Besitzt die heutige

Schulgeometrie

noch die

Vorzüge des Euklidischen Originals?

Eine Betrachtung

von

Dr. Hubert Müller, Professor,
Oberlehrer am Lyceum in Metz.

Metz und **Diedenhofen.**
Verlag von G. Scriba,
Hofbuchhändler.

Die Euklidischen Elemente und unsere Schulgeometrie enthalten zwar im wesentlichen den gleichen Stoff; aber man hat mit der Zeit so viele Änderungen in dem Aufbau vorgenommen, dafs nur an einzelnen Stellen einige Bausteine in der ursprünglichen Lage verblieben sind. Was die Beweise anbetrifft, so finden sich deren sehr wenige, welche mit Euklidischen Beweisen vollständig übereinstimmen; aber dennoch springt bei der Vergleichung die Ähnlichkeit der Beweisformen unserer Lehrbücher mit denen des Euklidischen Werkes vielfach in die Augen. Ob dieser äufseren Übereinstimmung auch eine innere Verwandtschaft entspricht, ob unsere Schulgeometrie die wesentlichen Eigenschaften der Elemente des Euklid, nämlich die allgemein gerühmte logische Konsequenz der Ableitung noch besitzt, ist eine andere Frage. Dieselbe wird zwar nicht leicht unbedingt bejaht werden, aber man macht doch geltend, dafs die getroffenen Änderungen nur so weit gehen, als es die Rücksicht auf die geringere Fassungskraft unserer jugendlichen Schüler erfordere, dafs demnach die Vorzüge des Originals so weit gewahrt seien, als diese pädagogischen Rücksichten es gestatten. Wir wollen nun darauf aufmerksam machen, dafs diese Ansicht zu günstig ist, dafs es besser ist, diese Frage noch als eine offene zu behandeln, um in der Vergleichung mit dem Euklidischen Originale einen Mafsstab zur Beurteilung der in unserer Schulgeometrie erreichten Vollkommenheit zu besitzen. Zu diesem Zwecke soll die Vergleichung beispielsweise an einigen besonders wichtigen Gegenständen des ersten Jahreskursus der Geometrie durchgeführt werden.

Man nennt die „Starrheit“ eine wesentliche Eigenschaft des Euklidischen Systems. Damit soll nicht gesagt sein, dafs die Figuren unbeweglich seien. Wenn Euklid auch ungern die Beweglichkeit der Figuren zur Ableitung von Sätzen benützt, so mufs er dieselbe doch bei den Kongruenzsätzen zulassen. Damit ist aber das ganze System auf die Beweglichkeit der Figuren gegründet, und es würde dieses System durchaus nicht wesentlich verändern, wenn man, anstatt sich auf die Kongruenzsätze zu beziehen, die Bewegung der Figuren in jedem einzelnen Falle vornehmen wollte. Unter „Starrheit“ versteht man aber nicht die Unbeweglichkeit einer Figur als eines Ganzen, sondern man meint damit die Unveränderlichkeit der Lage, welche die Teile der Figur gegen einander haben, so dafs durch die Starrheit jede Formveränderung einer Figur ausgeschlossen ist. In der That kommt es bei Euklid nicht vor, dass durch Drehung oder Verschiebung von Linien eine Figur ihre Gestalt ändert.

Mit diesem Prinzip der Starrheit hat die Mathematik in der Folgezeit gebrochen und ist nur dadurch entwickelungsfähig geworden; denn die neuere Geometrie, die Analysis, die analytische Geometrie, die Differential- und Integral-Rechnung sind nur dadurch möglich, dafs die Elemente der Figuren und die Gröfsenwerte der Algebra als stetig veränderlich betrachtet werden. Auch unsere Schulgeometrie hat sich diesen Einflüssen nicht entziehen können und hat die Starrheit thatsächlich beseitigt. Es geschieht dieses gleich auf der ersten Seite unserer Lehrbücher, wo gesagt wird, dafs die Winkel durch Drehung beschrieben werden. Dadurch gewinnen wir den Begriff des gestreckten Winkels, der durch eine halbe Umdrehung beschrieben wird. Bei Euklid fehlt dieser Begriff. Seine Erklärung des Winkels: „Ein ebener Winkel ist die Neigung zweier Linien gegen einander, die in einer Ebene zusammentreffen, ohne in gerader Linie zu liegen," schliefst den gestreckten Winkel namentlich aus. Dafs dieser Unterschied in der Definition des Winkels, welcher zwischen den Euklidischen Elementen und unserer Schulgeometrie besteht, auch auf die Art der Ableitung von Sätzen einen Einflufs haben müsse, ist zu vermuten, und wir wollen zusehen, ob die etwa nötigen Veränderungen auch wirklich durchgeführt sind. Euklid mufs, weil ihm der Begriff des gestreckten Winkels fehlt, einen umständlichen Beweis dafür aufstellen, dafs zwei Nebenwinkel, deren nicht vereinte Schenkel in die entgegengesetzten Richtungen einer Geraden fallen, zusammen zwei rechte Winkel betragen. Bei uns ist dieser Beweis nicht mehr nötig. Die Nebenwinkel bilden nach ihrer Definition einen gestreckten Winkel, und dieser ist gleich der Summe von zwei rechten Winkeln. Einige unserer Lehrbücher führen noch den Euklidischen Beweis, was ganz falsch ist; andere, selbst sehr sparsame Lehrbücher, suchen diesem Beweise noch einige Zeilen zu retten, um dem Euklid nicht zu unähnlich zu werden. Auch dieses ist unrichtig. Der Satz sollte überhaupt nach unseren Grundlagen heifsen: „Zwei Nebenwinkel betragen zusammen einen gestreckten Winkel". Der rechte Winkel ist bei uns gar nicht mehr die Grundlage für das Mafs der Winkel, sondern steht entweder dem gestreckten Winkel als koordiniert gegenüber oder ist sogar in vielen Lehrbüchern als Hälfte des gestreckten Winkels definiert. Den Euklidischen Satz beibehalten hätte also den gleichen Sinn, wie wenn man beweisen wollte: „Zwei Komplementwinkel bilden zusammen einen Winkel von zwei halben rechten Winkeln“. Ähnliches gilt von dem Beweise des Satzes über Scheitelwinkel, welcher fast in allen Lehrbüchern genau nach Euklid geführt wird. Nach unsern Grundlagen müfste der Beweis heifsen: „Die beiden Scheitelwinkel sind Nebenwinkel desselben Winkels x; sie sind also gleich, weil jeder gleich der Differenz eines gestreckten Winkels und des Winkels x ist.“ Euklid mufs, da er die gleichen Subtrahenden (die gestreckten Winkel) nicht hat, dieselben als Winkelsummen betrachten und durch ihre Gleichheit mit einer dritten Gröfse (zwei rechte Winkel) erst ihre Gleichheit beweisen. Es ist unrichtig, dafs unsere Lehrbücher dieses nachmachen. Selbst Euklid verfährt in anderen Fällen, wo ihm die gleichen Subtrahenden vorliegen (I Buch, Satz 35 und 43), nicht so, dafs er diese Subtrahenden erst durch Addition bildet.

In dem verbreitetsten unserer Lehrbücher, der Planimetrie von Kambly, findet sich weiterhin der Satz: „Wenn die Summe zweier anstofsenden Winkel gleich zwei Rechten ist, so sind diese Winkel Nebenwinkel, d. h. ihre nicht gemeinsamen Schenkel bilden eine Gerade.“ Dafs diesem Satze der Euklidische Beweis beigegeben wird, ist falsch; denn der Satz ist für uns selbstverständlich: Zwei solche Winkel bilden zusammen einen gestreckten Winkel, und dessen Schenkel fallen selbstverständlich in eine Gerade. Mit demselben Rechte könnte man auch den folgenden Satz bilden und mit einem indirekten Beweise versehen wollen: „Wenn zwei anstofsende Winkel zusammen einen Winkel von zweimal 45^0 bilden, so stehen ihre nicht vereinten Schenkel auf einander senkrecht“, oder: „Wenn man zwei Winkel α und β so aneinander legt, dafs sie den Scheitel und einen Schenkel gemeinsam haben, so liegen ihre nicht vereinten Schenkel so, wie die Schenkel des Winkels $(\alpha + \beta)$“. — Der Fehler, welchen das genannte Lehrbuch und viele andere Lehrbücher mit dem Aufstellen des Euklidischen Beweises begehen, ist bei Kambly um so gröfser, als dieser Beweis zur Begriffserklärung des indirekten Beweises benützt wird. Was hier apagogisch bewiesen wird, ist nur, dass die Schenkel eines gestreckten Winkels in eine Gerade fallen, und doch findet sich eine Seite vor diesem als Muster aufgestellten apagogischen Beweise die Definition: „Ein Winkel, dessen Schenkel in eine Gerade fallen, heisst ein gestreckter Winkel,“ sowie die Erklärung: „Ein rechter Winkel ist die Hälfte eines gestreckten“ und die Folgerung: „Ein gestreckter Winkel ist gleich der Summe zweier rechten Winkel.“ Das Unstatthafte dieses apagogischen Beweises wird dadurch einigermafsen verdeckt, dafs anstatt des gestreckten

1*

Winkels in dem Satze die Summe von zwei rechten Winkeln genannt wird. Auch wird in dem Beweise die Kongruenz der gestreckten Winkel, auf welche derselbe hinausläuft, nicht benützt, obgleich diese Kongruenz kurz vorher ausgesprochen ist, sondern von den beiden gestreckten Winkeln wird ein Stück weggenommen, um von den Resten zu sagen, dafs sie einander decken müssen, weil sonst der Teil dem Ganzen gleich sei. Man sieht also, dafs hier genau so verfahren wird, als ob die Definition des gestreckten Winkels und die daraus gezogenen Folgerungen gar nicht vorhanden seien, als ob wir noch ganz auf dem Fundamente des Euklidischen Systems stünden. Derselbe Fehler wird in dem genannten Buche mit dem Beweise des folgenden Satzes gemacht, welcher in den Euklidischen Elementen gar nicht enthalten ist: „Wenn der eine von zwei gleichen Winkeln an den Nebenwinkel des andern angelegt wird, so sind die Winkel Scheitelwinkel.“ Es wird hier apagogisch bewiesen, dafs der gemeinsame Schenkel der Nebenwinkel α und β und der Endschenkel des angelegten Winkels $\alpha' = \alpha$ in eine Gerade fallen. Es versteht sich aber wiederum aus den Definitionen ohne weiteres, dass $\beta + \alpha' = \beta + \alpha$ einem gestreckten Winkel gleich ist, dessen Schenkel eben in eine Gerade fallen müssen.

Das Resultat der Untersuchung des ersten Kapitels der Geometrie ergiebt, dafs die Behandlung desselben nicht mehr Euklidisch genannt werden kann. Die Grundlagen sind wesentlich geändert, ohne dafs dieser Änderung die nötige Rechnung getragen ist. Der Vorwurf der Inkonsequenz, welcher sich daraus gegen unsere Schulgeometrie ergiebt, wird dadurch nicht abgeschwächt, dass die Behandlung der Lehre von den Winkeln in den Lehrbüchern nicht gleichmäfsig ist, dafs sogar einige Werke (zumal solche, welche der Schule etwas ferner stehen, wie die berühmten Baltzerschen Elemente der Mathematik) von diesem Vorwurfe gar nicht mehr getroffen werden. Denn da es sich hier nicht um Schulbücher, sondern um die gegenwärtige Lehrmethode handelt, so müssen die ersteren nicht gezählt, sondern nach ihrem Einflufs auf die Schule gewogen werden. Hierbei zeigt es sich aber, dafs gerade die oben besprochene äufserliche Nachahmung des Euklid gegenwärtig noch am meisten beliebt ist, obgleich sie in dem schärfsten Widerspruche zu der Änderung der Grundlagen (nämlich der Beseitigung des Prinzips der Starrheit) steht, welche in allen Lehrbüchern angenommen ist.

Für die Entfernung dieser Widersprüche bleibt die Wahl zwischen zwei Möglichkeiten: Entweder müssen die Euklidischen Definitionen wieder hergestellt werden, oder es müssen für einige Sätze die Beweise verändert, beziehungsweise vereinfacht werden, während andere Sätze einfach wegzulassen oder als unmittelbare Folgerungen aus den Definitionen anzufügen sind.

Wir gehen zu einem andern Gegenstande über. Der Euklidische Grundsatz der Parallelentheorie heifst: „Werden zwei gerade Linien von einer dritten so geschnitten, dafs die beiden innern an einer Seite liegenden Winkel zusammen kleiner als zwei rechte sind, so treffen diese beiden Linien, genugsam verlängert, an eben der Seite zusammen". Dieser Satz fordert die Erkenntnis einer geometrischen Wahrheit aus der Anschauung einer Figur. Bei dem in den meisten Lehrbüchern enthaltenen Grundsatze der Parallelentheorie: „Durch einen Punkt aufserhalb einer Geraden kann man nur eine Parallele zu dieser Geraden ziehen" ist dieses nicht der Fall; derselbe giebt gar keine Anschauung. Jeder Satz der Parallelentheorie würde eher die Forderungen erfüllen, die man an einen geometrischen Grundsatz stellen mufs, als der genannte Satz, auf welchen als auf einen selbstverständlichen alle andern Sätze zurückgeführt werden sollen. Wie kommt es nun, dafs hier in dieser Weise eine abstrakte Behauptung als geometrischer Grundsatz auftritt? Es erklärt sich dieser Umstand daraus, dafs hier wiederum das Aufgeben des Euklidischen Prinzips der Starrheit vorliegt, ohne dafs diese Neuerung durchgeführt wird. Der genannte Grundsatz fordert nämlich, um anschaulich erkannt zu werden, dafs man eine von zwei Geraden sich um einen Punkt drehen läfst, um alle möglichen Lagen der ersten Geraden gegen die zweite vor Augen zu haben. Man würde dabei das Entweichen des Schnittpunktes beider Geraden in immer wachsende Entfernung und zuletzt das Überspringen des Schnittpunktes von einer Seite auf die andere beobachten und fordern müssen, dafs anschaulich erkannt werde, wie nur in dem Augenblicke des Überspringens eine parallele Lage der beiden Geraden möglich ist. Ob diese Wahrheit leichter zu erkennen sei als der Euklidische Grundsatz oder einer der Sätze der Parallelentheorie, darüber kann man verschiedener Ansicht sein; jedenfalls fordert aber der Grundsatz von der einzigen Parallelen diese Bewegung einer Geraden. Es geht nicht an, diesen Grundsatz ebenso kurz wie den Euklidischen hinzustellen, welcher an und für sich schon die Anschauung giebt*). Dazu kommt noch, dafs durch diese Veränderung des Grundsatzes der Parallelentheorie für die Schule gar nichts gewonnen wird. Die Beweise der Sätze sind um nichts leichter als die Euklidischen Beweise. Man

*) Vergleiche die Forderungen von S. Günther im Gymnasialprogramm von Ansbach, 1877.

betrachte z. B. in den Mehlerschen Elementen der Mathematik den Beweis des Satzes: „Wenn zwei Gegenwinkel gleich sind, so sind die geschnittenen Linien parallel“. Derselbe besteht aus drei Teilen, einer Vergleichung von Winkeln, einem Kongruenzbeweise und dem eigentlichen apagogischen Beweise. Der mittlere Teil allein erfordert an Betrachtungen ebensoviel als der Beweis eines Satzes über die Kongruenz der Dreiecke; denn es kommt auf das Gleiche hinaus, ob man die Kongruenz zweier Dreiecke oder diejenige der Teile eines Streifens (paralleler Linien) aus Gleichheit einer Strecke und der beiden anliegenden Winkel beweist. Beweise von dieser Ausdehnung würden sogar den Nutzen des denkbar besten Systems für die Schule in Frage stellen. Dasselbe dürfte aber auch schon für die im Vorhergehenden getadelten Beweise aus der Lehre von den Winkeln gelten. Bei Führung derselben würde die Untadelhaftigkeit des Euklidischen Systems, in welchem diese Beweise zu Recht bestehen, und die Inkonsequenz der heutigen Schulgeometrie, in welcher dieselben Beweise fehlerhaft sind, den Schülern gleichermafsen latent bleiben, weil diese über die vielen Einzelheiten den Überblick verlieren.

Welche Mittel könnte man nun anwenden, um die ersten Teile der Planimetrie dem Verständnis der jugendlichen Schüler näher zu bringen? Für die Lehre von den Winkeln ist die Antwort sehr leicht: Man hat dieselbe nur konsequent auf den veränderten Grundlagen aufzubauen, und die Beweise werden so einfach werden, als man nur wünschen kann. Für die Theorie der Parallelen dagegen würde es genügen, die Zahl der ohne Beweis angenommenen Sätze um einen zu vergröfsern. Nimmt man als Grundlage an, dafs zwei gerade Linien, welche von einer dritten geschnitten werden, parallel oder konvergent sind, je nachdem die Gegenwinkel gleich oder ungleich sind, so ist das Ziel erreicht. Der Wert des Systems wird hierdurch nicht beeinträchtigt; denn derselbe hängt nicht von der Zahl der Grundsätze ab, sondern von der Wahl derselben und davon, ob das System konsequent auf den Grundsätzen aufgebaut ist oder nicht. Selbst derjenige, welcher gegen die Vermehrung der Grundsätze Bedenken hegt, wird anerkennen müssen, dafs die Aufstellung des obigen Doppelgrundsatzes der im folgenden besprochenen Darstellung, welche sich noch gegenwärtig einer grofsen Beliebtheit erfreut, bei weitem vorzuziehen ist.

Es ist noch eine andere Behandlung der Parallelentheorie vertreten und zwar gerade in dem verbreitetsten unserer geometrischen Lehrbücher. Man erklärt nämlich den Winkel für eine Richtungsdifferenz und schliefst, dafs das Antragen gleicher Richtungsdifferenzen (Winkel) an dieselbe Richtung (gerade Linie) zu gleichen Richtungen (zu parallelen Linien) führen müsse, gerade wie man von gleichen Gröfsen durch Zufügung gleicher Differenzen wieder zu gleichen Gröfsen kommt. Dieser Beweis ist aber eine reine Erschleichung*), welche durch die Scheinerklärung der Winkeldifferenz ausgeführt ist. In der Algebra wird der Gröfsenunterschied a—b als diejenige Gröfse erklärt, welche zu b addiert, a giebt. Ist nun auch der Richtungsunterschied eine Richtung, welche, zur Richtung b addiert, die Richtung a hervorbringt? Man ist doch hier ebenso wie in der Arithmetik berechtigt zu fragen, was das Wort Differenz bedeuten solle. Die Erklärung des Winkels als Richtungsunterschied ist eben gar keine Definition, sondern hat von einer solchen nur die Form. Diese Erklärung ist nichts als eine versteckte Annahme der zu beweisenden Sätze. Mit dem Worte „Richtungsdifferenz“ bezieht man sich nämlich auf die Gröfsendifferenzen und macht durch das Wort allein geltend, dafs diejenigen Sätze, welche für Gröfsendifferenzen gelten, hier — bei den Richtungsdifferenzen ein Entsprechendes haben. Man setzt also voraus, dafs man von derselben Richtung weg durch dieselben Richtungsdifferenzen zu den gleichen Richtungen komme, gerade wie man aus derselben Gröfse durch Addition gleicher Gröfsenunterschiede gleiche Gröfsen bildet. Dieses ist aber eine Annahme und durchaus keine Folgerung; denn der „Richtungsunterschied“ pafst nicht unter den Begriff „Gröfsenunterschied“; der Richtungsunterschied ist ja nicht wieder eine Richtung, sondern ein Ding ganz anderer Art — ein Winkel. Die für die Gröfsenunterschiede angenommenen Grundsätze dürfen daher nicht ohne weiteres auf Richtungsunterschiede angewendet werden. Wenn man einen Winkel „Richtungsdifferenz“ nennt, so hat das Wort „Differenz“ nur eine übertragene Bedeutung, und diese Übertragung hat nur deshalb einen Sinn, weil sich ein geometrischer Satz findet (eben der zu beweisende Satz), der den Sätzen über Gröfsendifferenzen entspricht, weil man von derselben Richtung durch Antragen gleicher Winkel zu gleichen Richtungen kommt. Niemals darf man umgekehrt aus diesem Worte „Richtungsunterschied“ die genannte geometrische Wahrheit folgern wollen. Es ist bei dieser Sache von Interesse zu konstatieren, dafs auch hier die Preisgabe des Prinzips der Starrheit und die ganz ungenügende Durchführung dieser Veränderung vorliegt. Der Begriff „Richtung“,

*) Vergleiche die ausführlichere Behandlung dieses Gegenstandes in der Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht XVI, S. 407.

welcher in unsern Schulbüchern gar nicht definiert wird, ist nämlich in der hier gebrauchten Bedeutung den Euklidischen Grundlagen durchaus nicht entsprechend und findet seine Erklärung gegenwärtig nur in den Lehrbüchern der neueren Geometrie. Diese Erklärung beruht aber auf der stetigen Umwandlung des Winkels in die Figur zweier Parallelen*) (Begriff des unendlich fernen Punktes). Wir finden also auch hier bei der Parallelentheorie ein Aufgeben der Euklidischen Grundlagen und ein Ersetzen derselben durch neue Anschauungen, welche mit der äufserlich Euklidischen Form der Erklärungen und Beweise im Widerspruch stehen.

Um einen dritten Gegenstand aus dem Pensum des ersten Jahreskurses zu besprechen, sei auf die Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht IX, S. 193 verwiesen, wo ein in dem verbreitetsten Lehrbuche der Planimetrie (Kambly) befindlicher Beweis angegriffen wird, der sich übrigens in den meisten Lehrbüchern ebenso findet. Die betreffende Stelle heifst: „Der Beweis, dafs im gleichschenkligen Dreieck die Winkel an der Grundlinie gleich sind, wird dadurch geführt, dafs man sich den Winkel an der Spitze halbiert denkt. Solche Phantasieen sind dem Mathematiker nicht gestattet. Er mufs den Winkel erst halbieren können, bevor er mit halben Winkeln umgehen darf“. Ein Beschützer des betreffenden Lehrbuches verteidigt dasselbe mit dem Hinweise, dafs entsprechende Verfahrungsweisen in der niederen und höheren Mathematik zahlreich vorkommen (Vergl. a. a. O. S. 427). Wenn man auch dem Verteidiger hierin recht geben mufs, so ist doch geltend zu machen, dafs die Voraussetzung der Halbierungslinie ohne Konstruktion (viele schreiben dennoch im Beweise: „nach Konstruktion“) nicht Euklidisch ist; denn sie beruht auf der Beseitigung des Prinzips der Starrheit: Man denke sich den Winkel durch eine Gerade geteilt, und lasse dieselbe sich so um den Scheitel drehen, dafs der kleinere Teil zunimmt, so wird einmal und nur einmal eine Lage kommen, in welcher die Teillinie den Winkel halbiert. Hieraus folgt noch ein anderer Grundsatz, welcher ebenfalls bei Euklid fehlt: „In einem Punkte kann man auf einer Geraden nur eine Senkrechte errichten“; denn der gestreckte Winkel hat wie jeder andere nur eine Halbierungslinie. Auch die Grundsätze: „Durch zwei Punkte ist nur eine Gerade möglich“ und: „Der gerade Weg zwischen zwei Punkten ist der kürzeste“ beruhen ebenfalls darauf, dafs

*) Zeitschrift f. mathematischen und naturwissenschaftl. Unterricht XVI, S. 407.

man sich die Figur stetig veränderlich denkt. Euklid hat dafür nur den einen Grundsatz: „Zwei gerade Linien schliefsen keinen Raum ein“, und dieser Satz bezieht sich auf eine starre Figur. Die genannten Grundsätze unserer Schulgeometrie sind also das Produkt einer Änderung der Euklidischen Grundlagen und haben die gemeinsame Eigenschaft, eine Gerade durch zwei Bedingungen zu bestimmen, so dafs man sie die eindeutigen Bestimmungen der Geraden nennen könnte. Auf derselben Neuerung beruht es auch, wenn in unsern Lehrbüchern der Mittelpunkt einer Strecke ohne Konstruktion vorausgesetzt wird. Die genannten eindeutigen Bestimmungen werden benützt, wenn Lehrsätze aufgestellt werden wie die folgenden Sätze über das gleichschenklige Dreieck:

1. Die Halbierungslinie an der Spitze halbiert die Grundlinie und steht auf ihr senkrecht.

2. Die Linie, welche die Spitze mit der Mitte der Grundlinie verbindet, halbiert den Winkel an der Spitze und steht senkrecht auf der Grundlinie.

3. Die Mittelsenkrechte der Grundlinie geht durch die Spitze und halbiert den Winkel daselbst.

Der bestimmte Artikel am Anfang dieser Sätze sagt aus, dafs diese 3 Linien immer vorhanden sind und zwar jede nur in einem einzigen Exemplare. Euklidische Sätze könnten die obige Form nicht haben, da Euklid die eindeutigen Bestimmungen der Geraden weder als Grundsätze noch als Lehrsätze hat.

Wir führen nun noch eine weitere Bestimmung der Geraden auf in dem Satze: „Aus einem Punkte kann man nur eine Senkrechte auf eine Gerade fällen.“ Dieser Satz ist in unsern Lehrbüchern nicht als Grundsatz, sondern als Lehrsatz enthalten, wird aber ebenso wie die grundsätzlichen Bestimmungen der Geraden verwendet, indem man ohne jegliches Citat von ihm Gebrauch macht, womit angenommen ist, dafs er ohne Hinweis auf Lehrsatz und Beweis wie jeder geometrische Grundsatz in unserer Anschauung vorhanden sei. In solcher Weise ist diese letzte Bestimmung der Geraden als Voraussetzung in dem Satze enthalten:

4. „Die aus der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks auf die Grundlinie gefällte Senkrechte halbiert die Grundlinie und den Winkel an der Spitze.“ Es sei nochmals darauf aufmerksam gemacht, dafs der bestimmte Artikel in diesem Satze der Voraussetzung gleichkommt, dafs die gefällte Senkrechte immer und nur in einem Exemplare vorhanden sei und dafs bei den Beweisen von Sätzen die Voraussetzungen derselben vor allen andern geometrischen Wahrheiten zu benützen sind.

Es soll nun die Frage erörtert werden, ob unsere Schulgeometrie die Folgerungen, welche aus dem Vorhandensein der bei Euklid fehlenden Sätze von der eindeutigen Bestimmung der Geraden gezogen werden müssen, ihre Berücksichtigung gefunden haben. Der erste der vier genannten Sätze über das gleichschenklige Dreieck wird mit der Kongruenz der Dreiecke bewiesen. Wenden wir nun auf ihn den Grundsatz an, dafs zwei Punkte eine einzige Gerade bestimmen, denselben Grundsatz, welcher es ermöglicht, den zweiten Satz mit dem bestimmten Artikel zu beginnen, so folgt, dafs die Halbierungslinie des Winkels an der Spitze des gleichschenkligen Dreiecks dieselbe Linie ist, von welcher der zweite Satz spricht, nämlich die Linie, welche die Spitze mit der Mitte der Grundlinie verbindet. Dieser zweite Satz ist also eine selbstverständliche Folgerung aus dem ersten. Gleiches gilt von den beiden letzten Sätzen. Wenn also die vier durch die Änderung der Euklidischen Grundlagen gewonnenen Grundsätze auch verwendet würden, so müfsten die drei letzten Sätze einfach als Folgerungen oder als andere Formen des ersten Satzes auftreten. Dieses ist aber in unsern Schulbüchern nicht der Fall. Zwei derselben werden durch Kongruenz und einer wird apagogisch bewiesen. Man kann sich leicht Rechenschaft davon geben, welch ungeheuren Umweg diese Kongruenzbeweise machen.

Bei dem zweiten Satze wird die Kongruenz aus der Gleichheit der drei Seiten geschlossen. Dieser Kongruenzsatz wird aber durch Aneinanderlegen der Dreiecke auf die Kongruenz aus Gleichheit zweier Seiten und des eingeschlossenen Winkels zurückgeführt (s. z. B. Mehler § 26).

Die Dreiecke werden mit den gröfsten Seiten an einander gelegt und nachgewiesen, dafs die Winkel an den vereinten Seiten spitz sein müssen. Für diese Bemerkung wird der Satz angewendet, dafs der gröfseren Seite der gröfsere Winkel gegenüberliegt. In letzterem Satze steckt wiederum die Benutzung der Sätze über die Winkelsumme des Dreiecks (bezw. den Aufsenwinkel) und die Winkel an der Grundlinie des gleichschenkligen Dreiecks. In dem Beweise dieses letzten Satzes ist das Ziehen der Halbierungslinie eines Winkels (Grundsatz von der eindeutigen Bestimmuug der Geraden) und die Anwendung des ersten Kongruenzsatzes enthalten. Nun wird in dem durch Aneinanderlegen der beiden Dreiecke entstandenen Viereck die Diagonale gezogen, der Satz von den Winkeln an der Grundlinie des gleichschenkligen Dreiecks zweimal angewendet, und zuletzt wird mit dem Grundsatz: „Gleiches zu Gleichem addiert giebt Gleiches“ der Kongruenzsatz auf die Kongruenz aus Gleichheit zweier Seiten und des eingeschlossenen Winkels zurückgeführt. Auf diese Weise braucht man zur

Zurückführung des Satzes 2 auf Satz 1 eine grofse Anzahl von Lehrsätzen und eine mehrfache Anwendung der eindeutigen Bestimmung einer Geraden, während man mit einer einzigen Anwendung eines Grundsatzes den Satz 2 auf 1 und dadurch ebenfalls auf den ersten Kongruenzsatz gründen könnte. Ein direkter Vergleich mit den Euklidischen Elementen kann nicht angestellt werden; denn die besprochene Satzgruppe findet sich daselbst nicht. Man kann aber den 3. Satz des 3. Buches heranziehen, welcher heifst: „Wenn in einem Kreise eine durch den Mittelpunkt gehende gerade Linie eine andere, nicht durch den Mittelpunkt gehende halbiert, so schneidet sie dieselbe unter rechten Winkeln; und wenn sie dieselbe unter rechten Winkeln durchschneidet, so halbiert sie dieselbe.“ Nach den Euklidischen Grundlagen ist hier nicht zu beanspruchen, dafs der zweite Teil des Satzes durch die einfache Anwendung eines Grundsatzes auf den ersten Teil zurückgeführt werde, aber es läfst sich leicht zeigen, dass der zweite Teil auf dem kürzesten Wege aus dem Satz 4 des I. Buches abgeleitet ist. Es ist nämlich durch Anwendung des Satzes 5 im I. Buche (Winkel an der Grundlinie des gleichschenkligen Dreiecks) die Kongruenz der Dreiecke nach Satz 26 des I. Buches geschlossen. Analysiert man diese Zurückführung, so ergiebt sich der Weg über die Sätze 26, 16, 15, 13, 11, 8, 5, 4 des I. Buches. Aufserdem wäre es noch möglich, einen apagogischen Beweis in folgender Art zu führen: Wenn die Behauptung des 2. Satzes unrichtig wäre, so könnte man die Sehne halbieren, den erhaltenen Mittelpunkt mit dem Centrum des Kreises verbinden und nach dem ersten Teile des Satzes schliefsen, dafs diese Verbindungslinie auch auf der Sehne senkrecht steht. Dieses ist aber mit Satz 16 des I. Buches (Satz über den Aufsenwinkel) in Widerspruch. Die Konstruktion des Mittelpunktes der Strecke würde mit Benutzung von I, 10. Satz (Aufgabe) durch die Sätze 9, 8, 7, 5 des I. Buches auf Satz 4 desselben Buches zurückgeführt sein. Dazu käme noch die Benutzung des ersten Teiles von III, 3 und zuletzt diejenige von I, 16, welche denselben Weg über 16, 15, 13, 11, 8, 5 des I. Buches darstellt, der in dem ersten Beweise des Satzes allein zum Ziele führt. Man sieht also, dafs der apagogische Beweis mehr Mittel erfordert als der direkte Kongruenzbeweis. Es zeigt sich also auch hier, dafs Euklid bei seinen Beweisen keine willkürlichen Umwege macht, sondern geraden Weges auf das Ziel losgeht. Allerdings kann nicht geleugnet werden, dafs die Beweise Euklids schwerfällig sind, aber die Ursache davon liegt nur in den Grundlagen des Systems; die Zurückführung der Lehrsätze auf diese Grundlagen ist untadelhaft und begründet den Ruf des Euklidischen Systems in Bezug auf logische Schärfe. Über die Schwerfälligkeit des Euklidischen Systems spricht sich wohl am schärfsten der Philosoph Arthur Schopenhauer aus, wenn er zum Beispiel sagt*): „Des Eukleides logische Behandlungsart der Mathematik gleicht einem Wanderer, der Nachts einen hellen festen Weg für Wasser haltend sich hütet ihn zu betreten, und stets daneben auf holperichtem Boden geht, zufrieden von Strecke zu Strecke auf das vermeintliche Wasser zu stofsen“ und „Man hat die unangenehme Empfindung wie nach einem Taschenspielerstreich, und in der That sind einem solchen die meisten Euklidischen Beweise täuschend ähnlich. Fast immer kommt die Wahrheit zur Hinterthür herein, indem sie sich per accidens aus irgend einem Nebenumstande ergiebt. Oft schliefst ein apagogischer Beweis alle Thüren, eine nach der andern zu, und läfst nur die eine offen, in welche man nun blofs deswegen hinein muss.“ Dagegen sagt Schopenhauer auch: „Indessen verdient die Art und Weise, wie Eukleides dieses durchgesetzt hat, alle Bewunderung, die ihm so viele Jahrhunderte durch geworden ist.“ Der Tadel Schopenhauers bezieht sich daher nicht auf die logische Ableitung, sondern nur auf die Grundlagen des Systems, welche nach seiner Meinung die Anschauung zu wenig benutzen. Schopenhauer vergleicht in dieser Beziehung das Euklidische System mit einem Menschen, der sich die gesunden Beine abschneidet, um auf Krücken gehen zu können. Wir erwähnen die Urteile Schopenhauers nicht, um in eine Beurteilung des Euklidischen Systems einzugehen; denn eine solche ist nicht der Zweck dieses kleinen Aufsatzes. Wir wollen nur konstatieren, dafs das abfällige Urteil des berühmten Philosophen vollauf zutrifft, wenn man es auf die gegenwärtige Schulgeometrie anwendet.

Gerade die Gruppe der oben genannten 4 Sätze über das gleichschenklige Dreieck wäre geeignet, die Schwerfälligkeit des Euklidischen Systemes in das schärfste Licht zu stellen, aber die Euklidischen Elemente enthalten diese Sätze nicht. Gegen die Fassung dieser Satzgruppe und die zugehörigen Beweise in unserer Schulgeometrie wäre es ein sehr geringer Tadel zu sagen, dafs die Wahrheit zur Hinterthür hereinkomme. Es treten daselbst nacheinander vier Linien auf, von welchen man nach dem ersten Satze sofort einsehen mufs, dafs sie eigentlich eine und dieselbe Linie sind, aber trotzdem wird das Versteckspiel bis zuletzt fortgesetzt, da nicht einmal am Schlusse das Zusammenfallen der vier Geraden erwähnt wird. Sollte es vielleicht für unnötig gehalten werden, dieses

*) Die Welt als Wille und Vorstellung, I, S. 84 u. 86.

zu sagen, da jedermann es von selbst erkennt? Mit einer solchen Rechtfertigung würde ja eben der Fehler zugestanden, welcher durch die Beweise der drei letzten Sätze begangen wird; denn man kann am Schlusse des 4. Satzes das Zusammenfallen der vier Linien nicht anders einsehen als nach dem Beweise des ersten Satzes (eben durch die Grundsätze über die eindeutige Bestimmung einer Geraden). Die Sache liegt also derart, dafs diejenige Wahrheit, welche sofort nach dem Beweise des ersten Satzes einleuchtend ist, sobald man nur die übrigen Linien nennen hört, gar nicht kommt, nicht einmal durch die Hinterthüre. Dabei mufs man nicht etwa glauben, dafs ein tieferliegendes Bedenken gegen die Anwendung der Grundsätze von der eindeutigen Bestimmung der Geraden vorhanden sei. In Mehlers Elementen zum Beispiel wird einer der vier Sätze durch einen solchen Grundsatz bewiesen und in der Elementarmathematik von Kambly sind in einer ganz analogen Satzgruppe über die Tangente des Kreises die 3 letzten Sätze als andere Formen des ersten Satzes aufgeführt, was eben auch nur durch die Anwendung jener eindeutigen Bestimmungen möglich ist. Die Art der Behandlung jener 4 Sätze über die Symmetrielinie des gleichschenkligen Dreiecks in unserer Schulgeometrie zeichnet sich also durch den Mangel aller festen Regeln über die Systematik aus. In der Geometrie der Lage ist ein ähnliches Schwanken nicht zu beobachten. Man stellt daselbst eindeutige Bestimmungen nicht nur auf, sondern benützt sie auch unbedenklich. Allerdings liegen hier die Verhältnisse etwas anders. In der Euklidischen Geometrie k a n n man noch ohne diese eindeutigen Bestimmungen auskommen, wie die Euklidischen Elemente zeigen; in der Geometrie der Lage wäre dieses unmöglich. Der Aufbau dieser Wissenschaft würde undenkbar sein, wenn man die Benutzung des Satzes: „Zwei projektivische Gebilde fallen zusammen, wenn dieselben drei Elemente entsprechend gemein haben“ ebenso vermeiden wollte, wie in der behandelten Satzgruppe der Grundsatz vermieden wurde: „Zwei gerade Linien fallen zusammen, wenn sie zwei Punkte gemein haben.“ Wenn sich demnach unsere Schulgeometrie eng an Euklid anschlösse, so könnte man ihr nur den einen Vorwurf machen, dafs sie zwischen sich und andere geometrische Disciplinen eine Kluft bringt. So aber, wie die Umstände thatsächlich liegen, wird die Schulgeometrie von dem schweren Vorwurfe der Inkonsequenz getroffen, da dieselbe von den Grundsätzen Euklids in den wesentlichsten Dingen abweicht, sich durch diese Änderungen nicht nur die Möglichkeit, nein, die Notwendigkeit schafft, in anderer viel unmittelbarerer Art die

Beweise zu führen, und dieses dennoch nicht thut, sondern so beweist, wie es Euklid thun müfste, und dabei immer noch den Anspruch auf Euklidische Konsequenz macht, obgleich sie dieselbe zerstört hat. Dafür, dafs die Behandlungsweise unserer Lehrbücher noch oft für Euklidisch gehalten wird, sind leicht Belege zu finden. Man kann z. B. in den Recensionen geometrischer Lehrbücher häufig Aussprüchen begegnen wie dem folgenden: „Das Lehrbuch des N. N. ist unter denjenigen, welche nach Euklidischer Weise abgefafst sind, eines der besten.“ Die Euklidische Weise kann doch nur darin bestehen, dafs Euklid sein System auf seine eigenen Grundsätze in der konsequenten Weise aufbaut, welche sprichwörtlich geworden ist. Diese Grundlagen zu ändern, die Beweise aber beizubehalten oder äufserlich Euklidischen Beweisen nachzubilden, kann doch keine Euklidische Methode ausmachen. Wir wollen nur noch ein Beispiel anführen, welches zeigt, wie sorgsam Euklid zu Werke geht und wie wenig man ihm gefolgt ist. Der erste Kongruenzsatz heifst bei Euklid: „Wenn in zwei Dreiecken zwei Seiten zweien Seiten eine jede für sich gleich sind und ein Winkel einem Winkel gleich ist, so ist auch die dritte Seite der dritten gleich; auch sind die Dreiecke selbst einander gleich, und von den übrigen Winkeln sind die, welche gleichen Seiten gegenüber liegen, ebenfalls einander gleich“. Wenn also Euklid später diesen Satz anführt, um aus der Gleichheit zweier Seiten und des eingeschlossenen Winkels die Gleichheit der dritten Seiten zu schliefsen, so ist dieser Schlufs ein unmittelbarer. Bei uns ist jener Kongruenzsatz verändert worden. Man sagt: „Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel entsprechend gleich haben“ und verbindet damit den andern Satz: „In kongruenten Dreiecken sind entsprechende Stücke gleich.“ Bei Führung des Beweises zum ersten Kongruenzsatze mufs man aber notwendig zuerst das Zusammenfallen der dritten Seiten beobachten, bevor man sagen kann, die Dreiecke seien kongruent. Wenn nun durch das Citat dieser beiden Sätze die Gleichheit der dritten Seiten geschlossen werden soll, so geht man mit den Schlüssen über die Gleichheit der dritten Seiten hinaus zur Kongruenz der Dreiecke und wieder mit dem letzten Satze von dieser Kongruenz zur Gleichheit der dritten Seiten zurück*). Euklidisch darf man ein solches Verfahren nicht mehr nennen, und man darf unter solchen Umständen nicht mehr behaupten, dafs das

---

*) Die Kongruenzsätze dürfen nur dann in der jetzt üblichen Weise gefafst werden, wenn die Kongruenz aus der eindeutigen Konstruktion der Dreiecke geschlossen wird.

streng logische Denken mit dem geometrischen Unterrichte hauptsächlich geübt werden solle. Ein weiterer Beleg dafür, dafs man gegenwärtig noch glaubt, mit unserer Schulgeometrie dem Euklid sehr nahe zu sein, liegt auch darin, dafs in der mathematisch-naturwissenschaftlichen Sektion der Versammlung Deutscher Philologen und Schulmänner in Dessau die Frage erörtert wurde, ob unsere Schüler die Euklidischen Beweise verstehen könnten. Einer der Teilnehmer äufserte:*) „Dafs der Quartaner die Euklidischen Beweise noch nicht zu fassen vermöge, widerstreitet meiner 40jährigen Erfahrung". Mit diesen Euklidischen Beweisen will sich der Redner doch gewifs nicht auf das Studium der Euklidischen Elemente beziehen, welche wohl an keiner Anstalt Deutschlands in ihrer Reinheit gelehrt werden dürften. Sind aber damit die sogenannten Euklidischen Beweise unserer Schulgeometrie gemeint, so sollte man mit dem Wunsche, dieselben zum Verständnis unserer Schüler zu bringen, vorsichtig sein; denn unter Umständen gehört es auch zu dem vollen Verständnis einzusehen, dafs diese Beweise mit den Grundlagen des Systemes nicht im Einklang stehen.

Denjenigen gegenüber, welche wünschen, dafs die Geometrie Euklidisch betrieben werde, und auch zum Teile glauben, dafs dieses gegenwärtig noch geschehe, steht eine bedeutende Zahl von Pädagogen gegenüber, welche der Ansicht sind, dafs die Darstellung der Schulgeometrie noch eine Entwickelung durchzumachen habe, und es erscheint schon seit mehr als einem Jahrzehnt alljährlich eine Reihe von Schriften, welche sich mit dieser Reform beschäftigen. Wenn es diesen Schriften nur sehr unvollkommen gelungen ist, das herrschende Vorurteil zu zerstören, so liegt die Ursache nicht zum wenigsten darin, dafs die Verfasser jener Aufsätze und Lehrbücher den Zweck derselben unrichtig angeben. Sie machen nämlich geltend, dafs das Euklidische System in seiner Starrheit die heutigen Anforderungen nicht befriedigen könne, und wollen dasselbe beseitigen oder umwandeln. Dadurch erwecken sie den Glauben, dafs der Schule etwas Altbewährtes genommen werden solle, und rufen einen Widerstand hervor, welcher, wenn er auch hauptsächlich in der Liebe zu langgeübten Gewohnheiten seinen tiefern Grund hat, doch sehr gern und mit grofsem Erfolg den Ruhm des grofsen Geometers aus dem Altertum als Schild benutzt. Jenes von den Freunden der Reform aufgestellte Programm ist aber zum mindesten sehr ungenau gefafst. Das Euklidische System hindert heutzutage keinen Fortschritt mehr. Die Wissenschaft und die Schule

*) Zeitsch. f. math. u. naturwissenschaftl. Unterricht XII. S. 69.

haben sich beide von den Euklidischen Grundlagen abgewendet, und die Schule kann kein anderes Ziel mehr verfolgen als die Aufstellung eines neuen in sich selbst harmonischen Baues auf dem vorhandenen neuen Fundamente. Es handelt sich also nicht um eine Reform des Euklidischen Systemes, sondern um eine solche unserer Schulgeometrie, welche die Brücke zwischen sich und dem Euklidischen Werke schon abgebrochen hat. Das Euklidische System kann und soll in seiner Reinheit noch heute der lohnende Gegenstand des Studiums von Fachleuten sein, aber es verträgt keinen teilweisen Umbau, es gleicht einem Kunstwerke, welches man als Ganzes nehmen mufs. Die Hochschätzung der Euklidischen Elemente, ja die pietätvolle Liebe zu diesem Werke werden durch die Entwickelung unserer Schulgeometrie nicht geschädigt.

Wenn von einer Verletzung der Pietät gesprochen werden kann, so kommt sie nicht auf Rechnung der sogenannten Neuerer, sondern auf Rechnung derjenigen, welche die Schulgeometrie in ihrer heute herrschenden Gestalt aufgebaut haben, welche gewissermafsen in einen modernen Bau Stücke eines von ihnen zerschlagenen alten Kunstwerkes eingemauert haben. Die Freunde der Reform wollen ja nur das bereits Begonnene zur Einheit durchführen, sie wollen unsere Schulgeometrie der Euklidischen Konsequenz wieder näher bringen. Sie thun dieses unter Aufopferung von manchem Formalismus, der nur äufserlich an Euklid erinnert, weil sie die innern Eigenschaften der Euklidischen Elemente höher halten als ihre äufsere Form.

Um nun aus den angestellten Betrachtungen diejenigen Folgerungen zu ziehen, welche man mit aller Sicherheit aufstellen kann, obgleich diese Ausführungen sich nur auf einen sehr kleinen Teil unserer Schulgeometrie beschränken, soll noch die folgende These formuliert werden:

Die gegenwärtige Schulgeometrie ist wegen der Veränderungen der Grundlagen nicht mehr als dem Wesen nach Euklidisch zu betrachten. Dieselbe darf nicht den Anspruch auf Schonung aller in ihr enthaltenen Euklidischen oder äufserlich nach Euklid geführten Beweise machen, da dieselben in manchen Fällen mit jenen veränderten Grundlagen in Widerspruch stehen. Die Reform der Schulgeometrie hat jedenfalls in denjenigen Veränderungen volle Berechtigung, welche die Herstellung der Einheit zwischen den Grundlagen und dem Aufbau des Systemes bezwecken.

Druck von C. H. Schulze & Co. in Gräfenhainichen.