Kilka uwag
o czynniku całkującym równań różniczkowych.

Przez

A. J. Stodółkiewicza.

(Rzecz przedstawiona na posiedzeniu Wydz. matem.-przyr. z dnia 9. maja 1893 r.; ref. członek Zajączkowski).

W podręcznikach do nauki równań różniczkowych wykładane bywają twierdzenia o czynniku całkującym równań różniczkowych rzędu 1-go z dwiema zmiennemi. Zauważyłem, że istnieje jeszcze kilka twierdzeń ogólnych, nieznanych, o ile mi wiadomo, gdyż ani w podręczniku prof. Zajączkowskiego, ani w podręczniku Sturm'a twierdzeń tych nie spotkałem. Dla tej przyczyny zamierzam w pracy niniejszej wyłożyć niepodane dotąd twierdzenia o czynniku całkującym, niepozbawione, jak mi się zdaje, pewnego interesu naukowego i pożytku przy całkowaniu równań.

Niech będzie równanie różniczkowe

$$X_1\,dx_1+X_2\,dx_2+\ldots+X_i\,dx_i+\ldots+X_n\,dx_n=0, \tag{1}$$

określające jednę zmienną, jako funkcyę pozostałych zmiennych niezależnych.

Napiszmy całkę równania (1) w postaci ogólnej

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n)=c;$$

następnie, oznaczmy przez μ czynnik całkujący równania danego, natenczas będzie:

$$(2) \qquad \mu X_i = \frac{\partial F}{\partial x_i}, \quad \mu X_k = \frac{\partial F}{\partial x_k}.$$

$(i, k = 1, 2, \ldots, n)$.

Rugując funkcyę F z równań (2), otrzymamy

$$\frac{\partial}{\partial x_k}(\mu X_i) = \frac{\partial}{\partial x_i}(\mu X_k),$$

czyli

$$(3) \qquad X_i \frac{\partial \mu}{\partial x_k} - X_k \frac{\partial \mu}{\partial x_i} + \mu \left(\frac{\partial X_i}{\partial x_k} - \frac{\partial X_k}{\partial x_i} \right) = 0.$$

Gdy przedstawimy całkę ostatniego równania w kształcie

$$V(x_1, x_2, \ldots, x_n, \mu) = c,$$

natenczas równanie (3) można napisać tak:

$$-X_i \frac{\partial V}{\partial x_k} + X_k \frac{\partial V}{\partial x_i} + \mu \left(\frac{\partial X_i}{\partial x_k} - \frac{\partial X_k}{\partial x_i} \right) \frac{\partial V}{\partial \mu} = 0.$$

Zmieniając wartości wskaźników i, k od 1 do n, otrzymamy kilka układów równań różniczkowych cząstkowych. Wystarczającem jednak będzie zbadać własności jednego z tych układów

$$(4) \qquad \frac{\partial V}{\partial x_i} - \frac{X_i}{X_n} \frac{\partial V}{\partial x_n} + \frac{\mu}{X_n} \left(\frac{\partial X_i}{\partial x_n} - \frac{\partial X_n}{\partial x_i} \right) \frac{\partial V}{\partial \mu} = 0.$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Wiemy, że układowi równań różniczkowych cząstkowych (4) odpowiada zawsze równoważny układ dwóch równań o różniczkach zupełnych

$$(5) \qquad \begin{aligned} dx_n &= \sum_{i=1}^{i=n-1} \left(-\frac{X_i}{X_n} \right) dx_i, \\ \frac{d\mu}{\mu} &= \sum_{i=1}^{i=n-1} \frac{1}{X_n} \left(\frac{\partial X_i}{\partial x_n} - \frac{\partial X_n}{\partial x_i} \right) dx_i. \end{aligned}$$

Pierwsze z tych równań jest, oczywista, równaniem danem, drugie zaś można napisać w kształcie

$$(6) \qquad d \lg \mu = \sum_{i=1}^{i=n-1} \frac{1}{X_n} \left(\frac{\partial X_i}{\partial x_n} - \frac{\partial X_n}{\partial x_i} \right) dx_i.$$

i wyprowadzić kilka wniosków ogólnych.

Po 1-sze, zdarzyć się może, że w równaniu (6) spółczynniki nie zawierają zmiennej x_n i, że wspomniane równanie albo przedstawia różniczkę dokładną albo też jest łatwiejsze do przecałkowania, aniżeli równanie dane, natenczas odnajdujemy czynnik całkujący i doprawadzamy tym sposobem nasze zagadnienie do szeregu kwadratur.

Po 2-ie, w przypadku szczególnym, gdy

$$\frac{1}{X_n}\left(\frac{\partial X_i}{\partial x_n}-\frac{\partial X_n}{\partial x_i}\right)=p_i$$

ilości stałej, lub funkcyi samej x_i, znalezienie czynnika całkującego jest łatwem, bowiem będzie

$$\lg \mu=\sum_{i=1}^{i=n-1}\int p_i\, dx_i.$$

Po 3-cie, w układzie (5) do drugiego równania możemy dodać pierwsze, pomnożone przez pewną ilość A; wskutek tego będziemy mieli

$$d\lg \mu+A\, dx_n=\sum_{i=1}^{i=n-1}\frac{1}{X_n}\left(\frac{\partial X_i}{\partial x_n}-\frac{\partial X_n}{\partial x_i}-A X_i\right)dx_i, \tag{7}$$

gdzie A jest albo liczbą stałą, albo też funkcyą zmiennej x_n. Z równania (7) wypada wniosek, że, jeżeli

$$\frac{1}{X_n}\left(\frac{\partial X_i}{\partial x_n}-\frac{\partial X_n}{\partial x_i}-A X_i\right)=q_i$$

ilości stałej lub funkcyi samej x_i, natenczas μ łatwo odnaleźć można, gdyż będzie z równania (7)

$$\lg \mu+\int A\, dx_n=\sum_{i=1}^{i=n-1}\int q_i\, dx_i.$$

Niemniej doniosłe i ogólne wnioski można wyprowadzić dla równania różniczkowego z dwiema zmiennemi

$$M\, dx+N\, dy=0, \qquad *) \tag{8}$$

w którem M i N oznaczają pewne funkcye zmiennych x i y. Równanie (3) dla powyższego przypadku będzie mieć kształt:

$$N\frac{\partial \mu}{\partial x}-M\frac{\partial \mu}{\partial y}+\mu\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)=0. \tag{9}$$

Przyjąwszy, że ostatniemu równaniu czyni zadość funkcya

$$V(x, y, \mu)=c,$$

*) Gdy M i N są funkcye algebraiczne, natenczas znalezienie czynnika całkującego sprowadza się zawsze do kwadratur. Dokładniejsze uzasadnienie takiego wniosku mieści się w rozprawie mojej, przedstawionej w dniu 5 kwietnia r. b. na posiedzeniu Akademii Cesarskiej w Wiedniu: „*Über die Integration der partiellen Differenzialgleichungen erster Ordnung*“.

otrzymamy z (9)

$$-N\frac{\partial V}{\partial x}+M\frac{\partial V}{\partial y}+\mu\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)\frac{\partial V}{\partial \mu}=0.$$

Zamiast powyższego równania różniczkowego cząstkowego możemy napisać układ dwóch równań o różniczkach zupełnych

$$\frac{dx}{-N}=\frac{dy}{M}=\frac{d\mu}{\mu\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)},$$

czyli

(10) $$\frac{dx}{-N}=\frac{dy}{M}=\frac{d\lg\mu}{\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}}.$$

Z równań (10) można wyprowadzić kilka wniosków.

Wniosek I. Jeżeli odnajdziemy trzy liczby α, β, γ takie, aby

(11) $$-\alpha N+\beta M+\gamma\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)\equiv 0,$$

natenczas μ, czynnik całkujący równania danego, można łatwo znaleźć. W rzeczy samej, układ (10) możemy przedstawić w kształcie następującej proporcyi

$$\frac{\alpha\,dx+\beta\,dy+\gamma\,d\lg\mu}{-\alpha N+\beta M+\gamma\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)}=\frac{dx}{-N};$$

atoli wskutek tożsamości (11) koniecznem jest

$$\alpha\,dx+\beta\,dy+\gamma\,d\lg\mu=0$$

równanie, z którego po przecałkowaniu mamy

$$\alpha x+\beta y+\gamma\lg\mu=c,$$

czyli

(12) $$\mu=e^{\frac{\alpha x+\beta y}{\gamma}}.$$

Widzimy więc, że dla równania (8), w przypadku, gdy zachodzi tożsamość (11), czynnikiem całkującym będzie (12).

Wniosek II. Jeżeli odnajdziemy trzy liczby a, b, c tak, aby

$$-aN+bM+c\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)=\varphi(x) \text{ funkcyi samej } x$$

i jeżeli oprócz tego będzie

$$N=\psi(x) \text{ funkcyi samej zmiennej } x;$$

albo też, gdy

$$-aN+bM+c\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)=\varphi(y) \text{ funkcyi samej } y$$

i oprócz tego

$$M=\psi(y),$$

natenczas w obu wymienionych przypadkach czynnik całkujący μ można znaleźć.

W przypadku roztrząsanym układ (10) możemy napisać w kształcie proporcyi

$$\frac{a\,dx+b\,dy+cd\lg\mu}{-aN+bM+c\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)}=\frac{dx}{-N}$$

czyli, wskutek warunków wyżej omówionych, będzie

$$\frac{adx+bdy+cd\lg\mu}{dx}=-\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}.$$

Całkując ostatnie równanie, otrzymamy

$$ax+by+c\lg\mu=-\int\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}dx$$

związek, z którego bardzo łatwo odnajdziemy wartość μ.

W n i o s e k III. Jeżeli znajdziemy pewną ilość A, jako funkcyę tylko zmiennej y taką, aby

$$AM+\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}=\varphi(x) \text{ funkcyi samej zmiennej } x$$

i jeżeli oprócz tego

$$N=\psi(x) \text{ funkcyi samej zmiennej } x;$$

albo też, jeżeli odnajdziemy pewną ilość A', jako funkcyę tylko zmiennej x taką, ażeby

$$-A'N+\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}=\varphi(y) \text{ funkcyi samej ilości } y$$

i oprócz tego

$$M=\psi(y) \text{ funkcyi samej ilości } y,$$

natenczas w obu wymienionych przypadkach czynnik μ znaleźć można. W rzeczy samej, układ (10) możemy napisać tak:

$$\frac{A\,dy + d\lg\mu}{AM + \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}} = \frac{dx}{-N},$$

czyli, na zasadzie omówionych powyżej warunków, będzie

$$A\,dy + d\lg\mu = -\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\,dx,$$

skąd po przecałkowaniu otrzymamy

$$\int A\,d\,y + \lg\mu = -\int\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\,dx.$$

Podobnie postępujemy w przypadku drugiej kombinacyi z wymienionych warunków.

Wniosek IV. Jeżeli iloraz $\dfrac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{-\alpha N + \beta M}$ jest funkcyą tylko sumy $\alpha x + \beta y$, gdzie α i β są pewne liczby stałe, natenczas układ (10) piszemy w postaci

$$\frac{d(\alpha x + \beta y)}{-\alpha N + \beta M} = \frac{d\lg\mu}{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}},$$

czyli

$$d\lg\mu = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{-\alpha N + \beta M}\,d(\alpha x + \beta y),$$

skąd, przy istnieniu powyżej wyszczególnionego warunku, czynnik μ łatwo odnaleźć.

Wniosek V. Jeżeli znajdziemy A, funkcyę samej x i B funkcyę samej zmiennej y tak, ażeby

(13) $$-AN + BM + \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = 0,$$

natenczas czynnik μ będzie wiadomym.

W rzeczy samej, układ (10) możemy napisać tak:

(14) $$\frac{A\,dx + B\,dy + d\lg\mu}{-AN + BM + \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}} = \frac{dx}{-N};$$

atoli wskutek tożsamości (13) z równania (14) wnioskujemy

$$A\,dx + B\,dy + d\lg\mu = 0,$$

skąd będzie

$$\lg \mu = -\int A\, dx - \int B\, dy.$$

Wniosek VI. Jeżeli odnajdziemy dwie funkcye $\varphi_1(x, y)$, tudzież $\varphi_2(x, y)$ obu zmiennych tak, ażeby było

$$-\varphi_1 N + \varphi_2 M + \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \equiv 0 \tag{15}$$

i oprócz tego

$$\varphi_1\, dx + \varphi_2\, dy$$

przedstawiać będzie różniczkę dokładną pewnej funkcyi $\Phi(x, y)$, natenczas czynnik μ wiadomym będzie.

Istotnie, układ (10) dla wyszczególnionego wyżej przypadku napisać można w kształcie

$$\frac{\varphi_1\, dx + \varphi_2\, dy + d \lg \mu}{-\varphi_1 N + \varphi_2 M + \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}} = \frac{dx}{-N},$$

z którego, na zasadzie warunku (15), wypływa:

$$\varphi_1\, dx + \varphi_2\, dy + d \lg \mu = 0,$$

czyli

$$d\, \Phi(x, y) + d \lg \mu = 0.$$

Z ostatniego równania łatwo znaleźć μ.

Niezależnie od dowiedzionych twierdzeń bardzo pożytecznem bywa w każdym szczególnym przypadku zbadać układ (10). Tak naprzykład dla równania różniczkowego

$$(ay^n + bx^{n-2} + cy)\, dx + (ax^n + by^{n-2} + cx)\, dy = 0,$$

w którem a, b, c, n są jakiekolwiek liczby, układ (10) będzie:

$$\frac{dx}{-(ax^n + by^{n-2} + cx)} = \frac{dy}{ay^n + bx^{n-2} + cy} = \frac{d \lg \mu}{an\, x^{n-1} - an\, y^{n-1}}.$$

Ztąd łatwo otrzymamy

$$\frac{(n-1)\, x^{n-2}\, dx + (n-1)\, y^{n-2}\, dy}{-(n-1)x^{n-2}(ax^n + by^{n-2} + cx) + (n-1)y^{n-2}(ay^n + bx^{n-2} + cy)} = \frac{d \lg \mu}{an\,(x^{n-1} - y^{n-1})},$$

czyli

$$\frac{d\,(x^{n-1} + y^{n-1})}{-(n-1)\, a\,(x^{2n-2} - y^{2n-2}) - (n-1)\, c\,(x^{n-1} - y^{n-1})} = \frac{d \lg \mu}{an\,(x^{n-1} - y^{n-1})}.$$

Po skróceniu przez $x^{n-1} - y^{n-1}$ z ostatniego równania wypadnie

$$\frac{d\,(x^{n-1}+y^{n-1})}{-(n-1)\,a\,(x^{n-1}+y^{n-1})-(n-1)\,c}=\frac{d\lg\mu}{an}$$

czyli

$$\frac{n\,d\,[a\,(x^{n-1}+y^{n-1})+c]}{-(n-1)\,[a\,(x^{n-1}+y^{n-1})+c]}=d\lg\mu.$$

Po przecałkowaniu będzie

$$\mu=[a\,(x^{n-1}+y^{n-1})+c]^{-\frac{n}{n-1}},$$

albo prościej

$$\mu_1=a\,(x^{n-1}+y^{n-1})+c.$$