

283/2006

**Raport Badawczy**

**RB/46/2006**

**Research Report**

**Nieparametryczne metody  
statystycznego sterowania  
procesami (spc)**

**O. Hryniewicz  
A. Szediw**

**Instytut Badań Systemowych  
Polska Akademia Nauk**

**Systems Research Institute  
Polish Academy of Sciences**



# **POLSKA AKADEMIA NAUK**

## **Instytut Badań Systemowych**

ul. Newelska 6

01-447 Warszawa

tel.: (+48) (22) 8373578

fax: (+48) (22) 8372772

Kierownik Pracowni zgłaszający pracę:  
Prof. dr hab. inż. Olgierd Hryniewicz

Warszawa 2006

## NIEPARAMETRYCZNE METODY STATYSTYCZNEGO STEROWANIA PROCESAMI (SPC)

### Streszczenie

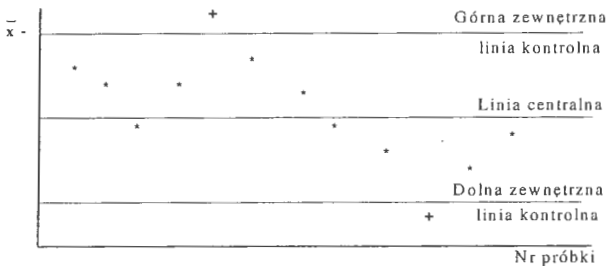
*Celem statystycznego sterowania procesami (SPC) jest wykrywanie ich rozregulowań, co w konsekwencji powinno prowadzić do znajdowania i usuwania przyczyn rozregulowania, a więc do poprawy jakości procesu. Od kilkudziesięciu już lat stosowane są do tego celu proste metody statystyczne, a w tym niezwykle popularne karty kontrolne. W pracy zaproponowano oryginalne zastosowanie nieparametrycznej metody statystycznej – testu niezależności Kendalla - do wykrywania rozregulowań procesu. Własności procedury zbadano dla rozregulowań przejawiających się występowaniem zależności pomiędzy kolejnymi obserwacjami procesu, które można opisać przy pomocy dwuwymiarowego rozkładu normalnego oraz kopuł Farliego – Gumbela – Morgensterna.*

### 1. Wprowadzenie

Wynikająca z presji rynku konieczność wprowadzania systemów zapewnienia jakości zwróciła uwagę praktyków zarządzania na znane od ponad osiemdziesięciu lat narzędzie statystycznego sterowania jakością, jakim jest wprowadzona przez Shewharta karta kontrolna. Idea konstrukcji karty kontrolnej jest niezwykle prosta: wyniki pomiarów procesu (mogą to być zarówno wyniki pojedynczych pomiarów jak też uzyskane na podstawie analizy statystycznej odpowiednich próbek losowych oceny takich parametrów procesu jak np. jego wartość oczekiwana, czy też odchylenie standardowe) zaznaczane są w porządku chronologicznym na wykresie. Na wykresie karty kontrolnej zaznaczone są ponadto następujące linie: linia centralna odpowiadająca wartości średniej (lub wartości docelowej) kontrolowanej charakterystyki procesu, a także jedna lub dwie linie kontrolne, określające obszary niedopuszczalnych wartości tej charakterystyki. Przykładowa karta kontrolna, służąca do kontroli wartości średniej procesu (tzw. poziomu procesu) z wykorzystaniem wartości średniej z próbek, przedstawiona jest na rysunku 1. Sposób konstrukcji kart kontrolnych opisano m.in. w książkach Thompsona, Koronackiego i Nieckuły [4] oraz Hryniewicza [1].

Podstawowym sygnałem alarmowym, świadczącym o prawdopodobnym wystąpieniu rozregulowania procesu, jest pojawienie się wyniku pomiaru poza liniami kontrolnymi. Sytuacje takie zaznaczone są na rysunku 1 znakiem „+”. Sygnał tego rodzaju jest szczególnie przydatny do sygnalizacji rozregulowania polegającego na jednorazowym przesunięciu się poziomu procesu w stosunku do linii centralnej. Szybkie wykrycie rozregulowania warunkowane jest jednak jego wielkością. Powinno

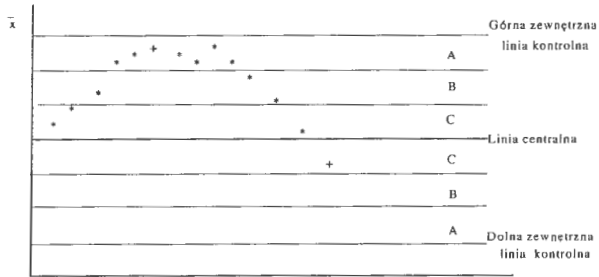
ono być większe od dwu odchyłeń standardowych zaznaczonej na karcie statystycznej charakterystyki procesu. W przypadku stosunkowo małych rozregulowań, oczekiwany czas do ich wykrycia może być niedopuszczalnie duży. W takich przypadkach należy stosować pomiary próbek o większej liczności, lub też inne karty kontrolne, takie jak karty sum skumulowanych (CUSUM), karty średniej ruchomej (MA) lub karty wykładniczo ważonej średniej ruchomej (EWMA). Opis tych kart kontrolnych można znaleźć we wspomnianych już książkach [1] i [4]. Sterowanie procesem w przypadku występowania jego stosunkowo niewielkich rozregulowań również komplikuje fakt, że w powszechnie stosowanych pakietach statystycznych, takich jak STATISTICA, SPSS oraz SAS, domyślną opcją jest przeliczanie granic kontrolnych karty po pojawieniu się każdego nowego wyniku pomiaru. W tej sytuacji wyznaczana przez program komputerowy karta kontrolna „adaptuje się” do zmienionego poziomu procesu, uniemożliwiając łatwe wykrycie jego rozregulowania. Podobny efekt możemy zauważyć, gdy parametry procesu wolno zmieniają się w czasie, czyli gdy występuje efekt tzw. „płynięcia parametrów”.



Rys.1. Karta kontrolna  $\bar{X}$ -średnia do kontroli poziomu procesu

W celu umożliwienia szybszego wykrycia wspomnianych powyżej typowych, a także innych, nietypowych (tzn. nie polegających na jednorazowym „załamaniu się” kontrolowanego procesu) rozregulowań, w latach pięćdziesiątych zeszłego stulecia zaproponowano zestaw testów pomocniczych, znanych powszechnie jako metoda Western Electric. W jednym z testów tej metody sygnał alarmowy pojawia się w przypadku gdy sześć kolejnych wyników pomiarów układa się albo w trendzie rosnącym, albo w trendzie mającym. Mówimy w takim przypadku o wystąpieniu sekwencyjnego sygnału alarmowego. Sytuacja ta jest przedstawiona na rysunku 2, gdzie moment pojawienia się sygnału alarmowego zaznaczono znakiem „+”.

Przedstawiona powyżej metoda wykrywania rozregulowania procesu, a także inne testy metody Western Electric, które opisane są m.in. w książce Hryniewiczza [1], są bardzo przydatne w wykrywaniu rozregulowań procesu o szczególnej postaci. Ich wielką zaletą jest niezwykła wprost prostota, która może jednak ograniczać efektywność testów w przypadku bardziej skomplikowanych typów rozregulowania procesu. W niniejszej pracy zaproponowano oryginalne zastosowanie znanej od wielu lat statystyki Kendalla do analizy sekwencji pomiarów prezentowanych na karcie kontrolnej. W zastosowaniu tym przyjęto założenie, że dla procesu znajdującego się w stanie statystycznego uregulowania (tzn. w procesie stabilnym) kolejne jego pomiary powinny być wzajemnie niezależne o stałej wartości oczekiwanej i wariancji. Wobec tego, pojawienie się pewnych zależności powinno świadczyć o możliwości rozregulowania procesu.



Rys.2. Karta kontrolna z zaznaczonym sekwencyjnym sygnałem alarmowym

Opis zaproponowanej metody przedstawiono w punkcie drugim niniejszej pracy, zwracając szczególną uwagę na jej własności statystyczne w przypadku kontroli procesów ustabilizowanych. Ciekawszą rzeczą jest jednak przeanalizowanie własności tej metody w przypadku występowania określonych typów rozregulowań. W punkcie trzecim pracy przedstawiono model procesu, w którym świadczące o jego rozregulowaniu zależności opisane są rodziną dwuwymiarowych rozkładów prawdopodobieństwa. Rozpatrzono dwa przypadki: dwuwymiarowego rozkładu normalnego oraz dwuwymiarowego rozkładu prawdopodobieństwa opisanego kopułą Farliego - Gumbela - Morgensterna. Dla obu rozpatrywanych przypadków przeanalizowano metodami symulacji komputerowej własności zaproponowanej procedury. Wyniki tej analizy, a w tym porównanie własności nowej procedury z własnościami wspomnianego powyżej klasycznego testu metody Western Electric, przedstawiono w punkcie piątym niniejszej pracy. W zakończeniu przedstawione zostały podsumowujące pracę wnioski, a także wskazano na kierunki dalszych badań.

## 2. Wykorzystanie testu niezależności Kendalla do wykrywania rozregulowań procesu

Występowanie zależności pomiędzy kolejnymi obserwacjami zaznaczanymi na karcie kontrolnej procesu może wskazywać na jego rozregulowanie. Należy tu jednak podkreślić, że nie każdy rodzaj takiej zależności należy traktować jako niekorzystny. W naszej analizie ograniczymy się wyłącznie do przypadku, gdy kontrolowana cecha jakościowa procesu powinna przyjmować wartości znajdujące się wewnątrz dwustronnych granic tolerancji  $[L, U]$ . W takim przypadku rozregulowanie procesu przejawia się w pojawieniu się tendencji do pojawiania się zarówno obserwacji o wartościach zbyt dużych, jak też i o wartościach zbyt małych. Łatwo zauważyć, że w takim przypadku będziemy mieli do czynienia w przypadku występowania  *dodatniej*  zależności stochastycznej pomiędzy kolejnymi wartościami opisującej kontrolowany proces cechy jakościowej. Wynika to z tego, że w przypadku występowania zależności typu dodatniego dużym wartościom kontrolowanej cechy w danych momentach czasowych towarzyszą duże wartości w kolejnych momentach czasowych. Symetrycznie, w przypadku występowania dodatniej zależności stochastycznej, małym wartościom kontrolowanej cechy w danych momentach czasowych towarzyszą małe w kolejnych momentach czasowych. W rezultacie zwiększa się całkowita zmienność procesu przejawiająca się powstawaniem niekorzystnych trendów (rosnących lub malejących), co w przypadku procesów, dla których określono dwustronne granice tolerancji jest zjawiskiem zdecydowanie negatywnym. Z kolei, występowanie  *ujemnej*

zależności stochastycznej pomiędzy kolejnymi obserwacjami kontrolowanej cechy jest zjawiskiem pożądanym. W takim przypadku mamy do czynienia ze zmniejszeniem zmienności procesu przejawiającym się znaczącym zmniejszeniem szans wystąpienia niekorzystnych trendów.

Z powyższych rozważań wynika, że celem jest kontrolowanie procesu z wykorzystaniem takich narzędzi statystycznych, które umożliwiają wykrycie niekorzystnych trendów będących konsekwencją występowania  *dodatnich*  zależności stochastycznych pomiędzy kolejnymi wartościami opisującymi dany proces cech. Wspomniana we Wprowadzeniu reguła Western Electric „sześciu kolejnych rosnących (malejących)” jest najprostszym przykładem takiego narzędzia. Poniżej proponujemy narzędzie bardziej skomplikowane, będące uogólnieniem metody „sześciu kolejnych rosnących (malejących)”, które powinno być bardziej efektywne w wykrywaniu występowania w procesie niekorzystnych dodatnich zależności stochastycznych.

Niech  $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$  oznacza losową próbkę składającą się z  $n$  kolejnych obserwacji kontrolowanego procesu. Wprowadźmy teraz składającą się z  $n-1$  elementów dwuwymiarową próbkę losową  $(X_i, Y_i), i=1, \dots, n-1$  o elementach zdefiniowanych w następujący sposób:  $X_i = Z_i, i=1, \dots, n-1$  oraz  $Y_i = Z_{i+1}, i=1, \dots, n-1$ . Do opisu wzajemnej zależności zmiennych losowych  $X$  oraz  $Y$  wykorzystamy znaną statystykę  $\tau$ -Kendalla o postaci

$$\tau = \frac{4}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} V_i - 1. \quad (1)$$

gdzie

$$V_i = \text{card}\{(X_j, Y_j): X_j < X_i, Y_j < Y_i\} / (n-2), i=1, \dots, n-1. \quad (2)$$

Rozkład prawdopodobieństwa statystyki  $\tau$  jest znany dla przypadku wzajemnie niezależnych par obserwacji  $(X_i, Y_i), i=1, \dots, n-1$ . Niestety, w rozpatrywanym przez nas przypadku założenie to nie jest spełnione, nawet wtedy, gdy oryginalne obserwacje  $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$  są wzajemnie niezależne. Na szczęście, dla niewielkich wartości  $n$  oraz wzajemnej niezależności obserwacji  $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$  możliwe jest proste wyznaczenie prawdopodobieństw zaobserwowania skrajnych wartości statystyki  $\tau$ . Na przykład, w przypadku gdy mamy do czynienia z  $n$  kolejno rosnącymi (malejącymi) wartościami obserwowanej cechy statystyczna statystyka  $\tau$  przyjmuje zawsze wartość równą 1, a prawdopodobieństwo zaobserwowania tej wartości wynosi  $2/n!$ . W Tabeli 1 dla wybranych wartości  $n$  przedstawiono prawdopodobieństwa zaobserwowania wartości  $\tau \geq \tau_{kryt}$  gdy kolejne obserwacje  $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$  są wzajemnie niezależne.

W przypadku większych wartości liczności próbki  $n$  wartości krytyczne statystyki  $\tau$ , wraz z odpowiednimi prawdopodobieństwami zaobserwowania wartości  $\tau \geq \tau_{kryt}$ , można wyznaczyć metodami symulacyjnymi.

Wartości krytyczne statystyki  $\tau$ 

Tabela 1

| $n=6$         |                            | $n=7$         |                            | $n=8$         |                            | $n=9$         |                            |
|---------------|----------------------------|---------------|----------------------------|---------------|----------------------------|---------------|----------------------------|
| $\tau_{kryt}$ | $P(\tau \geq \tau_{kryt})$ | $\tau_{kryt}$ | $P(\tau \geq \tau_{kryt})$ | $\tau_{kryt}$ | $P(\tau \geq \tau_{kryt})$ | $\tau_{kryt}$ | $P(\tau \geq \tau_{kryt})$ |
| 1             | 0,00267                    | 1             | 0,00042                    | 1             | 0,00006                    | 1             | 0,00001                    |
| 0,8           | 0,00834                    | 0,866         | 0,00119                    | 0,904         | 0,00014                    | 0,857         | 0,00007                    |
| 0,6           | 0,03056                    | 0,733         | 0,00477                    | 0,809         | 0,00069                    | 0,785         | 0,00021                    |
|               |                            | 0,600         | 0,01356                    | 0,714         | 0,00178                    | 0,714         | 0,00071                    |
|               |                            |               |                            | 0,619         | 0,00565                    | 0,642         | 0,00185                    |
|               |                            |               |                            |               |                            | 0,571         | 0,00514                    |

Źródło: opracowanie własne autorów

Rozpatrzmy teraz możliwość wykorzystania wprowadzonej powyżej statystyki  $\tau$  do weryfikacji hipotezy o wzajemnej niezależności kolejnych obserwacji procesu. Jak łatwo zauważyć, zaobserwowanie dużej wartości statystyki  $\tau$  jest w takim przypadku bardzo mało prawdopodobne i może świadczyć o występowaniu *bardziej* zależności pomiędzy kolejnymi obserwacjami. Do wyboru parametrów testu ( $n, \tau_{kryt}$ ) będziemy wykorzystywać ważną z praktycznego punktu widzenia charakterystykę, jaką jest oczekiwana liczba pomiarów (ARL) do pojawienia się takiej sekwencji obserwacji, dla których spełniona będzie nierówność  $\tau \geq \tau_{kryt}$ . W przypadku niezależności kolejnych obserwacji pojawienie się takiej sekwencji będzie *falszywym alarmem* sugerującym rozregulowanie procesu. Niestety, wyznaczenie wartości ARL w sposób analityczny jest niezwykle trudne ze względu na wzajemną zależność kolejnych wartości statystyki  $\tau$ . W rezultacie wartości tej charakterystyki dają się wyznaczyć wyłącznie metodami symulacyjnymi. W Tabeli 2 przedstawiono tak wyznaczone wartości ARL dla testów ( $n, \tau_{kryt}$ ) podanych w Tabeli 1.

Wspomniana poprzednio reguła „sześciu kolejnych rosnących (malejących)” metody Western Electric została wybrana w ten sposób by prawdopodobieństwo wygenerowania fałszywego alarmu było zbliżone do prawdopodobieństwa wygenerowania fałszywego alarmu przez klasyczną kartę kontrolną Shewharta. Z Tablicy 1 można odczytać, że prawdopodobieństwo wystąpienia takiego fałszywego alarmu (odpowiadającego zaobserwowaniu wartości  $\tau=1$  dla  $n=6$ ) wynosi 0,0027, a odpowiednia wartość ARL wynosi 422. Dla podanych w powyższych tabelach większych wartości liczności próbki  $n$  nie występują testy o zbliżonych wartościach tego prawdopodobieństwa. Mamy więc testy albo o wartości ARL zdecydowanie większej, albo też wyraźnie mniejszej. Duże wartości ARL są oczywiście korzystniejsze, ale testy o takich własnościach mają jednocześnie duże wartości oczekiwanego czasu do wykrycia prawdziwych alarmów, co jest własnością zdecydowania niekorzystną. W tej sytuacji wybór odpowiedniego testu, którego zadaniem będzie wykrycie występowania *bardziej* zależności pomiędzy obserwacjami procesu, proponujemy ograniczyć do zbioru  $\{(n=6, \tau_{kryt}=1), (n=7, \tau_{kryt}=0,733), (n=8, \tau_{kryt}=0,619), (n=9, \tau_{kryt}=0,571)\}$ . Własności tych testów w przypadku występowania zależności różnego rodzaju porównamy w punkcie 4 niniejszej pracy.

| n=6           |       | n=7           |        | n=8           |         | n=9           |         |
|---------------|-------|---------------|--------|---------------|---------|---------------|---------|
| $\tau_{kryt}$ | ARL   | $\tau_{kryt}$ | ARL    | $\tau_{kryt}$ | ARL     | $\tau_{kryt}$ | ARL     |
| 1             | 422,0 | 1             | 2885,8 | 1             | 22586   | 1             | >150000 |
| 0,8           | 151,4 | 0,866         | 1013,5 | 0,904         | 7799    | 0,857         | 15395   |
| 0,6           | 47,5  | 0,733         | 270,6  | 0,809         | 1891,2s | 0,785         | 5618    |
|               |       | 0,600         | 106,5  | 0,714         | 705,9   | 0,714         | 1784,7  |
|               |       |               |        | 0,619         | 246,0   | 0,642         | 724,9   |
|               |       |               |        |               |         | 0,571         | 291,4   |

Źródło: opracowanie własne autorów

### 3. Modelowanie procesów z wykorzystaniem dwuwymiarowego rozkładu normalnego oraz kopuły Farliego – Gumbela – Morgensterna

W poprzednim punkcie niniejszej pracy przeanalizowaliśmy najważniejsze własności wybranych testów wykorzystywanych w zaproponowanej przez nas procedurze badania niezależności kolejnych obserwacji procesu. Z praktycznego punktu widzenia również ważne są własności proponowanej procedury w przypadku gdy między kolejnymi obserwacjami procesu występuje zależność określonego rodzaju. W niniejszym punkcie zdefiniujemy dwa typy takiej zależności, dla których własności proponowanej procedury będą analizowane w następnym punkcie pracy.

Najczęściej spotykanym w praktyce wielowymiarowym rozkładem prawdopodobieństwa jest wielowymiarowy rozkład normalny. Oznaczmy przez  $X$  oraz  $Y$  zmienne losowe opisujące dwa kolejne pomiary cechy kontrolowanego procesu. W celu modelowania zależności stochastycznej pomiędzy tymi pomiarami przyjmijmy, że rozkład łączny wektora losowego  $(X, Y)$  jest dwuwymiarowym rozkładem normalnym o funkcji gęstości

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}} \exp(-Q) \quad (3)$$

gdzie

$$Q = \frac{1}{1-\rho^2} \left\{ \frac{(x-m_X)^2}{\sigma_X^2} - 2\rho \frac{(x-m_X)(y-m_Y)}{\sigma_X\sigma_Y} + \frac{(y-m_Y)^2}{\sigma_Y^2} \right\} \quad (4)$$

zaś parametr  $\rho$  jest współczynnikiem korelacji, przyjmującym wartość równą zeru w przypadku występowania niezależności zmiennych losowych  $X$  oraz  $Y$ .

Warunkowy rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej  $Y$  pod warunkiem  $X = x$  jest rozkładem normalnym o wartości oczekiwanej  $m_Y + \rho(\sigma_Y/\sigma_X)(x-m_X)$  i odchyleniu standardowym  $\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}$  (patrz np. [2]). W szczególnym przypadku gdy  $m_X = m_Y = 0$  oraz  $\sigma_X = \sigma_Y = 1$  rozkład ten jest rozkładem normalnym o wartości oczekiwanej  $x\rho$  i odchyleniu standardowym  $\sqrt{1-\rho^2}$ . Godnym uwagi jest, że powyżej opisany model zależności występującej pomiędzy kolejnymi obserwacjami kontrolowanego procesu jest tzw. modelem autoregresyjnym.



W bardziej ogólnym przypadku wektor losowy  $(X, Y)$  może być opisany dowolnym dwuwymiarowym rozkładem prawdopodobieństwa. W niniejszej pracy ograniczymy się jednak do specyficznej rodziny dwuwymiarowych rozkładów prawdopodobieństwa opisanych tzw. kopułą Farliego – Gumbela – Morgensterna (FGM). Dwuwymiarowa dystrybuanta rozkładu prawdopodobieństwa opisanego kopułą FGM ma postać [3]:

$$F_{12}(x, y) = F_1(x)F_2(y)[1 + \alpha(1 - F_1(x))(1 - F_2(y))] \quad (5)$$

gdzie  $F_1(x)$  jest dowolnym brzegowym rozkładem prawdopodobieństwa ciągłej zmiennej losowej  $X$ , a  $F_2(y)$  jest dowolnym brzegowym rozkładem prawdopodobieństwa ciągłej zmiennej losowej  $Y$ . Dystrybuanta rozkładu warunkowego zmiennej losowej  $Y$  pod warunkiem  $X = x$  jest dana wzorem [3]:

$$F_{Y|x}(y|x) = F_2(y) - \alpha(2F_1(x) - 1)F_2(y)(1 - F_2(y)) \quad (6)$$

Występujący we wzorach (5) – (6) parametr  $\alpha$  wskazuje na siłę i kierunek zależności. W przypadku, gdy zmienne  $X$  oraz  $Y$  są wzajemnie niezależne zachodzi równość  $\alpha = 0$ . Dodatnie wartości parametru  $\alpha$  wskazują na występowanie dodatniej zależności stochastycznej pomiędzy  $X$  oraz  $Y$ , zaś ujemne wartości parametru  $\alpha$  wskazują na występowanie zależności ujemnej.

#### 4. Badanie efektywności zaproponowanej metody

W celu zbadania efektywności proponowanej metody wykrywania zależności pomiędzy kolejnymi obserwacjami kontrolowanego procesu przeprowadzono eksperymenty symulacyjne. W przypadku, gdy zależność opisana jest dwuwymiarowym rozkładem normalnym zastosowaną miarą efektywności procedury jest oczekiwana liczba pomiarów do momentu wystąpienia sygnału alarmowego, tzn. oczekiwana liczba pomiarów (ARL) potrzebnych do wykrycia rozregulowania, gdy ono istnieje lub oczekiwana liczba pomiarów do wystąpienia fałszywego alarmu, gdy kolejne obserwacje są wzajemnie niezależne. W Tabeli 3 przedstawiono wyniki eksperymentu dla wybranych procedur testowych i różnych wartości współczynnika korelacji  $\rho$ .

Oczekiwana liczba pomiarów do wystąpienia sygnału alarmowego

Tabela 3

| $n$ :           | 6      | 7      | 8      | 9      |
|-----------------|--------|--------|--------|--------|
| $\tau_{kryt}$ : | 1.     | 0,733  | 0,619  | 0,571  |
| $\rho$          | ARL    | ARL    | ARL    | ARL    |
| -0,5            | 1599,6 | 1416,1 | 1697,7 | 2699,3 |
| -0,3            | 928,8  | 722,7  | 775,3  | 1083,8 |
| -0,1            | 546,7  | 374,2  | 362,9  | 455,5  |
| -0,05           | 478,3  | 318,0  | 302,5  | 368,0  |
| 0               | 422,0  | 270,6  | 246,0  | 298,4  |
| 0,05            | 369,6  | 231,2  | 205,8  | 235,6  |
| 0,1             | 323,0  | 198,0  | 172,3  | 192,2  |
| 0,3             | 187,8  | 107,0  | 87,4   | 87,0   |
| 0,5             | 108,1  | 59,6   | 47,8   | 45,9   |

Źródło: opracowanie własne autorów

Z analizy wyników przedstawionych w Tabeli 3 wynika niezbicie, że zaproponowana procedura testowa właściwie reaguje na występowanie zależności pomiędzy kolejnymi pomiarami procesu. W przypadku występowania zależności dodatniej, świadczącej o możliwym rozregulowaniu procesu, oczekiwana liczba pomiarów potrzebnych do wykrycia takiej sytuacji szybko maleje wraz ze wzrostem siły takiej zależności. Z kolei, w przypadku występowania stabilizującej proces zależności ujemnej oczekiwana liczba pomiarów do momentu wystąpienia fałszywego alarmu o rozregulowaniu procesu szybko rośnie wraz ze wzrostem (co do wartości bezwzględnej) siły zależności ujemnej. W obu przypadkach tempo zmian rośnie wraz ze wzrostem liczby kolejnych analizowanych pomiarów (tzn. liczności próbki  $n$ ).

W przypadku zależności opisywanej kopułą FGM dla normalnych rozkładów brzegowych porównywano prawdopodobieństwa wystąpienia alarmu. Wyniki badań symulacyjnych przedstawiono w Tabeli 4. Również i w tym przypadku zachowanie się zaproponowanej procedury testowej jest zgodne z oczekiwaniami. Podobnie jak w przypadku omawianym powyżej, gdy występuje zależność dodatnia, oczekiwana liczba pomiarów potrzebnych do wykrycia rozregulowania szybko maleje wraz ze wzrostem siły takiej zależności. Z kolei, w przypadku występowania zależności ujemnej oczekiwana liczba pomiarów do momentu wystąpienia fałszywego alarmu o rozregulowaniu procesu szybko rośnie wraz ze wzrostem (co do wartości bezwzględnej) siły zależności ujemnej. W obu przypadkach tempo zmian rośnie wraz ze wzrostem liczby kolejnych analizowanych pomiarów (tzn. liczności próbki  $n$ ).

Prawdopodobieństwo wystąpienia sygnału alarmowego

Tabela 4

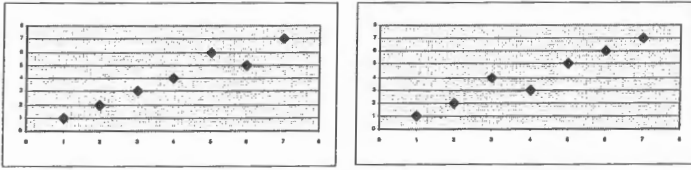
| $n$ :           | 6                          | 7                          | 8                          |
|-----------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| $\tau_{kryt}$ : | 1.                         | 0,733                      | 0,619                      |
| $\alpha$        | $P(\tau \geq \tau_{kryt})$ | $P(\tau \geq \tau_{kryt})$ | $P(\tau \geq \tau_{kryt})$ |
| -1,0            | 0,00084                    | 0,00096                    | 0,00094                    |
| -0,75           | 0,00110                    | 0,00147                    | 0,00170                    |
| -0,5            | 0,00160                    | 0,00224                    | 0,00242                    |
| -0,25           | 0,00219                    | 0,00341                    | 0,00409                    |
| 0               | 0,00251                    | 0,00479                    | 0,00558                    |
| 0,25            | 0,00351                    | 0,00656                    | 0,00904                    |
| 0,5             | 0,00492                    | 0,00855                    | 0,01059                    |
| 0,75            | 0,00593                    | 0,01155                    | 0,01528                    |
| 1,0             | 0,00713                    | 0,01445                    | 0,02080                    |

Źródło: opracowanie własne autorów

## 5. Podsumowanie

Zaproponowana w niniejszej pracy procedura statystyczna służąca do wykrywania rozregulowań procesów jest naturalnym uogólnieniem znanej od lat reguły „sześciu kolejnych rosnących (malejących)”. Pozwala ona wykrywać rozregulowania będące konsekwencją występowania dodatniej zależności stochastycznej pomiędzy wartościami kontrolowanej cechy statystycznej rozpatrywanego procesu. Z praktycznego punktu widzenia najkorzystniej jest stosować procedury, których własności przedstawiono w Tabeli 3. Na szczególną uwagę zasługuje tu test wykorzystujący  $n=7$  kolejnych pomiarów procesu. Okazuje się, że w przypadku przyjęcia wartości krytycznej statystyki Kendalla równej 0,733 obserwowane sekwencje pomiarów, które generują

sygnały alarmowe mają postać analogiczną do przebiegów przedstawionych na Rysunku 3.



Rys.3. Przykładowe sekwencje obserwacji będące sygnałami alarmowymi

Ogólnie rzecz ujmując, sygnał alarmowy generowany jest wtedy, gdy w przypadku siedmiu kolejnych rosnących (malejących) obserwacji dopuszcza się jedną „zamiannę miejsce” dwu sąsiadujących obserwacji. Jak łatwo zauważyć, do wykrycia tego typu sygnału alarmowego na karcie kontrolnej nie jest konieczne wyliczanie statystyki  $\tau$  Kendalla, co znacznie upraszcza proces podejmowania decyzji.

Niniejsza praca dotyczy istotnego problemu statystycznego sterowania procesami, jakim jest niewątpliwie poszukiwanie procedury mogącej być wykorzystaną w sposób efektywny w przypadku rozregulowań mających charakter losowych, często niewielkich, zmian charakterystyk kontrolowanego procesu. Dotyczy to zwłaszcza przypadku, gdy charakterystyki te nie są opisane rozkładem normalnym. W dalszych badaniach nad tym zagadnieniem nie można ograniczyć się do modeli zależności opisanych w niniejszej pracy i należy także wykorzystać modele matematyczne innych kopuł.

#### Literatura

- [1] O. Hryniewicz, *Nowoczesne metody statystycznego sterowania jakością*, Omnitech Press, Warszawa, 1996.
- [2] O. Hryniewicz, *Wykłady ze statystyki dla studentów informatycznych technik zarządzania*. Wydawnictwo Wyższej Szkoły Informatyki Stosowanej i Zarządzania, Warszawa 2004.
- [3] N.L. Johnson, S. Kotz, On some generalized Farlie-Gumbel-Morgenstern distributions – II regression, correlation and further generalizations, *Commun. Statist.* Vol.6 (1977), 485-496.
- [4] J. R. Thompson, J. Koronacki, J. Nieckuła, *Techniki zarządzania jakością od Shewharta do metody „Six Sigma”*. Akademicka Oficyna Wydawnicza Elit, Warszawa 2005.

OLGIERD HRYNIEWICZ  
e-mail: hryniewi@ibspan.waw.pl  
ANNA SZEDIW  
e-mail: aolwert@ibspan.waw.pl  
Instytut Badań Systemowych PAN  
ul. Newelska 6, 01-447 Warszawa









