O kilku klasach równań różniczkowych liniowych, rzędu n^{go}.

Przez

A. J. Stodółkiewicza.

(Rzecz przedstawiona na posiedzeniu Wydz. mat.-przyr. z d. 3 października 1892 r.; ref. członek Zajączkowski).

Weźmy równanie różniczkowe liniowe postaci ogólnej

$$\frac{d^n y}{dx^n} + X_1 \frac{dy^{n-1}}{dx^{n-1}} + X_2 \frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \ldots + X_{n-1} \frac{dy}{dx} + X_n y = X, \tag{1}$$

w którem $X_1, X_2, \ldots, X_n, X$ są pewne funkcye zmiennej niezależnej x, i oznaczmy

$$\frac{dy^{(n-2)}}{dx} = y^{(n-1)}, \frac{dy^{(n-3)}}{dx} = y^{(n-2)}, \ldots, \frac{dy'}{dx} = y'', \frac{dy}{dx} = y', \tag{2}$$

tedy mnożąc równania (1) i (2) odpowiednio przez czynniki $1, \mu_1, \mu_2, \ldots$ $\ldots, \mu_{n-}, \mu_{n-1}$, i dodając do siebie, otrzymamy:

$$\frac{dy^{(n-1)}}{dx} + \mu_1 \frac{dy^{(n-2)}}{dx} + \mu_2 \frac{dy^{(n-3)}}{dx} + \ldots + \mu_{n-2} \frac{dy'}{dx} + \mu_{n-1} \frac{dy}{dx} =$$
$$= X - X_1 y^{(n-1)} - X_2 y^{(n-2)} - \ldots \tag{3}$$
$$\ldots - X_{n-1} y' - X_n y + \mu_1 y^{(n-1)} + \mu_2 y^{(n-2)} + \ldots + \mu_{n-2} y'' + \mu_{n-1} y'.$$

Załóżmy dalej, że

(4) $$y^{(n-1)} + \mu_1 y^{(n-2)} + \mu_2 y^{(n-3)} + \ldots + \mu_{n-2} y' + \mu_{n-1} y = u$$

natenczas, po wyrugowaniu $y^{(n-1)}$ z równania (3) przy pomocy związku (4) i po zrównaniu do zera spółczynników przy $y^{(n-2)}, y^{(n-3)}, \ldots, y', y$, otrzymamy następujący układ równań na wyznaczenie ilości $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-1}$

(5) $$\begin{aligned}
\frac{d\mu_1}{dx} &= \mu_1 (\mu_1 - X_1) + X_2 - \mu_2 , \\
\frac{d\mu_2}{dx} &= \mu_2 (\mu_1 - X_1) + X_3 - \mu_3 , \\
& \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
\frac{d\mu_{n-2}}{dx} &= \mu_{n-2} (\mu_1 - X_1) + X_{n-1} - \mu_{n-1} , \\
\frac{d\mu_{n-1}}{dx} &= \mu_{n-1} (\mu_1 - X_1) + X_n ,
\end{aligned}$$

tudzież, jedno równanie, określające funkcyę u

(6) $$\frac{du}{dx} = X + (\mu_1 - X_1)\, u.$$

Korzystając z postaci równań (5), możemy łatwo wyprowadzić warunki całkowalności dla następującej klasy równań różniczkowych:

(7) $$\frac{d^n y}{dx^n} + (a_1 X_1 + b_1) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + (a_2 X_1 + b_2) \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \ldots$$
$$\ldots + (a_{n-1} X_1 + b_{n-1}) \frac{dy}{dx} + (a_n X_1 + b_n)\, y = X,$$

w której, jak widzimy, wszystkie spółczynniki są liniowe względem pewnej dowolnej funkcyi X_1 zmiennej niezależnej; $a_1\, b_1, a_2\, b_2, \ldots, a_n\, b_n$ są liczby stałe.

Ze względu na równanie (7) układ (5) przybierze postać:

(8) $$\begin{aligned}
\frac{d\mu_1}{dx} &= \mu_1 (\mu_1 - a_1 X_1 - b_1) + a_2 X_1 + b_2 - \mu_2 , \\
\frac{d\mu_2}{dx} &= \mu_2 (\mu_1 - a_1 X_1 - b_1) + a_3 X_1 + b_3 - \mu_3 , \\
& \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
\frac{d\mu_{n-2}}{dx} &= \mu_{n-2} (\mu_1 - a_1 X_1 - b_1) + a_{n-1} X_1 + b_{n-1} - \mu_{n-1} , \\
\frac{d\mu_{n-1}}{dx} &= \mu_{n-1} (\mu_1 - a_1 X_1 - b_1) + a_n X_1 + b_n ,
\end{aligned}$$

skąd widoczna, że, jeżeli weźmiemy:

$$\mu_1 = \frac{a_2}{a_1}, \quad \mu_2 = \frac{a_3}{a_1}, \ldots, \mu_{n-1} = \frac{a_2}{a_1}$$

natenczas z (8) otrzymamy równania warunkowe

$$\begin{aligned} b_2 &= \frac{a_3}{a_1} - \frac{a_2}{a_1}\left(\frac{a_2}{a_1} - b_1\right), \\ b_3 &= \frac{a_4}{a_1} - \frac{a_3}{a_1}\left(\frac{a_2}{a_1} - b_1\right), \\ &\cdots\cdots\cdots \\ b_{n-1} &= \frac{a_n}{a_1} - \frac{a_{n-1}}{a_1}\left(\frac{a_2}{a_1} - b_1\right), \\ b_n &= -\frac{a_n}{a_1}\left(\frac{a_2}{a_1} - b_1\right). \end{aligned} \tag{9}$$

Mówiąc innemi słowy, jeżeli w równaniu (7) liczby $b_2, b_3, \ldots, b_n$, uczynią zadość warunkom (9), natenczas to równanie (7) da się całkować przez kwadratury w całej ogólności, gdyż następnem równaniem różniczkowem (4) w tym przypadku będzie

$$y^{(n-1)} + \frac{a_2}{a_1} y^{(n-2)} + \frac{a_3}{a_1} y^{(n-3)} + \ldots + \frac{a_n}{a_1} y = u$$

równanie liniowe ze spółczynnikami stałymi.

Oczywista, że warunki (9) stosują się także bez zmiany i do znanej klasy równań różniczkowych liniowych, których spółczynniki są liniowe względem x, gdyż w tym szczególnym przypadku mamy $X_1 = x$.

Dalej, możemy utworzyć nową klasę równań różniczkowych, całkowalnych pod postacią skończoną, przyjmując

$$\mu_1 = a_1 Y + b_1, \quad \mu_2 = a_2 Y + b_2, \ldots, \mu_{n-1} = a_{n-1} Y + b_{n-1},$$

gdzie Y jest jakąbądź funkcyą zmiennej niezależnej x, ilości zaś a_1 b_1 a_2, b_2, ..., a_{n-1}, b_{n-1} są pewnemi liczbami. Równania (5) w tym przypadku dadzą nam następujące warunki:

$$\begin{aligned} X_2 &= a_1 \frac{dY}{dx} + a_2 Y + b_2 - (a_1 Y + b_1)(a_1 Y + b_1 - X_1), \\ X_3 &= a_2 \frac{dY}{dx} + a_3 Y + b_3 - (a_2 Y + b_2)(a_1 Y + b_1 - X_1), \\ &\cdots\cdots\cdots \\ X_{n-1} &= a_{n-2} \frac{dY}{dx} + a_{n-1} Y + b_{n-1} - (a_{n-2} Y + b_{n-2})(a_1 Y + b_1 - X_1), \\ X_n &= a_{n-1} \frac{dY}{dx} - (a_{n-1} Y + b_{n-1})(a_1 Y + b_1 - X_1). \end{aligned} \tag{10}$$

Stąd wnioskujemy, że, jeżeli spółczynniki równania (1) przy pomocy pewnej oznaczonej funkcyi Y i liczb stałych a_1 b_1, a_2, b_2, ..., a_{n-1}, b_{n-1} dadzą się wyrazić w sposób (10), natenczas równanie (1) daje się całkować przez kwadratury, jeśli tylko istnieją warunki (9). W rzeczy samej, wynikającem z (4) równaniem różniczkowem będzie

$$y^{(n-1)} + (a_1 Y + b_1) y^{(n-2)} + (a_2 Y + b_2) y^{(n-3)} + \dots + (a_{n-1} Y + b_{n-1}) y = u$$

równanie, które, jak widzieliśmy powyżej, dozwala się całkować pod postacią skończoną, jeżeli tylko spełnione są warunki (9).

Ażeby wyprowadzić jeszcze jednę klasę równań różniczkowych liniowych, których całka wyraża się przez kwadratury, załóżmy

$$\mu_1 = \frac{a_1}{x}, \quad \mu_2 = \frac{a_2}{x^2}, \dots, \quad \mu_{n-1} = \frac{a_{n-1}}{x^{n-1}}$$

natenczas, z układu równań (5) otrzymamy

$$\begin{aligned} X_2 &= \frac{a_2 - a_1 - a_1 (a_1 - xX_1)}{x^2}, \\ X_3 &= \frac{a_3 - 2a_2 - a_2 (a_1 - xX_1)}{x^3}, \\ & \dots\dots\dots\dots \\ X_{n-1} &= \frac{a_{n-1} - (n-2) a_{n-2} - a_{n-2} (a_1 - xX_1)}{x^{n-1}}, \\ X_n &= \frac{-(n-1) a_{n-1} - a_{n-1} (a_1 - xX_1)}{x^n}. \end{aligned} \tag{11}$$

Na zasadzie tego, cośmy powiedzieli powyżej, orzec teraz możemy, że w przypadku, gdy spółczynniki równania (1) określają się przez związki (11) to przy zupełnie dowolnych liczbach a_1, a_2, ..., a_{n-1} równanie dane można całkować w całej ogólności pod postacią skończoną, ponieważ wynikającem równaniem różniczkowem (4) będzie

$$y^{(n-1)} + \frac{a_1}{x} y^{(n-2)} + \frac{a_2}{x^2} y^{(n-3)} + \dots + \frac{a_{n-1}}{x^{n-1}} y = u$$

równanie, które, jak wiadomo, daje się zawsze całkować przez kwadratury.

Ze wszystkiego, co powyżej wyłożyłem, można w ogóle wywnioskować, że, nadając różne kształty funkcyom pomocniczym μ_1, μ_2, ..., μ_{n-1}, możemy odpowiednio odnaleźć nieskończenie wiele najrozmaitszych postaci równań różniczkowych liniowych, które można całkować pod postacią skończoną. Ograniczając się jednak do tych kilku godniejszych uwagi klas, objaśnimy przykładem wyłożoną teoryę.

Niech będzie dane do scałkowania równanie

$$\frac{d^n y}{dx^n} + X_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} \sum_{i=2}^{i=n-1} \left[i + ix - (ix - x + 1)(x + 1 - X_1) \frac{d^{n-i} y}{dx^{n-i}} \right] +$$

$$+ [n - 1 - (nx - x - n + 1)(x + 1 - X_1)]\, y = X, \tag{12}$$

w którem X_1 i X są jakiekolwiek funkcye zmiennej x.

Spółczynniki tego równania czynią zadość warunkom (10), kiedy

$$a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_3 = 3, \ldots, a_{n-1} = n-1,$$

$$b_1 = b_2 = b_3 = \ldots = b_{n-2} = 1;\quad b_{n-1} = -(n-1),$$

tudzież $Y = x$.

W skutek tego będzie

$$\mu_1 = x+1,\ \mu_2 = 2x+1,\ \mu_3 = 3x+1,\ \ldots,\ \mu_{n-2} = (n-2)\,x+1,$$

$$\mu_{n-1} = (n-1)\,x - n + 1.$$

Podług wyłożonej teoryi wynikającem równaniem różniczkowem (4) będzie

$$y^{(n-1)} + (x+1)\, y^{(n-2)} + (2x+1)\, y^{(n-3)} + \ldots + [(n-2)x + 1]y' +$$

$$+ [(n-1)x - n + 1]\, y = u, \tag{13}$$

gdzie u wyznacza się z równania (6)

$$u = e^{\int (x+1-X_1)\, dx} \left\{ c_1 + \int e^{-\int (x+1-X_1) dx} . Xdx \right\}. \tag{14}$$

Ponieważ dla równania (13) spełniają się warunki (9), przeto według tej samej teoryi następnem równaniem różniczkowem będzie

$$y^{(n-2)} + 2y^{(n-3)} + 3y^{(n-4)} + \ldots + (n-1)\, y = u_1. \tag{15}$$

Równanie (6) dla tego ostatniego równania różniczkowego przybiera postać

$$\frac{du_1}{dx} = u + (1-x)\, u_1,$$

z którego mamy

$$u_1 = e^{x - \frac{x^2}{2}} (c^2 + \int e^{-x + \frac{x^2}{2}} udx).$$

Wstawiając w ostatni wzór wartość na u (14), otrzymamy

$$(16)\quad u_1 = e^{x-\frac{x^2}{2}} \left[c_2 + \int e^{-x+\frac{x^2}{2}+\int(x+1-X_1)\,dx} \,.\, \left(c_1 + \int e^{-\int(x+1-X_1)\,dx} X dx\right) dx \right]$$

Jeżeli następnie, pierwiastki równania

$$r^{u-2} + 2r^{n-3} + 3r^{n-4} + \ldots + (n-2)\,r + n - 1 = 0$$

oznaczymy przez

$$r_{n-2}\,,\quad r_{n-3}\,,\ \ldots\,,\ r_2\,,\ r_1$$

natenczas całką równania (15) będzie

$$y = e^{r_{n-2}x} \left[c_n + \int e^{-r_{n-2}x + r_{n-3}x} \left\{ c_{n-1} + \int e^{-r_{n-3}x + r_{n-4}x} \left\{ c_{n-2} + \int \ldots \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. \ldots \left(c_3 + \int u_1 e^{-r_1 x} dx\right) \ldots \right\} dx \right\} dx \right].$$

Po wyrugowaniu z ostatniego wzoru funkcyi u_1 przy pomocy równania (16), łatwo otrzymamy szukaną całkę ogólną danego równania (12).