175/2002

Raport Badawczy

Research Report

RB/71/2002

Wybrane aspekty uczenia maszynowego na podstawie przykładów. Część II

K. Mańczak, M. Krawczak,
G. Szkatuła

Instytut Badań Systemowych
Polska Akademia Nauk

Systems Research Institute
Polish Academy of Sciences

POLSKA AKADEMIA NAUK

Instytut Badań Systemowych

ul. Newelska 6

01-447 Warszawa

tel.: (+48) (22) 8373578

fax: (+48) (22) 8372772

Kierownik Pracowni zgłaszający pracę:
Prof. dr hab. inż. Kazimierz Mańczak

Warszawa 2002

Wybrane aspekty uczenia maszynowego na podstawie przykładów. Część II.

Spis treści:

Rozdział 1

ANALIZA PREFERENCJI WYBORCÓW W WYBORACH SEJMOWYCH 2001r.

WPROWADZENIE

W pracy podjęto próbę zastosowania metod uczenia maszynowego na podstawie przykładów (tworzących reguły typu „Jeżeli ...To ...") do analizy preferencji wyborców, na przykładzie wyborów do Sejmu Polskiego w 2001r.

Na podstawie wstępnych analiz [1] oraz obliczeń własnych stwierdzono, że na preferencje wyborców oprócz wypowiedzi i deklaracji programowych partii politycznych w widoczny sposób wpływa również wizerunek medialny partii kreowany podczas kampanii wyborczej. Poszczególne partie i ugrupowania polityczne startujące w wyborach opisane zostały za pomocą cech, utworzonych w oparciu o analizę ich obietnic przedwyborczych zaczerpniętą z pracy [1] oraz dodatkowo wybranych cech, związanych z wizerunkiem partii kreowanym podczas kampanii wyborczej do Sejmu 2001r. [2].

Zadanie uczenia maszynowego na podstawie przykładów sformułowano w sposób następujący. Dany jest zbiór przykładów, zwany zbiorem uczącym (w pracy jest to zbiór partii politycznych: SLD i UP, AWS, UW itd.). Przykłady opisane zostają za pomocą warunków związanych ze skończonym zbiorem cech, ozn. A. W tak określonym zbiorze przykładów można z punktu widzenia wybranej cechy, zwanej decyzyjną, dokonać podziału całego zbioru przykładów na tyle klas, ile wartości może ta cecha przyjmować. Przyjęto założenie, że liczba i rodzaj cech wystarczają do poprawnego rozdzielenia przykładów należących do różnych klas. W pracy rozpatrzono cztery różne podziały na klasy, odpowiadające zagadnieniom przedstawionym poniżej. Cechą decyzyjną była cecha a9, z różnym zbiorem wartości w każdym rozpatrywanym zagadnieniu.

W pierwszym rozpatrywanym zagadnieniu cechą decyzyjną była cecha a9, *„wybór do Sejmu"* z wartościami {*partia weszła do Sejmu, partia nie weszła do Sejmu*}. Cecha decyzyjna określała w tym przypadku dwie klasy. Klasa pierwsza zawierała zwycięskie partie polityczne, które weszły do Sejmu; klasa druga zawierała partie polityczne, które nie weszły do Sejmu. W tym zagadnieniu rozpatrywano różnice pomiędzy zwycięskimi partiami politycznymi a partiami, które nie weszły do Sejmu.

W drugim zagadnieniu cechą decyzyjną była cecha a9, *„przynależność partii"* z wartościami {*koalicja SLD i UP, pozostałe partie*}. W tym zagadnieniu rozpatrywano różnice pomiędzy SLD i UP a pozostałymi partiami.

W trzecim zagadnieniu cechą decyzyjną była cecha a9, *„przynależność partii"* z wartościami {*koalicja SLD i UP, pozostałe partie które weszły do Sejmu, partie które nie weszły do Sejmu*}. W tym przypadku rozpatrywano różnice pomiędzy wymienionymi powyżej grupami partii.

W czwartym zagadnieniu cechą decyzyjną była cecha a9, *„przynależność partii"* z wartościami {*koalicja SLD i UP, PO, SO, ..., UW*}. W tym przypadku rozpatrywano różnice pomiędzy rozpatrywanymi partiami.

W każdym rozpatrywanym zagadnieniu rozważano dwa przypadki. W pierwszym przypadku, partie polityczne (tzn. przykłady) opisywano za pomocą cech określających ich deklaracje programowe; w drugim, uwzględniano również wybrane dodatkowe cechy, określające doświadczenie partii w rządzeniu, istnienie charyzmatycznego lidera oraz sposób prowadzenia kampanii wyborczej.

Zbiory tak określonych przykładów uczących (z ich podziałem na klasy we wszystkich rozpatrywanych zagadnieniach) były punktem wyjścia w procesie uczenia maszynowego, w wyniku którego uzyskiwano opisy rozpatrywanych klas, w postaci reguł. Przyjęto, że tworzone reguły muszą spełniać pewne dodatkowe wymagania. Powinny np. poprawnie opisywać "wszystkie" lub „prawie wszystkie" przykłady należące do rozpatrywanej klasy i nie opisywać "wszystkich" lub „prawie wszystkich" przykładów do tej klasy nie należących, mieć minimalną długość (np. w sensie liczby warunków tworzących regułę) itp.

W pracy tworzono opisy klas w postaci reguł, w których poprzednik każdej reguły zawierał koniunkcję warunków związanych z podzbiorem cech wybranych do opisu partii politycznych, a następnik reguły określał przynależność do odpowiedniej klasy.

Reguły, o których była mowa wyżej, można tworzyć stosując różne algorytmy uczenia maszynowego na podstawie przykładów. W pracy zastosowano podejście oparte na zaproponowanej przez Pawlaka teorii zbiorów przybliżonych (1982) oraz metodę wykorzystującą modyfikację zadania pokrycia zbioru, opisaną przez Szkatułę (1995) a następnie rozwiniętą przez Kacprzyka i Szkatułę (1999).

We wszystkich zagadnieniach rozpatrywanych w pracy najpierw wyznaczano zbiory reduktów dla rozpatrywanej klasyfikacji, tzn. określono wszystkie minimalne podzbiory zbioru cech $A \setminus \{a9\}$ zapewniające taką samą rozróżnialność przykładów (należących do różnych klas) jak oryginalny zbiór cech. Następnie tworzono reguły klasyfikujące do klas, na które dzieli zbiór przykładów uczących wybrana cecha decyzyjna. Przyjęto założenie, że reguły te powinny poprawnie opisywać wszystkie przykłady uczące. Tworzono minimalne zbiory reguł do rozpatrywanych klas, jak również zbiory wszystkich reguł poprawnie opisujących dany zbiór przykładów.

Uwzględniając w obliczeniach oprócz deklaracji programowych partii również wybrane dodatkowe cechy, takie jak doświadczenie partii w rządzeniu, istnienie charyzmatycznego lidera oraz sposób prowadzenia kampanii wyborczej, otrzymano w rozpatrywanych zagadnieniach (zagadnienie 1, 2 i 3) krótsze reguły decyzyjne, o większym współczynniku siły.

OPIS DANYCH

Do opisu partii politycznych przyjęto 8 cech przedstawionych poniżej, określających deklaracje programowe partii politycznych (w nawiasach zawarto wartości, jakie może przyjmować cecha).

a1: walka z bezrobociem {1, 2, 3, 4}
a2: edukacja i nauka {1, 2, 3, 4}
a3: podatki {1, 2, 3, 4}
a4: polityka gospodarcza {1, 2, 3, 4}
a5: zdrowie {1, 2, 3}
a6: rolnictwo I polityka regionalna {1, 2, 3}
a7: bezpieczeństwo {1, 2, 3, 4, 5}
a8: stosunek do UE {1, 2, 3}

cechę decyzyjną oznaczaną a9, której wartości są zależne od rozpatrywanego zagadnienia. Przykładowo, w zagadnieniu 1, cecha a9 określa wejście do Sejmu z wartościami {1 - tak, 2 – nie}; w zagadnieniu 3 cecha a9 określa przynależność partii z wartościami {1 - SLD_UP, 2 – inne partie które weszły do Sejmu, 3- partie, które nie weszły}.

oraz trzy cechy związane z wizerunkiem medialnym partii, przedstawione poniżej

a10: doświadczenie w rządzeniu {1 - tak, 0 - nie},
a11: charyzmatyczny lider {1 - tak, 0 - nie},
a12: prowadzenie kampanii wyborczej {1 - widoczna, 0 - nie}.

Dokładne omówienie cech i wartości, jakie może przyjmować każda cecha zawarto w Dodatku 1.

ZAGADNIENIE 1.

Określanie różnic programowych pomiędzy sześcioma partiami które weszły do Sejmu w 2001 a dwoma partiami, które nie weszły.

Cecha 9-ta decyzyjna: wejście do Sejmu 2001 {1 - tak, 2 – nie}

PRZYPADEK 1.1

Cecha decyzyjna: Cecha 9
Cechy niezależne: Cecha 1, Cecha 2, Cecha 3, Cecha 4, Cecha 5, Cecha 6, Cecha 7, Cecha 8

Znaleziono 6 reduktów	Cechy - częstotliwość występowania cech w reduktach		
redukt 1: cechy: 1 2	cecha 1	1	
redukt 2: cechy: 2 3	cecha 2	6	(edukacja i nauka)
redukt 3: cechy: 2 4	cecha 3	1	
redukt 4: cechy: 2 7	cecha 4	1	
redukt 5: cechy: 2 8	cecha 6	1	
redukt 6: cechy: 2 6	cecha 7	1	
	cecha 8	1	

Znaleziono 5 reguł:

a5=2 => a9=1 (4 przykłady) q=0.500
a2=3 => a9=1 (2 przykłady) q=0.250
a1=4 => a9=1 (1 przykład) q=0.125

a2=4 a8=1 => a9=2 (1 przykład) q=0.125
a7=4 => a9=2 (1 przykład) q=0.125

Powyższe reguły można zapisać w sposób przedstawiony poniżej.

[*zdrowie* = likwidacja Kas Chorych] => [a9 = 1]; q=0.500
[*edukacja i nauka* = zahamowanie likwidacji szkół wiejskich i wyższych szkół zawodowych w mniejszych miastach] => [a9 = 1]; q=0.250
[*walka z bezrobociem* = brak propozycji] => [a9 = 1]; q=0.125

[*edukacja i nauka* = powszechny dostęp do internetu i nauki języków obcych] ∧ [*stosunek do UE* = poparcie wstąpienia jeśli zaistnieją korzystne warunki] => [a9 = 2]; q=0.125
[*bezpieczeństwo* = rozwój samoobrony obywatelskiej] => [a9 = 2]; q=0.125

Wszystkie znalezione reguły (41):

a2=2 => a9=1 (2 przykłady)	a1=2 a2=4 => a9=2 (1 przykład)
a3=2 => a9=1 (2 przykłady)	a2=4 a3=3 => a9=2 (1 przykład)
a4=2 => a9=1 (2 przykłady)	a2=4 a4=4 => a9=2 (1 przykład)
a5=2 => a9=1 (4 przykłady)	a2=4 a5=1 => a9=2 (1 przykład)
a7=1 => a9=1 (2 przykłady)	a2=4 a6=3 => a9=2 (1 przykład)
a1=1 a2=4 => a9=1 (1 przykład)	a2=4 a7=2 => a9=2 (1 przykład)
a2=4 a3=1 => a9=1 (1 przykład)	a2=4 a8=1 => a9=2 (1 przykład)
a2=4 a4=3 => a9=1 (1 przykład)	a1=1 a2=1 => a9=2 (1 przykład)

a6=2 => a9=1 (2 przykłady)	a2=1 a3=1 => a9=2 (1 przykład)
a7=3 => a9=1 (1 przykład)	a2=1 a4=3 => a9=2 (1 przykład)
a2=4 a8=2 => a9=1 (1 przykład)	a2=1 a6=3 => a9=2 (1 przykład)
a1=3 => a9=1 (1 przykład)	a2=1 a8=2 => a9=2 (1 przykład)
a3=4 => a9=1 (1 przykład)	a3=1 a6=3 => a9=2 (1 przykład)
a4=1 => a9=1 (2 przykłady)	a4=3 a6=3 => a9=2 (1 przykład)
a6=1 => a9=1 (2 przykłady)	a1=1 a5=3 => a9=2 (1 przykład)
a8=3 => a9=1 (2 przykłady)	a3=1 a5=3 => a9=2 (1 przykład)
a2=3 => a9=1 (2 przykłady)	a4=3 a5=3 => a9=2 (1 przykład)
a7=5 => a9=1 (1 przykład)	a5=3 a6=3 => a9=2 (1 przykład)
a1=4 => a9=1 (1 przykład)	a5=3 a8=2 => a9=2 (1 przykład)
a2=1 a3=3 => a9=1 (1 przykład)	a7=4 => a9=2 (1 przykład)
a3=3 a5=3 => a9=1 (1 przykład)	

PRZYPADEK 1.2

Cecha decyzyjna: Cecha 9
Cechy niezależne: Cecha 1, Cecha 2, Cecha 3, Cecha 4, Cecha 5, Cecha 6, Cecha 7, Cecha 8, Cecha 10, Cecha 11, Cecha 12

Znaleziono 20 reduktów	Cechy - częstotliwość występowania cech w reduktach		
redukt1: 1 2	1	3	
redukt2: 1 3 11	2	8	(edukacja i nauka)
redukt3: 1 5 11	3	6	(podatki)
redukt4: 2 3	4	2	
redukt5: 2 4	5	5	(zdrowie)
redukt6: 2 7	6	2	
redukt7: 2 8	7	2	
redukt8: 2 10	8	3	
redukt9: 2 6	10	3	
redukt10: 2 12	11	12	(charyzmatyczny lider)
redukt11: 3 5 11	12	3	
redukt12: 3 8 11			
redukt13: 3 10 11			
redukt14: 3 11 12			
redukt15: 4 11			
redukt16: 5 8 11			
redukt17: 5 10 11			
redukt18: 5 11 12			
redukt19: 6 11			
redukt20: 7 11			

Znaleziono 3 reguły:

a12=1 => a9=1 (4 przykłady)
a2=3 => a9=1 (2 przykłady)

a6=3 a11=0 => a9=2 (2 przykłady)

Powyższe reguły można zapisać w sposób przedstawiony poniżej.

[*prowadzenie kampanii wyborczej* = widoczna] => [a9=1]; q=0.500
[*edukacja i nauka* = zahamowanie likwidacji szkół wiejskich i wyższych szkół zawodowych w mniejszych miastach] => [a9 = 1]; q=0.250]

[*rolnictwo i polityka regionalna* = rozwijanie na wsi działalności pozarolniczej i inwestycje infrastrukturalne] ∧ [*charyzmatyczny lider* = brak] => [a9 = 2]; q=0.250]

Wszystkie znalezione reguły (69):

a2=2 => a9=1 (2 przykłady)	a1=2 a2=4 => a9=2 (1 przykład)
a3=2 => a9=1 (2 przykłady)	a2=4 a3=3 => a9=2 (1 przykład)
a4=2 => a9=1 (2 przykłady)	a2=4 a4=4 => a9=2 (1 przykład)
a5=2 => a9=1 (4 przykłady)	a2=4 a5=1 => a9=2 (1 przykład)
a7=1 => a9=1 (2 przykłady)	a2=4 a6=3 => a9=2 (1 przykład)
a11=1 => a9=1 (4 przykłady)	a2=4 a7=2 => a9=2 (1 przykład)
a12=1 => a9=1 (4 przykłady)	a2=4 a8=1 => a9=2 (1 przykład)
a1=1 a2=4 => a9=1 (1 przykład)	a2=4 a10=1 => a9=2 (1 przykład)
a2=4 a3=1 => a9=1 (1 przykład)	a2=4 a11=0 => a9=2 (1 przykład)
a2=4 a4=3 => a9=1 (1 przykład)	a1=2 a3=3 a11=0 => a9=2 (1 przykład)
a6=2 => a9=1 (2 przykłady)	a3=3 a8=1 a11=0 => a9=2 (1 przykład)
a7=3 => a9=1 (1 przykład)	a3=3 a10=1 a11=0 => a9=2 (1 przykład)
a2=4 a8=2 => a9=1 (1 przykład)	a3=3 a11=0 a12=0 => a9=2 (1 przykład)
a10=0 => a9=1 (3 przykłady)	a4=4 a11=0 => a9=2 (1 przykład)
a1=3 => a9=1 (1 przykład)	a5=1 a11=0 => a9=2 (1 przykład)
a3=4 => a9=1 (1 przykład)	a6=3 a11=0 => a9=2 (2 przykłady)
a4=1 => a9=1 (2 przykłady)	a7=2 a11=0 => a9=2 (1 przykład)
a6=1 => a9=1 (2 przykłady)	a2=4 a12=0 => a9=2 (1 przykład)
a8=3 => a9=1 (2 przykłady)	a1=1 a2=1 => a9=2 (1 przykład)
a2=3 => a9=1 (2 przykłady)	a2=1 a3=1 => a9=2 (1 przykład)
a7=5 => a9=1 (1 przykład)	a2=1 a4=3 => a9=2 (1 przykład)
a1=4 => a9=1 (1 przykład)	a2=1 a6=3 => a9=2 (1 przykład)
a2=1 a3=3 => a9=1 (1 przykład)	a2=1 a8=2 => a9=2 (1 przykład)
a3=3 a5=3 => a9=1 (1 przykład)	a2=1 a10=1 => a9=2 (1 przykład)
	a2=1 a12=0 => a9=2 (1 przykład)
	a3=1 a6=3 => a9=2 (1 przykład)
	a3=1 a10=1 => a9=2 (1 przykład)
	a4=3 a6=3 => a9=2 (1 przykład)
	a4=3 a10=1 => a9=2 (1 przykład)
	a1=1 a5=3 => a9=2 (1 przykład)
	a3=1 a5=3 => a9=2 (1 przykład)
	a4=3 a5=3 => a9=2 (1 przykład)
	a5=3 a6=3 => a9=2 (1 przykład)
	a5=3 a8=2 => a9=2 (1 przykład)
	a5=3 a10=1 => a9=2 (1 przykład)
	a5=3 a12=0 => a9=2 (1 przykład)
	a7=4 => a9=2 (1 przykład)
	a1=1 a11=0 => a9=2 (1 przykład)
	a3=1 a11=0 => a9=2 (1 przykład)
	a4=3 a11=0 => a9=2 (1 przykład)
	a8=2 a11=0 => a9=2 (1 przykład)
	a1=1 a12=0 => a9=2 (1 przykład)

	a3=1 a12=0 => a9=2 (1 przykład) a4=3 a12=0 => a9=2 (1 przykład) a8=2 a12=0 => a9=2 (1 przykład)

ZAGADNIENIE 2.

Różnice programowe pomiędzy SLD_UP a pozostałymi partiami.
Cecha 9-ta decyzyjna: {1 - SLD_UP, 2 – inne partie}

PRZYPADEK 2.1

Cecha decyzyjna: Cecha 9
Cechy niezależne: Cecha 1, Cecha 2, Cecha 3, Cecha 4, Cecha 5, Cecha 6, Cecha 7, Cecha 8

Znaleziono 19 reduktów	Cechy - częstotliwość występowania cech w reduktach
redukt 1: 1 2 redukt 2: 1 3 redukt 3: 1 4 redukt 4: 1 7 redukt 5: 2 3 redukt 6: 2 4 redukt 7: 2 7 redukt 8: 2 8 redukt 9: 2 6 redukt 10: 3 7 redukt 11: 3 8 redukt 12: 3 6 redukt 13: 4 7 redukt 14: 4 8 redukt 15: 4 6 redukt 16: 5 6 redukt 17: 5 7 redukt 18: 6 7 redukt 19: 7 8	1 4 2 6 (edukacja i nauka) 3 5 4 5 5 2 6 5 7 7 (bezpieczeństwo) 8 4

Znaleziono 5 reguł:

a7=1 a8=2 => a9=1 (1 przykł.)

a7=3 => a9=2 (1 przykł.)
a8=3 => a9=2 (2 przykł.)
a8=1 => a9=2 (3 przykłady)
a5=3 => a9=2 (2 przykł.)

Wszystkie znalezione reguły (41):

a1=1 a2=2 => a9=1 (1 przykł.)	a2=4 => a9=2 (2 przykł.)
a2=2 a8=2 => a9=1 (1 przykł.)	a3=1 => a9=2 (2 przykł.)
a1=1 a3=2 => a9=1 (1 przykł.)	a4=3 => a9=2 (2 przykł.)
a2=2 a3=2 => a9=1 (1 przykł.)	a6=2 => a9=2 (2 przykł.)

a3=2 a8=2 => a9=1 (1 przykł.)	a7=3 => a9=2 (1 przykł.)
a1=1 a4=2 => a9=1 (1 przykł.)	a1=3 => a9=2 (1 przykł.)
a2=2 a4=2 => a9=1 (1 przykł.)	a3=4 => a9=2 (1 przykł.)
a4=2 a8=2 => a9=1 (1 przykł.)	a4=1 => a9=2 (2 przykł.)
a2=2 a6=3 => a9=1 (1 przykł.)	a6=1 => a9=2 (2 przykł.)
a3=2 a6=3 => a9=1 (1 przykł.)	a7=2 => a9=2 (3 przykłady)
a4=2 a6=3 => a9=1 (1 przykł.)	a8=3 => a9=2 (2 przykł.)
a5=2 a6=3 => a9=1 (1 przykł.)	a1=2 => a9=2 (3 przykłady)
a6=3 a7=1 => a9=1 (1 przykł.)	a2=3 => a9=2 (2 przykł.)
a1=1 a7=1 => a9=1 (1 przykł.)	a3=3 => a9=2 (3 przykłady)
a2=2 a7=1 => a9=1 (1 przykł.)	a4=4 => a9=2 (2 przykł.)
a3=2 a7=1 => a9=1 (1 przykł.)	a5=1 => a9=2 (2 przykł.)
a4=2 a7=1 => a9=1 (1 przykł.)	a8=1 => a9=2 (3 przykłady)
a5=2 a7=1 => a9=1 (1 przykł.)	a7=5 => a9=2 (1 przykł.)
a7=1 a8=2 => a9=1 (1 przykł.)	a1=4 => a9=2 (1 przykł.)
	a2=1 => a9=2 (2 przykł.)
	a5=3 => a9=2 (2 przykł.)
	a7=4 => a9=2 (1 przykł.)

PRZYPADEK 2.2

Cecha decyzyjna: Cecha 9
Cechy niezależne: Cecha 1, Cecha 2, Cecha 3, Cecha 4, Cecha 5, Cecha 6, Cecha 7, Cecha 8, Cecha 10, Cecha 11, Cecha 12

Znaleziono 35 reduktów	**Cechy – częstotliwość występowania cech w redukcie**		
redukt 1: 1 2	1	7	
redukt 2: 1 3	2	7	
redukt 3: 1 4	3	7	
redukt 4: 1 5 10	4	7	
redukt 5: 1 6 11	5	5	
redukt 6: 1 7	6	8	(rolnictwo i polityka regionalna)
redukt 7: 1 10 11	7	9	(bezpieczeństwo)
redukt 8: 2 3	8	7	
redukt 9: 2 4	10	8	(doświadczenie w rządzeniu)
redukt 10: 2 7	11	8	(charyzmatyczny lider)
redukt 11: 2 8	12	4	
redukt 12: 2 10			
redukt 13: 2 6			
redukt 14: 3 7			
redukt 15: 3 8			
redukt 16: 3 6			
redukt 17: 3 12			
redukt 18: 3 11			
redukt 19: 4 7			
redukt 20: 4 8			
redukt 21: 4 6			
redukt 22: 4 12			
redukt 23: 4 11			

redukt 24: 5 6 redukt 25: 5 7 redukt 26: 5 8 10 redukt 27: 5 10 11 redukt 28: 6 7 redukt 29: 6 8 11 redukt 30: 6 12 redukt 31: 7 8 redukt 32: 7 10 redukt 33: 7 11 redukt 34: 8 10 11 redukt 35: 10 12	

Znaleziono 4 reguły:

a10=1 a12=1 => a9=1 (1 przykł.)

a10=0 => a9=2 (3 przykłady)
a7=2 => a9=2 (3 przykłady)
a11=0 => a9=2 (4 przykłady)

Wszystkie znalezione reguły (60)

a1=1 a2=2 => a9=1 (1 przykł.)	a2=4 => a9=2 (2 przykł.)
a2=2 a8=2 => a9=1 (1 przykł.)	a3=1 => a9=2 (2 przykł.)
a1=1 a3=2 => a9=1 (1 przykł.)	a4=3 => a9=2 (2 przykł.)
a2=2 a3=2 => a9=1 (1 przykł.)	a6=2 => a9=2 (2 przykł.)
a3=2 a6=3 => a9=1 (1 przykł.)	a7=3 => a9=2 (1 przykł.)
a3=2 a8=2 => a9=1 (1 przykł.)	a10=0 => a9=2 (3 przykłady)
a3=2 a11=1 => a9=1 (1 przykł.)	a1=3 => a9=2 (1 przykł.)
a3=2 a12=1 => a9=1 (1 przykł.)	a3=4 => a9=2 (1 przykł.)
a1=1 a4=2 => a9=1 (1 przykł.)	a4=1 => a9=2 (2 przykł.)
a2=2 a4=2 => a9=1 (1 przykł.)	a6=1 => a9=2 (2 przykł.)
a4=2 a6=3 => a9=1 (1 przykł.)	a7=2 => a9=2 (3 przykłady)
a4=2 a8=2 => a9=1 (1 przykł.)	a8=3 => a9=2 (2 przykł.)
a4=2 a11=1 => a9=1 (1 przykł.)	a1=2 => a9=2 (3 przykłady)
a4=2 a12=1 => a9=1 (1 przykł.)	a2=3 => a9=2 (2 przykł.)
a1=1 a6=3 a11=1 => a9=1 (1 przykł.)	a3=3 => a9=2 (3 przykłady)
a2=2 a6=3 => a9=1 (1 przykł.)	a4=4 => a9=2 (2 przykł.)
a5=2 a6=3 => a9=1 (1 przykł.)	a5=1 => a9=2 (2 przykł.)
a6=3 a8=2 a11=1 => a9=1 (1 przykł.)	a8=1 => a9=2 (3 przykłady)
a6=3 a12=1 => a9=1 (1 przykł.)	a12=0 => a9=2 (4 przykłady)
a1=1 a7=1 => a9=1 (1 przykł.)	a7=5 => a9=2 (1 przykł.)
a2=2 a7=1 => a9=1 (1 przykł.)	a11=0 => a9=2 (4 przykłady)
a3=2 a7=1 => a9=1 (1 przykł.)	a1=4 => a9=2 (1 przykł.)
a4=2 a7=1 => a9=1 (1 przykł.)	a2=1 => a9=2 (2 przykł.)
a5=2 a7=1 => a9=1 (1 przykł.)	a5=3 => a9=2 (2 przykł.)
a6=3 a7=1 => a9=1 (1 przykł.)	a7=4 => a9=2 (1 przykł.)
a7=1 a8=2 => a9=1 (1 przykł.)	
a7=1 a10=1 => a9=1 (1 przykł.)	
a7=1 a11=1 => a9=1 (1 przykł.)	

a1=1 a5=2 a10=1 => a9=1 (1 przykł.) a1=1 a10=1 a11=1 => a9=1 (1 przykł.) a2=2 a10=1 => a9=1 (1 przykł.) a5=2 a10=1 a11=1 => a9=1 (1 przykł.) a5=2 a8=2 a10=1 => a9=1 (1 przykł.) a8=2 a10=1 a11=1 => a9=1 (1 przykł.) a10=1 a12=1 => a9=1 (1 przykł.)	

ZAGADNIENIE 3.

Różnice programowe pomiędzy SLD_UP a pozostałymi partiami które uzyskały mandaty do Sejmu w 2001 oraz partiami, które nie weszły do Sejmu.

Cecha 9-ta decyzyjna: {1 - SLD_UP, 2 – inne partie które weszły do Sejmu, 3- partie, które nie weszły}

PRZYPADEK 3.1

Cecha decyzyjna: Cecha 9
Cechy niezależne: cecha 1, cecha 2, cecha 3, cecha 4, cecha 5, cecha 6, cecha 7, cecha 8

Znaleziono 6 reduktów	**Cecha – częstotliwość cech w reduktach**		
redukt 1: 1 2	1	1	
redukt 2: 2 3	2	6	(edukacja i nauka)
redukt 3: 2 4	3	1	
redukt 4: 2 7	4	1	
redukt 5: 2 8	6	1	
redukt 6: 2 6	7	1	
	8	1	

Znaleziono 6 reguł

a7=1 a8=2 => a9=1 (1 przykł.)

a7=3 => a9=2 (1 przykł.)
a8=3 => a9=2 (2 przykł.)
a2=3 => a9=2 (2 przykł.)

a2=4 a8=1 => a9=3 (1 przykł.)
a7=4 => a9=3 (1 przykł.)

Wszystkie znalezione reguły (69)

a1=1 a2=2 => a9=1 (1 prz.)	a1=1 a2=4 => a9=2 (1 przykł.)	a1=2 a2=4 => a9=3 (1 prz.)
a2=2 a8=2 => a9=1 (1 prz.)	a2=4 a5=2 => a9=2 (1 przykł.)	a2=4 a3=3 => a9=3 (1 prz.)
a1=1 a3=2 => a9=1 (1 prz.)	a2=4 a8=2 => a9=2 (1 przykł.)	a2=4 a4=4 => a9=3 (1 prz.)
a2=2 a3=2 =>a9=1 (1 przykł.)	a2=4 a3=1 => a9=2 (1 przykł.)	a2=4 a5=1 => a9=3 (1 przykł.)
a3=2 a8=2 => a9=1 (1 przykł.)	a3=1 a5=2 => a9=2 (1 przykł.)	a2=4 a6=3 => a9=3 (1 przykł.)
a1=1 a4=2 => a9=1 (1 przykł.)	a2=4 a4=3 => a9=2 (1 przykł.)	a2=4 a7=2 => a9=3 (1 przykł.)
a2=2 a4=2 => a9=1 (1 przykł.)	a4=3 a5=2 => a9=2 (1 przykł.)	a2=4 a8=1 => a9=3 (1 przykł.)
a4=2 a8=2 => a9=1 (1 przykł.)	a6=2 => a9=2 (2 przykłady)	a1=1 a2=1 => a9=3 (1 przykł.)

a2=2 a6=3 => a9=1 (1 przykł.) a3=2 a6=3 => a9=1 (1 przykł.) a4=2 a6=3 => a9=1 (1 przykł.) a5=2 a6=3 => a9=1 (1 przykł.) a6=3 a7=1 => a9=1 (1 przykł.) a1=1 a7=1 => a9=1 (1 przykł.) a2=2 a7=1 => a9=1 (1 przykł.) a3=2 a7=1 => a9=1 (1 przykł.) a4=2 a7=1 => a9=1 (1 przykł.) a5=2 a7=1 => a9=1 (1 prz.) a7=1 a8=2 => a9=1 (1 przykł.)	a7=3 => a9=2 (1 przykł.) a1=3 => a9=2 (1 przykł.) a3=4 => a9=2 (1 przykł.) a4=1 => a9=2 (2 przykłady) a6=1 => a9=2 (2 przykłady) a2=2 a7=2 => a9=2 (1 przykł.) a5=2 a7=2 => a9=2 (1 przykł.) a8=3 => a9=2 (2 przykłady) a2=3 => a9=2 (2 przykłady) a1=2 a3=2 => a9=2 (1 przykł.) a1=2 a4=2 => a9=2 (1 przykł.) a1=2 a5=2 => a9=2 (1 przykł.) a7=5 => a9=2 (1 przykł.) a3=2 a8=1 => a9=2 (1 przykł.) a4=2 a8=1 => a9=2 (1 przykł.) a5=2 a8=1 => a9=2 (1 przykł.) a1=4 => a9=2 (1 przykł.) a2=1 a3=3 => a9=2 (1 przykł.) a2=1 a7=1 => a9=2 (1 przykł.) a3=3 a7=1 => a9=2 (1 przykł.) a3=3 a5=3 => a9=2 (1 przykł.) a5=3 a7=1 => a9=2 (1 przykł.)	a2=1 a3=1 => a9=3 (1 przykł.) a2=1 a4=3 => a9=3 (1 przykł.) a2=1 a6=3 => a9=3 (1 przykł.) a2=1 a8=2 => a9=3 (1 przykł.) a3=1 a6=3 => a9=3 (1 przykł.) a4=3 a6=3 => a9=3 (1 przykł.) a1=1 a5=3 => a9=3 (1 przykł.) a3=1 a5=3 => a9=3 (1 przykł.) a4=3 a5=3 => a9=3 (1 przykł.) a5=3 a6=3 => a9=3 (1 przykł.) a5=3 a8=2 => a9=3 (1 przykł.) a7=4 => a9=3 (1 przykł.)

PRZYPADEK 3.2

Cecha decyzyjna: Cecha 9
Cechy niezależne: cecha 1, cecha 2, cecha 3, cecha 4, cecha 5, cecha 6, cecha 7, cecha 8, cecha 10, cecha 11, cecha 12

Znaleziono 20 reduktów	**Cecha – częstotliwość cech w reduktach**
redukt 1: 1 2 redukt 2: 1 3 11 redukt 3: 1 6 11 redukt 4: 2 3 redukt 5: 2 4 redukt 6: 2 7 redukt 7: 2 8 redukt 8: 2 10 redukt 9: 2 6 redukt 10: 3 5 11 redukt 11: 3 6 11 redukt 12: 3 8 11 redukt 13: 3 10 11 redukt 14: 3 11 12 redukt 15: 4 11 redukt 16: 5 6 11 redukt 17: 5 10 11 redukt 18: 6 8 11 redukt 19: 6 11 12 redukt 20: 7 11	1 3 2 7 (edukacja i nauka) 3 7 (podatki) 4 2 5 3 6 6 7 2 8 3 10 3 11 13 (charyzmatyczny lider) 12 2

Znaleziono 4 reguły

a10=1 a12=1 => a9=1 (1 przykł.)

a10=0 => a9=2 (3 przykłady)
a2=3 => a9=2 (2 przykł.)

a6=3 a11=0 => a9=3 (2 przykł.)

Wszystkie znalezione reguły (136)

a1=1 a2=2 => a9=1 (1 przykł.)	a1=1 a2=4 => a9=2 (1 przykł.)	a1=2 a2=4 => a9=3 (1 przykł.)
a2=2 a8=2 => a9=1 (1 przykł.)	a2=4 a5=2 => a9=2 (1 przykł.)	a2=4 a3=3 => a9=3 (1 przykł.)
a1=1 a3=2 => a9=1 (1 przykł.)	a2=4 a8=2 => a9=2 (1 przykł.)	a2=4 a4=4 => a9=3 (1 przykł.)
a2=2 a3=2 => a9=1 (1 przykł.)	a2=4 a11=1 => a9=2 (1 przykł.)	a2=4 a5=1 => a9=3 (1 przykł.)
a3=2 a6=3 => a9=1 (1 przykł.)	a2=4 a12=1 => a9=2 (1 przykł.)	a2=4 a6=3 => a9=3 (1 przykł.)
a3=2 a8=2 => a9=1 (1 przykł.)	a2=4 a3=1 => a9=2 (1 przykł.)	a2=4 a7=2 => a9=3 (1 przykł.)
a3=2 a11=1 => a9=1 (1 przykł.)	a3=1 a5=2 => a9=2 (1 przykł.)	a2=4 a8=1 => a9=3 (1 przykł.)
a3=2 a12=1 => a9=1 (1 przykł.)	a3=1 a11=1 => a9=2 (1 przykł.)	a2=4 a10=1 => a9=3 (1 przykł.)
a1=1 a4=2 => a9=1 (1 przykł.)	a3=1 a12=1 => a9=2 (1 przykł.)	a2=4 a11=0 => a9=3 (1 przykł.)
a2=2 a4=2 => a9=1 (1 przykł.)	a2=4 a4=3 => a9=2 (1 przykł.)	a1=2 a3=3 a11=0 =>a9=3 (1 prz.)
a4=2 a6=3 => a9=1 (1 przykł.)	a4=3 a5=2 => a9=2 (1 przykł.)	a3=3 a8=1 a11=0 =>a9=3 (1 prz.)
a4=2 a8=2 => a9=1 (1 przykł.)	a4=3 a11=1 => a9=2 (1 przykł.)	a3=3 a10=1 a11=0 =>a9=3 (1prz)
a4=2 a11=1 => a9=1 (1 przykł.)	a4=3 a12=1 => a9=2 (1 przykł.)	a3=3 a11=0 a12=0 =>a9=3 (1prz)
a4=2 a12=1 => a9=1 (1 przykł.)	a6=2 => a9=2 (2 przykł.)	a4=4 a11=0 => a9=3 (1 przykł.)
a1=1 a6=3 a11=1 =>a9=1 (1prz.)	a7=3 => a9=2 (1 przykł.)	a5=1 a11=0 => a9=3 (1 przykł.)
a2=2 a6=3 => a9=1 (1 przykł.)	a10=0 => a9=2 (3 przykł.)	a6=3 a11=0 => a9=3 (2 przykł.)
a5=2 a6=3 => a9=1 (1 przykł.)	a1=3 => a9=2 (1 przykł.)	a7=2 a11=0 => a9=3 (1 przykł.)
a6=3 a8=2 a11=1 =>a9=1 (1prz.)	a3=4 => a9=2 (1 przykł.)	a2=4 a12=0 => a9=3 (1 przykł.)
a6=3 a12=1 => a9=1 (1 przykł.)	a4=1 => a9=2 (2 przykł.)	a1=1 a2=1 => a9=3 (1 przykł.)
a1=1 a7=1 => a9=1 (1 przykł.)	a6=1 => a9=2 (2 przykł.)	a2=1 a3=1 => a9=3 (1 przykł.)
a2=2 a7=1 => a9=1 (1 przykł.)	a2=2 a7=2 => a9=2 (1 przykł.)	a2=1 a4=3 => a9=3 (1 przykł.)
a3=2 a7=1 => a9=1 (1 przykł.)	a5=2 a7=2 => a9=2 (1 przykł.)	a2=1 a6=3 => a9=3 (1 przykł.)
a4=2 a7=1 => a9=1 (1 przykł.)	a7=2 a11=1 => a9=2 (2 przykł.)	a2=1 a8=2 => a9=3 (1 przykł.)
a5=2 a7=1 => a9=1 (1 przykł.)	a7=2 a12=1 => a9=2 (1 przykł.)	a2=1 a10=1 => a9=3 (1 przykł.)
a6=3 a7=1 => a9=1 (1 przykł.)	a8=3 => a9=2 (2 przykł.)	a2=1 a12=0 => a9=3 (1 przykł.)
a7=1 a8=2 => a9=1 (1 przykł.)	a1=2 a11=1 => a9=2 (1 przykł.)	a3=1 a6=3 => a9=3 (1 przykł.)
a7=1 a10=1 => a9=1 (1 przykł.)	a2=3 => a9=2 (2 przykł.)	a3=1 a10=1 => a9=3 (1 przykł.)
a7=1 a11=1 => a9=1 (1 przykł.)	a3=3 a11=1 => a9=2 (1 przykł.)	a4=3 a6=3 => a9=3 (1 przykł.)
a1=1 a5=2 a10=1 =>a9=1 (1 prz)	a4=4 a11=1 => a9=2 (1 przykł.)	a4=3 a10=1 => a9=3 (1 przykł.)
a1=1 a10=1 a11=1=>a9=1 (1prz)	a5=1 a11=1 => a9=2 (1 przykł.)	a1=1 a5=3 => a9=3 (1 przykł.)
a2=2 a10=1 => a9=1 (1 przykł.)	a8=1 a11=1 => a9=2 (1 przykł.)	a3=1 a5=3 => a9=3 (1 przykł.)
a5=2 a10=1 a11=1=>a9=1 (1prz)	a11=1 a12=0 => a9=2 (1 przykł.)	a4=3 a5=3 => a9=3 (1 przykł.)
a5=2 a8=2 a10=1 =>a9=1 (1 prz)	a1=2 a3=2 => a9=2 (1 przykł.)	a5=3 a6=3 => a9=3 (1 przykł.)
a8=2 a10=1 a11=1=>a9=1 (1prz)	a1=2 a4=2 => a9=2 (1 przykł.)	a5=3 a8=2 => a9=3 (1 przykł.)
a10=1 a12=1 => a9=1 (1 przykł.)	a1=2 a5=2 => a9=2 (1 przykł.)	a5=3 a10=1 => a9=3 (1 przykł.)
	a7=5 => a9=2 (1 przykł.)	a5=3 a12=0 => a9=3 (1 przykł.)
	a3=2 a8=1 => a9=2 (1 przykł.)	a7=4 => a9=3 (1 przykł.)
	a4=2 a8=1 => a9=2 (1 przykł.)	a1=1 a11=0 => a9=3 (1 przykł.)
	a5=2 a8=1 => a9=2 (1 przykł.)	a3=1 a11=0 => a9=3 (1 przykł.)
	a3=2 a11=0 => a9=2 (1 przykł.)	a4=3 a11=0 => a9=3 (1 przykł.)

	a4=2 a11=0 => a9=2 (1 przykł.) a5=2 a11=0 => a9=2 (1 przykł.) a3=2 a12=0 => a9=2 (1 przykł.) a4=2 a12=0 => a9=2 (1 przykł.) a5=2 a12=0 => a9=2 (1 przykł.) a1=4 => a9=2 (1 przykł.) a2=1 a3=3 => a9=2 (1 przykł.) a2=1 a7=1 => a9=2 (1 przykł.) a2=1 a12=1 => a9=2 (1 przykł.) a3=3 a7=1 => a9=2 (1 przykł.) a3=3 a12=1 => a9=2 (1 przykł.) a3=3 a5=3 => a9=2 (1 przykł.) a5=3 a7=1 => a9=2 (1 przykł.) a5=3 a12=1 => a9=2 (1 przykł.) a7=1 a11=0 => a9=2 (1 przykł.) a11=0 a12=1 => a9=2 (1 przykł.)	a8=2 a11=0 => a9=3 (1 przykł.) a1=1 a12=0 => a9=3 (1 przykł.) a3=1 a12=0 => a9=3 (1 przykł.) a4=3 a12=0 => a9=3 (1 przykł.) a8=2 a12=0 => a9=3 (1 przykł.)

ZAGADNIENIE 4.

Różnice programowe pomiędzy ośmioma partiami
Cecha 9-ta decyzyjna: {1 - SLD_UP, 2 – PO, ..., 8 - UW}

PRZYPADEK 4.1

Cecha decyzyjna: Cecha 9
Cechy niezależne: cecha 1, cecha 2, cecha 3, cecha 4, cecha 5, cecha 6, cecha 7, cecha 8

Znaleziono 6 reduktów.	**Cecha – częstotliwość cech w reduktach**		
redukt 1: 2 4	1	1	
redukt 2: 1 2 5	2	6	(edukacja i nauka)
redukt 3: 2 3	3	1	
redukt 4: 2 7	4	1	
redukt 5: 2 5 8	5	2	
redukt 6: 2 6	6	1	
	7	1	
	8	1	

Znaleziono 8 reguł:

a7=1 a8=2 => a9=1 (1 przykł.)
a7=3 => a9=2 (1 przykł.)
a3=4 => a9=3 (1 przykł.)
a2=3 a7=2 => a9=4 (1 przykł.)
a7=5 => a9=5 (1 przykł.)
a1=4 => a9=6 (1 przykł.)
a2=4 a8=1 => a9=7 (1 przykł.)
a7=4 => a9=8 (1 przykł.)

Wszystkie znalezione reguły (107):

a1=1 a2=2 => a9=1 (1 przykł.)	a1=1 a2=4 => a9=2 (1 przykł.)	a1=3 => a9=3 (1 przykł.)
a2=2 a8=2 => a9=1 (1 przykł.)	a2=4 a5=2 => a9=2 (1 przykł.)	a3=4 => a9=3 (1 przykł.)
a1=1 a3=2 => a9=1 (1 przykł.)	a2=4 a6=2 => a9=2 (1 przykł.)	a2=2 a4=1 => a9=3 (1 przykł.)
a2=2 a3=2 => a9=1 (1 przykł.)	a2=4 a8=2 => a9=2 (1 przykł.)	a4=1 a5=2 => a9=3 (1 przykł.)
a3=2 a8=2 => a9=1 (1 przykł.)	a2=4 a3=1 => a9=2 (1 przykł.)	a4=1 a6=1 => a9=3 (1 przykł.)
a1=1 a4=2 => a9=1 (1 przykł.)	a3=1 a5=2 => a9=2 (1 przykł.)	a4=1 a7=2 => a9=3 (1 przykł.)
a2=2 a4=2 => a9=1 (1 przykł.)	a3=1 a6=2 => a9=2 (1 przykł.)	a2=2 a6=1 => a9=3 (1 przykł.)
a4=2 a8=2 => a9=1 (1 przykł.)	a2=4 a4=3 => a9=2 (1 przykł.)	a6=1 a7=2 => a9=3 (1 przykł.)
a2=2 a6=3 => a9=1 (1 przykł.)	a4=3 a5=2 => a9=2 (1 przykł.)	a2=2 a7=2 => a9=3 (1 przykł.)
a3=2 a6=3 => a9=1 (1 przykł.)	a4=3 a6=2 => a9=2 (1 przykł.)	a5=2 a7=2 => a9=3 (1 przykł.)
a4=2 a6=3 => a9=1 (1 przykł.)	a1=1 a6=2 => a9=2 (1 przykł.)	a2=2 a8=3 => a9=3 (1 przykł.)
a5=2 a6=3 => a9=1 (1 przykł.)	a5=2 a6=2 => a9=2 (1 przykł.)	a5=2 a8=3 => a9=3 (1 przykł.)
a6=3 a7=1 => a9=1 (1 przykł.)	a6=2 a8=2 => a9=2 (1 przykł.)	a6=1 a8=3 => a9=3 (1 przykł.)
a1=1 a7=1 => a9=1 (1 przykł.)	a7=3 => a9=2 (1 przykł.)	a7=2 a8=3 => a9=3 (1 przykł.)
a2=2 a7=1 => a9=1 (1 przykł.)		
a3=2 a7=1 => a9=1 (1 przykł.)		
a4=2 a7=1 => a9=1 (1 przykł.)		
a5=2 a7=1 => a9=1 (1 przykł.)		
a7=1 a8=2 => a9=1 (1 przykł.)		
a2=3 a3=3 => a9=4 (1 przykł.)	a1=2 a3=2 => a9=5 (1 przykł.)	a1=4 => a9=6 (1 przykł.)
a2=3 a4=4 => a9=4 (1 przykł.)	a1=2 a4=2 => a9=5 (1 przykł.)	a2=1 a3=3 => a9=6 (1 przykł.)
a2=3 a5=1 => a9=4 (1 przykł.)	a1=2 a5=2 => a9=5 (1 przykł.)	a2=1 a4=1 => a9=6 (1 przykł.)
a2=3 a6=3 => a9=4 (1 przykł.)	a1=2 a6=1 => a9=5 (1 przykł.)	a2=1 a6=2 => a9=6 (1 przykł.)
a2=3 a7=2 => a9=4 (1 przykł.)	a2=3 a3=2 => a9=5 (1 przykł.)	a2=1 a7=1 => a9=6 (1 przykł.)
	a2=3 a4=2 => a9=5 (1 przykł.)	a2=1 a8=3 => a9=6 (1 przykł.)
	a2=3 a5=2 => a9=5 (1 przykł.)	a3=3 a4=1 => a9=6 (1 przykł.)
	a2=3 a6=1 => a9=5 (1 przykł.)	a3=3 a6=2 => a9=6 (1 przykł.)
	a3=2 a6=1 => a9=5 (1 przykł.)	a3=3 a7=1 => a9=6 (1 przykł.)
	a4=2 a6=1 => a9=5 (1 przykł.)	a3=3 a8=3 => a9=6 (1 przykł.)
	a7=5 => a9=5 (1 przykł.)	a4=1 a6=2 => a9=6 (1 przykł.)
	a3=2 a8=1 => a9=5 (1 przykł.)	a4=1 a7=1 => a9=6 (1 przykł.)
	a4=2 a8=1 => a9=5 (1 przykł.)	a3=3 a5=3 => a9=6 (1 przykł.)
	a5=2 a8=1 => a9=5 (1 przykł.)	a4=1 a5=3 => a9=6 (1 przykł.)
	a6=1 a8=1 => a9=5 (1 przykł.)	a5=3 a6=2 => a9=6 (1 przykł.)
		a5=3 a7=1 => a9=6 (1 przykł.)
		a5=3 a8=3 => a9=6 (1 przykł.)
		a6=2 a7=1 => a9=6 (1 przykł.)
		a6=2 a8=3 => a9=6 (1 przykł.)
		a7=1 a8=3 => a9=6 (1 przykł.)
a1=2 a2=4 => a9=7 (1 przykł.)	a1=1 a2=1 => a9=8 (1 przykł.)	
a2=4 a3=3 => a9=7 (1 przykł.)	a2=1 a3=1 => a9=8 (1 przykł.)	
a2=4 a4=4 => a9=7 (1 przykł.)	a2=1 a4=3 => a9=8 (1 przykł.)	
a2=4 a5=1 => a9=7 (1 przykł.)	a2=1 a6=3 => a9=8 (1 przykł.)	
a2=4 a6=3 => a9=7 (1 przykł.)	a2=1 a8=2 => a9=8 (1 przykł.)	
a2=4 a7=2 => a9=7 (1 przykł.)	a3=1 a6=3 => a9=8 (1 przykł.)	
a2=4 a8=1 => a9=7 (1 przykł.)	a4=3 a6=3 => a9=8 (1 przykł.)	
	a1=1 a5=3 => a9=8 (1 przykł.)	
	a3=1 a5=3 => a9=8 (1 przykł.)	
	a4=3 a5=3 => a9=8 (1 przykł.)	
	a5=3 a6=3 => a9=8 (1 przykł.)	

	a5=3 a8=2 => a9=8 (1 przykł.) a7=4 => a9=8 (1 przykł.)

PRZYPADEK 4.2

Cecha decyzyjna: Cecha 9
Cechy niezależne: cecha 1, cecha 2, cecha 3, cecha 4, cecha 5, cecha 6, cecha 7, cecha 8, cecha 10, cecha 11, cecha 12

Znaleziono 29 reduktów:.	Cecha – częstotliwość cech w reduktach		
redukt 1: 2 4	1	6	
redukt 2: 1 2 5	2	10	(edukacja i nauka)
redukt 3: 1 2 11	3	8	
redukt 4: 1 3 11	4	2	
redukt 5: 1 5 10 11	5	8	
redukt 6: 1 6 11	6	6	
redukt 7: 1 7 11	7	8	
redukt 8: 2 3	8	6	
redukt 9: 2 7	10	6	
redukt 10: 2 5 8	11	22	(charyzmatyczny lider)
redukt 11: 2 5 10	12	2	
redukt 12: 2 6			
redukt 13: 2 8 11			
redukt 14: 2 10 11			
redukt 15: 3 5 11			
redukt 16: 3 6 11			
redukt 17: 3 7 11			
redukt 18: 3 8 11			
redukt 19: 3 10 11			
redukt 20: 3 11 12			
redukt 21: 4 11			
redukt 22: 5 6 11			
redukt 23: 5 7 11			
redukt 24: 5 8 10 11			
redukt 25: 6 7 11			
redukt 26: 6 8 11			
redukt 27: 7 8 11			
redukt 28: 7 10 11			
redukt 29: 7 11 12			

Znaleziono 8 reguł:

a10=1 a12=1 => a9=1 (1 przykł.)
a7=3 => a9=2 (1 przykł.)
a3=4 => a9=3 (1 przykł.)
a11=1 a12=0 => a9=4 (1 przykł.)
a7=5 => a9=5 (1 przykł.)
a1=4 => a9=6 (1 przykł.)
a2=4 a12=0 => a9=7 (1 przykł.)
a7=4 => a9=8 (1 przykł.)

Wszystkie znalezione reguły (202)

a1=1 a2=2 => a9=1 (1 przykł.)	a1=1 a2=4 => a9=2 (1 przykł.)	a1=3 => a9=3 (1 przykł.)
a2=2 a8=2 => a9=1 (1 przykł.)	a2=4 a5=2 => a9=2 (1 przykł.)	a3=4 => a9=3 (1 przykł.)
a1=1 a3=2 => a9=1 (1 przykł.)	a2=4 a6=2 => a9=2 (1 przykł.)	a2=2 a4=1 =>a9=3 (1 przykł.)
a2=2 a3=2 => a9=1 (1 przykł.)	a2=4 a8=2 => a9=2 (1 przykł.)	a4=1 a5=2 =>a9=3 (1 przykł.)
a3=2 a6=3 => a9=1 (1 przykł.)	a2=4 a10=0 => a9=2 (1 przykł.)	a4=1 a6=1 =>a9=3 (1 przykł.)
a3=2 a8=2 => a9=1 (1 przykł.)	a2=4 a11=1 => a9=2 (1 przykł.)	a4=1 a7=2 =>a9=3 (1 przykł.)
a3=2 a11=1 => a9=1 (1 przykł.)	a2=4 a12=1 => a9=2 (1 przykł.)	a4=1 a11=1 => a9=3 (1 przykł.)
a3=2 a12=1 => a9=1 (1 przykł.)	a2=4 a3=1 => a9=2 (1 przykł.)	a2=2 a6=1 =>a9=3 (1 przykł.)
a1=1 a4=2 => a9=1 (1 przykł.)	a3=1 a5=2 => a9=2 (1 przykł.)	a6=1 a7=2 => a9=3 (1 przykł.)
a2=2 a4=2 => a9=1 (1 przykł.)	a3=1 a6=2 => a9=2 (1 przykł.)	a6=1 a10=0 => a9=3 (1 przykł.)
a4=2 a6=3 => a9=1 (1 przykł.)	a3=1 a10=0 => a9=2 (1 przykł.)	a6=1 a11=1 => a9=3 (1 przykł.)
a4=2 a8=2 => a9=1 (1 przykł.)	a3=1 a11=1 => a9=2 (1 przykł.)	a6=1 a12=1 => a9=3 (1 przykł.)
a4=2 a11=1 => a9=1 (1 przykł.)	a3=1 a12=1 => a9=2 (1 przykł.)	a2=2 a7=2 => a9=3 (1 przykł.)
a4=2 a12=1 => a9=1 (1 przykł.)	a2=4 a4=3 => a9=2 (1 przykł.)	a5=2 a7=2 => a9=3 (1 przykł.)
a1=1 a6=3 a11=1=>a9=1 (1 prz.)	a4=3 a5=2 => a9=2 (1 przykł.)	a7=2 a10=0 => a9=3 (1 przykł.)
a2=2 a6=3 => a9=1 (1 przykł.)	a4=3 a6=2 => a9=2 (1 przykł.)	a7=2 a12=1 => a9=3 (1 przykł.)
a5=2 a6=3 => a9=1 (1 przykł.)	a4=3 a10=0 => a9=2 (1 przykł.)	a2=2 a8=3 => a9=3 (1 przykł.)
a6=3 a8=2 a11=1 => a9=1 (1 prz.)	a4=3 a11=1 => a9=2 (1 przykł.)	a5=2 a8=3 => a9=3 (1 przykł.)
a6=3 a12=1 => a9=1 (1 przykł.)	a4=3 a12=1 => a9=2 (1 przykł.)	a6=1 a8=3 => a9=3 (1 przykł.)
a1=1 a7=1 => a9=1 (1 przykł.)	a1=1 a6=2 => a9=2 (1 przykł.)	a7=2 a8=3 => a9=3 (1 przykł.)
a2=2 a7=1 => a9=1 (1 przykł.)	a5=2 a6=2 => a9=2 (1 przykł.)	a8=3 a11=1 => a9=3 (1 przykł.)
a3=2 a7=1 => a9=1 (1 przykł.)	a6=2 a8=2 => a9=2 (1 przykł.)	a2=2 a10=0 => a9=3 (1 przykł.)
a4=2 a7=1 => a9=1 (1 przykł.)	a6=2 a11=1 => a9=2 (1 przykł.)	
a5=2 a7=1 => a9=1 (1 przykł.)	a7=3 => a9=2 (1 przykł.)	
a6=3 a7=1 => a9=1 (1 przykł.)	a1=1 a10=0 => a9=2 (1 przykł.)	
a7=1 a8=2 => a9=1 (1 przykł.)	a8=2 a10=0 => a9=2 (1 przykł.)	
a7=1 a10=1 => a9=1 (1 przykł.)		
a7=1 a11=1 => a9=1 (1 przykł.)		
a1=1 a5=2 a10=1 => a9=1 (1 prz.)		
a1=1 a10=1 a11=1=>a9=1 (1 prz.)		
a2=2 a10=1 => a9=1 (1 przykł.)		
a5=2 a10=1 a11=1 =>a9=1 (1 prz)		
a5=2 a8=2 a10=1 => a9=1 (1 prz.)		
a8=2 a10=1 a11=1 =>a9=1 (1 prz)		
a10=1 a12=1 => a9=1 (1 przykł.)		
a1=2 a11=1 => a9=4 (1 przykł.)	a1=2 a3=2 => a9=5 (1 przykł.)	a1=4 => a9=6 (1 przykł.)
a2=3 a6=3 => a9=4 (1 przykł.)	a1=2 a4=2 => a9=5 (1 przykł.)	a2=1 a3=3 => a9=6 (1 przykł.)
a2=3 a7=2 => a9=4 (1 przykł.)	a1=2 a5=2 => a9=5 (1 przykł.)	a2=1 a4=1 => a9=6 (1 przykł.)
a2=3 a11=1 => a9=4 (1 przykł.)	a1=2 a6=1 => a9=5 (1 przykł.)	a2=1 a6=2 => a9=6 (1 przykł.)
a2=3 a3=3 => a9=4 (1 przykł.)	a2=3 a3=2 => a9=5 (1 przykł.)	a2=1 a7=1 => a9=6 (1 przykł.)
a3=3 a11=1 => a9=4 (1 przykł.)	a2=3 a4=2 => a9=5 (1 przykł.)	a2=1 a8=3 => a9=6 (1 przykł.)
a2=3 a4=4 => a9=4 (1 przykł.)	a2=3 a5=2 => a9=5 (1 przykł.)	a2=1 a10=0 => a9=6 (1 przykł.)
a4=4 a11=1 => a9=4 (1 przykł.)	a2=3 a6=1 => a9=5 (1 przykł.)	a2=1 a12=1 => a9=6 (1 przykł.)
a2=3 a5=1 => a9=4 (1 przykł.)	a3=2 a6=1 => a9=5 (1 przykł.)	a3=3 a4=1 => a9=6 (1 przykł.)
a5=1 a11=1 => a9=4 (1 przykł.)	a4=2 a6=1 => a9=5 (1 przykł.)	a3=3 a6=2 => a9=6 (1 przykł.)
a6=3 a7=2 a11=1 => a9=4 (1 prz.)	a6=1 a10=1 => a9=5 (1 przykł.)	a3=3 a7=1 => a9=6 (1 przykł.)
a7=2 a10=1 a11=1 =>a9=4 (1 prz)	a7=5 => a9=5 (1 przykł.)	a3=3 a8=3 => a9=6 (1 przykł.)
a8=1 a11=1 => a9=4 (1 przykł.)	a3=2 a8=1 => a9=5 (1 przykł.)	a3=3 a10=0 => a9=6 (1 przykł.)
a11=1 a12=0 => a9=4 (1 przykł.)	a4=2 a8=1 => a9=5 (1 przykł.)	a3=3 a12=1 => a9=6 (1 przykł.)

	a5=2 a8=1 => a9=5 (1 przykł.) a6=1 a8=1 => a9=5 (1 przykł.) a2=3 a11=0 => a9=5 (1 przykł.) a3=2 a11=0 => a9=5 (1 przykł.) a4=2 a11=0 => a9=5 (1 przykł.) a5=2 a11=0 => a9=5 (1 przykł.) a6=1 a11=0 => a9=5 (1 przykł.) a3=2 a12=0 => a9=5 (1 przykł.) a4=2 a12=0 => a9=5 (1 przykł.) a5=2 a12=0 => a9=5 (1 przykł.) a6=1 a12=0 => a9=5 (1 przykł.)	a4=1 a6=2 => a9=6 (1 przykł.) a4=1 a7=1 => a9=6 (1 przykł.) a3=3 a5=3 => a9=6 (1 przykł.) a4=1 a5=3 => a9=6 (1 przykł.) a5=3 a6=2 => a9=6 (1 przykł.) a5=3 a7=1 => a9=6 (1 przykł.) a5=3 a8=3 => a9=6 (1 przykł.) a5=3 a10=0 => a9=6 (1 przykł.) a5=3 a12=1 => a9=6 (1 przykł.) a6=2 a7=1 => a9=6 (1 przykł.) a6=2 a8=3 => a9=6 (1 przykł.) a7=1 a8=3 => a9=6 (1 przykł.) a7=1 a10=0 => a9=6 (1 przykł.) a4=1 a11=0 => a9=6 (1 przykł.) a6=2 a11=0 => a9=6 (1 przykł.) a7=1 a11=0 => a9=6 (1 przykł.) a8=3 a11=0 => a9=6 (1 przykł.) a10=0 a11=0 => a9=6 (1 prz.) a11=0 a12=1 => a9=6 (1 prz.)
a1=2 a2=4 => a9=7 (1 przykł.) a2=4 a3=3 => a9=7 (1 przykł.) a2=4 a4=4 => a9=7 (1 przykł.) a2=4 a5=1 => a9=7 (1 przykł.) a2=4 a6=3 => a9=7 (1 przykł.) a2=4 a7=2 => a9=7 (1 przykł.) a2=4 a8=1 => a9=7 (1 przykł.) a2=4 a10=1 => a9=7 (1 przykł.) a2=4 a11=0 => a9=7 (1 przykł.) a1=2 a3=3 a11=0 => a9=7 (1 prz.) a3=3 a8=1 a11=0 => a9=7 (1 prz.) a3=3 a10=1 a11=0 => a9=7 (1prz) a3=3 a11=0 a12=0 => a9=7 (1prz) a4=4 a11=0 => a9=7 (1 przykł.) a5=1 a11=0 => a9=7 (1 przykł.) a1=2 a6=3 a11=0 => a9=7 (1 prz.) a3=3 a6=3 a11=0 => a9=7 (1 prz.) a6=3 a8=1 a11=0 => a9=7 (1 prz.) a7=2 a11=0 => a9=7 (1 przykł.) a2=4 a12=0 => a9=7 (1 przykł.)	a1=1 a2=1 => a9=8 (1 przykł.) a2=1 a3=1 => a9=8 (1 przykł.) a2=1 a4=3 => a9=8 (1 przykł.) a2=1 a6=3 => a9=8 (1 przykł.) a2=1 a8=2 => a9=8 (1 przykł.) a2=1 a10=1 => a9=8 (1 przykł.) a3=1 a6=3 => a9=8 (1 przykł.) a3=1 a10=1 => a9=8 (1 przykł.) a4=3 a6=3 => a9=8 (1 przykł.) a4=3 a10=1 => a9=8 (1 przykł.) a1=1 a5=3 => a9=8 (1 przykł.) a3=1 a5=3 => a9=8 (1 przykł.) a4=3 a5=3 => a9=8 (1 przykł.) a5=3 a6=3 => a9=8 (1 przykł.) a5=3 a8=2 => a9=8 (1 przykł.) a5=3 a10=1 => a9=8 (1 przykł.) a7=4 => a9=8 (1 przykł.) a1=1 a11=0 => a9=8 (1 przykł.) a3=1 a11=0 => a9=8 (1 przykł.) a4=3 a11=0 => a9=8 (1 przykł.) a8=2 a11=0 => a9=8 (1 przykł.) a1=1 a12=0 => a9=8 (1 przykł.) a2=1 a12=0 => a9=8 (1 przykł.) a3=1 a12=0 => a9=8 (1 przykł.) a4=3 a12=0 => a9=8 (1 przykł.) a5=3 a12=0 => a9=8 (1 przykł.) a8=2 a12=0 => a9=8 (1 przykł.)	

WNIOSKI

Uwzględniając w obliczeniach oprócz deklaracji programowych partii również wybrane dodatkowe cechy, takie jak doświadczenie partii w rządzeniu, istnienie charyzmatycznego lidera oraz sposób prowadzenia kampanii wyborczej, otrzymano w rozpatrywanych zagadnieniach (zagadnienie 1, 2 i 3) krótsze reguły decyzyjne, o większym współczynniku siły.

Poniżej przedstawiono cechy najczęściej występujące w zbiorach reduktów, tworzonych we wszystkich rozpatrywanych zagadnieniach. Należy pamiętać, że częstości te nie są równoważne ważności każdej z rozważanych cech w zadaniu klasyfikacji.

ZAGADNIENIE 1. *wejście lub nie do Sejmu 2001*

Przypadek 1.1	Przypadek 1.2
edukacja i nauka; 6	charyzmatyczny lider; 12 edukacja i nauka; 8 podatki; 6 zdrowie; 5

ZAGADNIENIE 2. *przynależność do SLD_UP lub innych partii*

Przypadek 2.1	Przypadek 2.2
bezpieczeństwo; 7 edukacja i nauka; 6	bezpieczeństwo; 9 charyzmatyczny lider; 8 rolnictwo i polityka regionalna;8 charyzmatyczny lider; 8

ZAGADNIENIE 3. *przynależność do SLD_UP, do innych partii które weszły do Sejmu lub do tych partii, które nie weszły*

Przypadek 3.1	Przypadek 3.2
edukacja i nauka; 6	charyzmatyczny lider; 13 edukacja i nauka; 7 podatki; 7

ZAGADNIENIE 4. *przynależność do poszczególnych partii*

Przypadek 4.1	Przypadek 4.2
edukacja i nauka; 6	charyzmatyczny lider; 22 edukacja i nauka; 10

Poniżej przedstawiono liczbę utworzonych reguł / liczbę warunków w regułach, we wszystkich rozpatrywanych zagadnieniach. Poniżej wymieniono liczbę reguł o największym współczynniku siły, w utworzonym zbiorze wszystkich reguł.

ZAGADNIENIE 1. *wejście lub nie do Sejmu 2001*

Przypadek 1.1	Przypadek 1.2
5 reguł / 6 warunków	3 reguły / 4 warunki
1 reguła q=0.500	3 reguły q=0.500

ZAGADNIENIE 2. *przynależność do SLD_UP lub innych partii*

Przypadek 2.1	Przypadek 2.2
5 reguł / 6 warunków	4 reguły / 5 warunków
4 reguły q=0.375	2 reguły q=0.500 5 reguł q=0.375

ZAGADNIENIE 3. *przynależność do SLD_UP, do innych partii które weszły do Sejmu lub do grupy partii które nie weszły*

Przypadek 3.1	Przypadek 3.2
6 reguł / 8 warunków	4 reguły / 6 warunków
5 reguł q=0.250	1 reguła q=0.375 7 reguł q=0.250

ZAGADNIENIE 4. *przynależność do poszczególnych partii*

Przypadek 4.1	Przypadek 4.2
11 warunków	11 warunków

LITERATURA:

[1] Andrzej Małkiewicz (2002) *Programy partii politycznych w wyborach sejmowych 2001 r.*

[2] Hołubiec J., Małkiewicz A., Szkatuła G., Wagner D. (w przygotowaniu) *Próba uwzględnienia dodatkowych atrybutów w analizie kampanii wyborów do Sejmu w 2001r.*

[3] Kacprzyk J., Szkatuła G. (1999) *An inductive learning algorithm with a preanalysis of data.* International Journal of Knowledge-Based Intelligent Engineering Systems, 3, 135-146.

[4] Szkatuła G. (1995) *Uczenie maszynowe na podstawie przykładów w przypadku błędów w danych.* Praca doktorska, IBS PAN, Warszawa, Polska.

Rozdział 2

Generalized Nets Modelling of Neural Networks Simulation

1 Introduction

Due to Cybenko's theorem, described in Section 3.1, multilayer neural networks are the universal approximators or universal classifiers.

A multiplayer neural network consists of L layers, each layer is labeled by $l = 0,1,2,...,L$, and the layer $l = 0$ denotes the external inputs to the network. Each layer is composed of $N(l)$, $l = 0,1,2,...,L$, neurons, where $N(0)$ denotes the number of the inputs. The neurons belonging to the $(l-1)$-st layer are connected with the neurons of the l-th layer. Such a neural network can be considered as a system. The system consists of a set of connected subsystems. Figure 1 shows a multilayer neural network as a system with subsystems, the way of distinguish the subsystems is called aggregation.

We will consider three main cases of aggregation of subsystems within any multilayer neural network, namely:

A. there is not any aggregation – it means any neuron is treated as a subsystem

B. the neurons are aggregated within each layer - separate layers are subsystems

C. the full aggregation – there are not distinguished neither separate neurons nor layers.

In the case A the considered neural network consists of the following number of subsystems (neurons):

$$NL = \sum_{l=1}^{L} N(l) \tag{1}$$

described by the activation function as follows

$$x_{pj(l)} = f\left(net_{pj(l)}\right) \tag{2}$$

where

$$net_{pj(l)} = \sum_{i=1}^{N(l-1)} w_{i(l-1)j(l)}\, x_{pi(l-1)} \tag{3}$$

while $x_{pi(l-1)}$ denotes the output of the i neuron with respect to the pattern p, $p = 1,2,\ldots,P$, and the weight $w_{i(l-1)j(l)}$ connects the i-th neuron from the $(l-1)$-st layer with the j-th from the l-th layer, $j = 1,2,\ldots,N(l)$, $l = 1,2,\ldots,L$.

In the case B there are L subsystems with aggregated neurons within each layer, and each subsystem (layer) is described as follows:

$$X(l) = F_{(l)}(W(l-1), X(l-1)) \quad \text{for } l = 1,2,\ldots,L \tag{4}$$

where $X(l)$ denotes the aggregated output of the layer l

$$X(l) = \left[x_{1(l)}, x_{2(l)},\ldots, x_{N(l)}\right]^T \quad \text{for } l = 0,1,2,\ldots,L$$

(5)

while $W(l-1)$ denotes the aggregated weights connecting the l-th layer with the $(l-1)$-st layer

$$W(l-1) = \left[w_{1(l-1)}, w_{2(l-1)},\ldots, w_{N(l-1)}\right]^T \tag{6}$$

and
$$w_{i(l-1)} = \left[w_{i(l-1)1(l)}, w_{i(l-1)2(l)},\ldots, w_{i(l-1)N(l)}\right]^T \tag{7}$$

The weight $w_{i(l-1)j(l)}$ connects the i-th neuron from the $(l-1)$-st layer with the j-th from the l-th layer, and $X(l-1)$ is the aggregated output of the $(l-1)$-st layer, $j = 1,2,\ldots,N(l)$, $l = 1,2,\ldots,L$.

In the case C there are not distinguished any subsystems within the network and the whole network is treated as a system and is represented by

$$X(L)=G(WW(L),X(0)) \tag{8}$$

where

$$WW(L)=[W(1),W(2),...,W(L)]^T \tag{9}$$

$$W(l)=\left[w_{1(l)},w_{2(l)},...,w_{N(l)}\right]^T \tag{10}$$

$$w_{i(l-1)}=\left[w_{i(l-1)1(l)},w_{i(l-1)2(l)},...,w_{i(l-1)N(l)}\right]^T$$

while $w_{i(l-1)j(l)}$ is the weight connecting the i-th neuron from the $(l-1)$-st layer with the j-th from the l-th layer, $l=1,2,...,L$, $j=1,2,...,N(l)$

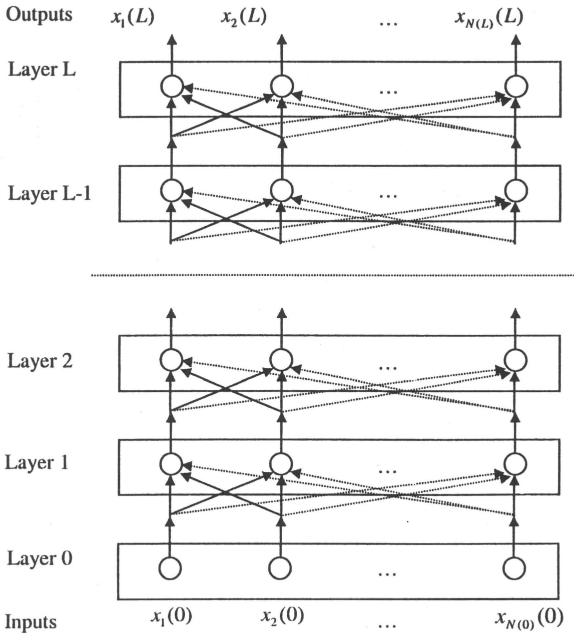

Figure 1: A multilayer neural network structure

It is obvious that the different case of aggregation of the neural network determines different streams of information passing through the system. In the subsequent sections we will describe the way of modelling the simulation process of multiplayer neural networks by Generalized nets for these three cases of aggregation.

2 Case A – Modelling without Aggregation

Let us consider the general structure of multiplayer neural networks shown in Figure 1. One of possible generalized nets representation of the simulation process of this neural network is depictured in Figure 2.

The generalized net from Figure 2, modelling the simulation process of the multilayer neural network fro Figure 1, consists of a set of L transitions, each transition is of the following form

$$Z_l = \left\langle \left\{ \dddot{x}_{1(l-1)}, \dddot{x}_{2(l-1)}, \ldots, \dddot{x}_{N(l-1)} \right\}, \left\{ \dddot{x}_{1(l)}, \dddot{x}_{2(l)}, \ldots, \dddot{x}_{N(l)} \right\}, \tau_l, \tau'_l, r_l, M_l, \Box_l \right\rangle \qquad (11)$$

for $l = 1, 2, \ldots, L$, where

$\left\{ \dddot{x}_{1(l-1)}, \dddot{x}_{2(l-1)}, \ldots, \dddot{x}_{N(l-1)} \right\}$ - is a set of input places of the l-the transition,

$\left\{ \dddot{x}_{1(l)}, \dddot{x}_{2(l)}, \ldots, \dddot{x}_{N(l)} \right\}$ - is a set of output places of the l-the transition,

τ_l - is a time when the l-th transition is fired out, while it is assumed that $\tau_1 = T$ and

$$\tau_l = T + \sum_{k=2}^{l} \tau'_{k-1},$$

τ'_l - is a firing duration time of the l-th transition,

r_l - denotes the l-th transition condition determining transfer of tokens from the transition's inputs $\{\ddot{x}_{1(l-1)}, \ddot{x}_{2(l-1)},..., \ddot{x}_{N(l-1)}\}$ to its outputs $\{\ddot{x}_{1(l)}, \ddot{x}_{2(l)},..., \ddot{x}_{N(l)}\}$, and has the following Index matrix form:

$$r_l = \begin{array}{c|cccc} & \ddot{x}_{1(l)} & \ddot{x}_{2(l)} & \cdots & \ddot{x}_{N(l)} \\ \hline \ddot{x}_{1(l-1)} & true & true & \cdots & true \\ \ddot{x}_{2(l-1)} & true & true & \cdots & true \\ \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \ddot{x}_{N(l-1)} & true & true & \cdots & true \end{array} \qquad (12)$$

where the value *true* indicates that the tokens representing the neurons can be transfer from i-th input place to the j-th output place, $i = 1, 2,..., N(l-1)$, $j = 1, 2,..., N(l)$,

M_l - indicates an Index matrix describing the capacities of transition's arcs:

$$M_l = \begin{array}{c|cccc} & \ddot{x}_{1(l)} & \ddot{x}_{2(l)} & \cdots & \ddot{x}_{N(l)} \\ \hline \ddot{x}_{1(l-1)} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \ddot{x}_{2(l-1)} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \ddot{x}_{N(l-1)} & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{array} \qquad (13)$$

$\square_l$ - has a form of Boolean expression $\wedge\left(\dddot{x}_{1(l-1)}, \dddot{x}_{2(l-1)}, \ldots, \dddot{x}_{N(l-1)}\right)$ and describes that each input place $\dddot{x}_{i(l-1)}$, $i = 1, 2, \ldots, N(l-1)$, must contain a token that will be transferred to the l-th transition.

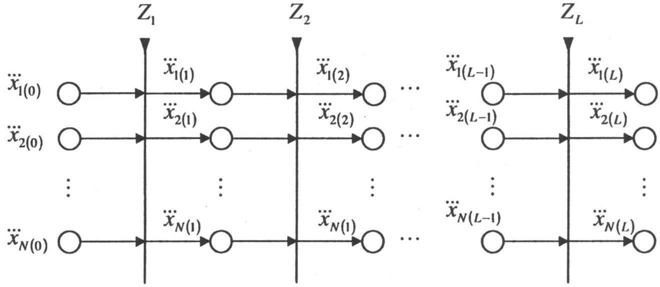

Figure 2: The GN model of NN simulation

The Generalized net describing the considered neural network simulation process has the following form:

$$GN1 = \left\langle \left\langle A, \pi_A, \pi_X, c, g, \Theta_1, \Theta_2 \right\rangle, \left\langle K, \pi_k, \Theta_K \right\rangle, \left\langle T, t^0, t^* \right\rangle, \left\langle Y, \Phi, b \right\rangle \right\rangle \tag{14}$$

where

- $A = \{Z_1, Z_2, \ldots, Z_L\}$ - is a set of the transitions,
- π_A - is a function classifying the transitions, this classification gives the priorities of the transitions, i.e. $\pi_A : A \to N$, where $N = \{0, 1, 2, \ldots\} \cup \{\infty\}$ - in the considered neural network case this function is not valid because the transitions are arranged in a natural (the asterisk * will be used in the subsequent text in order to denote components of the General net structure which can be omitted),
- π_X - is a function describing the priorities of the places in the following way:

$$pr_1\{Z_1, Z_2,..., Z_L\}= \{\dddot{x}_{1(0)}, \dddot{x}_{2(0)},..., \dddot{x}_{N(0)}, \dddot{x}_{1(1)}, \dddot{x}_{2(1)},..., \dddot{x}_{N(1)},..., \dddot{x}_{1(L-1)}, \dddot{x}_{2(L-1)},..., \dddot{x}_{N(L-1)}\} \tag{15}$$

$$pr_2\{Z_1, Z_2,..., Z_L\}= \{\dddot{x}_{1(2)}, \dddot{x}_{2(2)},..., \dddot{x}_{N(2)}, \dddot{x}_{1(2)}, \dddot{x}_{2(2)},..., \dddot{x}_{N(2)},..., \dddot{x}_{1(L)}, \dddot{x}_{2(L)},..., \dddot{x}_{N(L)}\} \tag{16}$$

$$pr_1 A \cup pr_2 A = \{\dddot{x}_{1(0)}, \dddot{x}_{2(0)},..., \dddot{x}_{N(0)}, \dddot{x}_{1(1)}, \dddot{x}_{2(1)},..., \dddot{x}_{N(1)}, ..., \dddot{x}_{1(2)}, \dddot{x}_{2(2)},..., \dddot{x}_{N(2)},..., \dddot{x}_{1(L)}, \dddot{x}_{2(L)},..., \dddot{x}_{N(L)}\} \tag{17}$$

- c - is a function describing the capacities of the places, in our case the capacity function has the form:

$$c\left(x_{i(l)}\right)=1 \tag{18}$$

for $i=1, 2,..., N(l),\ l=0,1,2,...,L$,

- g - is a function that calculates the truth values of the predicates of the transition conditions (12), for the Generalized net described here this function is constant, i.e.

$$g\left(r_{l,i(l-1)j(l)}\right)=true \tag{19}$$

(instead of the value *false* or *true* we can use a value 0 or 1),

- Θ_1 - is a function giving the next time-moment when the transitions can be again activated; and we can consider two cases:

  a) performing the simulation of the neural network for only one input

$$X(0)=\left[x_{1(0)}, x_{2(0)},..., x_{N(0)}\right]^T \tag{20}$$

  and it means that each transition fires out only once, and there is not any next time of transition's firing, such a case we denotes by *,

  b) performing the simulation of the neural network for a set of inputs

$$\{X_1(0), X_2(0),..., X_P(0)\} \tag{21}$$

where P denotes the number of samples (for example when we use the neural network as an approximator of some function and we have P samples), and in this case each transition will be active P times;

the function Θ_1 describing time of new firing for each transition has the following form

$$\Theta_1(t_l) = t'_l,\ l = 1,2,\dots,L \tag{22}$$

where (assuming that $pr_3 Z_0 = T$)

$$t_l = T + (p-1)\sum_{k=1}^{L} pr_4 Z_k + pr_3 Z_{l-1} = T + (p-1) + \sum_{k=1}^{L} \tau'_k + pr_3 Z_{l-1} \tag{23}$$

and

$$t'_l = t_l + \sum_{k=1}^{L} pr_4 Z_k = t_l + \sum_{k=1}^{L} \tau'_k \tag{24}$$

$t' \in [T, T + t_*]$ and $t \le t'$ for $p = 1,2,\dots,P$; the value of this function is calculated at the moment when the transition terminates being active,

- Θ_2 - is a function giving the duration of activity of a given transition Z_l

$$\Theta_2(t_l) = t''_l,\ l = 1,2,\dots,L \tag{25}$$

where t_l is described by (23) and

$$t''_l = pr_4 Z_l = \tau'_l \tag{26}$$

the value of this function is calculated at the moment when the transition starts functioning,

- K - is the set of tokens entering the Generalized net, in the considered case there are $N(0)$ input places and each place contains one token; this set can be written as

$$K = \{\alpha_{1(0)}, \alpha_{2(0)}, \dots, \alpha_{N(0)}\} \tag{27}$$

- π_K - is a function describing the priorities of the tokens, here all tokens has the same priorities and it will be denoted by $*$ for $\pi_K(\alpha_{l(0)})$, $l = 1,2,...,N(0)$,
- Θ_K - is a function giving the time-moment when a given token can enter the net, i.e. all the tokens enter the considered Generalized net at the same moment T,
- T - is the time when the Generalized net starts functioning – here it is assumed that the net starts at the moment T when the tokens enter the net,
- t^0 - is an elementary time-step, here this parameter is not used and is denoted by *,
- t^* - determines the duration of the Generalized net functioning, that is:

  a) for performing the simulation for only one input

$$t^* = \sum_{l=1}^{L} \tau'_l \tag{28}$$

  b) for performing the simulation for a set of inputs

$$t^* = P\sum_{l=1}^{L} \tau'_l \tag{29}$$

  where P denotes the number of samples,

- Y - denotes the set of all initial characteristics of the tokens, the characteristics of tokens describe information which is curried by tokens and changed in transitions,

$$Y = \{y(\alpha_{1(0)}), y(\alpha_{2(0)}), ..., y(\alpha_{N(0)})\} \tag{30}$$

  where

$$y(\alpha_{i(0)}) = \langle NN1, N(0), N(1),\ imX_{i(0)},\ imW_{i(0)},\ F_{(1)},\ imout_{i(0)} \rangle \tag{31}$$

  is the initial characteristic of the token $\alpha_{i(0)}$ that enters the place $\ddot{x}_{i(0)}$, $i = 1,2,...,N(0)$,

  where

  $NN1$ - the neural network identifier,

$N(0)$ - the number of input places to the net as well as to the transition Z_1 (equal to the number of inputs to the neural network),

$N(1)$ - the number of the output places of the transition Z_1,

$$imX_{i(0)} = [0,...,0,x_{i(0)},0,...,0]_T \tag{32}$$

- is the Index matrix, indicating the inputs to the network, of dimension $N(0)\times 1$ in which all elements are equal 0 except the element i whose value is equal $x_{i(0)}$ (the i-th input of the neural network),

$$imW_{i(0)} = \begin{array}{c|cccc} & \dddot{x}_{1(1)} & \dddot{x}_{2(1)} & \dots & \dddot{x}_{N(1)} \\ \hline \dddot{x}_{i(0)} & w_{i(0)1(1)} & w_{i(0)2(1)} & \dots & w_{i(0)N(1)} \end{array} \tag{33}$$

- has a form of an Index matrix and denotes the weights connecting the i-th input with all neurons allocated at the 1-st layer

$$F_{(1)} = \left[f_{1(1)}\left(\sum_{i=1}^{N(0)} x_{i(0)}\, w_{i(0)1(1)}\right), f_{2(1)}\left(\sum_{i=1}^{N(0)} x_{i(0)}\, w_{i(0)2(1)}\right),..., f_{N(1)}\left(\sum_{i=1}^{N(0)} x_{i(0)}\, w_{i(0)N(1)}\right)\right]^T \tag{34}$$

- denotes a vector of the activation functions of the neurons associated with the 1-th layer

$$imout_{i(0)} = \begin{array}{c|cccc} & \dddot{x}_{1(1)} & \dddot{x}_{2(1)} & \dots & \dddot{x}_{N(1)} \\ \hline \dddot{x}_{i(0)} & x_{i(0)}\, w_{i(0)1(1)} & x_{i(0)}\, w_{i(0)2(1)} & \dots & x_{i(0)}\, w_{i(0)N(1)} \end{array} \tag{35}$$

- is an Index matrix describing the signal outgoing from the i-th input place, $i = 1,2,...,N(0)$, to all output places of the Z_1 transition

- Φ - is a characteristic function that generates the new characteristics of the new tokens after passing the transition; for the transition Z_l, $l = 1,2,...,L$, there are $N(l-1)$ input places $\{\dddot{x}_{1(l-1)}, \dddot{x}_{2(l-1)}, ..., \dddot{x}_{N(l-1)}\}$ and with each place there is associated a single token $\alpha_{i(l-1)}$, $i = 1,2,...,N(l-1)$, having the characteristic

$$y(\alpha_{i(l-1)}) = \langle NN1, N(l-1), N(l), imX_{i(l-1)}, imW_{i(l-1)}, F_{(l)}, imout_{i(l-1)} \rangle \tag{36}$$

where

$NN1$ - the neural network identifier,

$N(l-1)$ - the number of input places to the net as well as to the transition Z_l,

$N(l)$ - the number of the output places of the transition,

$$imX_{i(l-1)} = [0,...,0, x_{i(l-1)}, 0,...,0]_T \tag{37}$$

- the Index matrix of dimension $N(l-1) \times 1$ in which all elements are equal 0 except the element i whose value is equal $x_{i(l-1)}$ - the i-th input value associated with the Z_l transition,

$$imW_{i(l-1)} = \begin{array}{c|cccc} & \dddot{x}_{1(l)} & \dddot{x}_{2(l)} & \dots & \dddot{x}_{N(l)} \\ \hline \dddot{x}_{i(l-1)} & w_{i(l-1)1(l)} & w_{i(l-1)2(l)} & \dots & w_{i(l-1)N(l)} \end{array} \tag{38}$$

- is an Index matrix describing the weight connection between the i-th input places with all output places of the Z_l transition,

$$F_{(l)} = \left[f_{1(l)}\left(\sum_{i=1}^{N(l-1)} x_{i(l)} w_{i(l-1)1(l)} \right), f_{2(l)}\left(\sum_{i=1}^{N(l-1)} x_{i(l-1)} w_{i(l-1)2(l)} \right), \right.$$
$$\left. ..., f_{N(l)}\left(\sum_{i=1}^{N(l-1)} x_{i(l-1)} w_{i(l-1)N(l)} \right) \right]^T \tag{39}$$

- is a vector of the activation functions of the neurons associated with the l-th layer of the neural network

$$
imout_{i(l-1)} = \begin{array}{c|cccc} & \dddot{x}_{1(l)} & \dddot{x}_{2(l)} & \cdots & \dddot{x}_{N(l)} \\ \hline \dddot{x}_{i(l-1)} & x_{i(l-1)}\,w_{i(l-1)1(l)} & x_{i(l-1)}\,w_{i(l-1)2(l)} & \cdots & x_{i(l-1)}\,w_{i(l-1)N(l)} \end{array} \quad (40)
$$

- is an Index matrix describing the signals outgoing from the i-th input place, $i = 1,2,...,N(l)$, to all output places of the Z_l transition.

The tokens $\alpha_{i(l-1)}$, $i = 1,2,...,N(l-1)$, passing the transition Z_l vanish, and the new tokens $\alpha_{j(l)}$, $j = 1,2,...,N(l)$, associated with the output places $\{\dddot{x}_{1(l)}, \dddot{x}_{2(l)},..., \dddot{x}_{N(l)}\}$ of the transition Z_l are generated, their characteristics are described as follows

$$
y(\alpha_{j(l)}) = \langle NN1, N(l), N(l+1), imX_{j(l)}, imW_{j(l)}, F_{(l+1)}, imout_{j(l)} \rangle \quad (41)
$$

for $l = 1,2,...,L-1$, while

$$
y(\alpha_{j(L)}) = \langle NN1, N(L), imX_{j(L)} \rangle \quad (41a)
$$

and for these new tokens the values $x_{j(l)}$, $j = 1,2,...,N(l)$, are calculated in the following way

$$
imX_{j(l)} = f_{j(l)}\left(\sum_{i=1}^{N(l-1)} imout_{i(l-1)} \right), \; l = 1,2,...,L \quad (42)
$$

it should be mentioned here that $imX_{j(L)}$, $j = 1,2,...,N(L)$, denotes the output of the neural network, the final state of the network after ending the simulation process,

- b - is a function describing the maximum number of characteristics a given token can receive; in the considered neural network simulation process this function has a simple form

$$
b(\alpha_{j(l)}) = 1, \text{ for } j = 1,2,...,N(l), \; l = 1,2,...,L \quad (43)
$$

it means that the characteristic of each token $\alpha_{j(l)}$, $j = 1,2,...,N(l)$, $l = 1,2,...,L$, is constructed on the base of the characteristics of all tokens ($i = 1,2,...,N(l-1)$) from the previous layer $(l-1)$, $l = 1,2,...,L$.

Due to the above considerations the transitions have the following form

$$Z_l = \langle \{\ddot{x}_{1(l-1)}, \ddot{x}_{2(l-1)},..., \ddot{x}_{N(l-1)}\}, \{\ddot{x}_{1(l)}, \ddot{x}_{2(l)},..., \ddot{x}_{N(l)}\}, \tau_l, \tau'_l, *, *, \square_l \rangle \tag{44}$$

for $l = 1,2,...,L$, and other components of (44) are not changed.

The reduced form of the Generalized net describing the simulation process of the neural network has the following form:

$$GN1 = \langle \langle A, *, \pi_X, c, *, \Theta_1, \Theta_2 \rangle, \langle K, *, \Theta_K \rangle, \langle T, *, t^* \rangle, \langle Y, \Phi, b \rangle \rangle \tag{45}$$

where

- $A = \{Z_1, Z_2,..., Z_L\}$ - is a set of transitions,
- π_X - is a function describing the priorities of the places,
- c - is a function describing the capacities of the places, i.e. $c(x_{i(l)}) = 1$, $i = 1, 2,...,$ $N(l)$, $l = 0,1,2,...,L$,
- Θ_1 - is a function giving the next time-moment when the transitions can be again activated, $\Theta_1(t_l) = t'_l$, $l = 1,2,...,L$, and is described by (23) – (24),
- Θ_2 - is a function giving the duration of activity of the transition Z_l $\Theta_2(t_l) = t''_l$, $l = 1,2,...,L$, and is described by (23) and (26),
- $K = \{\alpha_{1(0)}, \alpha_{2(0)},..., \alpha_{N(0)}\}$ - is the set of tokens entering the Generalized net,
- $\Theta_K = T$ - for all tokens entering the net and at this moment the net starts functioning,
- t^* - determines the duration of the Generalized net functioning and is described by (28) or (29),

- Y - denotes the set of all initial characteristics of the tokens described by

  $Y = \{ y(\alpha_{1(0)}), y(\alpha_{2(0)}), ..., y(\alpha_{N(0)})\}$, where

  $y(\alpha_{i(0)}) = \langle NN1, N(0), N(1), x_{i(0)}, W_{i(0)(1)}, F_{(1)}, out_{i(0)} \rangle$,

- Φ - is a characteristic function that generates the new characteristics of the new tokens after passing the transition, and is described by (31), (36) and (41),

- $b(\alpha_{j(l)}) = 1$, for $j = 1,2,...,N(l)$, $l = 1,2,...,L$, - is a function describing the number of characteristics memorized by each token.

Such Generalized nets with missing of some components (the components are not valid) are called *reduced Generalized nets* (Atanassov, 1991). In the above version of the Generalized nets representation of the simulation process of multilayer neural network we preserve the parallelism of computation.

3 Case B – Modelling with Aggregation within Layers

Let us again consider the structure of the multiplayer neural network shown in Figure 1, and aggregate the neurons allocated within each layer l, $l = 1,2,...,L$. In this way we can obtain the aggregated system that consists of L subsystems. The aggregated layers are described in details by (4) – (7).

Two version of the aggregation will be considered. In the first version all input token will be aggregated in only one token, while in the second version we will not aggregate tokens but by introducing some extra places (and tokens) the tokens will enter each transition sequentially.

3.2 Version I

In the first version, the Generalized net representation of the neural network consists of L transition. Each transition Z_l, $l = 1,2,...,L$, has the following aggregated input place

$$\dddot{X}_{(l-1)} = \{\dddot{x}_{1(l-1)}, \dddot{x}_{2(l-1)}, ..., \dddot{x}_{N(l-1)}\} \tag{46}$$

and the aggregated output place

$$\dddot{X}_{(l)} = \{\dddot{x}_{1(l)}, \dddot{x}_{2(l)}, ..., \dddot{x}_{N(l)}\} \qquad 47)$$

The Generalized net structure of such aggregated neural network is depictured in Figure 3.

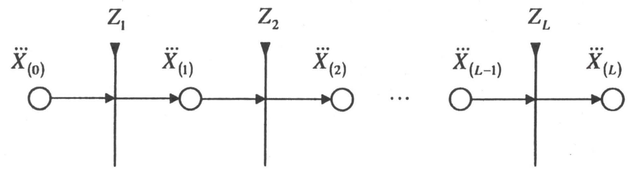

Figure 3: The GN model of NN simulation with layer aggregation

It is assumed that for each transition Z_l, $l = 1,2,...,L$, there is a single input place as well as a single output place, additionally let us assume that each place contains only one token.

Each transition Z_l, $l = 1,2,...,L$, has the following form

$$Z_l' = \langle \{\dddot{X}_{(l-1)}\}, \{\dddot{X}_{(l)}\}, \tau_l, \tau_l', r_l, M_l, \square_l \rangle \tag{48}$$

where

$\{\dddot{X}_{(l-1)}\}$ - is the input place of the l-th transition,

$\{\dddot{X}_{(l)}\}$ - is the output place of the l-th transition,

τ_l - is a time when the l-th transition is fired out, while $\tau_1 = T$, $\tau_l = T + \sum_{k=2}^{l} \tau'_{k-1}$,

τ'_l - is duration of activity of the l-th transition,

r_l - denotes the l-th transition condition of the $\alpha_{(l-1)}$ token from the transition's input place

$\{\dddot{X}_{(l-1)}\}$ to its output place $\{\dddot{X}_{(l)}\}$, and it has a simple form: $r_l = true$ (i.e. the input token can be transfer to the output place without any condition),

$M_l = 1$ - indicates that only one token can be transferred by arcs in the same time,

$\Box_l$ - is not valid due to existence of only one token in any place.

In this way the transitions Z_l, $l = 1,2,\ldots,L$, now have the following reduced form

$$Z'_l = \langle \{\dddot{X}_{(l-1)}\}, \{\dddot{X}_{(l)}\}, \tau_l, \tau'_l \rangle \tag{49}$$

Under the assumption that each place contains only one token the characteristics of the tokens must be of much more complex form. Let us again consider the Generalized net which describe the neural network simulation process but now with aggregated layers. The new aggregated Generalized net has the following form:

$$GN2 = \langle \langle A, \pi_A, \pi_X, c, g, \Theta_1, \Theta_2 \rangle, \langle K, \pi_k, \Theta_K \rangle, \langle T, t^0, t^* \rangle, \langle Y, \Phi, b \rangle \rangle \tag{50}$$

The components of the first part of (50) are described as follows:

$A = \{Z_1, Z_2, \ldots, Z_L\}$ - is a set of transitions,

π_A - is not valid here,

π_X - is a function describing the priorities of the places in the following way:

$$pr_1\{Z_1, Z_2, \ldots, Z_L\} = \{\dddot{X}_{(0)}, \dddot{X}_{(1)}, \ldots, \dddot{X}_{(L-1)}\} \tag{51}$$

$$pr_2\{Z_1, Z_2, ..., Z_L\} = \{\dddot{X}_{(1)}, \dddot{X}_{(2)}, ..., \dddot{X}_{(L)}\} \tag{52}$$

$$pr_1 A \cup pr_2 A = \{\dddot{X}_{(0)}, \dddot{X}_{(1)}, ..., \dddot{X}_{(L-1)}, \dddot{X}_{(L)}\} \tag{53}$$

$c(x_{i(l)}) = 1$ - is a function describing the capacities of the places,

$g(r_{l,i(l-1)j(l)}) = true$ - is a function that calculates the truth values of the predicates of the transition conditions,

Θ_1 - is a function giving the next time-moment when the transitions can be again activated; for a single simulation this time is not valid, while for performing the simulation for a set of inputs the function has a form $\Theta_1(t_l) = t_l'$, $l = 1,2,...,L$, (with $pr_3 Z_0 = T$), where

$$t_l = T + (p-1)\sum_{k=1}^{L} pr_4 Z_k + pr_3 Z_{l-1} = T + (p-1) + \sum_{k=1}^{L} \tau_k' + pr_3 Z_{l-1} \tag{54}$$

and

$$t_l' = t_l + \sum_{k=1}^{L} pr_4 Z_k = t_l + \sum_{k=1}^{L} \tau_k' \tag{55}$$

$t' \in [T, T + t_*]$ and $t \le t'$ for $p = 1,2,...,P$,

Θ_2 - is a function giving the duration of activity of each transition Z_l

$$\Theta_2(t_l) = t_l'', \ l = 1,2,...,L \tag{56}$$

where t_l is described by (54) and $t_l'' = pr_4 Z_l = \tau_l'$ (the value of this function is calculated at the moment when the transition starts functioning).

In the second part of the Generalized net (50) the components are described as follows:

$K = \{\alpha_{(0)}\}$ - is the token entering the Generalized net (here only one token enters the net),

π_K - describing the priorities of the tokens is not valid here,

$\Theta_K = T$ - is a time when the token $\alpha_{(0)}$ enters the net.

The components of third part of (50) constitute:

T - the time when the Generalized net starts functioning,

t^0 - describing the elementary time-step (not valid here),

t^* - describing the time when the Generalized net is functioning:

for a single simulation $t^* = \sum_{l=1}^{L} \tau_l'$

for a set of inputs this time is described by $t^* = P \sum_{l=1}^{L} \tau_l'$, where P denotes the number of samples.

The components of the last part of (50) are described by:

$Y = \{ y(\alpha_{(0)}) \}$ is the initial characteristic of the token which enters the place $\dddot{X}_{(0)}$, the token has a form

$$y(\alpha_{(0)}) = \langle NN1, N(0), N(1), imX_{(0)}, imW_{(0)}, F_{(1)}, imout_{(0)} \rangle \tag{57}$$

where

$NN1$ - the neural network identifier,

$N(0)$ - the dimension of the input vector $X_{(0)}$,

$N(1)$ - the dimension of the output vector $X_{(1)}$,

$imX_{(0)}$ - the input vector to the network is obtained as a sum of the Index matrices $imX_{i(0)}$, described by (32), from $i(0)=1$ till $i(0)=N(0)$, and can be written as follows

$$imX_{(0)} = \sum_{i=1}^{N(0)} imX_{i(0)} = [x_{1(0)}, x_{2(0)}, \ldots, x_{N(0)},]^T \tag{58}$$

$imX_{(1)}$ - the vector of the outputs of the first layer of the neural network is constructed in a similar way, and can be written as follows

$$imX_{(1)} = \sum_{j=1}^{N(1)} imX_{j(1)} = [x_{1(1)}, x_{2(1)}, \ldots, x_{N(1)},]^T,$$

$imW_{(0)}$ - is the Index matrix of weights connecting the inputs of the network with the first layer neurons, which is created as a sum of the Index matrices $imW_{i(0)}$, described by (38), that can be written as follows

$$imW_{(0)} = \sum_{i=1}^{N(0)} imW_{i(0)} = \begin{array}{c|cccc} & \dddot{x}_{1(l)} & \dddot{x}_{2(l)} & \cdots & \dddot{x}_{N(l)} \\ \hline \dddot{x}_{1(l-1)} & w_{1(0)1(1)} & w_{1(0)2(1)} & \cdots & w_{1(0)N(1)} \\ \dddot{x}_{2(l-1)} & w_{2(0)1(1)} & w_{2(0)2(1)} & \cdots & w_{2(0)N(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \dddot{x}_{N(l-1)} & w_{N(0)1(1)} & w_{N(0)2(1)} & \cdots & w_{N(0)N(1)} \end{array} \tag{59}$$

$$F_{(1)} = \left[f_{1(1)}\left(\sum_{i=1}^{N(0)} x_{i(0)}\, w_{i(0)1(1)} \right), f_{2(1)}\left(\sum_{i=1}^{N(0)} x_{i(0)}\, w_{i(0)2(1)} \right), \ldots, f_{N(1)}\left(\sum_{i=1}^{N(0)} x_{i(0)}\, w_{i(0)N(1)} \right) \right]^T \tag{60}$$

- denotes a vector of the activation functions of the neurons associated with the 1-th layer,

$imout_{(0)}$ - an Index matrix describing the signals outgoing from the input places of the transition Z_1 to the output places of this transition, it has the form

$$
imout_{(0)} = \sum_{i=1}^{N(0)} imout_{i(0)} \quad
\begin{array}{c|cccc}
 & \dddot{x}_{1(l)} & \dddot{x}_{2(l)} & \cdots & \dddot{x}_{N(l)} \\
\hline
\dddot{x}_{1(l-1)} & x_{1(0)}\, w_{1(0)1(1)} & x_{1(0)}\, w_{1(0)2(1)} & \cdots & x_{1(0)}\, w_{1(0)N(1)} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
\dddot{x}_{i(l-1)} & x_{i(0)}\, w_{i(0)1(1)} & x_{i(0)}\, w_{i(0)2(1)} & \cdots & x_{i(0)}\, w_{i(0)N(1)} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
\dddot{x}_{N(l-1)} & x_{N(0)}\, w_{N(0)1(1)} & x_{N(0)}\, w_{N(0)2(1)} & \cdots & x_{N(0)}\, w_{N(0)N(1)}
\end{array}
\qquad (61)
$$

Φ - is a function generating the new characteristic of the new token after passing the transition Z_l, $l = 1,2,...,L-1$, the input place $\dddot{X}_{(l-1)}$ has a token $\alpha_{(l-1)}$ of the following characteristic

$$y(\alpha_{(l-1)}) = \langle NN1, N(l-1), N(l), imX_{(l-1)}, imW_{(l-1)}, F_{(l)}, imout_{(l-1)} \rangle \qquad (62)$$

The token $\alpha_{(l-1)}$ passing the transition Z_l obtains the new characteristic, which can be written as follows

$$y(\alpha_{(l)}) = \langle NN1, N(l), N(l+1), imX_{(l)}, imW_{(l)}, F_{(l+1)}, imout_{(l)} \rangle \qquad (63)$$

and this new token is associated with the output place $\dddot{X}_{(l+1)}$; the components of (62) are described as follows:

$$imX_{i(l-1)} = [0,...,0, x_{i(l-1)}, 0,...,0]_T \qquad (64)$$

$$
\begin{array}{l}
imW_{(l-1)} = \\
\sum_{i=1}^{N(0)} imW_{i(l-1)} =
\end{array}
\quad
\begin{array}{c|cccc}
 & \dddot{x}_{1(l)} & \dddot{x}_{2(l)} & \cdots & \dddot{x}_{N(l)} \\
\hline
\dddot{x}_{1(l-1)} & w_{1(l-1)1(l)} & w_{1(l-1)2(l)} & \cdots & w_{1(l-1)N(l)} \\
\dddot{x}_{2(l-1)} & w_{2(l-1)1(l)} & w_{2(l-1)2(l)} & \cdots & w_{2(l-1)N(l)} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
\dddot{x}_{N(l-1)} & w_{N(l-1)1(l)} & w_{N(l-1)2(l)} & \cdots & w_{N(l-1)N(l)}
\end{array}
\tag{65}
$$

$$
F_{(l)} = \begin{bmatrix}
f_{1(l)}\left(\sum_{i=1}^{N(l-1)} x_{i(l)}\, w_{i(l-1)1(l)}\right), f_{2(l)}\left(\sum_{i=1}^{N(l-1)} x_{i(l-1)}\, w_{i(l-1)2(l)}\right), \dots, \\
f_{N(l)}\left(\sum_{i=1}^{N(l-1)} x_{i(l-1)}\, w_{i(l-1)N(l)}\right)
\end{bmatrix}^T
\tag{66}
$$

$$
\begin{array}{l}
imout_{(l-1)} = \\
\sum_{i=1}^{N(0)} imout_{i(l-1)} =
\end{array}
\quad
\begin{array}{c|cccc}
 & \dddot{x}_{1(l)} & \dddot{x}_{2(l)} & \cdots & \dddot{x}_{N(l)} \\
\hline
\dddot{x}_{1(l-1)} & x_{1(l-1)}\, w_{1(l-1)1(l)} & x_{1(l-1)}\, w_{1(l-1)2(l)} & \cdots & x_{1(l-1)}\, w_{1(l-1)N(l)} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
\dddot{x}_{i(l-1)} & x_{i(l-1)}\, w_{i(l-1)1(l)} & x_{i(l-1)}\, w_{i(l-1)2(l)} & \cdots & x_{i(l-1)}\, w_{i(l-1)N(l)} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
\dddot{x}_{N(l-1)} & x_{N(l-1)}\, w_{N(l-1)1(l)} & x_{N(l-1)}\, w_{N(l-1)2(l)} & \cdots & x_{N(l-1)}\, w_{N(l-1)N(l)}
\end{array}
\tag{67}
$$

while the elements of the vector $imX_{(l)}$ are calculated in the following way

$$
imX_{(l)}(j) = f_{j(l)}\left(\sum_{i=1}^{N(l-1)} imout_{(l-1)}(j)\right),
\tag{68}
$$

$b(\alpha_{(l)}) = 1$ for $l = 1, 2, \dots, L$.

The reduced form of the Generalized net describing the simulation process of the aggregated neural network has the following form:

$$GN2 = \langle \langle A, *, \pi_X, c, *, \Theta_1, \Theta_2 \rangle, \langle K, *, * \rangle, \langle T, *, t^* \rangle, \langle Y, \Phi, 1 \rangle \rangle \tag{69}$$

with the components described in details above.

3.2 Version II

Up till now the Case B was considered under the assumption that each place contains only one token and the delivered characteristics of the tokens have a complex form. It is possible to consider a similar structure of the Generalized net to that from Figure 3 but each place will contain a number of tokens. The number of tokens in the place $\dddot{X}_{(l-1)}$, $l = 1, 2, \ldots, L$, corresponds to the number of neurons associated with the l-th layer. In order to introduce a prescribed number of the tokens into each place we need to change the parallelism of signal flows by the sequential flows. The Generalized net model shown in Figure 3 will be a little bit more complex by introducing an extra place to each transition.

Let us again consider the structure of the multiplayer neural network shown in Figure 1. Now we aggregate the neurons allocated within each layer l, $l = 1, 2, \ldots, L$ in one place but information associated with each place $\ddot{x}_{i(l-1)}$ will be delivered to the transition Z_l by tokens. Each token is associated with one neuron.

The new input place will be denoted as $\dddot{X}_{(l-1)}$ and the output places will be denoted as $\dddot{X}_{(l)}$. Now let us introduce an extra input-output place $\dddot{X}'_{(l)}$ to each transition Z_l - this place will be responsible for control of the transition action. The new structure of the Generalized net is shown in Figure 4.

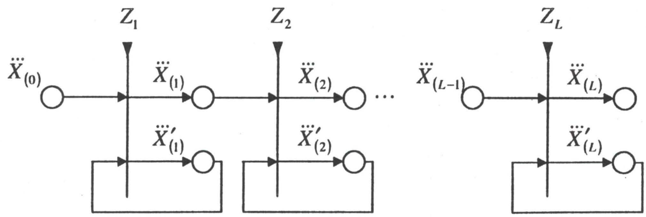

Figure 4: The GN model of NN simulation with layer aggregation

The new structure of the Generalized net of the aggregated neural network consists of L transitions, and each transition has the following form

$$Z_l'' = \left\langle \left\{\dddot{X}_{(l-1)}, \dddot{X}'_{(l)}\right\}, \left\{\dddot{X}_{(l)}, \dddot{X}'_{(l)}\right\}, \tau_l, \tau'_l, r''_l, M''_l, \square''_l \right\rangle \tag{70}$$

where $l = 1,2,...,L$,

$\left\{\dddot{X}_{(l-1)}, \dddot{X}'_{(l)}\right\}$ - is the set of input places of the l-th transition,

$\left\{\dddot{X}_{(l)}, \dddot{X}'_{(l)}\right\}$ - is the set of output places of the l-the transition,

τ_l - is a time when the l-th transition is fired out, while $\tau_1 = T$, $\tau_l = T + \sum_{k=2}^{l} \tau'_{k-1}$,

τ'_l - is duration of activity of the l-th transition,

r''_l - is an Index matrix, which denotes the l-th transition condition of tokens from the transition's inputs $\left\{\dddot{X}_{(l-1)}, \dddot{X}'_{(l)}\right\}$ to its outputs $\left\{\dddot{X}_{(l)}, \dddot{X}'_{(l)}\right\}$, and has the following form:

$$r_l'' = \begin{array}{c|cc} & \dddot{X}_{(l)} & \dddot{X}'_{(l)} \\ \hline \dddot{X}_{(l-1)} & false & true \\ \dddot{X}'_{(l)} & V_l & \neg V_l \end{array} \tag{71}$$

where

$$V_l = \begin{cases} true & \text{if not all tokens } \alpha_{i(l-1)},\ i = 1,2,\ldots,N(l-1), \text{ entered the transition } Z_l \\ false & \text{otherwice} \end{cases} \tag{72}$$

M_l'' - indicates an Index matrix describing the capacities of transition's arcs:

$$M_l'' = \begin{array}{c|cc} & \dddot{X}_{(l)} & \dddot{X}'_{(l)} \\ \hline \dddot{X}_{(l-1)} & 0 & 1 \\ \dddot{X}'_{(l)} & 1 & 1 \end{array} \tag{73}$$

$\Box_l'' = \vee\left(\dddot{X}_{(l-1)}, \dddot{X}'_{(l-1)}\right)$ - means that at least one place must contain one token.

The new Generalized net has the following form:

$$GN3 = \left\langle \left\langle A, *, \pi_X, c, g, \Theta_1, \Theta_2 \right\rangle, \left\langle K, *, \Theta_K \right\rangle, \left\langle T, *, t^* \right\rangle, \left\langle Y, \Phi, b \right\rangle \right\rangle \tag{74}$$

where

- $A = \{Z_1, Z_2, \ldots, Z_L\}$ - is a set of transitions,
- π_X is a function describing the priorities of the places in the following way:

$$pr_1\{Z_1, Z_2, \ldots, Z_L\} = \left\{\dddot{X}_{(0)}, \dddot{X}_{(1)}, \dddot{X}'_{(1)}, \dddot{X}_{(2)}, \dddot{X}'_{(2)} \ldots, \dddot{X}_{(L-1)}, \dddot{X}'_{(L)}\right\} \tag{75}$$

$$pr_2\{Z_1, Z_2, \ldots, Z_L\} = \left\{\dddot{X}_{(1)}, \dddot{X}'_{(1)}, \dddot{X}_{(2)}, \dddot{X}'_{(2)} \ldots, \dddot{X}_{(L)}, \dddot{X}'_{(L)}\right\} \tag{76}$$

- c_l - is a function describing the capacities of the places

$$c_l = \begin{cases} N(l) & \text{for } \dddot{X}_{(l)} \\ N(l) & \text{for } \dddot{X}'_{(l)} \end{cases}, \quad l = 0,1,2,\ldots,L, \tag{77}$$

- g - is a function that calculates the truth values of the predicates of the transition conditions, and is related to (72),

- Θ_1 - is a function giving the next time-moment when the transitions can be again activated; for a single simulation this time is not valid, while for performing the simulation for a set of inputs the function has a form $\Theta_1(t_l) = t'_l$, $l = 1,2,\ldots,L$, (with $pr_3 Z_0 = T$), where

$$t_l = T + (p-1)\sum_{k=1}^{L} pr_4 Z_k + pr_3 Z_{l-1} = T + (p-1)\sum_{k=1}^{L} \tau'_k + pr_3 Z_{l-1} \tag{78}$$

and

$$t'_l = t_l + \sum_{k=1}^{L} pr_4 Z_k = t_l + \sum_{k=1}^{L} \tau'_k \tag{79}$$

$t' \in \lfloor T, T + t^* \rfloor$ and $t \le t'$ for $p = 1,2,\ldots,P$,

- Θ_2 - is a function giving the duration of activity of each transition Z_l

$$\Theta_2(t_l) = t''_l, \; l = 1,2,\ldots,L \tag{80}$$

where t_l is described by (78) and

$$t''_l = pr_4 Z_l = \tau'_l \tag{81}$$

the value of this function is calculated at the moment when the transition starts functioning

- K - is the set of tokens entering the Generalized net, here $N(0)$ tokens enter the net,

$$K = \{\alpha_{1(0)}, \alpha_{2(0)}, \ldots, \alpha_{N(0)}\} \tag{82}$$

- $\Theta_K = T$ - is a time when the first token $\alpha_{1(0)}$ enters the net, and is the time when the Generalized net starts functioning,
- t^* - describes the period within the Generalized net is functioning; for a single simulation $t^* = \sum_{l=1}^{L} \tau_l'$, while for a set of inputs this time is described by $t^* = P\sum_{l=1}^{L} \tau_l'$, where P denotes the number of samples,
- $Y = \{y(\alpha_{1(0)}), y(\alpha_{2(0)}), \ldots, y(\alpha_{N(0)})\}$ (83)

  - is the set of all initial characteristics of the tokens that enter the place $\dddot{X}_{(0)}$, and the entering tokens have the following characteristic[1]

  $$y(\alpha_{i(0)}) = \langle NN1, N(0), N(1), i(0), x_{i(0)} \rangle \tag{84}$$

  for $i(0) = 1,2,\ldots,N(0)$, where

  $NN1$, $N(0)$, $N(1)$ - are described as before,

  $x_{i(0)}$ - is the value of the i-th input to the network,
- Φ - the characteristic function generating the new characteristic of the new token can have a very complex form; the simplification of the characteristic (84) causes that the lacking elements $imout_{i(0)}$, $F_{(1)}$ and $imout_{i(0)}$ must be integral parts of Φ; let the function Φ be described in the following algorithmic form:

  1) let $l = 0$

  2) $l \leftarrow l + 1$

  3) $i(l) = 0$

  4) $i(l) \leftarrow i(l) + 1$

  5) construct the Index matrix

[1] The introduced characteristic (84) has a different form than the characteristic (31).

$$imX_{i(l-1)} = [0,...,0,x_{i(l-1)},0,...,0]^T \tag{85}$$

6) the token $\alpha_{i(l-1)}$, associated with the place $\dddot{X}_{(l)}$ of the characteristic

$$y(\alpha_{i(l-1)}) = \langle NN1, N(l-1), i(l-1), x_{i(l-1)}\rangle \tag{86}$$

(where $NN1$, $N(l-1)$, - are described as before, and $x_{i(l-1)}$ is the value of the i-th input to the l-th transition)

enters the place $\dddot{X}_{(l)}$, and according to the transition condition (71) goes to the place $\dddot{X}'_{(l)}$ (Step 7) if $i(l-1) \le N(l-1)$ otherwise goes to the place $\dddot{X}_{(l)}$ (Step 10)

7) construct the following components:

$$imX_{(l-1)} \leftarrow imX_{(l-1)} + imX_{i(l-1)} \tag{87}$$

where $imX_{i(l-1)} = [0,...,0,x_{i(l-1)},0,...,0]^T$

$$imW_{(l-1)} \leftarrow imW_{(l-1)} + imW_{i(l-1)} \tag{88}$$

where

$$imW_{i(l-1)} = \begin{array}{c|cccc} & \dddot{x}_{1(l)} & \dddot{x}_{2(l)} & \dots & \dddot{x}_{N(l)} \\ \hline \dddot{x}_{i(l-1)} & w_{i(l-1)1(l)} & w_{i(l-1)2(l)} & \dots & w_{i(l-1)N(l)} \end{array}$$

$$imout_{(l-1)} \leftarrow imout_{(l-1)} + imout_{i(l-1)} \tag{89}$$

where

$$imout_{i(l-1)} = \begin{array}{c|cccc} & \dddot{x}_{1(l)} & \dddot{x}_{2(l)} & \dots & \dddot{x}_{N(l)} \\ \hline \dddot{x}_{i(l-1)} & x_{i(l-1)}\, w_{i(l-1)1(l)} & x_{i(l-1)}\, w_{i(l-1)2(l)} & \dots & x_{i(l-1)}\, w_{i(l-1)N(l)} \end{array}$$

8) the components (87) and (88) allow to describe the characteristic of the token $\alpha'_{i(l)}$ associated with the place $\dddot{X}'_{(l)}$ as follows

$$y\left(\alpha'_{i(l)}\right)=\left\langle NN1, N(l-1), N(l),\ imX_{(l-1)},\ imW_{(l-1)}\right\rangle \tag{90}$$

9) go to Step 4

10) for $j=1,2,\dots,N(l)$ compute

$$imX_{j(l)}=f_{j(l)}\left(\sum_{i=1}^{N(l-1)} imout_{i(l-1)}\right) \tag{91}$$

where

$$F_{(l)}=\left[f_{1(l)}\left(\sum_{i=1}^{N(l-1)} x_{i(l-1)}\,w_{i(l-1)1(l)}\right), f_{2(l)}\left(\sum_{i=1}^{N(l-1)} x_{i(l-1)}\,w_{i(l-1)2(l)}\right),\dots,\right.$$
$$\left. f_{N(l)}\left(\sum_{i=1}^{N(l-1)} x_{i(l-1)}\,w_{i(l-1)N(l)}\right)\right]^T \tag{92}$$

11) for $j=1,2,\dots,N(l)$ generate the new tokens $\alpha_{j(l)}$ having the following characteristics

$$y\left(\alpha_{j(l)}\right)=\left\langle NN1, N(l), j(l),\ x_{j(l)}\right\rangle \tag{93}$$

where $x_{j(l)}$ is the j-th element of the Index matrix

$$imX_{(l)}=\left[x_{1(l)}, x_{2(l)},\dots, x_{N(l)}\right]^T \tag{94}$$

12) if $l<L$ go to Step 2 otherwise go to Step 13

13) the end of generating the output of the network

$$imX_{(L)}=\left[x_{1(L)}, x_{2(L)},\dots, x_{N(L)}\right]^T \tag{95}$$

- $b\left(\alpha_{(l)}\right)=b\left(\alpha'_{(l)}\right)=1$ for $l=0,1,2,\dots,L$.

There is a great difference between these two versions. The version I is characterised by introducing only one token but with very extended characteristic, due to this fact the information entering each transition is delivered paralelly. For the version II we have introduced the extra places with extra tokens. In this way the information of each token enters each transition in a sequential way.

4 Case C - Full Aggregation

In this case we do not distinguish any subsystems within the network. The network is represented by the following form

$$X(L) = G(WW(L), X(0)) \tag{96}$$

where

$$WW(L) = \left[W_{(1)}, W_{(2)}, \ldots, W_{(L)}\right]^T \tag{97}$$

$$W(l) = \left[w_{1(l)}, w_{2(l)}, \ldots, w_{N(l)}\right]^T \text{ and } w_{i(l-1)} = \left[w_{i(l-1)1(l)}, w_{i(l-1)2(l)}, \ldots, w_{i(l-1)N(l)}\right]^T$$

while $w_{i(l-1)j(l)}$ are the weights connecting the i-th neuron from the $(l-1)$-st layer with the j-th from the l-th layer, $l = 1,2,\ldots,L$, $j = 1,2,\ldots,N(l)$.

In this section we aggregate all transitions Z_l, $l = 1,2,\ldots,L$, in only one transition Z, and all places are aggregated in only three places $\dddot{X}_1, \dddot{X}_2, \dddot{X}_3$ as is shown in Figure 5. Similarly as in version II in section 3 the tokens represent the neurons of the neural network.

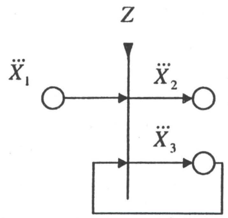

Figure 5: The GN model of the aggregated NN

The Generalized net model has the following formal description

$$GN4 = \left\langle \langle \{Z\}, *, \pi_X, c, g, \Theta_1, \Theta_2 \rangle, \langle K, *, \Theta_K \rangle, \langle T, *, t^* \rangle, \langle Y, \Phi, b \rangle \right\rangle \tag{99}$$

where the transition has a form

$$Z = \left\langle \{\dddot{X}_1, \dddot{X}_3\}, \{\dddot{X}_2, \dddot{X}_3\}, \tau, \tau', r, M, \square \right\rangle \tag{100}$$

where

$\{\dddot{X}_1, \dddot{X}_3\}$ - is the set of input places of the transition,

$\{\dddot{X}_2, \dddot{X}_3\}$ - is the set of output places of the transition,

τ - is a time when the transition is fired out, while $\tau = T$,

τ' - is duration of activity of the transition,

r - is an Index matrix, which denotes the transition condition of tokens from the transition's inputs $\{\dddot{X}_1, \dddot{X}_3\}$ to its outputs $\{\dddot{X}_2, \dddot{X}_3\}$, and has the following form:

$$
r = \begin{array}{c|cc}
 & \dddot{X}_2 & \dddot{X}_3 \\
\hline
\dddot{X}_1 & false & true \\
\dddot{X}_3 & V & \neg V
\end{array} \qquad (101)
$$

where

$$
V = \begin{cases} true & \text{if not all tokens } \alpha_{i(l-1)},\ i = 1,2,\ldots,N(l-1),\ l = 1,2,\ldots,L, \\ & \text{entered the transition } Z \\ false & \text{otherwice} \end{cases} \qquad (102)
$$

M - indicates an Index matrix describing the capacities of transition's arcs:

$$
M = \begin{array}{c|cc}
 & \dddot{X}_2 & \dddot{X}_3 \\
\hline
\dddot{X}_1 & 0 & 1 \\
\dddot{X}_3 & 1 & 1
\end{array} \qquad (103)
$$

$\square = \vee\left(\dddot{X}_1, \dddot{X}_3\right)$ - means that at least one place must contain one token.

- π_X - describes the priorities of the places in the following way:

$$pr_1\{Z\} = \{\dddot{X}_1, \dddot{X}_3\} \qquad (104)$$

$$pr_2\{Z\} = \{\dddot{X}_2, \dddot{X}_3\} \qquad (105)$$

- c - describes the capacities of the places as follows

$$c\left(\dddot{X}_1\right) = c\left(\dddot{X}_3\right) = \sum_{l=0}^{L} N(l)$$

$$c\left(\dddot{X}_2\right) = N(L) \qquad (106)$$

- g - is a function that calculates the truth values of the predicates of the transition conditions and is related to calculation of (102),
- Θ_1 - is a function giving the next time-moment when the transitions can be again activated; for a single simulation this time is not valid, while for performing the simulation for a set of inputs the function has a form $\Theta_1(t) = t + \tau'$, where $t = T + (p-1)\tau'$, for $p = 1,2,...,P$,
- $\Theta_2 = \tau'$ - is a function giving the duration of activity of the transition Z,
- K - is the set of tokens entering the Generalized net, in this case $\sum_{l=0}^{L} N(l)$ tokens enter the net,

$$K = \{\alpha_{1(0)}, \alpha_{2(0)}, ..., \alpha_{N(0)}\} \tag{107}$$

- $\Theta_K = T$ - is a time when the first token $\alpha_{1(0)}$ enters the net,
- t^* - describes the period within the Generalized net is functioning; for a single simulation $t^* = \tau'$, while for a set of inputs this time is described by $t^* = P\tau'$, where P denotes the number of samples,

- $$Y = \{y(\alpha_{1(0)}), y(\alpha_{2(0)}), ..., y(\alpha_{N(0)})\} \tag{108}$$

  - denotes the set of all initial characteristics of the tokens which enter the place $\dddot{X}_1$, thc entering tokens have the following characteristic

$$y(\alpha_{i(0)}) = \langle NN1,\ N(0),\ i(0),\ x_{i(0)} \rangle \tag{109}$$

for $i(0) = 1,2,...,N(0)$, where

$NN1$, $N(0)$ - are described as before,

$x_{i(0)}$ - is the value of the i-th input to the network,

- Φ - the characteristic function generating the new characteristics of the new tokens in the considered case has a very complex form; the whole processing in this case of Generalized net is performed during the tokens $\alpha'_{i(l)}$ associated with the place $\dddot{X}_3$ enter the transition, and the new characteristics are generated; the function Φ will be described in the following algorithmic form:

  1) $i(0)=0$

  2) $i(0) \leftarrow i(0)+1$

  3) construct the Index matrix

$$imX_{i(0)} = [0,...,0, x_{i(0)}, 0,...,0]^T \tag{110}$$

  4) if $i(0) > N(0)$ go to Step 8, otherwise the token $\alpha_{i(0)}$, associated with the place $\dddot{X}_1$, having the following characteristic

$$y(\alpha_{i(0)}) = \langle NN1, N(0), i(0), x_{i(0)} \rangle \tag{111}$$

  due to the transition condition (101) passes the transition and next enters the place $\dddot{X}_3$,

  5) construct the following components:

$$imX_{(0)} \leftarrow imX_{(0)} + imX_{i(0)} \tag{112}$$

where $imX_{i(0)} = [0,...,0, x_{i(0)}, 0,...,0]^T$

$$imW_{(0)} \leftarrow imW_{(0)} + imW_{i(0)} \tag{113}$$

where

$$
imW_{i(0)} = \begin{array}{c|cccc}
 & \dddot{x}_{1(1)} & \dddot{x}_{2(1)} & \dots & \dddot{x}_{N(1)} \\
\hline
\dddot{x}_{i(0)} & w_{i(0)1(1)} & w_{i(0)2(1)} & \dots & w_{i(0)N(1)}
\end{array}
$$

$$imout_{(0)} \leftarrow imout_{(0)} + imout_{i(0)} \tag{114}$$

where

$$
imout_{i(0)} = \begin{array}{c|cccc}
 & \dddot{x}_{1(1)} & \dddot{x}_{2(1)} & \dots & \dddot{x}_{N(1)} \\
\hline
\dddot{x}_{i(0)} & x_{i(0)}\, w_{i(0)1(1)} & x_{i(0)}\, w_{i(0)2(1)} & \dots & x_{i(0)}\, w_{i(0)N(1)}
\end{array}
$$

6) the components (112), (113)) and (114) allow to describe the characteristic of the token $\alpha'_{i(0)}$ associated with the place $\ddot{X}_3$ as follows

$$y(\alpha'_{i(0)}) = \langle NN1,\ N(0),\ i(1),\ imX_{(0)},\ imW_{(0)},\ imout_{(0)} \rangle \tag{115}$$

7) go to Step 4

8) for $j = 1, 2, \dots, N(1)$ compute

$$imX_{j(1)} = f_{j(1)}\left(\sum_{i=1}^{N(0)} imout_{i(0)} \right) \tag{116}$$

where

$$F_{(1)} = \left[f_{1(1)}\left(\sum_{i=1}^{N(0)} x_{i(0)}\, w_{i(0)1(1)} \right), f_{2(1)}\left(\sum_{i=1}^{N(0)} x_{i(0)}\, w_{i(0)2(1)} \right), \dots, \right.$$
$$\left. f_{N(1)}\left(\sum_{i=1}^{N(0)} x_{i(0)}\, w_{i(0)N(1)} \right) \right]^T \tag{117}$$

9) $l = 1$

10) $l \leftarrow l + 1$

11) $i(l) = 0$

12) $i(l) \leftarrow i(l)+1$

13) if $l > L$ go to Step 18 otherwise continue as follows:

the token $\alpha'_{i(l-1)}$ starts from place $\dddot{X}_3$, than passes the transition Z (according to condition (71)) and goes again to the place $\dddot{X}_3$ (or to the place $\dddot{X}_2$ for $l > L$); the token has the following characteristic

$$y(\alpha'_{i(l-1)}) = \langle NN1, N(l-1), i(l-1),\ \boldsymbol{imX}_{(l-1)}, \boldsymbol{imW}_{(l-1)}, \boldsymbol{imout}_{(l-1)} \rangle \tag{118}$$

14) compute the components of (118):

$$\boldsymbol{imX}_{(l-1)} \leftarrow \boldsymbol{imX}_{(l-1)} + \boldsymbol{imX}_{i(l-1)} \tag{119}$$

where $\boldsymbol{imX}_{i(l-1)} = [0,\ldots,0, x_{i(l-1)}, 0,\ldots,0]^T$

$$\boldsymbol{imW}_{(l-1)} \leftarrow \boldsymbol{imW}_{(l-1)} + \boldsymbol{imW}_{i(l-1)} \tag{120}$$

where

$$\boldsymbol{imW}_{i(l-1)} = \begin{array}{c|cccc} & \dddot{x}_{1(l)} & \dddot{x}_{2(l)} & \ldots & \dddot{x}_{N(l)} \\ \hline \dddot{x}_{i(l-1)} & w_{i(l-1)1(l)} & w_{i(l-1)2(l)} & \ldots & w_{i(l-1)N(l)} \end{array}$$

$$\boldsymbol{imout}_{(l-1)} \leftarrow \boldsymbol{imout}_{(l-1)} + \boldsymbol{imout}_{i(l-1)} \tag{121}$$

where

$$\boldsymbol{imout}_{i(l-1)} = \begin{array}{c|cccc} & \dddot{x}_{1(l)} & \dddot{x}_{2(l)} & \ldots & \dddot{x}_{N(l)} \\ \hline \dddot{x}_{i(l-1)} & x_{i(l-1)}\, w_{i(l-1)1(l)} & x_{i(l-1)}\, w_{i(l-1)2(l)} & \ldots & x_{i(l-1)}\, w_{i(l-1)N(l)} \end{array}$$

15) if $i < N(l-1)$ go to Step 12 otherwise go to Step 16

16) for $j = 1,2,\ldots,N(l)$ compute

$$imX_{j(l)} = f_{j(l)}\left(\sum_{i=1}^{N(l-1)} imout_{i(l-1)} \right) \tag{122}$$

where

$$F_{(l)} = \Bigg[f_{1(l)}\left(\sum_{i=1}^{N(l-1)} x_{i(l-1)}\, w_{i(l-1)1(l)} \right), f_{2(l)}\left(\sum_{i=1}^{N(l-1)} x_{i(l-1)}\, w_{i(l-1)2(l)} \right), \ldots,$$

$$f_{N(l)}\left(\sum_{i=1}^{N(l-1)} x_{i(l-1)}\, w_{i(l-1)N(l)} \right) \Bigg]^T \tag{123}$$

17) go to Step 10

18) the end of generating the output of the network

$$imX_{(L)} = \left[x_{1(L)}, x_{2(L)} \ldots, x_{N(L)} \right]^T \tag{124}$$

- $b(\alpha_{(l)}) = b(\alpha'_{(l)}) = 1$ for $l = 0,1,2,\ldots,L$.

In this chapter we have described the concept of a Generalized Net used out for representing functioning of multilayer neural networks, the simulation process of this class of the networks.

Generalized nets are defined as extensions of the ordinary Petri nets and their modifications, but in a way that is principally different from the ways of defining the other types of Petri nets. The additional components, which appear in the definition of Generalized nets, provide more and greater modelling possibilities. The first and basic difference between Generalized nets and the ordinary Petri nets is the *place – transition* relation (Atanassov, 1991). Within the scope of Generalized nets the transitions are objects of a more complex nature. Additionally the algorithms of tokens' transfer in the Generalized nets are also more complex. On the other hand, as the GNs are more general, the algorithms for movement of tokens in the Generalized nets are more general than those of Petri nets. The algorithms for the token's transfers take into account the priorities of the places, transitions and tokens.

There are defined operations and relations over the transitions, as well as over the Generalized nets in general. In the book of Atanassov (1991) there are introduced six types of operators:

- global ($\mathcal{G}$-) operators,
- local ($\mathcal{P}$-) operators,
- hierarchical ($\mathcal{H}$-) operators,
- reducing ($\mathcal{R}$-) operators,
- extending ($\mathcal{O}$-) operators,
- dynamic ($\mathcal{D}$-) operators.

The operators allow changing a given form of the considered Generalized net into a different form.

The *global operators* can be used to change a whole given net or all its components of a given type. There is a group of operators that allow to change: the form and structure of the transitions, temporal components of the net, the duration of transitions functioning, the set of tokens, the set of the initial characteristics, the characteristic function of the net, the evaluation function and other net's functions.

The *local operators* transform single components of some of the transitions. There are three types of local operators: temporal - that change the temporal components of a transition, matrix - that change some of the index matrices of a given transition and other operators – that alter the transition's type and the capacity of some of the places in the net or the characteristic function of an output place or the evaluation function associated with the transition condition predicates of the given transition.

There are following *hierarchical operators*: expanding a given Generalized net, shrinking a given Generalized net, acting upon or giving as a result a place, acting upon or giving as a result a transition. The hierarchical operators can replace a given place or transition or replace a part of a given Generalized net with a single place or transition, or change a subnet of a given Generalized net with another subnet.

The *reducing operators* produce a new reduced Generalized net from a given net and allow the construction of elements of the classes of reduced Generalized nets.

The *extending operators* are used to extend a given Generalized net.

The *dynamic operators* are related to the ways the Generalized net functions, e.g. the procedure of evaluating the transition condition predicates, governing token splitting, governing the union of tokens having a common predecessor, determining the strategies of the tokens transfer, evaluating the transition condition predicates.

The operators have a major theoretical and practical value because they allow studying the properties and the behaviour of Generalized nets.

The basic properties of the operators are discussed from a theoretical point of view by Atanassov (1991) in details. Of course, not all operators can be applied over a Generalized net during the time of its functioning. Some of them are only applicable before, and others - after the Generalized net functioning.

In this chapter we have applied several properties of many different operators, e.g. the structure of the considered Generalized net was changed, the number of the transitions, the number of the tokens as well as the characteristics of the tokens.