PRZYCZYNEK

do rachunku całkowego.

Napisał

F. Mertens.

Rzecz przedstawiona na posiedzeniu Wydz. mat.-przyr. z dnia 4 grudnia 1893 r.

Zamierzam tu wyprowadzić kilka wzorów, należących do rachunku całkowego, które pozwalają w wielu przypadkach znacznie uprościć i skrócić całkowanie nieoznaczone wyrażeń różniczkowych algebraicznych.

1.

Oznaczmy przez μ, ν liczby wymierne, z których druga różna od jedności, zaś przez L, P, Q funkcye całkowite zmiennej x, z których Q. nie posiada czynnika spólnego ani z pochodną swoją $Q' = \dfrac{dQ}{dx}$, ani z funkcyą P. Weźmy sobie za zadanie sprowadzić całkę

$$\int \frac{L dx}{P^\mu Q^\nu}$$

do innych całek podobnej budowy, ale o mniejszym wykładniku przy Q.

Ponieważ funkcya Q jest względnie pierwszą tak co do Q', jak co do P, przeto także jest względnie pierwszą co do iloczynu PQ'. Szukając tedy, według sposobu Euklidesa, największego spólnego dzielnika dwóch funkcyj Q i PQ', znajdziemy tenże czynnik $= 1$, a zarazem dwie funkcye całkowite A i B zmiennej x, które spełniają tożsamość

$$AQ + BPQ' = 1.$$

Rozmnóżmy tożsamość tę przez L i sprowadźmy funkcyę BL, dzieląc ją algebraicznie przez Q, do postaci

$$BL = CQ + B_1,$$

gdzie rząd reszty B_1 nie dosięga rzędu dzielnika Q, a C oznacza iloraz; mamy natenczas

(1) $$L = A_1 Q + B_1 PQ',$$

gdzie

$$A_1 = AL + CPQ'.$$

Z tożsamości (1) wynika

$$\frac{Ldx}{P^\mu Q^\nu} = \frac{A_1 dx}{P^\mu Q^{\nu-1}} + \frac{B_1 Q' dx}{P^{\mu-1} Q^\nu}.$$

Jest zaś tożsamościowo:

$$\frac{B_1 Q' dx}{P^{\mu-1} Q^\nu} = \frac{B_1 dQ}{P^{\mu-1} Q^\nu}$$

$$= d\left(\frac{B_1}{(1-\nu)P^{\mu-1} Q^{\nu-1}}\right) - \frac{dB_1}{(1-\nu)P^{\mu-1} Q^{\nu-1}} + \frac{(\mu-1) B_1 dP}{(1-\nu)P^\mu Q^{\nu-1}}$$

$$= d\left(\frac{B_1}{(1-\nu)P^{\mu-1} Q^{\nu-1}}\right) + \frac{(\mu-1)B_1 P' - PB_1'}{(1-\nu) P^\mu Q^{\nu-1}} dx.$$

Mamy więc

$$\frac{Ldx}{P^\mu Q^\nu} = d\left(\frac{B_1}{(1-\nu) P^{\mu-1} Q^{\nu-1}}\right) + \frac{A_1 + \frac{\mu-1}{1-\nu} B_1 P' - \frac{\mu-1}{1-\nu} PB_1'}{P^\mu Q^{\nu-1}} dx$$

i otrzymujemy, całkując

(2) $$\int\frac{Ldx}{P^\mu Q^\nu} = \frac{B_1}{(1-\nu) P^{\mu-1} Q^{\nu-1}} + \int\frac{L_1 dx}{P^\mu Q^{\nu-1}},$$

gdzie dla skrócenia położyłem

$$L_1 = A_1 + \frac{\mu-1}{1-\nu} B_1 P' - \frac{\mu-1}{1-\nu} PB_1'.$$

Wzór otrzymany (2) jest bardzo ogólny i można go stosować w licznych przypadkach..

Jeżeli μ jest wykładnikiem ułamkowym, zaś ν wykładnikiem całkowitym dodatnym, większym od jedności, to wzór (2) pozwala sprowadzić całkę $\int \frac{Ldx}{P^{\mu} Q^{\nu}}$ do funkcyi algebraicznej i do całki kształtu $\int \frac{Mdx}{P^{\mu} Q}$, gdzie M oznacza funkcyę całkowitą.

Jeżeli f, φ są funkcyami całkowitemi zmiennej x, z których druga jest rzędu niższego aniżeli pierwsza, i jeżeli równanie

$$f = 0 \tag{3}$$

posiada pierwiastki wielokrotne, to całka różniczki wymiernej $\frac{\varphi}{f}\, dx$ składa się z części przestępnej i nieprzestępnej czyli wymiernej. Hermite okazał [1]), że część wymierną tejże całki wyznaczyć można osobno bez rozwiązania równania algebraicznego (3).

Za pomocą bowiem sposobu wyznaczenia największego dzielnika spólnego dwóch funkcyj całkowitych można sprowadzić mianownik f do kształtu PQ^{ν}, gdzie Q jest względnie pierwszem do Q' i do P, zaś $\nu > 1$. Jeżeli P ma wartość stałą c, to będzie $\frac{\varphi}{f} dx = \frac{\frac{1}{c}\varphi\, dx}{Q^{\nu}}$. Jeżeli zaś P jest rzędu wyższego niż zerowego, to wyznaczyć można funkcye całkowite C, D zmiennej x, które zadość czynią równaniu

$$CP + DQ^{\nu} = 1,$$

przeto także funkcye całkowite C_1, D_1, które spełniają równanie

$$C_1 P + D_1 Q^{\nu} = \varphi.$$

Z tego równania wynika

$$\frac{\varphi}{f} = \frac{C_1}{Q^{\nu}} + \frac{D_1}{P}.$$

Jeżeli równanie

$$P = 0$$

ma jeszcze pierwiastki wielokrotne, to do ułamka $\frac{D_1}{P}$ ten sam sposób zastosować możemy, jak do $\frac{\varphi}{f}$, a postępując tak dalej, widzimy, że funkcyę $\frac{\varphi}{f}$ rozłożyć można na ułamki kształtu $\frac{L}{Q^{\nu}}$, w których funkcya Q jest względnie pierwszą do swojej pochodnej Q', zaś L można

---

[1]) *Cours d'analyse.*

przypuścić niższego rzędu niż Q. Można więc także całkę $\int \frac{\varphi}{f} dx$ rozłożyć na same całki kształtu $\int \frac{L}{Q^\nu} dx$.

Według wzoru (2) można całkę $\int \frac{Ldx}{Q^\nu}$ o wykładniku ν większym od jedności sprowadzić do funkcyi wymiernej i do całki kształtu $\int \frac{Mdx}{Q}$. Wystarcza w tym celu położyć we wzorze (2) $P = 1$. Całki zaś $\int \frac{Mdx}{Q}$ są jedyne, które dają funkcye przestępne.

2.

Oznaczmy przez R funkcyę całkowitą zmiennej x rzędu n, przez m liczbę całkowitą dodatną, a przez μ liczbę dodatną wymierną. Weźmy sobie za zadanie sprowadzić całkę $\int x^m R^\mu dx$ do całek prostszych.

Rozłożywszy $x^m R^\mu$ na czynniki $\frac{R^\mu}{x^{n\mu}}$ i $x^{m+n\mu}$, otrzymujemy przez całkowanie częściowe

$$(4) \int x^m R^\mu dx = \frac{R^\mu}{x^{n\mu}} \cdot \frac{x^{m+n\mu+1}}{m+n\mu+1} - \frac{1}{m+n\mu+1}\int x^{m+n\mu+1}\left(\frac{-n\mu R^\mu}{x^{n\mu+1}} + \frac{\mu R^{\mu-1}R'}{x^{n\mu}}\right)dx = \frac{x^{m+1} R^\mu}{m+n\mu+1} + \frac{\mu}{m+n\mu+1}\int x^m(nR - xR')R^{\mu-1} dx.$$

Sprowadźmy $x^{m+1} R'$ do kształtu $AR + r_{n-1}$, gdzie rząd reszty r_{n-1} nie dosięga rzędu funkcyj R i połóżmy $r_{n-1} = aR' + r_{n-2}$, gdzie rząd reszty r_{n-2} nie dosięga rzędu liczby $n-1$, zaś a oznacza czynnik stały, nadto dla skrócenia

$$nx^m - A = N.$$

Natenczas będzie:

$$x^m(nR - xR') = NR - aR' - r_{n-2}$$

i jasnem jest, że N nie dosięga rzędu m. Rozmnóżmy równanie to przez $R^{\mu-1} dx$ i zcałkujmy, to otrzymamy

$$\int x^m(nR - xR')R^{\mu-1} dx = \int NR^\mu dx - a\int R^{\mu-1} R' dx - \int r_{n-2} R^{\mu-1} dx$$

$$= \int NR^\mu dx - \frac{aR^\mu}{\mu} - \int r_{n-2} R^{\mu-1} dx$$

i wzór (4) przejdzie na:

$$(5) \int x^m R^\mu dx = \frac{(x^{m+1} - a)R^\mu}{m+n\mu+1} + \frac{\mu}{m+n\mu+1}\int NR^\mu dx - \frac{\mu}{m+n\mu+1}\int r_{n-2} R^{\mu-1} dx.$$

Tu całka $\int NR^{\mu} dx$ rozpada się na całki postaci

$$c_1 \int x^{m'} R^{\mu} dx$$

tej samej budowy jak pierwotna, w których jednakowoż $m' < m$.

3.

Całki kształtu

$$\int \frac{dx}{g\sqrt{f}}, \quad \int \frac{xdx}{g\sqrt{f}},$$

w których g i f oznaczają funkcye drugiego rzędu zmiennej x bez czynnika spólnego, wymagają mozolnych rachunków, jeżeli czynniki funkcyj g są urojone i według sposobów, zawartych w podręcznikach, wyrażenia różniczkowe $\frac{dx}{g\sqrt{f}}$ i $\frac{xdx}{g\sqrt{f}}$ przez stósowne podstawienie zamienimy na wymierne. Dla wyznaczenia tych całek poleca się sposób następujący.

Połóżmy

$$\begin{aligned} f &= A + 2Bx + Cx^2 \\ g &= A' + 2B'x + C'x^2 \\ AC - B^2 &= D \\ A'C' - B'^2 &= D' \\ AC' + CA' - 2BB' &= E \\ E^2 - 4DD' &= \Delta \end{aligned}$$

i przypuśćmy, że $D' > 0$, a nadto (co wolno bez naruszenia ogólności) że spółczynniki A', C' są ilościami dodatnemi. Jeżeli przez s oznaczymy niewiadomą i utworzymy funkcyę

$$sg - f = (sA' - A) + 2(sB' - B)x + (sC' - C)x^2,$$

to funkcya ta będzie zupełnym kwadratem, jeżeli niewiadomej s nałożymy warunek

$$\begin{aligned} &(sA' - A)(sC' - C) - (sB' - B)^2 \\ &= D's^2 - Es + D = 0. \end{aligned}$$

Równanie to kwadratowe posiada pierwiastki:

$$s_1 = \frac{E + \sqrt{\Delta}}{2D'}, \quad s_2 = \frac{E - \sqrt{\Delta}}{2D'}, \tag{6}$$

które zawsze są rzetelnymi i różnymi. Położywszy bowiem dla skrócenia

$$AB' - BA' + (AC' - CA')x + (BC' - CB')x^2 = \omega,$$

mamy znaną tożsamościowość:

$$(s_1 g - f)(s_2 g - f) = \frac{D' f^2 - Efg + Dg^2}{D'}$$
$$= -\frac{\omega^2}{D'},$$

którą bezpośrednio otrzymujemy, mnożąc przez siebie wierszami wyznaczniki

$$\omega = \begin{vmatrix} A, & B, & C \\ A', & B', & C' \\ x^2, & -x, & 1 \end{vmatrix}$$

$$2\omega = \begin{vmatrix} C, & -2B, & A \\ C', & -2B', & A' \\ 1, & +2x, & x^2 \end{vmatrix},$$

a to w kształcie

$$2\omega^2 = \begin{vmatrix} 2D, & E, & f \\ E, & 2D', & g \\ f, & g, & 0 \end{vmatrix}$$
$$= -2D' f^2 + 2Efg - 2Dg^2.$$

Jeżeli zamiast s_1, s_2 położymy ich wartości (6), to rzeczona tożsamość przejdzie na

$$\frac{Eg - 2D'f + g\sqrt{\Delta}}{2D'} \cdot \frac{Eg - 2D'f - g\sqrt{\Delta}}{2D'} = \frac{(Eg - 2D'f)^2 - \Delta g^2}{4D'^2} = -\frac{1}{D'}\omega^2$$

czyli na

$$\Delta g^2 = (Eg - 2D'f)^2 + 4D'\omega^2.$$

Z tożsamości tej wynikają równania:

(7) $$\Delta A'^2 = (EA' - 2D'A)^2 + 4D'(AB' - BA')^2$$

(8) $$\Delta C'^2 = (EC' - 2D'C)^2 + 4D'(BC' - CB')^2.$$

Jeżeli uwzględnimy, że D' jest ilością dodatną, to obydwa te równania opiewają, że Δ można przedstawić jako sumę dwu ilości nieujemnych, n. p.

$$\Delta = \left(\frac{EA' - 2D'A}{A'}\right)^2 + 4D'\left(\frac{AB' - BA'}{A'}\right)^2.$$

Nadto Δ jako wyniknik funkcyj f, g zniknąć nie może, ponieważ przypuściliśmy, że f i g czynnika spólnego nie mają. Musi więc Δ być ilością dodatną.

Jeżeli przez $\sqrt{\Delta}$ rozumiemy wartość dodatną pierwiastka, to funkcya $s_1 g - f$ jest kwadratem dodatnym, a funkcya $s_2 g - f$ kwadratem ujemnym funkcyi rzetelnej liniowej. Mamy bowiem

$$s_1 A' - A = \frac{1}{2D'}(A'\sqrt{\Delta} + EA' - 2D'A)$$

$$s_1 C' - C = \frac{1}{2D'}(C'\sqrt{\Delta} + EC' - 2D'C)$$

$$s_2 A' - A = -\frac{1}{2D'}(A'\sqrt{\Delta} - EA' + 2D'A)$$

$$s_2 C' - C = -\frac{1}{2D'}(C'\sqrt{\Delta} - EC' + 2D'C)$$

i na mocy (7), (8)

$$A'\sqrt{\Delta} \geq EA' - 2D'A$$

$$C'\sqrt{\Delta} \geq EC' - 2D'C.$$

Można więc położyć

$$s_1 g - f = (\alpha + \beta x)^2$$

$$s_2 g - f = -(\alpha' + \beta' x)^2,$$

gdzie α, β, α', β' oznaczają wiadome ilości rzetelne.

Oznaczywszy dla skrócenia funkcye liniowe $\alpha + \beta x$ i $\alpha' + \beta' x$ przez φ i ψ, mamy tożsamości:

$$s_1 g - f = \varphi^2 \tag{9}$$

$$s_2 g - f = -\psi^2 \tag{10}$$

$$(s_1 - s_2) g = \varphi^2 + \psi^2 \tag{11}$$

$$f = \frac{s_2 \varphi^2}{s_1 - s_2} + \frac{s_1 \psi^2}{s_1 - s_2}. \tag{12}$$

Tożsamość (11) rozpada się na równania:

$$(s_1 - s_2) A' = \alpha^2 + \alpha'^2$$

$$(s_1 - s_2) B' = \beta^2 + \beta'^2$$

$$(s_1\ s_2)\ C' = \alpha\beta + \alpha'\beta',$$

z których wynika

$$(s_1 - s_2)^2 (A'C' - B'^2) = (\alpha^2 + \alpha'^2)(\beta^2 + \beta'^2) - (\alpha\beta + \alpha'\beta')^2$$

czyli

$$D'(s_1 - s_2)^2 = (\alpha\beta' - \beta\alpha^2)^2. \tag{13}$$

Różniczkując dalej tożsamość (12) co do x, otrzymujemy

$$\frac{1}{2}df = \frac{s_2}{s_1 - s_2}\varphi d\varphi + \frac{s_1}{s_1 - s_2}\psi d\psi,$$

a wyrugowawszy za pomocą tejże samej tożsamości raz wyrażenie $\frac{s_2}{s_1 - s_2}$, drugi raz wyrażenie $\frac{s_1}{s_1 - s_2}$, mamy

$$(14) \qquad \frac{1}{2}\varphi df - fd\varphi = \frac{s_1\psi}{s_1 - s_2}(\varphi d\psi - \psi d\varphi)$$

$$= \frac{s_1(\alpha\beta' - \beta\alpha')}{s_1 - s_2}\psi dx$$

$$(15) \qquad \frac{1}{2}\psi df - fd\psi = -\frac{s_2\varphi}{s_1 - s_2}(\varphi d\psi - \psi d\varphi)$$

$$= -\frac{s_2(\alpha\beta' - \beta\alpha')}{(s_1 - s_2)}\varphi dx.$$

Tożsamość (14) podzielona przez wyrażenie

$$\sqrt{\Delta}\,(f + \varphi^2)\sqrt{f} = D'(s_1 - s_2)\,s_1 g\sqrt{f},$$

w skutek równania (13) przechodzi na

$$\frac{1}{\sqrt{\Delta}}\,\frac{\frac{1}{2}\varphi df - fd\varphi}{(f + \varphi^2)\sqrt{f}} = -\frac{1}{\sqrt{\Delta}}\,\frac{d\frac{\varphi}{\sqrt{f}}}{1 + \frac{\varphi^2}{f}}$$

$$= \frac{1}{\alpha\beta' - \beta\alpha'}\,\frac{\psi dx}{g\sqrt{f}},$$

a tożsamość (15), podzielona przez wyrażenie

$$-\sqrt{\Delta}(f - \psi^2)\sqrt{f} = -D'(s_1 - s_2)\,s_2\,g\sqrt{f},$$

przechodzi na:

$$-\frac{1}{\sqrt{\Delta}}\,\frac{\frac{1}{2}\psi df - fd\psi}{(f - \psi^2)\sqrt{f}} = \frac{1}{\sqrt{\Delta}}\,\frac{d\frac{\psi}{\sqrt{f}}}{1 - \frac{\psi^2}{f}} =$$

$$= \frac{1}{\alpha\beta' - \beta\alpha'}\,\frac{\varphi dx}{g\sqrt{f}}.$$

Otrzymujemy więc, całkując

$$\frac{1}{\alpha\beta'-\beta\alpha'}\int\frac{\psi dx}{g\sqrt{f}}=-\frac{1}{\sqrt{\Delta}}\,arctg\,\frac{\varphi}{\sqrt{f}}\tag{16}$$

$$\frac{1}{\alpha\beta'-\beta\alpha'}\int\frac{\varphi dx}{g\sqrt{f}}=\frac{1}{2\sqrt{\Delta}}\,l\,\frac{1+\frac{\psi}{\sqrt{f}}}{1-\frac{\psi}{\sqrt{f}}}.$$

Jeżeli zaś uwzględnimy równanie

$$\frac{1+\frac{\psi}{\sqrt{f}}}{1-\frac{\psi}{\sqrt{f}}}=\frac{(\sqrt{f}+\psi)^2}{f-\psi^2}=\frac{(\sqrt{f}+\psi)^2}{s_2 g},$$

to drugą całkę możemy napisać także w postaci

$$\frac{1}{\alpha\beta'-\beta\alpha'}\int\frac{\varphi dx}{g\sqrt{f}}=\frac{1}{\sqrt{\Delta}}\,l\,\frac{\sqrt{f}+\psi}{\sqrt{g}}.$$

Z równań (16) i (17) wynika, jeżeli je rozwiążemy co do całek szukanych

$$\int\frac{dx}{g\sqrt{f}}=\frac{\beta'}{\sqrt{\Delta}}\,l\,\frac{\sqrt{f}+\psi}{\sqrt{g}}+\frac{\beta}{\sqrt{\Delta}}\,arctg\,\frac{\varphi}{\sqrt{f}}$$

$$=\frac{\beta'}{\sqrt{\Delta}}\,l\,\frac{\sqrt{f}+\alpha'+\beta' x}{\sqrt{g}}+\frac{\beta}{\sqrt{\Delta}}\,arctg\,\frac{\alpha+\beta x}{\sqrt{f}}$$

$$\int\frac{xdx}{g\sqrt{f}}=-\frac{\alpha'}{\sqrt{\Delta}}\,l\,\frac{\sqrt{f}+\psi}{\sqrt{g}}-\frac{\alpha}{\sqrt{\Delta}}\,arctg\,\frac{\varphi}{\sqrt{f}}$$

$$=-\frac{\alpha'}{\sqrt{\Delta}}\,l\,\frac{\sqrt{f}+\alpha'+\beta'x}{\sqrt{g}}-\frac{\alpha}{\sqrt{\Delta}}\,arctg\,\frac{\alpha+\beta x}{\sqrt{f}}.$$

Do całek poprzedzających sprowadzić można całki

$$\int\frac{d\varphi}{A+2B\sin\varphi+C\sin^2\varphi},\quad\int\frac{\sin\varphi\,d\varphi}{A+2B\sin\varphi+C\sin^2\varphi},$$

jeżeli $AC-B^2>0$, tudzież całki:

$$\int\frac{\cos\varphi\,d\varphi}{\sqrt{A\cos^2\varphi+2B\cos\varphi\sin\varphi+C\sin^2\varphi}}$$

$$\int\frac{\sin\varphi\,d\varphi}{\sqrt{A\cos^2\varphi+2B\cos\varphi\sin\varphi+C\sin^2\varphi}},$$

a mianowicie dwie pierwsze przez podstawienie

$$\sin \varphi = x\,,$$

dwie drugie przez podstawienie

$$tg\ \varphi = x\,.$$

4.

Aby okazać użyteczność wzorów powyższych, zastosuję takowe do dwóch przykładów.

Weźmy sobie za zadanie wyznaczyć całkę

$$\int \frac{(x+5)}{(x^4+x^2+1)^2}\, dx.$$

Położywszy dla skrócenia

$$x^4+x^2+1 = Q,$$

nasamprzód musimy zadość uczynić tożsamości

$$AQ+BQ' = x+5.$$

Znajdujemy

$$A = 5 + \frac{4}{3}x - \frac{10}{3}x^2$$

$$B = -\frac{1}{6} - \frac{5x}{6} - \frac{2x^2}{6} + \frac{5}{6}x^3.$$

Jest więc

$$\int \frac{x+5}{Q^2}\, dx = \int \frac{Adx}{Q} + \int \frac{BQ'\, dx}{Q^2}\,.$$

Przez całkowanie zaś częściowe otrzymujemy

$$\int \frac{BQ'\, dx}{Q^2} = \int \frac{BdQ}{Q^2} = -\frac{B}{Q} + \int \frac{B'\, dx}{Q}\,,$$

a przeto mamy

$$\int \frac{x+5}{Q^2}\, dx = -\frac{B}{Q} + \int \frac{A+B'}{Q}\, dx$$

$$= -\frac{B}{Q} + \frac{1}{6}\int \frac{25+4x-5x^2}{Q}\, dx.$$

Aby całkę $\int \frac{A+B'}{Q} dx$ wyznaczyć, należy wyrażenie Q rozłożyć na czynniki x^2+x+1 i x^2-x+1 i rozwiązać tożsamość:

$$C(x^2+x+1)+D(x^2-x+1)=A+B', \tag{18}$$

względem niewiadomych funkcyj całkowitych C, D. Wystarcza w tym celu zauważyć, że

$$\frac{1}{2}(x^2+x+1)-\frac{1}{2}(x^2-x+1)=x \tag{19}$$

$$\frac{1}{2}(x^2+x+1)+\frac{1}{2}(x^2-x+1)=x^2+1. \tag{20}$$

Rozmnożywszy pierwsze z tych równań przez x, otrzymujemy

$$\frac{1}{2}x.(x^2+x+1)-\frac{1}{2}x.(x^2-x+1)=x^2 \tag{21}$$

Odjąwszy zaś równanie (21) od równania (20), mamy

$$\frac{1-x}{2}(x^2+x+1)+\frac{x+1}{2}(x^2-x+1)=1. \tag{22}$$

Jeżeli teraz rozmnożymy tożsamości (22), (19), (21) przez spółczynniki funkcyj $A+B'$ i dodamy, to otrzymamy tożsamość (18)

$$\frac{29-30x}{12}(x^2+x+1)+\frac{30x+21}{12}(x^2-x+1)=A+B'.$$

Z tej tożsamości wynika

$$\frac{A+B'}{Q}=\frac{29-30x}{12(x^2-x+1)}+\frac{30x+21}{12(x^2+x+1)}$$

$$\int\frac{A+B'}{Q}dx=\frac{5}{4}\,l\,\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}+\frac{7}{3\sqrt{3}}\,arctg\,\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\,arctg\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\,.$$

Jest więc

$$\int\frac{x+5}{(x^4+x^2+1)^2}dx=\frac{1+5x+2x^2-5x^3}{6(x^4+x^2+1)}+\frac{5}{4}\,l\,\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$$
$$+\frac{7}{3\sqrt{3}}\,arctg\,\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\,arctg\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\,.$$

Jako drugi przykład niechaj posłuży całka

$$\int\frac{6dx}{(x^4+x^2+1)^2\sqrt{x^2+1}}\,.$$

Aby było można zastosować wzór (2), należy nasamprzód rozwiązać tożsamość

$$AQ + BQ'(x^2 + 1) = 6,$$

gdzie

$$Q = x^4 + x^2 + 1.$$

Znajdujemy

$$A = 6 - 8x^2 - 8x^4$$

$$B = x + 2x^3.$$

Jest więc

$$\int \frac{6\,dx}{Q^2\sqrt{1+x^2}} = \int \frac{A\,dx}{Q\sqrt{1+x^2}} + \int \frac{B\sqrt{x^2+1}}{Q^2} Q'\,dx.$$

Przez całkowanie zaś częściowe otrzymujemy

$$\int \frac{B\sqrt{x^2+1}\,Q'\,dx}{Q^2} = \int B\sqrt{x^2+1}\,.\frac{dQ}{Q^2}$$

$$= -\frac{B\sqrt{x^2+1}}{Q} + \int \frac{Bx + B'(x^2+1)}{Q\sqrt{x^2+1}}\,dx$$

a stąd

$$\int \frac{6\,dx}{Q^2\sqrt{1+x^2}} = -\frac{B\sqrt{x^2+1}}{Q} + \int \frac{A + Bx + B'(x^2+1)}{Q\sqrt{x^2+1}}\,dx$$

$$= -\frac{B\sqrt{x^2+1}}{Q} + \int \frac{7\,dx}{Q\sqrt{x^2+1}}.$$

Na mocy tożsamości (22) mamy dalej

$$7 = \frac{7-7x}{2}(x^2 + x + 1) + \frac{7+7x}{2}(x^2 - x + 1)$$

$$\int \frac{7dx}{Q\sqrt{1+x^2}} = \int \frac{\frac{1}{2}(7-7x)\,dx}{(1-x+x^2)\sqrt{x^2+1}} + \int \frac{\frac{1}{2}(7+7x)\,dx}{(1+x+x^2)\sqrt{x^2+1}}.$$

Całki po drugiej stronie stojące

$$\int \frac{(1-x)\,dx}{(x^2-x+1)\sqrt{x^2+1}}, \quad \int \frac{(1+x)\,dx}{(x^2+x+1)\sqrt{x^2+1}}$$

wyznaczyć można według ustępu 3-go.

Funkcya zaś

$$s(x^2 - x + 1) - x^2 - 1$$

staje się zupełnym kwadratem dla pierwiastków równania kwadratowego

$$4(s-1)^2 - s^2 = 0,$$

t. j. dla $s=2$ i dla $s=\frac{2}{3}$, mamy zatem:

$$2(x^2-x+1) - x^2 - 1 = (x-1)^2$$

$$\frac{2}{3}(x^2-x+1) - x^2 - 1 = -\frac{1}{3}(x+1)^2.$$

Różniczkując iloraz $\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$, otrzymujemy

$$d\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{(1-x)\,dx}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}.$$

Jeżeli to równanie podzielimy przez wyrażenie

$$1 - \frac{(x+1)^2}{3(x^2+1)} = \frac{2}{3}\cdot\frac{x^2-x+1}{x^2+1},$$

to wynika

$$\frac{3}{2}\frac{(1-x)\,dx}{(x^2-x+1)\sqrt{1+x^2}} = \frac{d\dfrac{(x+1)}{\sqrt{x^2+1}}}{1-\dfrac{(x+1)^2}{3(x^2+1)}}$$

$$\frac{3}{2}\int\frac{(1-x)\,dx}{(x^2-x+1)\sqrt{1+x^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,l\,\frac{\sqrt{3}.\sqrt{x^2+1}+x+1}{\sqrt{3}\sqrt{x^2+1}-x-1}$$

$$=\sqrt{3}\,l\,\frac{\sqrt{3}\sqrt{x^2+1}+x+1}{\sqrt{x^2-x+1}}$$

czyli

$$\frac{1}{2}\int\frac{(1-x)\,dx}{(x^2-x+1)\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\,l\,\frac{\sqrt{3}\sqrt{x^2+1}+x+1}{\sqrt{x^2-x+1}}.$$

Tym samym sposobem, lub też zmieniając znak ilości x, znajdujemy

$$\frac{1}{2}\int\frac{(1+x)\,dx}{(1+x+x^2)\sqrt{1+x^2}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}\,l\,\frac{\sqrt{3}\sqrt{x^2+1}+1-x}{\sqrt{1+x+x^2}}.$$

Jest więc

$$\int \frac{6dx}{(x^4+x^2+1)^2\sqrt{x^2+1}} = -\frac{(x+2x^3)\sqrt{x^2+1}}{x^4+x^2+1} + \frac{7}{\sqrt{3}}\, l\, \frac{\sqrt{3}\,\sqrt{x^2+1}+1+x}{\sqrt{x^2-x+1}}$$

$$-\frac{7}{\sqrt{3}}\, l\, \frac{\sqrt{3}\,\sqrt{x^2+1}+1-x}{\sqrt{x^2+x+1}}.$$