

230/2012

**Raport Badawczy**  
**Research Report**

**RB/56/2012**

**Mechanizmy aukcji  
i przetargów uwzględniające  
preferencje wielokryterialne  
i wieloatrybutowe**

**L. Kruś, E. Toczyłowski**

**Instytut Badań Systemowych**  
**Polska Akademia Nauk**

**Systems Research Institute**  
**Polish Academy of Sciences**



# **POLSKA AKADEMIA NAUK**

## **Instytut Badań Systemowych**

ul. Newelska 6

01-447 Warszawa

tel.: (+48) (22) 3810100

fax: (+48) (22) 3810105

Kierownik Zakładu zgłaszający pracę:  
dr inż. Lech Krus

Warszawa 2012

# Mechanizmy aukcji i przetargów uwzględniające preferencje wielokryterialne i wieloatrybutowe\*

Lech Kruś<sup>1</sup>, Eugeniusz Toczyłowski<sup>2</sup>,

<sup>1</sup>Instytut Badań Systemowych Polskiej Akademii Nauk

<sup>2</sup>Instytut Automatyki i Informatyki Stosowanej  
Politechniki Warszawskiej

30 października 2012

## 1 Wprowadzenie

Przedmiotem pracy są sytuacje decyzyjne, w których występuje pewna liczba agentów działających na rynku. Rozpatrywana jest możliwość współpracy jednego z agentów z innym lub z innymi. Nawiązanie współpracy może nastąpić w wyniku przetargu albo aukcji. Współpraca agentów jest możliwa, jeśli oczywiście jest korzystna dla każdego z nich. Zakłada się, że każdy z agentów ma swój indywidualny zestaw celów, które chce osiągnąć w wyniku współpracy. Poziom osiągnięcia tych celów jest mierzony przez określony wektor kryteriów. W ogólnym przypadku, każdy z agentów ma inny wektor

---

\*Praca częściowo finansowana ze środków na naukę w latach 2010-2012 w ramach projektu badawczego nr N N514 044438 "Rozwój efektywnych i motywacyjnie zgodnych modeli i mechanizmów decyzyjnych w systemach wieloagentowych".

kryteriów, a kryteria te są konfliktowe zarówno w przypadku pojedynczego agenta jak i między agentami. Każdy z agentów ma również swoje indywidualne preferencje w przestrzeni swoich kryteriów. W sytuacji wyboru partnera czy partnerów współpracy, istotne jest ustalenie warunków tej współpracy uwzględniających korzyści każdej ze stron ze względu na jej kryteria i preferencje. Informacja o możliwościach każdego agenta a także o jego preferencjach ma charakter prywatny, jest poufna i nie jest udostępniana innym agentom. W wielu przypadkach agent na początku procesu przetargowego nie jest w pełni świadomy swoich preferencji ze względu na brak dostatecznej informacji. Swoje preferencje może w pełni określić dopiero znając i porównując osiągalne warianty współpracy.

Rozpatrzmy najprostszą sytuację uzgadniania zakupu pewnej usługi w formie targu o cenę. W trakcie targu, strony wymiennie podają swoje ceny usługi, próbując osiągnąć porozumienie. Porozumienie to jest możliwe pod warunkiem, że istnieje niepusty przedział cen korzystnych dla każdej ze stron zwany obszarem porozumienia. W przypadku tradycyjnych negocjacji pozycyjnych często dochodzi do impasu i może nie dojść do porozumienia, mimo że zbiór porozumień jest niepusty i istnieje potencjalne rozwiązanie korzystne dla obu stron. Rozwiązaniem może być odejście od negocjacji pozycyjnych i zastosowanie odpowiedniej procedury mediacyjnej. Problem jest jeszcze bardziej złożony w przypadku, gdy każda ze stron ocenia korzyści z porozumienia za pomocą swojego wektora kryteriów. Powstaje problem znalezienia wariantu porozumienia, który zostanie przez obie strony zaakceptowany mimo tego, że występuje konflikt kryteriów każdej ze stron a także między stronami.

Prezentowana praca wchodzi w skład szerszego kierunku badań obejmujących analizę motywacyjnie zgodnych wielokryterialnych mechanizmów decyzyjnych w systemach wieloagentowych. Przedmiotem badań są mechanizmy decyzyjne prowadzące do zgodności motywacji przez odpowiednią harmonizację działań w celu zapewnienia efektywności funkcjonowania całego systemu. Problemy dotyczące zgodności motywacji w mechanizmach rynkowych były wcześniej rozpatrywane w pracach (Toczyłowski 2003, 2009). Rozwijane w tych pracach idee stanowiły inspirację do podjęcia badań prezentowanych w niniejszej pracy.

W tej pracy rozważane są trzy klasy zagadnień:

wspomaganie procesu przetargowego w przypadku dwóch decydentów, z których każdy na swój odrębny zestaw kryteriów,

mechanizmy akcji przy wielokryterialnych celach ich organizatora i oferentów,

zagadnienie decyzji motywacyjnie zgodnych na przykładzie problemu producenta i klientów.

Układ pracy jest następujący.

Po wprowadzeniu, w drugim punkcie pracy formuluje się wielokryterialne zagadnienie przetargowe w przypadku dwóch decydentów oraz proponuje się mechanizm targu z zastosowaniem procedury mediacyjnej. W procedurze tej strony szukają swoich preferowanych wariantów współpracy przy wykorzystaniu podejścia punktu referencyjnego analizy wielokryterialnej, a propozycje mediacyjne generowane są przy wykorzystaniu koncepcji rozwiązań wielokryterialnego problemu targu, mających określone właściwości rzetelności. Istotnie jest przy tym uwzględnienie w proponowanej propozycji mediacyjnej preferencji każdej ze stron. Rolę mediatora pełni system komputerowy, z którym porozumiewają się strony uzgadniające warunki współpracy. Przedstawiane propozycje stanowią rozwinięcie idei będących m. in. przedmiotem prac (Kruś 2011, 2001, Kruś, Bronisz 1993).

W trzecim punkcie pracy rozpatruje się mechanizmy aukcji wielokryterialnych. Zagadnienia mechanizmów aukcyjnych w przypadku skalarnych ocen ofert były przedmiotem wielu prac, np. (Klemperer 2004), (Milgrom, Weber 1982), (Vickrey 1961). W przypadku aukcji wielokryterialnych w kolejnej rundzie nie mamy do czynienia z kolejną ofertą o korzystniejszej (dla organizatora aukcji) cenie, ale ze zbiorem ofert ocenianych przez organizatora za pomocą określonego wektora kryteriów. Celowe jest przy tym wspomaganie analizy wielokryterialnej tych ofert dokonywanej przez organizatora oraz zaprojektowanie mechanizmu aukcji prowadzącego do oferty końcowej zgodnej z jego preferencjami. W większości prac rozpatrujących aukcje wielokryterialne stosuje się modele agregacji wielu kryteriów do wielkości skalarniej,

wykorzystując sumę ważoną, por. (De Smet 2007), (Teich et al. 2006), (Bichler Kalagnanam 2005). Wymagane jest przy tym ujawnienie oferentom informacji o modelu preferencji organizatora aukcji. Na uwagę zasługują prace wykorzystujące idee punktu referencyjnego (Bellosta et al. 2004), (Ogryczak, Kozłowski 2011). W niniejszej pracy przedstawia się ogólny schemat prowadzenia aukcji wielokryterialnych z uwzględnieniem wspomaganie analizy wielokryterialnej prowadzonej przez organizatora aukcji i oferentów. Rozważa się przy tym różne sposoby określania sposobu poprawy ofert w kolejnych rundach, wynikające z relacji dominacji w przestrzeni kryteriów. Rozpatruje się następnie przykłady realizacji wielokryterialnego przetargu zamkniętego z wykorzystaniem wieloagentowego systemu komputerowego. System wspomaga realizację przetargu, wielokryterialne analizy dokonywane przez organizatora przetargu oraz symulację i analizę różnych zachowań organizatora i uczestników przetargu. Wspomaganie decyzji organizatora przetargu realizowane jest metodą punktu referencyjnego. Przedstawia się sformułowania matematyczne oraz wybrane wyniki przeprowadzonych sesji i ich analizę. Wybrane wyniki tych badań eksperymentalnych były również wcześniej prezentowane w pracy (Kruś, Skorupiński, Toczyłowski 2011).

W czwartym punkcie pracy jest rozpatrywany rynkowy problem producenta i nabywców jego produktu, który służy jako przykład do analizy zagadnienia motywacyjnie zgodnych, wielokryterialnych mechanizmów decyzyjnych z wykorzystaniem komputerowych systemów wieloagentowych. Nabywcy oceniają różne warianty produktu ze względu na własne kryteria. Producent decyduje, który wariant wprowadzi na rynek i zaoferuje klientom. W celu harmonizacji interesów obu stron, wśród kryteriów producenta, oprócz reprezentujących jego wewnętrzne preferencje, wprowadzono także kryterium uwzględniające stopień zadowolenia nabywców z oferowanego produktu. Poszukuje się rozwiązań zgodnych z preferencjami klientów i z preferencjami producenta. Celem badań była analiza zachowań producenta i nabywców, oraz rozwiązań zgodnych z ich preferencjami. Zbudowany został odpowiedni system wieloagentowy wykorzystywany w przeprowadzonych badaniach eksperymentalnych. Przedstawia się wybrane wyniki tych badań. Zagadnienie powyższe było również przedmiotem pracy (Kruś, Skorupiński, Toczyłowski 2010).

Pracę kończy podsumowanie ważniejszych wyników badań oraz bibliografia.

## 2 Mechanizm znajdowania konsensusu w wielokryterialnym zagadnieniu przetargowym

### 2.1 Sformułowanie problemu

Rozpatrzmy przypadek 2 decydentów negocjujących warunki możliwej współpracy. Każdy decydent ma określone zmienne decyzyjne, oznaczone przez wektor  $x_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ik^i})$ , tj.  $x_i \in \mathbb{R}^{k^i}$ , gdzie  $k^i$  jest liczbą zmiennych decyzyjnych decydenta  $i = 1, 2$ , a  $\mathbb{R}^{k^i}$  jest przestrzenią jego decyzji. Wektor zmiennych decyzyjnych wszystkich decydentów oznaczamy przez:  $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^K$ ,  $K = k^1 + k^2$ , gdzie  $\mathbb{R}^K$  jest iloczynem kartezjańskim przestrzeni decyzji poszczególnych decydentów.

Zakłada się, że każdy decydent mierzy swoje wypłaty za pomocą wektora kryteriów,  $y_i = (y_{i1}, y_{i2}, \dots, y_{im^i}) \in \mathbb{R}^{m^i}$ , gdzie  $m^i$  jest liczbą kryteriów decydenta  $i$ , a  $\mathbb{R}^{m^i}$  jest przestrzenią jego kryteriów. Wektor kryteriów wszystkich decydentów oznaczamy:  $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^M$ ,  $M = m^1 + m^2$ .  $\mathbb{R}^M$  jest iloczynem kartezjańskim przestrzeni kryteriów poszczególnych decydentów.

Zakładamy, że dany jest model pozwalający obliczyć wypłaty decydentów, to jest wartości ich wektorowych kryteriów, przy założonych wariantach zmiennych decyzyjnych. Formalnie, zakładamy, że dany jest model określający zbiór dopuszczalnych decyzji  $X_0$ , oraz odwzorowanie  $W$  z przestrzeni zmiennych decyzyjnych w przestrzeń kryteriów. Zbiór osiągalnych wypłat  $S_0 = W(X_0)$  określony jest w przestrzeni kryteriów wszystkich decydentów. Natomiast każdy z decydentów ma dostęp do informacji tylko w swojej wielokryterialnej przestrzeni wypłat, w której można określić zbiór jego osiągalnych wypłat  $S_{0i}$ , gdzie  $i = 1, 2$ , będący podzbiorem zbioru  $S_0$ . Zbiór osiągalnych wypłat każdego z decydentów  $i$  zależy od zbioru jego decyzji dopuszczalnych oraz od decyzji podjętych przez pozostałych decydentów.

W przestrzeniach kryteriów wprowadzamy częściowy porządek. Niech  $\mathbb{R}^m$  oznacza pewną przestrzeń kryteriów. Każde z kryteriów może być maksymalizowane lub minimalizowane. Jednakże dla uproszczenia notacji, bez straty ogólności przyjmujemy, że decydenci maksymalizują swoje kryteria.

Niech  $z, y \in \mathbb{R}^m$ , mówimy, że

$z$  **słabo dominuje**  $y$  i oznaczamy  $z \geq y$ , gdy  $z_i \geq y_i$  dla  $i = 1, 2, \dots, m$ ,

$z$  **dominuje**  $y$  i oznaczamy  $z > y$ , gdy  $z_i \geq y_i, z \neq y$  dla  $i = 1, 2, \dots, m$ ,

$z$  **silnie dominuje**  $y$  i oznaczamy  $z \gg y$ , gdy  $z_i > y_i$  dla  $i = 1, 2, \dots, m$ .

Wektor  $z \in \mathbb{R}^m$  jest **słabo Pareto optymalny** (słabo niezdominowany) w zbiorze  $Y_0 \subset \mathbb{R}^m$  jeśli  $z \in Y_0$  i nie istnieje  $y \in Y_0$  taki, że  $y \gg z$ .

Wektor  $z \in \mathbb{R}^m$  jest **Pareto optymalny** (niezdominowany) w zbiorze  $Y_0 \subset \mathbb{R}^m$  jeśli  $z \in Y_0$  i nie istnieje  $y \in Y_0$  taki, że  $y \geq z$ .

Można sformułować zagadnienie przetargowe z wielokryterialnymi preferencjami decydentów (wielokryterialny problem targu) jako parę  $(S, d)$ , gdzie element  $d = (d_1, d_2) \in S \subset \mathbb{R}^M$  jest punktem braku porozumienia, a zbiór  $S$  zwany zbiorem porozumień jest podzbiorem zbioru osiągalnych wypłat  $S \subset S_0 \subset \mathbb{R}^M$ , które dominują punkt  $d$ . Zbiór porozumień określa wypłaty osiągalne przez decydentów, które mogą oni uzyskać pod warunkiem porozumienia - zgody wszystkich decydentów. W przypadku braku takiej zgody, wypłaty decydentów określone są przez punkt  $d$ . Przyjmujemy ogólne założenia dotyczące zagadnienia przetargowego:

**Z1** zbiór porozumień  $S$  jest zwarty i wypukły,

**Z2** zbiór  $S$  jest niepusty i zawiera co najmniej jeden punkt  $y \in S$  taki, że  $y \gg d$ ,

**Z3** punkt braku porozumienia  $d \in S_0$ , oraz dla dowolnego  $y \in S$ , spełnione jest  $y > d$ .

Przyjmujemy, że każdy decydent  $i, i = 1, 2$ , określa  $d_i \in \mathbb{R}^{m_i}$  jako swój punkt rezerwacji w przestrzeni swoich wypłat. Decydent rozpatrując możliwą współpracę, nie zgodzi się na propozycje kooperacyjne, które pogarszały by chociaż jedną ze składowych tego punktu. W zależności od rozpatrywanego problemu, decydent może przyjąć ten punkt jako aktualny punkt status-quo,



albo rozważając alternatywne przedsięwzięcia, określić go na podstawie koncepcji BATNA (Best Alternative to Negotiated Agreement) zaprezentowanej w pracy (Fisher, Ury 1981) i powszechnie stosowanej w procesie przygotowania stron do negocjacji. Zakłada się, że decydent przygotowując się do negocjacji zbiera informacje o innych możliwych alternatywnych przedsięwzięciach poza negocjowanym porozumieniem i wybiera spośród nich najlepszy wariant zgodnie ze swoimi preferencjami. Ten wariant oznaczony jako BATNA stanowi alternatywę dla negocjowanego porozumienia. Zakłada się, że wariant ten jest możliwy do przyjęcia, gdy porozumienia nie uda się osiągnąć.

Powstaje kwestia, jak można wspomagać decydentów w trakcie dokonywanej przez nich analizie sytuacji decyzyjnej, a także w znalezieniu zgodnego rozwiązania. Taka analiza powinna obejmować ocenę wypłat przy różnych założeniach dotyczących ich decyzji i decyzji pozostałych decydentów, pomocy w uświadomieniu własnych preferencji w przestrzeni wypłat, pomocy w znalezieniu przez decydentów rozwiązania niezdominowanego w zbiorze porozumień, zgodnego z ich preferencjami. Rozwiązanie to powinno spełniać zasady rzetelności („fair play”), aby mogło być zaakceptowane jako rozwiązanie kooperacyjne. W pracy proponuje się interakcyjną procedurę, w której występuje wspomaganie analizy wielokryterialnej każdego decydena z wykorzystaniem przedziałowej metody punktu referencyjnego A.P. Wierzbickiego oraz stosuje się ideę rozwiązania kooperacyjnego Nasha przy wyznaczeniu propozycji mediacyjnej. Rozwiązanie to zostało sformułowane przy założeniu aksjomatów opisujących sprawiedliwy podział korzyści ze współpracy, które mogą być przyjęte przez racjonalnych graczy. Rozwiązanie Nasha (Nash 1950, 1953) zostało zaproponowane w ramach teorii targu przy założeniu skalarnych wypłat graczy. Nie może być zastosowane bezpośrednio w rozpatrywanym problemie wielokryterialnym. W pracy przedstawia się konstrukcję umożliwiającą zastosowanie tej idei.

## 2.2 Idea procedury

Procedura realizowana jest w pewnej liczbie rund  $t = 1, 2, \dots, T$ . W każdej rundzie

- każdy decydent wykonuje interakcyjną analizę w swojej przestrzeni wielokryterialnych wypłat (zwanej dalej analizą jednostronną) i wskazuje kierunek poprawy z godnie ze swoimi preferencjami w porównaniu z punktem braku porozumienia,
- system komputerowy generuje propozycję mediacyjną  $d^t$  na podstawie kierunków wskazanych przez wszystkich decydentów,
- decydenci analizują tę propozycję i dokonują korekty preferowanych kierunków poprawy, a system wyznacza kolejną propozycję mediacyjną.

Kolejne propozycje mediacyjne  $d^t$  są generowane na podstawie kierunków poprawy wskazanych przez decydentów z zastosowaniem przyjętej koncepcji wielokryterialnego rozwiązania teorii gier:

$$d^t = d^{t-1} + \alpha^t [G^t - d^{t-1}], \text{ dla } t = 1, 2, \dots, T,$$

gdzie  $d^0 = d$ ,

$\alpha^t$  jest tzw. współczynnikiem zaufania zakładanym przez decydentów w rundzie  $t$ .

$G^t$  jest rozwiązaniem wielokryterialnego zagadnienia targu wyznaczanym w rundzie  $t$ , spełniającym określone własności. W tym przypadku proponuje się zastosowanie idei rozwiązania Nasha uogólnionej na przypadek wielokryterialny.

Każdy decydent może w każdej rundzie ograniczyć przyrost wypłat swoich i kontrdecydenta zakładając odpowiednio małą wartość współczynnika zaufania.

### 2.3 Analiza jednostronna

Celem tej analizy jest wyznaczenie rozwiązania Pareto optymalnego i kierunku poprawy wypłaty zgodnie z zakładanymi preferencjami danego decydenta  $i$ ,  $i = 1, 2$ . W ramach tej analizy każdy decydent niezależnie przegląda zbiór swoich osiągalnych wypłat przyjmując różne założenia dotyczące preferencji drugiego decydenta.

Analiza ta wykonywana jest z zastosowaniem przedziałowej metody punktu referencyjnego A. P. Wierzbickiego i wykorzystaniu odpowiedniej funkcji osiągnięcia.

Punkty niezdominowane  $\bar{y}_i$ , reprezentujące brzeg Pareto-optymalny zbioru  $S$  w przestrzeni kryteriów decydenta  $i$ , wyznaczone są jako rozwiązanie następującego zadania optymalizacji:

$$\max_{r \in N_u} s(y_i, r_i), \quad (1)$$

gdzie

$r_i \in \mathbb{R}^{m_i}$  jest wektorem punktów referencyjnych decydenta  $i$ ,

$x$  jest wektorem zmiennych decyzyjnych,

$y_i = v_i(x)$  określa wektor kryteriów decydenta  $i$ , jako zależny od zmiennych decyzyjnych  $x$  zgodnie z odwzorowaniem  $W$ , przy dodatkowych ograniczeniach, że kryteria drugiego decydenta są na poziomie jego punktu rezerwacji  $y_{3-i} = d_{3-i}$ ,

$s(y_i, r_i)$  jest funkcją osiągnięcia aproksymującą porządek w przestrzeni  $\mathbb{R}^{m_i}$ .

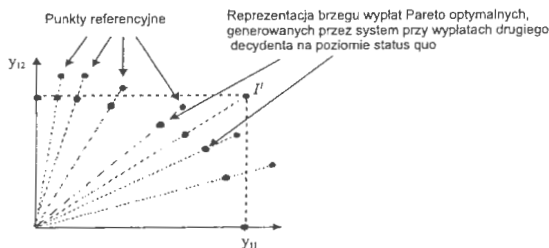
Ogólna forma funkcji osiągnięcia (Wierzbicki, Makowski, Wessels 2000) ma postać:

$$\bar{s}(y_i, y_i^a, y_i^r) = \min_{1 \leq k \leq m_i} \sigma_{i,k}(y_{i,k}, y_{i,k}^a, y_{i,k}^r) + \rho \sum_{k=1}^{m_i} \sigma_i(y_{i,k}, y_{i,k}^a, y_{i,k}^r) \quad (2)$$

gdzie  $y_i = v_i(x)$ , natomiast  $y_{i,k}^a, y_{i,k}^r$  oznaczają odpowiednio poziomy aspiracji i rezerwacji podawane przez decydenta  $i$ . Funkcje  $\sigma_{i,k}(\cdot)$  mają postać

$$\sigma_{i,k}(y_{i,k}, y_{i,k}^a, y_{i,k}^r) = \begin{cases} \beta(y_{i,k} - y_{i,k}^r)/(y_{i,k}^r - y_{i,k}^a), & \text{jesli } y_{i,k}^a \leq y_{i,k} \leq y_{i,k}^r \\ (y_{i,k} - y_{i,k}^r)/(y_{i,k}^a - y_{i,k}^r), & \text{jesli } y_{i,k}^r \leq y_{i,k} \leq y_{i,k}^a \\ 1 + \gamma(y_{i,k} - y_{i,k}^a)/(y_{i,k}^p - y_{i,k}^a), & \text{jesli } y_{i,k}^a \leq y_{i,k} \leq y_{i,k}^p \end{cases} \quad (3)$$

W rozpatrywanym przypadku  $s(y_i, r_i) = \bar{s}(y_i, y_i^a, y_i^r)$ , gdy punkty referencyjne  $y_i^a = r_i$ , natomiast punkt rezerwacji przyjmowany jest na poziomie punktu braku porozumienia  $y_i^r = d_i$ . Parametry  $\rho, \beta, \gamma$  są współczynnikami przedziałowej metody punktu referencyjnego,  $\rho$  - odpowiednio mała liczba,  $0 < \beta < 1 < \gamma$ , punkty  $y_i^p$  i  $y_i^o$  oznaczają odpowiednio punkt dominujący punkt idealny, oraz punkt zdominowany przez punkt rezerwacji w przestrzeni  $\mathbb{R}^{m_i}$ , ustalone w celu normalizacji zadania.



Rysunek 1: Przeglądanie zbioru niezdominowanych wypłat dla decydenta 1 na podstawie przyjmowanych przez niego punktów referencyjnych

Rysunek 1 ilustruje możliwości przeglądania przez danego decydenta jego osiągalnych wypłat. W wyniku takiego przeglądu, decydent uzyskuje reprezentację brzegu wypłat Pareto optymalnych i może wskazać preferowaną wypłatę.

Zakładane punkty referencyjne oraz wyznaczone rozwiązania Pareto optymalne  $\bar{y}_i$  składane są w bazie danych, tak że decydent może tworzyć reprezentację brzegu Pareto optymalnych rozwiązań. Zakłada się, że w wyniku analizy jednostronnej dany decydent  $i$  określi swoją preferowaną niezdominowaną wypłatę  $\hat{y}_i$  w przestrzeni swoich kryteriów, której odpowiada punkt  $y^1 = (\hat{y}_1, d_2) \in S$  w przypadku decydenta  $i = 1$  i odpowiednio  $y^2 = (d_1, \hat{y}_2) \in S$  w przypadku decydenta  $i = 2$ . Etap analizy jednostronnej kończy się, gdy obaj decydenci określą swoje preferowane wypłaty.

Możliwe są różne warianty realizacji jednostronnej analizy wielokryterialnej dokonywanej niezależnie przez każdego decydenta. W przedstawionej propozycji przyjęto, że każdy z decydentów dokonuje tej analizy w swojej przestrzeni kryteriów, nie znając ani kryteriów i ani punktu rezerwacji decydenta drugiego. Informacje te są znane mediatorowi i wykorzystywane w obliczeniach systemu komputerowego, ale nie są udostępniane wzajemnie decydom.

Można rozpatrzyć także inny wariant, w którym decydenci wzajemnie znają swoje kryteria i punkty rezerwacji, a każdy z nich analizuje wypłaty

efektywnie w zbiorze  $S$  zakładając punkty referencyjne swoje i drugiego decydenta.

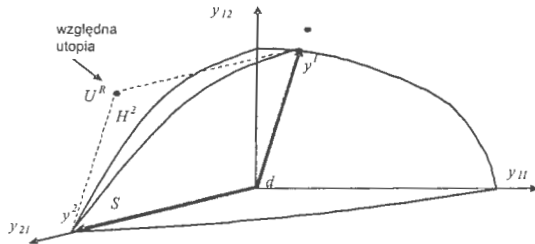
## 2.4 Wyznaczanie propozycji mediacyjnej

Propozycja mediacyjna wyznaczana jest, gdy obaj decydenci wybrali swoje preferowane niezdominowane wypłaty  $\widehat{y}_1, \widehat{y}_2$  w przestrzeniach swoich kryteriów i wyznaczone zostały odpowiadające im punkty  $y^1, y^2 \in S$ .

Przeprowadźmy przez punkty  $d, y^1, y^2$  płaszczyznę  $H^2$ . Każdy punkt  $y \in H^2$  można jednoznacznie przedstawić w postaci:

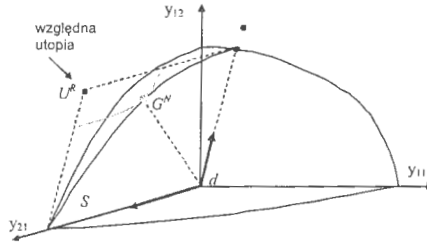
$$y = d + a_1(y^1 - d) + a_2(y^2 - d).$$

Oznaczmy przez  $A$  odwzorowanie z  $H^2$  w  $\mathbb{R}^2$  określone przez  $A(y) = A[d + a_1(y^1 - d) + a_2(y^2 - d) + \dots + a_n(y^n - d)] = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ . Rozpatrzmy na hiperpłaszczyźnie  $H^2$ , 2 osobowy problem targu  $(A(S^H), A(d))$ , gdzie zbiór  $S^H = S \cap H^2$ . W problemie tym każdy decydent ma tylko jedno kryterium.



Rysunek 2: Konstrukcja płaszczyzny  $H^2$ .

Na hiperpłaszczyźnie  $H^2$  można skonstruować rozwiązanie Nasha stanowiące uogólnienie propozycji określonej dla klasycznej gry targu. Na Rys. 2 przedstawiono konstrukcję płaszczyzny  $H^2$  na przykładzie zagadnienia przetargowego dwóch decydentów. Decydent pierwszy ma dwa kryteria, odpowiednio  $y_{1,1}$  i  $y_{1,2}$ , a decydent drugi tylko jedno kryterium  $y_{2,1}$ . Przyjęto, że punkt  $y^1$  został określony zgodnie z preferencjami decydenta pierwszego. Natomiast preferowanym punktem decydenta drugiego jest maksymalna wartość



Rysunek 3: Konstrukcja uogólnionego rozwiązania Nasha

jego wypłaty, której odpowiada punkt  $y^2$ . Płaszczyzna  $H^2$  jest skonstruowana w ten sposób, że przechodzi przez punkty  $d$  oraz  $y^1$  i  $y^2$ .

Konstrukcja rozwiązania według idei Nasha jest przedstawiona na Rys. 3. Strzałki zaznaczone na tych rysunkach oznaczają kierunki poprawy wypłat prowadzące do punktu niezdominowanego wybranego przez decydenta 1 w przestrzeni jego kryteriów  $y_{11}$ ,  $y_{12}$  i jedynego punktu niezdominowanego decydenta 2.

Rozwiązanie kooperacyjne Nasha  $y^N = f^N(S, d)$  zagadnienia przetargowego  $(S, d)$  jest określone jako punkt zbioru  $S$  maksymalizujący iloczyn przyrostu wypłat na hiperpłaszczyźnie  $H^2$ . Punkt ten spełnia następujące aksjomaty nakładające wymagania na poszukiwane końcowe wypłaty  $y \in \mathbb{R}^2$  przy założeniu ustalonych preferencji decydentów określonych jako preferowane wypłaty  $y^1$  i  $y^2$ :

(A1) Pareto-optymalność

$y^N = f^N(S, d)$  jest Pareto-optymalne w zbiorze  $S$ ,

(A2) Indywidualna racjonalność.

$y^N = f^N(S, d) \geq d$ .

(A3) Symetria

Mówimy, że problem jest symetryczny, jeśli  $d_1 = d_2$ , oraz  $(x_1, x_2) \in S$ ,

to  $(x_2, x_1) \in S$ . Mówimy, że rozwiązanie spełnia aksjomat symetryczności, jeżeli dla symetrycznego problemu  $(S, d)$  zachodzi  $f_1^N(S, d) = f_2^N(S, d)$ .

(A4) Niezależność od skali użyteczności.

Niech  $L$  będzie przekształceniem afinicznym, tj. takim, że  $Lx = (a_1x_1 + b_1, a_2x_2 + b_2)$  dla dowolnego  $x \in R^2$ , gdzie  $a_i, b_i \in R, a_i > 0, i = 1, 2$ . Mówimy, że rozwiązanie jest niezależne od skali użyteczności, jeżeli  $Lf^N(S, d) = f^N(LS, Ld)$ .

(A5) Niezależność od nieistotnych opcji.

Dla dowolnych zagadnień targu  $(S, d)$  i  $(T, d)$ , jeżeli  $S \subset T$  oraz  $f^N(T, d) \in S$  to  $f^N(S, d) = f^N(T, d)$ .

Aksjomat ten oznacza, że jeżeli gracze uzgodnili rozwiązanie  $f^N(T, d)$  w problemie targu  $(T, d)$ , to zmniejszenie zbioru porozumień  $T$  do zbioru  $S$ , ale zawierającego to rozwiązanie tzn.  $f^N(T, d) \in S$ , nie powinno spowodować zmiany wypłat.

Zgodnie z twierdzeniem Nasha (1950), dla dowolnego problemu targu  $(S^H, d)$  spełniającego założenia Z1 - Z3 istnieje dokładnie jedno rozwiązanie  $f^N(S^H, d)$  o postaci:

$$f^N(S^H, d) = \arg \max_{y \in S^H} \|y_1 - d_1\| \cdot \|y_2 - d_2\|,$$

spełniające aksjomaty A1 - A5.

$\|\cdot\|$  oznacza odległość mierzoną na płaszczyźnie  $H^2$ .

Aksjomaty A1 - A5 mogą być przyjęte jako zasady rzetelności spełniane przez propozycję mediacyjną skonstruowaną według idei rozwiązania Nasha. Aksjomat A1 zapewnia efektywność w zbiorze  $S$ , a aksjomat A2 indywidualną racjonalność tego rozwiązania. Aksjomat A3 oznacza, że obaj decydenci traktowani są tak samo. Spełnienie aksjomatu A4 zapobiega możliwym manipulacjom decydentów, polegającym na zmianie skali w jakiej mierzone są wypłaty. Aksjomat ten oznacza, że żaden z decydentów nie odnie się korzyści w wyniku zmiany skali, w jakiej mierzone są przyrosty wypłat. W pracy (Kruś, 2011) można znaleźć porównanie właściwości różnych koncepcji rozwiązań w wielokryterialnym zagadnieniu przetargowym, zgodnie

z ideą Rozwiązania Raiffy-Kalaja-Smorodinsky'ego, Leksykograficznego, Nasha, Równowagowego. Przykładowo, Rozwiązanie Równowagowe nie spełnia aksjomatu A4 i w związku z tym, podział korzyści ze współpracy określony tym rozwiązaniem jest podatny na możliwe manipulacje decydentów, polegające na zmianie skali w jakiej mierzone są przyrosty wypłat.

## 2.5 Algorytm

Przyjmuje się, że podany niżej algorytm realizowany jest z pomocą odpowiednio zbudowanego systemu komputerowego, który wspomaga decydentów w wykonywaniu analizy wielokryterialnej oraz wyznacza propozycje mediacyjne.

Niech  $d^t \in S$  oznacza wektor wypłat w rundzie  $t$  dla  $t = 1, 2, \dots$ , oraz  $d^0 = d$ . Niech  $S^t = \{y : y \in S, y > d^{t-1}\}$ .

Każdy decydent  $i$  posługuje się dwoma parametrami, którymi może w każdej rundzie wpływać na przebieg procesu. Są to: punkt referencyjny  $r_i^t \in \mathbb{R}^{m'}$ , oraz współczynnik zaufania  $\alpha_i^t \in (\delta, 1]$ , gdzie  $\delta$  jest dowolnie małą liczbą  $\delta > 0$ .

Punkty referencyjne wykorzystywane są do wyznaczania i analizy osiągalnych rozwiązań oraz służą do wyrażania przez decydentów ich preferencji. Każdy z decydentów ma dostęp do informacji tylko w swojej przestrzeni kryteriów. Nie zna kryteriów drugiego decydenta, jego punktu rezerwacji, ani jego możliwych wypłat.

Każdy decydent może ograniczyć przyrosty wypłat swoich i drugiego decydenta w danej rundzie zakładając odpowiednią wartość współczynnika zaufania.

Krok 1. Ustalenie  $t = 1$ .

Krok 2. Zlecenie decydentom  $i = 1, 2$  niezależnego wykonania interakcyjnej analizy osiągalnych wypłat w wielokryterialnym zagadnieniu przetargowym  $(d^{t-1}, S^t)$ .



Krok 2.1 System przedstawia decydentowi  $i$  informację o punkcie idealnym  $I_i^t$ , oraz o punkcie status quo  $d_i^{t-1}$  w jego przestrzeni kryteriów. Punkt idealny wyznaczany jest jako:  $I_i^t = (I_{i,1}^t, I_{i,2}^t, \dots, I_{i,m_i}^t)$ , gdzie  $I_{i,j}^t = \max y_{i,j} : y = (y_1, y_2) \in S^t \wedge y_{3-i} = d_{3-i}$ .

Krok 2.2 Decydent podaje wartości odpowiadające jego punktowi referencyjnemu  $r_{ij}^t, j = 1, 2, \dots, m_i$ .

Krok 2.3 System wyznacza rozwiązanie niezdominowane w zbiorze  $S$ , rozwiązując zadanie optymalizacji 1 i zachowuje to rozwiązanie w bazie danych.

Krok 2.4 Decydent analizuje uzyskane rozwiązania niezdominowane. Jeśli decydent ma dostateczne informacje, wskazuje preferowaną wypłatę niezdominowaną  $\hat{y}_i$ , spośród wyznaczonych wypłat niezdominowanych, oraz podaje wartość współczynnika zaufania  $\alpha_i^t$ . Sygnalizuje zakończenie analizy jednostronnej.

Krok 2.5 Czy decydent  $i$  zakończył analizę jednostronną?.

Jeśli nie, powrót do kroku 2.2 w celu wyznaczenia następnego punktu niezdominowanego.

Jeśli tak, system zapisuje wskazaną przez decydenta preferowaną wypłatę niezdominowaną  $\hat{y}_i$  oraz podaną wartość współczynnika zaufania  $\alpha_i^t$ .

Krok 3. System sprawdza czy obaj decydenci dokonali wyboru i podali swoje preferowane wypłaty i współczynniki zaufania, jeśli nie, czeka aż zakończą fazę interakcyjnego przeglądania zbioru wypłat w krokach 2.1-2.5.

Krok 4. System wyznacza punkty  $y^1 = (\hat{y}_1, d_2^{t-1})$  oraz  $y^2 = (d_1^{t-1}, \hat{y}_2)$  pozwalające określić hiperplaszczyznę  $H^2$ .

Krok 5. System wyznacza propozycję mediacyjną  $d^t = (d_1^t, d_2^t)$  rundy  $t$ ,

$$d^t = d^{t-1} + \alpha^t [G^t - d^{t-1}],$$

gdzie  $G^t = \arg \max_{y \in S^t} \{\|y_1 - d_1^{t-1}\| \cdot \|y_2 - d_2^{t-1}\|\}$ ,

$\alpha^t = \min\{\alpha_1^t, \alpha_2^t\}$ ,  $0 < \rho < \alpha_i^t \leq 1$  dla  $i = 1, 2$ .

Krok 6. System przedstawia propozycję mediacyjną - wypłaty  $d_i^t$  odpowiednio decydentom  $i = 1, 2$ .

Krok 7. Sprawdzenie, czy rozwiązanie kooperacyjne rundy jest Pareto optymalne w zbiorze  $S$ ?

Jeśli tak - proces jest skończony.

Jeśli nie ustalany jest następny numer rundy  $t = t + 1$  i powrót do kroku 2.

W przedstawionym algorytmie mamy do czynienia z ciągiem problemów targu  $(S^t, d^{t-1})$ . W każdej rundzie decydenci dokonują najpierw niezależnie analizy osiągalnych wypłat ze zbioru  $S^t$  przy użyciu punktów referencyjnych, a następnie wybierają preferowane rozwiązania w ich przestrzeniach kryteriów (kroki 2.1-2.5). Na podstawie wybranych przez decydentów preferowanych rozwiązań, oraz przyjętych współczynników zaufania, system wyznacza i proponuje decydentom mediacyjne rozwiązanie kooperacyjne danej rundy (kroki 4-7). Zaproponowana konstrukcja wyznaczania propozycji mediacyjnej zapewnia, że jest ono zgodne z preferencjami decydentów wskazanymi w danej rundzie. Za pomocą współczynników zaufania, decydenci mogą wpływać na liczbę rund procedury i analizować w kolejnych rundach brzeg Pareto optymalny zbioru porozumień  $S$ . Mogą przy tym korygować swoje preferencje. Z drugiej strony propozycja mediacyjna, wyznaczana zgodnie z ideą rozwiązania kooperacyjnego Nasha, określa podział korzyści ze współpracy między decydentami, spełniający zasady rzetelności formułowane w formie aksjomatów A1 - A5.

Można pokazać, że ciąg propozycji mediacyjnych wyznaczanych w tej procedurze zbiega do rozwiązania Pareto optymalnego w zbiorze porozumień  $S$ , podobnie jak w procedurze wykorzystującej idee uogólnionego rozwiązania Raiffy-Kalaja-Smorodinsky'ego przedstawionej w pracy (Kruś, 2011). W pracy tej podany jest również formalny dowód zbieżności.

