44.

SUR UNE PROPRIÉTÉ NOUVELLE DE L'ÉQUATION QUI SERT A DÉTERMINER LES INÉGALITÉS SÉCULAIRES DES PLANÈTES.

[*Nouvelles Annales de Mathématiques*, XI. (1852), pp. 438—440.]

[Extract.]

6. *Soit le déterminant carré symétrique*

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}, & a_{1,2} \cdots a_{1,n} \\ a_{2,1}, & a_{2,2} \cdots a_{2,n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{n,1}, & a_{n,2} \cdots a_{n,n} \end{vmatrix}, \qquad \text{(M)}$$

dans lequel on a, d'après la définition,

$$a_{l,c} = a_{c,l}.$$

Élevant le déterminant à la puissance p, on obtient le déterminant

$$\begin{vmatrix} A_{1,1}, & A_{1,2} \cdots A_{1,n} \\ A_{2,1}, & A_{2,2} \cdots A_{2,n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ A_{n,1}, & A_{n,2} \cdots A_{n,n} \end{vmatrix}; \qquad \text{(N)}$$

et ce déterminant est symétrique aussi par rapport à la diagonale $A_{1,1}$, $A_{2,2} \ldots A_{n,n}$.

Retranchant de chaque terme de la diagonale symétrique de (M) *la même quantité* λ, *on obtient le déterminant*

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}-\lambda, & a_{1,2} \cdots a_{1,n} \\ a_{2,1}, & a_{2,2}-\lambda \cdots a_{2,n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{n,1}, & a_{n,2} \cdots a_{n,n}-\lambda \end{vmatrix}. \qquad \text{(P)}$$

Développant ce déterminant et ordonnant par rapport à λ, on obtient une expression qui, étant égalée à zéro, donne l'équation

$$\lambda^n - f\lambda^{n-1} + g\lambda^{n-2} + \ldots (-1)^n t = 0, \tag{1}$$

équation qui a n racines réelles (*voir* t. X. p. 259).

Retranchant de chaque terme de la diagonale symétrique du déterminant (N) *la quantité μ, et opérant comme ci-dessus, on parvient à l'équation*

$$\mu^n - F\mu^{n-1} + G\mu^{n-2} + \ldots (-1)^n T = 0, \tag{2}$$

équation qui a aussi n racines réelles. Les racines de cette équation sont les racines de l'équation (1), *élevées chacune à la puissance p.*

Démonstration. Représentons par

$$\rho_1, \quad \rho_2, \quad \rho_3 \ldots \rho_p,$$

les p racines de l'équation $\rho^p - 1 = 0$. Écrivons le déterminant

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} - \rho_q\lambda, & a_{1,2} \ldots a_{1,n} \\ a_{2,1}, & a_{2,2} - \rho_q\lambda \ldots a_{2,n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{n,1} \ldots\ldots & a_{n,n} - \rho_q\lambda \end{vmatrix},$$

et faisons q égal successivement à tous les nombres de la suite 1, 2, 3 ... p, on aura p déterminants ; le produit de tous ces déterminants reste évidemment le même dans quelque ordre qu'on prenne ces déterminants, et, d'après les propriétés connues des racines de l'unité, tous les termes en ρ qui ne seront pas élevés à une puissance p disparaîtront, et λ accompagnant toujours ρ, il ne reste donc que des λ^p, et le déterminant-produit sera

$$\begin{vmatrix} A_{1,1} - \lambda^p, & A_{1,2}, & A_{1,3} \ldots A_{1,n} \\ A_{2,1}, & \ldots, & A_{2,2} - \lambda^p \ldots A_{2,n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ A_{n,1}, & A_{n,2}, & \ldots\ldots A_{n,n} - \lambda^p \end{vmatrix}; \tag{Q}$$

où, faisant abstraction de λ, on a le déterminant (N). Ainsi

$$\mu = \lambda^p.$$

C. Q. F. D.

7. *Application.*

$$n = 2, \text{ et } p = 2;$$

déterminant

$$\begin{vmatrix} a, & b \\ b, & c \end{vmatrix}, \tag{M}$$

élevant ce déterminant au carré, on a

$$\begin{vmatrix} a^2 + b^2, & ab + bc \\ ab + bc, & b^2 + c^2 \end{vmatrix}; \tag{N}$$

déterminant $\begin{vmatrix} a-\lambda, & b \\ b, & c-\lambda \end{vmatrix}$, (P)

$$\lambda^2-(a+c)\lambda+ac-b^2=0\,; \tag{1}$$

déterminant $\begin{vmatrix} a^2+b^2-\mu, & ab+bc \\ ab+bc, & b^2+c^2-\mu \end{vmatrix}$,

$$\mu^2-(a^2+c^2+2b^2)\,\mu+(ac-b^2)^2=0,\ \text{où}\ \mu=\lambda^2. \tag{2}$$

Faisons

$$n=2,\quad p=3,$$

(M) ne change pas, et l'on a

$$\begin{vmatrix} a^3+2ab^2+b^2c, & a^2b+abc+b^3+bc^2 \\ a^2b+abc+b^3+b^2c, & ab^2+2b^2c+c^3 \end{vmatrix}; \tag{N}$$

le déterminant (P) et l'équation (1) restent les mêmes; mais l'équation (2) devient

$$\mu^2-(a^3+c^3+3ab^2+3cb^2)\,\mu+(ac-b^2)^3=0,$$

où $$\mu=\lambda^3,$$

car, λ_1 et λ_2 étant les deux racines de l'équation (1), on a

$$\lambda_1^3+\lambda_2^3=a^3+c^3+3ab^2+3cb^2,\quad \lambda_1^3\lambda_2^3=(ac-b^2)^3.$$

8. M. Sylvester fait observer que son théorème est un cas particulier d'un théorème plus général, démontré par M. Borchardt, pour des déterminants quelconques, et qui devient le théorème démontré ci-dessus, lorsque le déterminant est symétrique (*Journal de Mathématiques*, t. XII. p. 63, 1847).