\Phi f(z)}{N}\right]$$

czyli równanie

$$f(z) + \frac{\Phi(z)}{N}\frac{f^{(1)}(z)}{1!} + \left(\frac{\Phi(z)}{N}\right)^2 \frac{f^{(2)}(z)}{2!} + \ldots = f(z) + \frac{\Phi f(z)}{N}, \text{ czyli}$$

$$\Phi(z) f^{(1)}(z) + \frac{\Phi(z)^2}{N}\frac{f^{(2)}(z)}{2!} + \ldots = \Phi f(z)$$

skąd in limite A^T=co wypada t. zw. równanie funkcyjne Ramusa

$$\Phi f(z) = f^{(1)}(z)\Phi(z)$$

rozwiązane w badaniach Lemeray'a, Leaú i innych, zarówno w odpowiednich wzorach granicowych, jakoteż i zapomocą szeregów potęgowych.

5. Zasada łączności iteracji.

Twierdzenie. Jeżeli dwie funkcje *f(z)* i *F(z)* są połączone wzorem

$$\varphi f(z)=F\varphi(z)$$

to i m-te iteracje ich są również tym samym wzorem

$$\varphi f_m(z)=F_m\varphi(z)$$

połączone.

Jakoż wzór $\varphi f(z)=F\varphi(z)$ daje nam

$$\varphi f_2(z)=\varphi f.f(z)=F\varphi.f(z)=F.\varphi f(z)=F.F\varphi(z)=FF.\varphi(z)=F_2\varphi(z)$$

a zatym

$$\varphi f_2(z)=F_2\varphi(z).$$

Wzór ten daje następnie

$$\varphi f_3(z)=\varphi f_2.f(z)=F_2\varphi.f(z)=F_2.\varphi f(z)=F_2.F\varphi(z)=F_2F.\varphi(z)=F_3\varphi(z),\text{ a zatym}$$

$$\varphi f_3(z)=F_3\varphi(z)\text{ i t. d. i t. d.}$$

w drodze indukcyjnej otrzymamy wzór $\varphi f_n(z)=F_n\varphi(z)$ dla każdej całkowitej dodatniej wartości wskaźnika *n*.

Uwaja. Ze wzoru $\varphi f_n(z)=F_n\varphi(z)$ wynika $f_n(z)=\varphi_{-1}F_n\varphi(z)$.

My przez 'f —1(^) oznaczamy funkcję, przeciwną funkcji $\varphi(z)$, dającą więc

$$\varphi_{-1}\varphi(z)=\varphi\varphi_{-1}(z)=z\ .$$

A więc, ieżeli [1] $\varphi(z)=z^2$, to $\varphi_{-1}(z)=\sqrt{z}$.

Jeżeli $\varphi(z)=e^z$, to $\varphi_{-1}(z)=log\ z$ i t. d.

Mamy więc

Wniosek. Jeżeli funkcje *f(z)* oraz $F(z)$ są połączone wzorem

$$f(z)=\varphi_{-1}F\varphi(z)\ ,$$

to iteracje ich także są tym samym wzorem połączone

$$f_n(z)=\varphi_{-1}F_n\varphi(z)\ .$$

Wzór ten, jak mówimy, przekształca grupę iteracji funkcji *F(z)* na grupę iteracji funkcji *f(z* W tym wzorze nazywamy

grupę iteracji funkcji *F(z)* grupą przekształcaną,

grupę iteracji funkcji $f(z)$ grupą przekształconą,

względnie zredukowaną,

funkcję <p(» funkcją przekształcającą, albo funkcją pośredniczącą.

Przekształcenie * tego rodzaju jest wzajemne. Jakoż, jeżeli grupa iteracji funkcji *F(z)* przechodzi na grupę iteracji funkcji *f(z)* na mocy w z o r u

$$f_n(z)=\varphi_{-1}\,F_n\varphi(z)$$

to nawzajem, grupa iteracji funkcji *f(z)* przechodzi na grupę iteracji funkcji *F(z)* na mocy wzoru

$$F_n(z)=\varphi f_n\varphi_{-1}(z)\ .$$

Tutaj nasuwa się następująca uwaga:

Wzór $^\wedge f_n\{z)=F_n{}^\wedge\{z\backslash$ jako następstwo wzoru $\varphi f(z)=F\varphi(z)$, wyprowadziliśmy tylko dla wykładnika całkowitego, dodatniego *n.*

Chodzi nam o moc obowiązującą dla dowolnego *n.*

Gdybyśmy umieli funkcję JP(^) iterować, to funkcję *f(z* określoną wzorem

$$\varphi\bar{f}(z)=F_x\varphi(z)$$

nazwalibyśmy #-tą iteracją funkcji *f(z).*

Stąd wynika

Definicja. Grupą iteracji funkcji *f(z* określonej warunkiem

$$f(z)=\varphi_{-1}F\varphi(z)\ ,$$

nazywamy grupę wszystkich funkcji postaci $\varphi_{-1}F_x\varphi(z)$, które znaczymy, pisząc

$$f_x(z)=\varphi_{-1}F_x\varphi(z).$$

Wzór ten daje pojęcie iteracji, zgodne z iteracjami wyrachowalnemi, gdzie to się da uskutecznić bezpośrednio, a określa je tam, gdzie to bezpośrednio jest niewykonalne. Zagadnienie, czy jest to jednoznaczny, czy też niejednoznaczny sposób określania grupy iteracji, musi być osobno badane.

6. Zastosowanie zasady łączności iteracji.

Przy rachunku iteracji funkcji danej *f(z)* dążymy do tego, aby grupę jej iteracji Sprowadzić do grupy iteracji funkcji

$$F(z)=z+1$$

(t. zw. zagadnienie Abela).

względnie do grupy iteracji funkcji

$$F\{z)=hz$$

(t. zw. zagadnienie Schródera).

Zagadnienie Abela dąży do ustalenia wzoru:

$$f(z)=\varphi_{-1}F\varphi(z)\,,$$

który przy *F(z)=z-\-* przyjmie postać

$f(z)=\varphi_{-1}\,[\varphi(z)+1]$, a więc postać $\varphi f(z)=\varphi(z)+1$. Jest to t. z w. równanie funkcyjne Abela

$$Af(z)=A(z)+1.$$

Zagadnienie Schródera dąży do ustalenia wzoru:

$$f(z)=\varphi_{-1}\,F\varphi(z)$$

który przy $F(z)=hz$ przyjmie postać $f(z)=\varphi_{-1}\,[h\varphi(z)]$, a więc postać $\varphi f(z)=h\varphi(z)$. Jest to t. zw. równanie funkcyjne Koenigsa-Schródera.

Podstawę analizy tych zagadnień stanowi sam rachunek iteracyjny, którego zasady musimy poznać zanim będziemy mogli wejść bliżej w istotę równań funkcyjnych, zarówno elementarnych, powyżej podanych, jakoteż i ogólniejszych.

7. Iteracje funkcji linjowych ułamkowych.

Funkcję postaci

$$f(z)=\frac{az+b}{cz+d}$$

o wyznaczniku $ad-bc$, różnym od zera, nazywamy funkcją linjową ułamkową, albo funkcją rzutową, względnie homograficzną.

Zasadniczą jej własność stanowi ten fakt, że jeżeli założymy

$$p_1=\frac{ap+b}{cp+d},\ q_1=\frac{aq+b}{cq+d}$$

$$r_1=\frac{ar+b}{cr+d},\ s_1=\frac{as+b}{cs+d}\,,$$

otrzymamy równość t. zw. stosunków anharmonicznych

$$\frac{p_1-r_1}{p_1-s_1}:\frac{q_1-r_1}{q_1-s_1}=\frac{p-r}{p-s}:\frac{q-r}{q-s}$$

czyli

$$\frac{f(p)-r_1}{f(p)-s_1}:\frac{f(q)-r_1}{f(q)-s_1}=\frac{p-r}{p-s}:\frac{q-r}{q-s}\,.$$

Jeżeli założymy we wzorze

$$f(z)=\frac{az+b}{cz+d}$$

q=oo, to otrzymamy

$$f(q)=\frac{aq+b}{cq+d}=\frac{a+\frac{b}{q}}{c+\frac{d}{q}},$$

$$f(\infty)=\frac{a}{c},$$

$$\left(\frac{q-r}{q-s}\right)_{q=\infty}=\left(\frac{1-\frac{r}{q}}{1-\frac{s}{q}}\right)_{q=\infty}=1\ .$$

$$\left(\frac{f(q)-r_1}{f(q)-s_1}\right)_{q=\infty}=\frac{\frac{a}{c}-r_1}{\frac{a}{c}-s_1}=\frac{a-cr_1}{a-cs_1}\ .$$

Mamy zatym

$$\frac{f(p)-r_1}{f(p)-s_1}:\frac{a-cr_1}{a-cs_1}=\frac{p-r}{p-s}\ .$$

Stąd wynika

Twierdzenie. Jeżeli założymy

$$f(z)=\frac{az+b}{cz+d},\quad ad-bc\neq 0$$

$$r_1=\frac{ar+b}{cr+d},\ s_1=\frac{as+b}{cs+d}$$

to otrzymamy wzór

$$\frac{f(p)-r_1}{f(p)-s_1}=\frac{p-r}{p-s}\cdot\frac{a-cr_1}{a-cs_1}$$

i wogóle wzór

$$\frac{f(z)-r_1}{f(z)-s_1}=\frac{a-cr_1}{a-cs_1}\cdot\frac{z-r}{z-s}\ .$$

Otóż funkcja $f(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$ ma dwa t. zwane miejsca niezmienne ζ_1, ζ_2 określone równaniem $\dfrac{a\zeta+b}{c\zeta+d}=\zeta$, czyli równaniem $c\zeta^2+(d-a)\zeta-b=0$, a więc wzorem

$$\zeta_1 = \frac{(a-d)+\sqrt{(a-d)^2+4bc}}{2c}$$

$$\zeta_2 = \frac{(a-d)-\sqrt{(a-d)^2+4bc}}{2c},$$

względnie wzorem

$$\zeta_1 = \frac{(a-d)+\sqrt{(a+d)^2-4(ad-bc)}}{2c}$$

$$\zeta_2 = \frac{(a-d)-\sqrt{(a+d)^2-4(ad-bc)}}{2c},$$

które jak łatwo okazać da nam

$$\frac{a-c\zeta_1}{a-c\zeta_2} = \frac{(a+d)-\sqrt{(a+d)^2-4(ad-bc)}}{(a+d)+\sqrt{(a+d)^2-4(ad-bc)}}.$$

Na podstawie tego otrzymujemy

Twierdzenie. Jeżeli C_2 są miejscami niezmiennemi funkcji linjowej

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d},$$

a więc miejscami, określonemi równaniem

$\zeta = \frac{a\zeta+b}{c\zeta+d}$, czyli równaniem $c\zeta^2+(d-a)\zeta-b=0$, wówczas zachodzi wzór

$$\frac{f(z)-\zeta_1}{f(z)-\zeta_2} = \frac{a-c\zeta_1}{a-c\zeta_2} \cdot \frac{z-\zeta_1}{z-\zeta_2}$$

a funkcja dana $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ iteruje się na mocy wzoru

$$\frac{f_n(z)-\zeta_1}{f_n(z)-\zeta_2} = \left(\frac{a-c\zeta_1}{a-c\zeta_2}\right)^n \frac{z-\zeta_1}{z-\zeta_2},$$

skąd już łatwo *f,,(z)* wyrachować.

Wyjątek stanowi przypadek, gdy oba miejsca niezmienne ζ_1, ζ_2 zejdą się w jedno. Bywa on wtedy, gdy w równaniu

$c\zeta^2+(d-a)\zeta-b=0$ zachodzi wzór $(d-a)^2+4bc=0$, dający

$$\zeta_1 = \zeta_2 = \frac{a-d}{2c}.$$

Otóż gdy założę $\zeta_1 = \zeta_2 + \varepsilon$, $\varepsilon = 0$, to wzór

$$\frac{f(z)-\zeta_2-\varepsilon}{f(z)-\zeta_2}=\frac{a-c\zeta_2-c\varepsilon}{a-c\zeta_2}\cdot\frac{z-\zeta_1-\varepsilon}{z-\zeta_1}\ \text{da nam}$$

$$1-\frac{\varepsilon}{f(z)-\zeta_2}=\left(1-\frac{c\varepsilon}{a-c\zeta_2}\right)\ \left(1-\frac{\varepsilon}{z-\zeta_2}\right),\ \text{a więc}$$

$$1-\frac{\varepsilon}{f(z)-\zeta_2}=1-\frac{c\varepsilon}{a-c\zeta_2}-\frac{\varepsilon}{z-\zeta_2}+\frac{c\varepsilon^2}{(a-c\zeta_2)\ (z-\zeta_2)},\ \text{a więc}$$

$$\frac{1}{f(z)-\zeta_2}=\frac{c}{a-c\zeta_2}+\frac{1}{z-\zeta_2}+\frac{c\varepsilon}{(a-c\zeta_2)\ (z-\zeta_2)},$$

Kładąc teraz $\underset{\varepsilon=0}{\zeta=\zeta_1=\zeta_2}=\frac{a-d}{2c}$, znajdziemy wzór

$$\frac{1}{f(z)-\zeta}=\frac{1}{z-\zeta}+\frac{c}{a-c\zeta}\ \text{w postaci}$$

$$\frac{1}{f(z)-\zeta}=\frac{1}{z-\zeta}+\frac{2c}{a+d}.$$

Mamy więc

Twierdzenie. Jeżeli miejsca niezmienne ζ_1, ζ_2 funkcji 1 i nj o w ej $f(z)=\frac{az+b}{cz+d}$, określone równaniem $\frac{a\zeta+b}{c\zeta+d}=\zeta$ schodzą się wobec warunku $(a-d)^2+4bc=0$ w jedno miejsce

$$\zeta_1=\zeta_2=\zeta=\frac{a-d}{2c},$$

wówczas funkcja linjowa $f(z)=\frac{az+b}{cz+d}$ spełnia warunek

$$\frac{1}{f(z)-\zeta}=\frac{1}{z-\zeta}+\frac{2c}{a+d},$$

a iteruje się na mocy wzoru:

$$\frac{1}{f_n(z)-\zeta}=\frac{1}{z-\zeta}+\frac{2nc}{a+d},$$

skąd $f_n(z)$ łatwo wyrachować.

Ł. Bótłcher.

Lwów.