Z LITERATURY.

Dr. fil. Ł. Böttcher. Docent-Adjunkt Matematyki c. k. Szkoły Politechnicznej we Lwowie. — *Zasady algebry elementarnej.* — Podręcznik i zbiór zadań dla szkół.... Wydawnictwo M. Arcta w Warszawie, r. 1911. Str. VI+704. Cena 2 rb. 50 kop.

Dzieło d-ra Böttchera zostało przezeń umyślnie dostosowane do „ustalonego programu wykładów“ w szkołach Królestwa Polskiego. Niezależnie od tego, objętość książki, jej poziom naukowy i użycie najnowszych metod dydaktycznych czynią z jej ukazania się fakt dość ważny w dziedzinie naszego piśmiennictwa naukowego.

Zawartość książki rozpada się, w sposób zapewne nie przypadkowy, ani z powodów czysto technicznych (aczkolwiek celowość w tym względzie nie zawsze się uwydatnia) na dwa działy, odbite odmiennemi czcionkami. Drukiem drobniejszym odbito wszystkie niemal „Ćwiczenia“, tworzące razem zbiór zadań, w liczbie ogólnej przeszło $2\frac{1}{2}$ tysięcy, wiele przykładów wyjaśnionych i wskazówek szczegółowszych, część zobrazowań i zastosowań gieometrycznych, część dowodów oraz rozdziały następujące: przekształcanie i rozwiązywanie nierówności, przybliżone rozwiązywanie równań, wyciąganie pierwiastka sześciennego i wogóle pierwiastka n-go stopnia, rozwiązywanie równań ogólnych 3-go i 4-go stopnia, bardziej złożone układy równań i zasada Bézouta, użycie logarytmiki i suwaka rachunkowego, kryterja zbieżności szeregów, szereg potęgowy, wiadomości szczegółowsze o liczbie e i rozwinięciu e^x, kapitalizacja ciągła, parę metod rozwiązania równań nieoznaczonych 1-go stopnia i t. p. W pozostałej mniejszej części, obok teorji i tematów, najbardziej elementarnych, zostały wyłożone kwestje następujące: gieometryczne przedstawienie funkcji jednej zmiennej, znaczenie i użycie wyznaczników 2-go i 3-go rzędu, badanie nierówności kwadratowej, początki teorji wektorów w zastosowaniu do liczb zespolonych, warunki istnienia wspólnego rozwiązania dwu równań (linjowego i kwadratowego, obu kwadratowych), rozwiązywanie typowych układów dwuch równań kwadratowych, interpolacja szeregu arytmetycznego i gieometrycznego. Początki rachunku różniczkowego i całkowego zostały zupełnie pominięte — autor zapowiada wykład tych zagadnień w osobnym podręczniku.

Zasadniczym założeniem książki miało być rozwinięcie pojęcia funkcji i myślenia funkcjonalnego; istotnie zmierza do tego celu i plan podręcznika i sporo odpowiednich podkreśleń i wyjaśnień, najskuteczniejszy zaś środek stanowi zapewne metoda graficzna, z całą jej obrazowością, nie wyłączającą wytwornej nieraz zupełności i ścisłości. Djagramy funkcji w ścisłym znaczeniu tego słowa oraz inne obrazy gieometryczne, podane w książce D-ra Böttchera, wraz z umiejętną ich interpretacją, posiadają wielką wartość dydaktyczną zarówno same przez się, jak ze względu na zastosowania, których mogą stać się wzorem.

Drugiemu zasadniczemu zagadnieniu — uogólnienia liczby — poświęcono również wiele miejsca i specjalnej uwagi; w tym zakresie jednak zaznaczyłbym pewną niejednolitość i niezupełną udatność. Po wykładzie pojęć wstępnych, autor w części I-ej (Zasady elementarnego rachunku algiebraicznego) trzyma się głównie metody formalnej, opartej na zasadzie wprowadzania nowych liczb, jako wyników działań dotychczas „niemożliwych", przy jednoczesnym zachowywaniu praw, rządzących temi działaniami („principe de permanence"); liczby względne i ułamkowe są tutaj nawiązane do rozważania pewnych rodzajów „par sprzężonych" (różnic i ilorazów). Natomiast w dalszym ciągu w żywym i jasnym wykładzie teorji liczb niewymiernych (str. 378 i nast.) i zespolonych (str. 339 i nast., 505 i nast.) obrazy gieometryczne i ogólnie bezpośrednia intuicja wielkości uzyskały stanowisko równorzędne, a nawet przeważające. W tym właśnie widzę wspomnianą niejednolitość. Dalej, metoda formalna i abstrakcyjna, w ścisłym znaczeniu tego słowa, nieodłączną od swej istoty suchość i drobiazgowość winna wynagrodzić: 1) przejrzystością układu; 2) wyliczeniem wszystkich pewników i postulatów; 3) poruszeniem sprawy ich zgodności i niezależności. Co do pierwszego z wymienionych warunków, plan ogólny 1-ej części książki, polegający na przechodzeniu od znaczenia arytmetycznego działań do ich znaczenia algiebraicznego i wyciąganiu stąd stopniowemu dalszych wyników, został wykonany naogół konsekwentnie — szkoda tylko, że podobnie jak przy innych działaniach nie została uwydatniona różnica pomiędzy pojęciem sumy arytmetycznej i algiebraicznej. Co do trzeciego warunku, znajdujemy zaledwie napomknienie przy omawianiu iloczynu algiebraicznego, co do drugiego wreszcie, brak we właściwym miejscu określenia stosunku równości i odnośnych postulatów, co odbiera rzetelną wartość np. dowodowi równości dwuch różnic (str. 57). Ogólnie, nauczyciel, zwłaszcza o skromniejszym przygotowaniu, nie znajdzie w omawianym dziale książki wyzyskania wszystkich korzyści ścisłej metody formalnej ani zupełnie jasnego naukowego drogowskazu, umysł zaś przeciętnego ucznia kl. III-ej lub IV-ej — nawet przy dodatkowym użyciu w dość znacznej dozie dołączonych przez autora środków poglądowych — może być łacno przytłoczony nadmiarem abstrakcji i djalektyki. Zapewne, odszukanie właściwego kompromisu pomiędzy ścisłością a poglądowością w nauczaniu początków algiebry nie jest rzeczą łatwą; zdaje się jednak, że np. tradycyjne rozważanie wielkości „przeciwnych" wogóle i „zwrotów" na prostej w szczególności, w połączeniu z bardziej naturalną, empiryczną poniekąd interpretacją działań (jak w podręczniku Feldbluma) lepszą stanowi podstawę (nie ilustracją tylko!) teorji elementarnej liczb względnych, niż szczegółowe badanie własności różnic.

Część II — zasadnicze wiadomości z teorji funkcji całkowitych — pisana z wielką ścisłością, acz z pominięciem dowodów, wynikających bezpośrednio z teorji sum i różnic, odróżnia się od podawanego zwykle w tym dziale materjału tylko wprowadzeniem wykresów. Po krótkim rozdziale, dotyczącym funkcji ułamkowych, przechodzimy do teorji ogólnej równań i nierówności, do proporcji i sposobów rozwiązywania równań pierwszego stopnia. „Dyskusje graficzne", podane tutaj (str. 171, 239, 270) stanowią cenny środek poglądowy, o którego znaczeniu ogólniejszym mówiłem powyżej. W roztrząsaniach, wyczerpujących zresztą, zagadnienia równoważności równań dobrzeby było jeszcze uwzględnić stratę rozwiązania nieskończonego przy odrzucaniu mianownika w tym przypadku, gdy stopień jego jest wyższy od stopnia licznika (str. 181). Wiadomości o różnych wypadkach mnożenia i dzielenia liczb równych i nierównych (str. 200, 201 i nast.), nie nadają się w całości do obowiązkowego wykładu, stanowią jednak dobry zbiór wskazówek i materjał do ćwiczeń. Po teorji wyrażeń pierwiastkowych następuje, jak zwykle, teorja równania kwadratowego — pewne wątpliwości pod względem dydaktycznym nasuwa rozpatrywanie równań kwadratowych niezupełnych, jako wypadków szczególnych, po równaniu zupełnym. Wyciąganie pierwiastków kwadratowych i sześciennych następuje dopiero po tym dziale. Równocześnie mamy dalszy ciąg procesu uogólnienia liczby, podany w sposób, omówiony już powyżej; uzupełnienie, dotyczące liczb zespolonych, znajdujemy jeszcze później, w końcu teorji równań, po określeniu pojęcia funkcji i liczby algiebraicznej, przy roztrząsaniu równań dwumiennych (str. 505 i nast.). W dziale liczb niewymiernych zasługuje na uwagę i uznanie przytoczenie teorji Dedekinda (str. 383—387), ilustrowane przez ogromnie poglądowe wykresy. Zaznaczyłbym tylko, że zaliczenie liczby wymiernej jednocześnie do obu klas, przez nią określonych, niższej i wyższej (str. 385) stanowi nieścisłość, niezgodną zresztą ze sformułowaniem, podanym o kilkanaście wierszy wyżej. Obok paru niedomówień małej wagi, możnaby jeszcze zauważyć, że określenie na początku str. 388 stosuje się właściwie tylko do następujących po sobie wartości przybliżonych przez n i e d o m i a r, nie zaś przez nadmiar lub ogólniej pojętych. Warunki istnienia spólnych rozwiązań dwuch równań kwadratowych stanowią pożyteczne uzupełnienie teorji podstawowej równania drugiego stopnia; dział, dotyczący układów 2-ch równań kwadratowych i wyższego stopnia oraz układów 3-ch równań, zawiera wskazówki nader cenne i praktyczne, które mogą się przyczynić do rozwinięcia w uczniach tak ważnego poczucia symetrji i wykwintu w sposobach rozwiązywania zagadnień. Natomiast, po szczegółowym wykładzie teorji połączeń i dwumianu Newtona, rozważania i ćwiczenia, dotyczące wykładników ujemnych i ułamkowych, zostały podane w dozie z b y t s k r o m n e j, a tymczasem rozszerzenie w tych kierunkach znaczenia funkcji potęgowej nastręcza nieraz młodzieży wielkie trudności i wymaga sporo uwagi nauczyciela. Dowód ne stronie 565 mógłby być uproszczony przez użycie jednego z odnośnych przepisów, dającego odrazu: $(a^{\frac{m}{n}})^{n} = a$. Przy stosowaniu indukcji zupełnej (str. 538, 675) nie wadziło nazwać ją po imieniu i zastanowić się osobno nad jej prawem; w pożytecznym wstępie do teorji postępów (ciągi i szeregi wogóle) należało podać wyraźnie określenie zwykłe g r a n i c y i rozważania co do granicy różnych funkcji wielkości zmiennych, zdążających do danych granic. Można to było zresztą uczynić wcześniej, np. przy liczbach niewymiernych. Pojęcie zbieżności otrzymałoby w ten sposób pewniejszą podstawę, niż sama i n t u i c j a granicy, na tym poziomie nauki bez zbytnich trudności dająca się podporządkować ściślejszym omówieniom. Do powyższych uwag dodam jeszcze, że dowód tw. 1-go na str. 625 mógłby być bardziej bezpośredni, że dalej kryterjum Cauchy'ego, o ile chodzi o szereg jakikolwiek, winno być podawane w postaci:

$$\lim \sqrt[n]{|u_n|} < h < 1 \text{ lub } \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} < h < 1 \,,$$

zawierającej wartości bezwzględne (str. 633), że wreszcie szereg jest rozbieżny zarówno wtedy, gdy suma dąży do $-\infty$, jak gdy zmierza do $+\infty$ (str. 609).

Wyszczególnione powyżej braki lub punkty sporne dotyczą w znacznej mierze konstrukcji dzieła — w następnych wydaniach mogą być poczynione w tym względzie pożyteczne uzupełnienia i zmiany. Zastrzeżenia te jednak nie niweczą faktów, nadających istotną i głębszą wartość wykładowi „Zasad algiebry". Poważna i z pierwszych źródeł płynąca wiedza autora znajduje wyraz w rozległym podłożu metodycznym, w swobodnych zestawieniach i umiejętnych zastosowaniach, wykraczających daleko poza zakres szkolarskiego mechanizmu, w wyczerpujących rozbiorach i cennych wskazówkach praktycznych. Ćwiczenia, wiążąc się ściśle z tekstem, wymagają nieraz sporo pomysłowości i mogą ją rozwinąć w uczniach — zasługuje na szczególną uwagę dział równań, uwzględniający mnóstwo zagadnień natury bardzo konkretnej, czerpanych z gieometrji, z życia praktycznego, z fizyki, mechaniki i t. p. Widać wyraźne dążenie, tak zbawienne, do rozsuwania konwencjonalnych przegródek, do wyrabiania zdolności stosowania wiedzy w życiu i metod jednego działu nauki w innych.

Język książki jest naogół poprawny — niepotrzebnie autor waha się pomiędzy dwiema formami: „pierwiastkowy" i „pierwiastnikowy", z których właściwie należałoby pozostać przy pierwszej; za mało może dbałości o swojskość terminów (użycie wielokrotne wyrazu „nonsens" zamiast „niedorzeczność"; zamiast „djagramu" w książkach technicznych czytamy już dawno swojski wyraz „wykres"); zamiast „szemat" należy pisać „schemat". Dobry natomiast pomysł stanowi usunięcie dwuznaczności nazwy „pierwiastek", przez usunięcie jej z obiegu w znaczeniu rozwiązania równania. Korekta „zasad" dość staranna; wykresy dokładne i czyste, gorsze są rysunki cieniowane (rys. 36, 37).

T. Łazowski.