

P.S. Since the preceding was in type, I have ascertained the existence and sufficiency of a general method for forming the polar reciprocal and probably also the discriminant to functions of any degree of three variables by an explicit process of transformation and differentiation. In particular I am enabled to give the actual rule for constructing the polar reciprocal and the discriminant curves of the 4th and 5th degrees. So far as regards the polar reciprocal of curves of the 6th degree M. Hesse has already given a method of obtaining it, but mine is equally applicable to this and rests upon certain extremely simple and universal properties of the calculus of forms.

44.

SUR UNE PROPRIÉTÉ NOUVELLE DE L'ÉQUATION QUI SERT A DÉTERMINER LES INÉGALITÉS SÉCULAIRES DES PLANÈTES.

[*Nouvelles Annales de Mathématiques*, xi. (1852), pp. 438—440.]

[Extract.]

6. Soit le déterminant carré symétrique

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}, \tag{M}$$

dans lequel on a, d'après la définition,

$$a_{l,c} = a_{c,l}.$$

Élevant le déterminant à la puissance p, on obtient le déterminant

$$\begin{vmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \dots & A_{1,n} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \dots & A_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n,1} & A_{n,2} & \dots & A_{n,n} \end{vmatrix}; \tag{N}$$

et ce déterminant est symétrique aussi par rapport à la diagonale $A_{1,1}, A_{2,2} \dots A_{n,n}$.

Retranchant de chaque terme de la diagonale symétrique de (M) la même quantité λ , on obtient le déterminant

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} - \lambda & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} - \lambda & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} - \lambda \end{vmatrix}. \tag{P}$$

Développant ce déterminant et ordonnant par rapport à λ , on obtient une expression qui, étant égalée à zéro, donne l'équation

$$\lambda^n - f\lambda^{n-1} + g\lambda^{n-2} + \dots (-1)^n t = 0, \tag{1}$$

équation qui a n racines réelles (voir t. x. p. 259).

Retranchant de chaque terme de la diagonale symétrique du déterminant (N) la quantité μ , et opérant comme ci-dessus, on parvient à l'équation

$$\mu^n - F\mu^{n-1} + G\mu^{n-2} + \dots (-1)^n T = 0, \tag{2}$$

équation qui a aussi n racines réelles. Les racines de cette équation sont les racines de l'équation (1), élevées chacune à la puissance p .

Démonstration. Représentons par

$$\rho_1, \rho_2, \rho_3 \dots \rho_p,$$

les p racines de l'équation $\rho^p - 1 = 0$. Écrivons le déterminant

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} - \rho_q \lambda, & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1}, & a_{2,2} - \rho_q \lambda & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & \dots & \dots & a_{n,n} - \rho_q \lambda \end{vmatrix},$$

et faisons q égal successivement à tous les nombres de la suite 1, 2, 3 ... p , on aura p déterminants; le produit de tous ces déterminants reste évidemment le même dans quelque ordre qu'on prenne ces déterminants, et, d'après les propriétés connues des racines de l'unité, tous les termes en ρ qui ne seront pas élevés à une puissance p disparaîtront, et λ accompagnant toujours ρ , il ne reste donc que des λ^p , et le déterminant-produit sera

$$\begin{vmatrix} A_{1,1} - \lambda^p, & A_{1,2}, & A_{1,3} & \dots & A_{1,n} \\ A_{2,1}, & \dots, & A_{2,2} - \lambda^p & \dots & A_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n,1}, & A_{n,2}, & \dots & \dots & A_{n,n} - \lambda^p \end{vmatrix}; \tag{Q}$$

où, faisant abstraction de λ , on a le déterminant (N). Ainsi

$$\mu = \lambda^p.$$

C. Q. F. D.

7. Application.

$$n = 2, \text{ et } p = 2;$$

déterminant $\begin{vmatrix} a, & b \\ b, & c \end{vmatrix}, \tag{M}$

élevant ce déterminant au carré, on a

$$\begin{vmatrix} a^2 + b^2, & ab + bc \\ ab + bc, & b^2 + c^2 \end{vmatrix}; \tag{N}$$

$$\text{déterminant} \quad \begin{vmatrix} a - \lambda, & b \\ b, & c - \lambda \end{vmatrix}, \quad (\text{P})$$

$$\lambda^2 - (a + c)\lambda + ac - b^2 = 0; \quad (1)$$

$$\text{déterminant} \quad \begin{vmatrix} a^2 + b^2 - \mu, & ab + bc \\ ab + bc, & b^2 + c^2 - \mu \end{vmatrix},$$

$$\mu^2 - (a^2 + c^2 + 2b^2)\mu + (ac - b^2)^2 = 0, \text{ où } \mu = \lambda^3. \quad (2)$$

Faisons

$$n = 2, \quad p = 3,$$

(M) ne change pas, et l'on a

$$\begin{vmatrix} a^3 + 2ab^2 + b^2c, & a^2b + abc + b^3 + bc^2 \\ a^2b + abc + b^3 + b^2c, & ab^2 + 2b^2c + c^3 \end{vmatrix}; \quad (\text{N})$$

le déterminant (P) et l'équation (1) restent les mêmes; mais l'équation (2) devient

$$\mu^2 - (a^3 + c^3 + 3ab^2 + 3cb^2)\mu + (ac - b^2)^3 = 0,$$

où

$$\mu = \lambda^3,$$

car, λ_1 et λ_2 étant les deux racines de l'équation (1), on a

$$\lambda_1^3 + \lambda_2^3 = a^3 + c^3 + 3ab^2 + 3cb^2, \quad \lambda_1^3 \lambda_2^3 = (ac - b^2)^3.$$

8. M. Sylvester fait observer que son théorème est un cas particulier d'un théorème plus général, démontré par M. Borchardt, pour des déterminants quelconques, et qui devient le théorème démontré ci-dessus, lorsque le déterminant est symétrique (*Journal de Mathématiques*, t. XII. p. 63, 1847).