

**Raport Badawczy**

**RB/25/2013**

**Research Report**

**Analiza własności złożonych  
modeli opóźnienia rozłożonego  
z uwzględnieniem własności  
granicznych**

**J. Gadomski**

**Instytut Badań Systemowych  
Polska Akademia Nauk**

**Systems Research Institute  
Polish Academy of Sciences**



# **POLSKA AKADEMIA NAUK**

## **Instytut Badań Systemowych**

ul. Newelska 6

01-447 Warszawa

tel.: (+48) (22) 3810100

fax: (+48) (22) 3810105

Kierownik Zakładu zgłaszający pracę:  
Prof. nadzw. dr hab. inż. Lech Kruś

Warszawa 2013

# Analiza własności złożonych modeli opóźnienia rozłożonego z uwzględnieniem własności granicznych

Jan Gadomski  
Instytut Badań Systemowych PAN  
ul. Newelska 6, 01-447 Warszawa

## STRESZCZENIE

W pracy przedstawiono analizę modeli opóźnienia rozłożonego o zmiennych strukturach opóźnienia przeprowadzona w dwóch kierunkach; przenoszenia wahań zmiennej niezależnej oraz własności granicznych związanych ze zbieżnością rozkładów opóźnienia oraz rozkładów opóźnienia wynikowego w następstwie wzrostu liczby modeli opóźnienia rozłożonego uczestniczących w ich superpozycji. Przedstawiono wpływ stopy wzrostu zmiennej niezależnej na kształtowanie się rozkładu opóźnienia wynikowego.

Celem niniejszego opracowania jest prezentacja analizy wybranych własności modeli opóźnienia rozłożonego w szczególności dotyczących przenoszenia wahań okresowych zmiennej niezależnej oraz własności granicznych.

### 1. Przenoszenie wahań okresowych

Model opóźnienia jest przedstawiany w dwóch alternatywnych postaciach. Pierwsza, najczęściej stosowana w modelach ekonometrycznych ma postać (Pesando (1972), Intriligator (1978), Dhrymes (1981)):

$$y_t = f(x_t, x_{t-1}, x_{t-2}, \dots; v_{t0}, v_{t1}, \dots; t) = \sum_{i=0}^{\infty} v_{ti} x_{t-i} + \varepsilon_t, \quad (1a)$$

podczas gdy druga ma postać (Hildreth, Houck (1968), Froelich (1973)):

$$y_t = f(x_t, x_{t-1}, x_{t-2}, \dots; v_{t0}, v_{t1}, \dots; t) = \sum_{i=0}^{\infty} v_{ti} x_{t-i}, \quad (1b)$$

gdzie:

- $t$  – zmienna przyjmująca wartości ze zbioru liczb całkowitych oznaczająca czas, numer okresu,
- $x_t$  – wartość zmiennej niezależnej w okresie  $t$ ,

$y_t$  – wartość zmiennej zależnej w okresie  $t$

$v_{it}$  – współczynniki opóźnienia spełniające warunki:  $0 \leq v_{it} < \infty, i = 0, 1, 2, \dots$ ;

$\varepsilon_t$  – składnik losowy, o wartości oczekiwanej równej zero i skończonej wariancji.

Analiza modeli opóźnienia, gdy zmienna niezależna jest funkcją okresową, ukazuje wiele ważnych własności.

Niech zmienna niezależna będzie sumą pewnej stałej  $x_0$  i funkcji okresowej rozwiniętej w szereg Fouriera, Fichtenholz (1963), Bronsztejn et al. (2004):

$$x_t = x_0 + \sum_{j=0}^{\infty} c_j \sin(j\omega t + \varphi_j), \quad (2)$$

gdzie:

$x_0$  – stała, liczba rzeczywista;

$c_j$  – stałe przyjmujące ograniczone wartości ze zbioru liczb rzeczywistych,  $j = 0, 1, 2, \dots$ ;

$\varphi_j$  – stałe przyjmujące ograniczone wartości ze zbioru liczb rzeczywistych,  $j = 0, 1, 2, \dots$ ;

$\omega$  – stała oznaczająca częstość podstawową, przy czym:

$$\omega = \frac{2\pi}{T},$$

gdzie stała  $T, 0 < T < \infty$ , oznacza okres wahań.

Występująca we wzorze (2) stała  $x_0$  ma na celu zapewnienie, w razie potrzeby, by zmienna zależna nie zmieniała znaku; rozwiązanie to jest przydatne, gdy przedmiotem rozważań jest między innymi rozkład opóźnienia wynikowego.

Analiza zostanie ograniczona do badania zależności zmiennej pomocniczej  $y'_t$  od zmiennej niezależnej  $x_t$  określonej za pomocą wzoru (1).

Podstawiając wzór (2) do wzoru (1) uzyskujemy:

$$\begin{aligned} y'_t &= \sum_{i=0}^{\infty} w_{it} \left\{ x_0 + \sum_{j=0}^{\infty} c_j \sin[j\omega(t-i) + \varphi_j] \right\} = \sum_{i=0}^{\infty} w_{it} x_0 + \sum_{i=0}^{\infty} w_{it} \sum_{j=0}^{\infty} c_j \sin[j\omega(t-i) + \varphi_j] \\ &= x_0 + \sum_{i=0}^{\infty} w_{it} \sum_{j=0}^{\infty} c_j \sin[j\omega(t-i) + \varphi_j] = x_0 + \sum_{j=0}^{\infty} c_j \sum_{i=0}^{\infty} w_{it} \sin[j\omega(t-i) + \varphi_j] \\ &= x_0 + \sum_{j=0}^{\infty} c_j \left[ \sum_{i=0}^{\infty} w_{it} \sin(j\omega t + \varphi_j) \cos(j\omega i) - \sum_{i=0}^{\infty} w_{it} \cos(j\omega t + \varphi_j) \sin(j\omega i) \right] \end{aligned}$$

$$=x_0 + \sum_{j=0}^{\infty} c_j \left[ \sin(j\omega t + \varphi_j) \sum_{i=0}^{\infty} w_{i,j} \cos(j\omega i) - \cos(j\omega t + \varphi_j) \sum_{i=0}^{\infty} w_{i,j} \sin(j\omega i) \right].$$

Przyjmując oznaczenia

$$R(j\omega) = \sqrt{\left[ \sum_{i=0}^{\infty} w_{i,j} \sin(j\omega i) \right]^2 + \left[ \sum_{i=0}^{\infty} w_{i,j} \cos(j\omega i) \right]^2}, \quad j=0, 1, 2, \dots; \quad (3)$$

$$\sin \psi_j = \frac{\sum_{i=0}^{\infty} w_{i,j} \sin(j\omega i)}{r_j}, \cos \psi_j = \frac{\sum_{i=0}^{\infty} w_{i,j} \cos(j\omega i)}{r_j}; \quad j=0, 1, 2, \dots;$$

$$\psi(j\omega) = \arctg \left( \frac{\sum_{i=0}^{\infty} w_{i,j} \sin(j\omega i)}{\sum_{i=0}^{\infty} w_{i,j} \cos(j\omega i)} \right); \quad (4)$$

powyższy wzór można przedstawić w postaci:

$$y_j = x_0 + \sum_{j=0}^{\infty} c_j R(j\omega) \sin[j\omega t + \varphi_j - \psi(j\omega)]. \quad (5)$$

Ponieważ współczynniki  $R(j\omega)$ ,  $j=0, 1, 2, \dots$ ; nazywane dalej współczynnikami tłumienia, spełniają warunek  $0 \leq R(j\omega) \leq 1$ , o zmiennej pomocniczej we wzorze (1.29) można powiedzieć, że jest również funkcją okresową, w której poszczególne częstotliwości mają w stosunku do zmiennej niezależnej zmniejszone amplitudy o czynnik  $R(j\omega)$  będący funkcją rozkładu opóźnienia  $W_i$  i częstotliwości  $j\omega$ . Ponadto dla poszczególnych częstotliwości występują przesunięcia fazy o wielkości  $\psi_j$ ,  $0 \leq \psi_j \leq \pi$ ,  $j=0, 1, 2, \dots$ ; będące również funkcjami rozkładu opóźnienia  $W_i$  i częstotliwości  $j\omega$ ,  $j=0, 1, 2, \dots$ .

Reasumując wnioski ze wzorów (3) i (4) można skonstatować, że mechanizm opóźnienia tłumি poszczególne częstotliwości z różną siłą (czynnik  $R_j$ ), oraz opóźnia każdą o  $\tau_j$  okresów:

$$\tau_j = \frac{\psi_j}{2\pi}, \quad j=0, 1, 2, \dots. \quad (6)$$

## 2 Podstawowe stałe struktury opóźnienia rozłożonego

W tej części tego rozdziału omówione zostaną podstawowe, spotykane w literaturze ekonomicznej stałe struktury/rozkłady opóźnienia rozłożonego w podziale na skończone i nieskończone.

Wyczerpujący przegląd rozkładów<sup>1</sup> można znaleźć na przykład w książce Johnson N. L., Kotz S., Kemp A. W. (1992)<sup>2</sup>.

## 2.1 Skończone struktury/rozkłady opóźnienia

### 2.1.1 Liniowa struktura opóźnienia

W liniowej strukturze opóźnienia rzędu  $n$  jej współczynniki są liniową funkcją numeru indeksu:

$$v_i = \begin{cases} 0 & , i < 0; \\ v_0 + \frac{v_n - v_0}{n} i, & i = 0, 1, 2, \dots, n; \\ 0 & , i > n \end{cases} \quad (7)$$

gdzie  $v_0$  i  $v_n$  stałe współczynniki oznaczające odpowiednio współczynnik pierwszy (o indeksie 0) i  $n$ -ty spełniające warunki:

$$v_0 \geq 0, \quad v_n > 0,$$

zapewniające nieujemność współczynników i zachowanie rzędu opóźnienia.

Mnożnik długookresowy liniowej struktury opóźnienia wyraża się wzorem:

$$a = (n+1) \frac{v_0 + v_n}{2}.$$

### Monotoniczny rozkład opóźnienia

Najczęściej spotykaną liniową strukturą opóźnienia jest struktura odpowiadająca monotonicznemu rozkładowi opóźnienia, tj. taka, w której współczynniki struktury opóźnienia:

$$v_0 = v_1 = \dots = v_n,$$

a więc współczynniki rozkładu opóźnienia są opisane w następujący sposób:

$$w_i = \frac{1}{n+1}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n.$$

<sup>1</sup> Ponieważ każdy rozkład prawdopodobieństwa jednej zmiennej określony dla nieujemnej dyskretnej zmiennej losowej może być rozkładem opóźnienia.

<sup>2</sup> Johnson N. L., Kotz S., Kemp A. W.; *Univariate Discrete Distributions*, III wydanie, John Wiley&Sons, INC. New York, Chichester, Brisbane, Toronto, Singapore; 1992.

Nietrudno zauważyć, że w modelu opóźnienia z monotonicznym rozkładem opóźnienia, zmienna pomocnicza  $y'_i$  jest zwykłą średnią arytmetyczną  $n+1$  wartości zmiennej niezależnej  $x_i, x_{i-1}, \dots, x_{i-n}$ .

Wartość średnia i wariancja rozkładu monotonicznego mają odpowiednio następujące wartości:

$$M(W) = \frac{n}{2},$$

$$D^2(W) = \frac{n(n+2)}{12} = M(W) \frac{(n+2)}{6}.$$

W modelu opóźnienia z wagami równomiernymi współczynniki  $R(j\omega, n)$  i  $\psi(j\omega, n)$  przyjmują następujące wartości:

$$R(j\omega, n) = \frac{1}{n+1} \sqrt{\frac{1 - \cos[(n+1) \cdot j\omega]}{1 - \cos(j\omega)}},$$

$$\psi(j\omega, n) = \frac{nj\omega}{2}.$$

#### Rozkład opóźnienia Fishera

Rozkład ten, Fisher (1937), jest odmianą liniowego rozkładu opóźnienia, w którym współczynniki maleją, przyjmując największą wartość dla indeksu  $i=0$ , najmniejszą niezerową dla  $i=n$ , oraz zerowe dla  $i=n+1, n+2, \dots$ . Celem Fishera było opracowanie prostego modelu, w którym waga przypisana obserwacji malałaby wraz z wiekiem tej obserwacji.

W strukturze opóźnienia Fishera:

$$v_i = \begin{cases} 0 & , i < 0; \\ v_0 \left( 1 - \frac{i}{n+1} \right) & , i = 0, 1, 2, \dots, n; \\ 0 & , i \geq n+1. \end{cases} \quad (8)$$

Podstawowe parametry rozkładu Fishera są następujące:

$$M(W) = \frac{n}{3},$$

$$D^2(W) = \frac{n(n+3)}{18} = M(W) \frac{(n+3)}{6}.$$

$$R(j\omega, n) = \frac{I}{(n+1)(n+2)\cos^2\left(\frac{j\omega}{2}\right)} \cdot \sqrt{\{(n+1)\cos(j\omega) + \cos[(n+1) \cdot j\omega] - (n+2)\}^2 + \{\sin[(n+1) \cdot j\omega] - (n+1)\sin(j\omega)\}^2}$$

oraz

$$\psi(j\omega, n) = \operatorname{arctg} \left\{ \frac{(n+1)\sin(j\omega) - \sin[(n+1)j\omega]}{(n+2) - (n+1)\cos(j\omega) - \cos[(n+1)j\omega]} \right\}$$

### 1.8.1.2 Model Almon

Struktura opóźnienia w modelu Almon rzędu  $n$ , Almon (1965), ma duże znaczenie w badaniach empirycznych ze względu na łatwość estymacji współczynników oraz elastyczność wyrażającą się dużym zróżnicowaniem kształtu wykresu współczynników struktury opóźnienia. Współczynniki struktury opóźnienia w modelu Almon rzędu  $n$  przedstawia poniższa formuła:

$$v_i = \begin{cases} 0, & i < 0; \\ \delta_0 + \delta_1 i + \delta_2 i^2 + \dots + \delta_l i^l, & i = 0, 1, 2, \dots, n; \\ 0, & i \geq n+1. \end{cases} \quad (9)$$

gdzie liczba naturalna  $l, l < n$ , oznacza stopień wielomianu. Wartości średnia i wariancja rozkładu opóźnienia oparte go na strukturze opóźnienia (1.49) zależą od stałych współczynników  $\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_l$ , których wartości są estymowane dla różnych wartości  $l$ .

Istotną własnością tego modelu jest możliwość przedstawienia go w postaci wygodnej w estymacji:

$$y_t = \delta_0 \left( \sum_{i=0}^l x_{t-i} \right) + \delta_1 \left( \sum_{i=1}^l i x_{t-i} \right) + \delta_2 \left( \sum_{i=1}^l i^2 x_{t-i} \right) + \dots + \delta_l \left( \sum_{i=1}^l i^l x_{t-i} \right) + \varepsilon_t.$$

Jak wskazano powyżej, każdy model opóźnienia rozłożonego można przedstawić jako sumę modeli opóźnienia o jednopunktowych strukturach opóźnienia. Przykładem złożenia modeli opóźnienia jest model rzędu  $n$  ( $n$  nieparzysta liczba naturalna,  $n > 1$ ) ze strukturą opóźnienia mającą kształt odwróconej litery V. DeLeeuw (1962), której współczynniki są opisane za pomocą poniższego wzoru:



$$v_i = \begin{cases} 0, & i < 0; \\ i\delta, & i \leq \frac{n+1}{2}; \\ (n+1-i)\delta, & \frac{n+1}{2} \leq i \leq n+1; \\ 0, & i \geq n+1; \end{cases} \quad (10)$$

gdzie współczynnik  $\delta$  jest skończoną liczbą dodatnią.

Podstawowe parametry rozkładu opóźnienia modelu DeLeeuwa są następujące:

$$M(W) = \frac{n+1}{2},$$

$$D^2(W) = \frac{(n-1)(n+3)}{24},$$

$$R(j\omega, n) = 4 \frac{\sin^2 \left[ \frac{1}{4}(n+1) \cdot j\omega \right]}{(n+1)^4 \cos^2 \left( \frac{j\omega}{2} \right)} \cdot \left\{ (n+1)^2 \cos \left[ \frac{1}{2}(n+1) \cdot j\omega \right] + 4 \frac{\sin^2 \left[ \frac{1}{4}(n+1) \cdot j\omega \right] \sin^2 \left[ \frac{1}{2}(n+1) \cdot j\omega \right]}{\cos^2 \left( \frac{j\omega}{2} \right)} \right\}$$

Oraz

$$\psi(j\omega, n) = \frac{1}{2}(n+1)j\omega.$$

Nietrudno zauważyć na podstawie wzoru (1.50), że dla indeksów  $0, 1, \dots, (n+1)/2$ , współczynniki struktury opóźnienia mogą być opisane za pomocą liniowej struktury opóźnienia (1.47) z dodatnim współczynnikiem kierunkowym, a dla indeksów  $1+(n+1)/2, \dots, (n+1)$ , również za pomocą liniowej struktury opóźnienia, ale z ujemnym współczynnikiem kierunkowym.

Model DeLeeuwa pokazuje, że pewne rozkłady opóźnienia można uzyskać przez odpowiednie połączenie innych rozkładów. Wiele modeli opóźnienia ma rozkłady, które są wynikiem złożenia różnych rozkładów opóźnienia operacjami sumowania oraz superpozycji. Operacje te są omawiane w Rozdziale II.

## 1.8.2 Nieskończone struktury opóźnienia

### 1.8.2.1 Rozkład Pascala-Solowa

Współczynniki rozkładu Pascala-Solowa, Solow (1960), są opisane wzorem:

$$w_i = \begin{cases} 0, & i < 0; \\ \binom{m-I+i}{i} \lambda^m (1-\lambda)^i, & i \geq 0; \end{cases} \quad (11)$$

gdzie  $m$ , liczba naturalna, oznacza tzw. stopień rozkładu Pascala (nazywany czasem rzędem, lecz termin ten wydaje się niefortunny ze względu na kolizję z pojęciem rzędu opóźnienia skończonego).

Wartości średnia i wariancja rozkładu Pascala wynoszą odpowiednio:

$$M(W) = m \frac{1-\lambda}{\lambda},$$
$$D^2(W) = m \frac{1-\lambda}{\lambda^2} = \frac{M(W)}{\lambda}.$$

W rozkładzie Pascala-Solowa współczynniki  $R(j\omega, m)$  i  $\psi(j\omega, m)$  przyjmują następujące wartości:

$$R(j\omega, m) = \lambda^m \sqrt{[1 - 2(1-\lambda)\cos(j\omega) + (1-\lambda)^2]^m},$$
$$\psi(j\omega, m) = \arctg \left\{ \frac{\sum_{i=1}^m \binom{m}{i} (-1)^i (1-\lambda)^i \sin(i \cdot j\omega)}{1 + \sum_{i=1}^m \binom{m}{i} (-1)^i (1-\lambda)^i \cos(i \cdot j\omega)} \right\}.$$

Szczególным przypadkiem rozkładu Pascala-Solowa jest rozkład stopnia  $m=1$ , noszący nazwę rozkładu geometrycznego, znany w literaturze ekonomicznej z modelu Koycka, Koyck (1954), modelu oczekiwań adaptacyjnych, Cagan (1956), czy modelu dostosowania cząstkowego, Nerlove (1958). Model opóźnienia z rozkładem geometrycznym został wykorzystany w Przykładach 1.3 i 1.4.

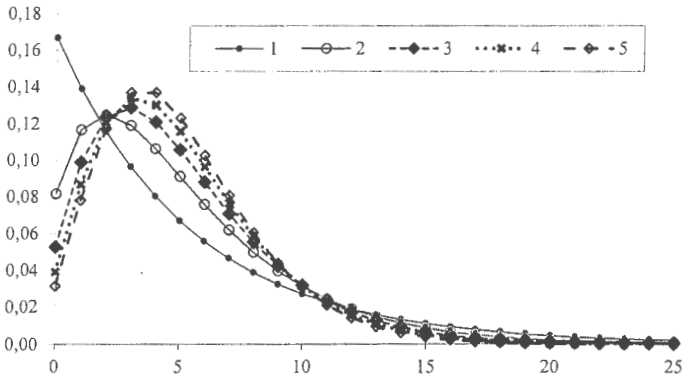
Dla  $m=1$  powyższe wzory upraszczają się:

$$M(W) = \frac{1-\lambda}{\lambda},$$
$$D^2(W) = \frac{1-\lambda}{\lambda^2} = \frac{M(W)}{\lambda},$$

$$R(j\omega, \lambda) = \frac{\lambda}{\sqrt{[1 - 2(1 - \lambda)\cos(j\omega) + (1 - \lambda)^2]}}$$

$$\psi(j\omega, \lambda) = \arctg \left[ \frac{(1 - \lambda)\sin(j\omega)}{1 - (1 - \lambda)\cos(j\omega)} \right]$$

Wykresy współczynników rozkładu Pascala-Solowa przy różnych wartościach stopnia  $m$  zostały przedstawione na rys. 1.4.



rys. 1 Rozkłady Pascala-Solowa o tej samej wartości średniej równej  $M(W) = 5$  przy wartościach parametru  $m$  równych odpowiednio: 1, 2, 3, 4, 5.

Model oczekiwań adaptacyjnych, Nerlove (1958), opisuje zachowanie podejmujących decyzję o wielkości zmiennej zależnej  $y_t$  na podstawie porównania z ustaloną na okres  $t$  wielkością pożądaną  $x_t$  tej zmiennej zgodnie ze wzorem:

$$y_t - y_{t-1} = \lambda \cdot (x_t - y_{t-1}),$$

gdzie  $\lambda$  to współczynnik,  $\lambda \in [0, 1]$ , nazywany współczynnikiem dostosowania (*adjustment coefficient*). Nietrudno zauważyć, że dla  $\lambda = 0$  zmienna  $y_t$  przyjmuje wartość z poprzedzającego okresu bez względu na wartość pożądaną tej zmiennej, a dla  $\lambda = 1$  nie ma opóźnienia w dostosowaniu zmiennej  $y_t$  do jej wartości pożądaney  $x_t$ . Dla pozostałych wartości parametru  $\lambda$  z przedziału  $[0, 1]$  rozwiązanie powyższego równania ma następującą postać:

$$y_t = \lambda \cdot \sum_{i=0}^{t-1} (1 - \lambda)^i x_{t-i},$$

a więc modelu opóźnienia rozłożonego z geometrycznym (Pascala-Solowa stopnia  $m=1$ ) rozkładem opóźnienia. Istotną własnością tego modelu jest stała,  $a=1$ , wartość mnożnika długookresowego.

Model oczekiwań adaptacyjnych, Cagan (1956), opisuje proces prostego przewidywania, w którym oczekiwana w okresie  $t$  wartość  $y_t$  zmiennej  $x_t$  jest ustalana przy uwzględnieniu odchylenia w okresie  $t-1$  wartości zmiennej  $x_{t-1}$  od jej przewidywanej w okresie  $t-2$  wartości  $y_{t-1}$ :

$$y_t - y_{t-1} = \lambda \cdot (x_{t-1} - y_{t-1}).$$

Model oczekiwań adaptacyjnych jest również modelem opóźnienia rozłożonego z geometrycznym rozkładem opóźnienia przesuniętym w prawo o jednostkę. Oznacza to złożenie, co pełniej zostanie omówione w Rozdziale II, dwóch modeli opóźnienia: z rozkładem geometrycznym i jednopunktowym (prostym) opóźnieniem o jeden okres.

#### 1.8.2.2 Model Tsurumi

W artykule Tsurumi (1971) autor zaproponował użycie struktury opóźnienia opartej na zmodyfikowanym ciągłym rozkładzie gamma:

$$v_i = \begin{cases} 0 & , \quad i < 0; \\ \delta(i+1)^{m-1} e^{-\lambda i} & , \quad i \geq 0, \end{cases} \quad (12)$$

gdzie:  $m$  – stopień rozkładu,  $\delta$  – dodatnia stała,  $\lambda$  - stała,  $0 < \lambda < 1$ .

Wykres struktury opóźnienia, której współczynniki są opisane za pomocą zależności (1.52) jest bardzo podobny do rozkładu Pascala-Solowa. Podobne zastosowanie zmodyfikowanego rozkładu gamma zaproponował Schmidt (1974).

#### 1.8.2.3 Model Jorgensena

Model Jorgensena, Jorgensen (1966), jest wśród nieskończonych modeli opóźnienia tym, czym model Almon wśród modeli skończonych i znajduje zastosowanie w badaniach empirycznych, gdy rozkład opóźnienia nie jest znany. Model ten ma następującą postać:

$$y_t = \frac{A(L)}{B(L)} x_t + e_t, \quad (13)$$

gdzie  $L$  – operator przesunięcia,  $A(L)$  i  $B(L)$  omówione w Rozdziale II operatory wielomianowe względem operatora przesunięcia  $L$ ,  $e_t$  - składnik losowy.

(Wielomian operatorowy  $C(L)$  zbudowany na współczynnikach  $c_0, c_1, c_2, \dots, c_{m_1}$  ma postać  $C(L) = c_0 + c_1L + c_2L^2 + \dots + c_{m_1}L^{m_1}$  oraz ma następujące działanie:

$$C(L)x_t = (c_0 + c_1L + c_2L^2 + \dots + c_{m_1}L^{m_1})x_t = c_0x_t + c_1x_{t-1} + c_2x_{t-2} + \dots + c_{m_1}x_{t-m_1}$$

Zależność (1.53) jest postacią zredukowaną modelu:

$$B(L)y_t = A(L)x_t + \varepsilon_t,$$

przy czym

$$e_t = \frac{1}{B(L)}\varepsilon_t,$$

gdzie to  $\varepsilon_t$  nieskorelowany składnik losowy o zerowej wartości oczekiwanej, stałej i ograniczonej wariancji. Powyższy wzór wyjaśnia autogresję składnika losowego  $e_t$  w przypadku, gdy  $B(L) \neq I$ .

Model Jorgensena jest stosowany między innymi w modelach ekonometrycznych typu ADL (*Autoregressive Distributed Lag*), Hendry, Pagan, Sargan (1984), o postaci:

$$y_t = \gamma + \alpha_1 y_{t-1} + \alpha_2 y_{t-2} + \dots + \alpha_{m_1} y_{t-m_1} + \beta_0 x_t + \beta_1 x_{t-1} + \beta_2 x_{t-2} + \dots + \beta_{m_2} x_{t-m_2} + \varepsilon_t,$$

Lub

$$y_t = \frac{\beta_0 + \beta_1 L + \beta_2 L^2 + \dots + \beta_{m_2} L^{m_2}}{1 - (\alpha_1 L + \alpha_2 L^2 + \dots + \alpha_{m_1} L^{m_1})} x_t + \gamma + \frac{1}{1 - (\alpha_1 L + \alpha_2 L^2 + \dots + \alpha_{m_1} L^{m_1})} \varepsilon_t$$

gdzie  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m_1}$ ,  $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{m_2}$  i  $\gamma$  współczynniki, oraz  $m_1$  i  $m_2$  odpowiednio stopnie operatorów wielomianowych  $A(L)$  i  $B(L)$ .

Znaczącą rolę w modelowaniu ekonometrycznym mają tzw. modele korekty błędem (*Error Correction Models*) opisujące mechanizm decyzyjny, w którym decyzje o zmianie wartości zmiennej zależnej zależą nie tylko, jak to ma miejsce w omówionym wyżej modelu dostosowania adaptacyjnego, od służącej za odniesienie wartości zmiennej niezależnej, lecz również od bieżącego odchylenia zmiennej zależnej od zmiennej niezależnej:

$$y_t = \gamma + \beta_1 y_{t-1} + \alpha_0 x_t + \alpha_1 x_{t-1} + \varepsilon_t,$$

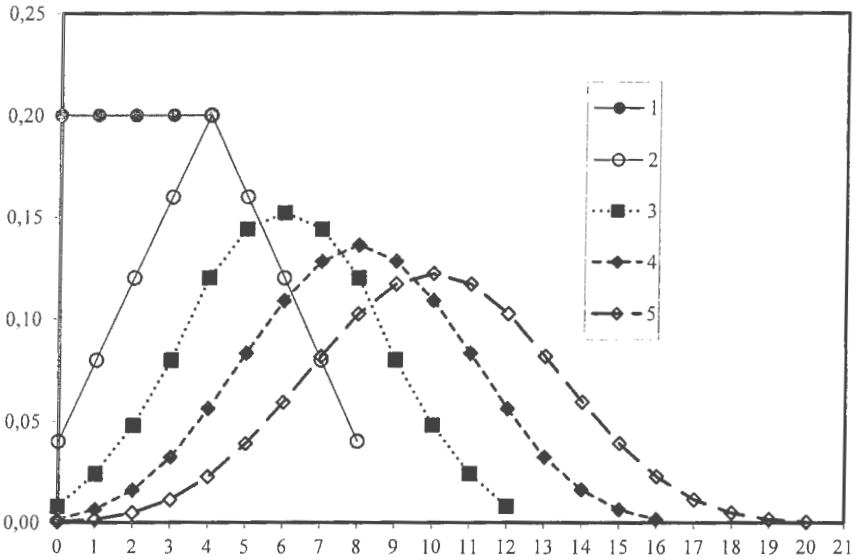
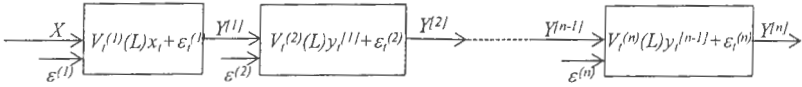
lub, po zróżnicowaniu,

$$\Delta y_t = \gamma + (\beta_1 - 1)y_{t-1} + \alpha_0 \Delta x_t + (\alpha_0 + \alpha_1)x_{t-1} + \varepsilon_t,$$

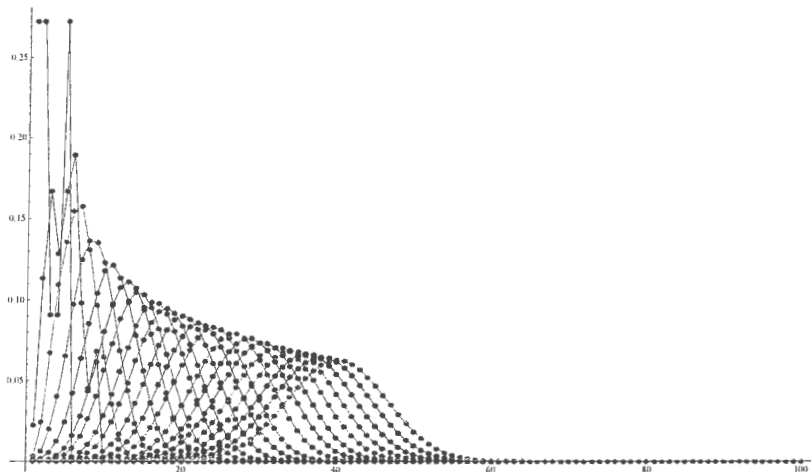
przy warunku, że w długim okresie w równowadze zachodzi zależność:

$$y^* = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1} + \frac{\beta_0 + \beta_1}{1 - \alpha_1} x^*.$$

Wybrane własności graniczne superpozycji modeli opóźnienia rozłożonego



rys. 2. Superpozycja modeli opóźnienia o rozkładach monotonicznych: 1- pojedynczy model oraz modele superpozycji odpowiednio: 2-dwóch, 3- trzech, 4- czterech i 5- pięciu modeli.



rys. Superpozycja rosnącej liczby modeli opóźnienia o rozkładach losowych.

Gadomski J., Nowak P., Deterministic properties of superposition of the distributed lag models, (do Operations Research and Decisions, w druku)

### Zależność wartości średniej rozkładu opóźnienia wynikowego $M(U)$ od stopy wzrostu

Twierdzenie 2. O zależności średniej rozkładu opóźnienia wynikowego  $M(U)$  od stopy wzrostu  $r$  zmiennej niezależnej.

Założenia Rozważany jest model opóźnienia rozłożonego, którego rozkład wynikowy opóźnienia ma określoną wartość średnią i wariancję oraz w którym wartości zmiennej niezależnej wzrastają ze stałą stopą wzrostu  $r$ .

Teza Wartość średnia rozkładu opóźnienia wynikowego  $M(U)$  jest malejącą funkcją stopy wzrostu  $r$  zmiennej niezależnej.

Dowód Dowiedzenie tego twierdzenia opiera się na badaniu pochodnej:

$$\frac{dM(U_t)}{dr} = \frac{d \left[ \frac{\sum_{i=0}^{\infty} i v_{i,t} x_i (I+r)^{-i}}{\sum_{i=0}^{\infty} v_{i,t} x_i (I+r)^{-i}} \right]}{dr} = \frac{d \left[ \frac{\sum_{i=0}^{\infty} i v_{i,t} (I+r)^{-i}}{\sum_{i=0}^{\infty} v_{i,t} (I+r)^{-i}} \right]}{dr}. \quad (14)$$

Mając na uwadze, że współczynniki rozkładu opóźnienia  $W_i$  nie zależą od stopy wzrostu  $r$  zmiennej niezależnej, przez różniczkowanie można uzyskać zależność:

$$\begin{aligned} \frac{dM(U_t)}{dr} &= \frac{\sum_{i=1}^{\infty} -i^2 v_{it} (1+r)^{-i} \frac{1}{1+r} \sum_{i=1}^{\infty} v_{it} (1+r)^{-i} - \sum_{i=1}^{\infty} i v_{it} (1+r)^{-i} \sum_{i=1}^{\infty} (-i) v_{it} (1+r)^{-i} \frac{1}{1+r}}{\left[ \sum_{i=0}^{\infty} v_{it} (1+r)^{-i} \right]^2} \\ &= \frac{1}{1+r} \frac{\left[ \sum_{i=1}^{\infty} i v_{it} (1+r)^{-i} \right]^2 - \sum_{i=1}^{\infty} v_{it} (1+r)^{-i} \sum_{i=1}^{\infty} i^2 v_{it} (1+r)^{-i}}{\left[ \sum_{i=1}^{\infty} i v_{it} (1+r)^{-i} \right]^2} = \frac{1}{1+r} \left[ \left( \sum_{i=1}^{\infty} i u_{it} \right)^2 - \sum_{i=1}^{\infty} i^2 u_{it} \right] \end{aligned}$$

Ponieważ:

$$D^2(U_t) = \sum_{i=1}^{\infty} i^2 u_{it} - M^2(U_t)$$

oraz

$$M(U_t) = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} i v_{it} (1+r)^{-i}}{\sum_{i=0}^{\infty} v_{it} (1+r)^{-i}},$$

zatem

$$\frac{dM(U_t)}{dr} = -\frac{D^2(U_t)}{1+r} \quad (15)$$

Z zależności (15) wynika, że wartość średniej wynikowego rozkładu opóźnienia  $M(U)$  maleje wraz ze wzrostem stopy wzrostu  $r$ .

### Zbieżność a stopa wzrostu

Twierdzenie 3. O zbieżności rozkładu opóźnienia wynikowego do rozkładu jednopunktowego, gdy stopa wzrostu  $r$  zmiennej niezależnej rośnie do nieskończoności.

Założenia Rozważany jest model opóźnienia rozłożonego, o określonych podstawowych parametrach rozkładu opóźnienia, w którym wartości zmiennej niezależnej wzrastają ze stałą stopą wzrostu  $r$ .



Teza Gdy stopa wzrostu  $r$  zmiennej niezależnej  $x$  rośnie do nieskończoności, rozkład opóźnienia wynikowego dąży do rozkładu jednopunktowego (opóźnienia prostego) o wartości średniej rozkładu opóźnienia wynikowego równej najmniejszej wartości indeksu znaczącego  $i_d$ , a wariancja rozkładu opóźnienia wynikowego dąży do zera.

Dowód Rozważany jest model opóźnienia:

$$y_i = \sum_{t=0}^{\infty} v_{t,i} x_{t-i} = v_{i,i_d} x_{t-i_d} + v_{i,i_d+1} x_{t-i_d+1} + \dots,$$

który można przedstawić w następującej postaci:

$$y_i = \sum_{t=0}^{\infty} v_{t,i} x_{t-i} = \sum_{t=i_d}^{\infty} v_{t,i} x_{t-i_d} (1+r)^{-(t-i_d)} = x_{t-i_d} \sum_{t=i_d}^{\infty} v_{t,i} (1+r)^{-(t-i_d)},$$

ponieważ:

$$x_{t-i} = x_{t-i_d} (1+r)^{-(t-i_d)}, \quad i = i_d, i_d + 1, i_d + 2, \dots$$

Wartość zmiennej zależnej spełnia nierówność:

$$v_{i,i_d} x_{t-i_d} \leq y_i = x_{t-i_d} \sum_{t=i_d}^{\infty} v_{t,i} (1+r)^{-(t-i_d)} = x_{t-i_d} v_{i,i_d} + x_{t-i_d} \sum_{t=i_d+1}^{\infty} v_{t,i} (1+r)^{-(t-i_d)}.$$

Z uwagi na to, że wszystkie wartości współczynników opóźnienia  $v_{t,i}$ ,  $0 \leq v_{t,i} \leq 1$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$ :

$$v_{i,i_d} x_{t-i_d} + x_{t-i_d} \sum_{t=i_d+1}^{\infty} v_{t,i} (1+r)^{-(t-i_d)} \leq x_{t-i_d} v_{i,i_d} + x_{t-i_d} \sum_{t=i_d}^{\infty} (1+r)^{-t},$$

i ostatecznie:

$$v_{i,i_d} x_{t-i_d} \leq y_i \leq x_{t-i_d} \left( v_{i,i_d} + \frac{1}{r} \right), \quad (16)$$

ponieważ:

$$\sum_{t=i_d}^{\infty} (1+r)^{-t} = \frac{1}{r}.$$

Przechodząc do granicy przy  $r$  dążącym do nieskończoności, prawa strona nierówności (16) dąży do opóźnienia prostego:

$$v_{t,i_d} x_{t-i_d}$$

o wartości średniej rozkładu wynikowego opóźnienia równym parametrowi  $i_d$  i zerowej wariancji.

#### Bibliografia

- Almon S. (1965): "The Distributed Lag Between Capital Appropriations and Expenditures", *Econometrica*, 33.
- Bronsztejn I. N., Siemiendajew, K. A., Musiol G., Muhlig H. (2004): *Nowoczesne kompendium matematyki*, PWN.
- Cagan P., "The Monetary dynamics of Hyper Inflations", w Friedmann, (red.): *Studies in the Quantity Theory of Money*", University of Chicago Press, 1956.
- Dahl C. M., Kulaksizoglu T. (2005): *Nonlinear Modeling of Changing Lag Structure in U.S. Housing Construction*, Purdue University, April.
- DeLeeuw Frank (1962), *The Demand for Capital Goods by Manufacturers: A Study of Quarterly Time Series*, *Econometrica*.
- Dhrymes P. J. (1981): *Distributed Lags. Problems of Estimation and Formulation*, 2<sup>nd</sup> edition. North Holland Publishing Company, Amsterdam, New York, Oxford.
- Fichtenholz G. M. (1963): *Rachunek różniczkowy i całkowity*, tom III, PWN, Warszawa.
- Fisher, Irving. (1937): Note on a Short-Cut Method for Calculating Distributed Lags, *International Statistical Institute Bulletin*, str. 323-327.
- Gadomski J. (1986): *Modele opóźnienia rozłożonego ze zmiennymi współczynnikami opóźnienia*, Prace IBS PAN, Polska Akademia Nauk, Instytut Badań Systemowych, Warszawa.
- Gadomski J., Klukowski L.: *Właściwości opóźnień rozłożonych o parametrach zmiennych w czasie*, *Ekonomia*, Nr 52, wyd.: Wydawnictwa Uniwersytetu Warszawskiego, Warszawa 1988, ISSN 0137-3056
- Griliches Z. (1967): *Distributed Lags, A Survey*, *Econometrica*, No 35, January.
- Hendry, D. F., Pagan A. R., Sargan J.D.: *Handbook of Econometrics*, Rozdział 18, *Dynamic Specification*, w: Vol. II, Griliches Z., Intriligator M. D. (red.). Elsevier Science Publishers BV, 1984.
- Intriligator M. D. (1978): *Econometric Models, Techniques and Applications*, North\_Holland Publishing Company, Amsterdam, Oxford.
- Johnson Norman L., Kotz Samuel, Kemp Adrienne W.; *Univariate Discrete Distributions*, III wydanie, John Wiley&Sons, INC. New York, Chichester, Brisbane, Toronto, Singapore. 2008.

- Jorgensen, D. W. (1966): „Rational Distributed Lag Function”, *Econometrica*, 34.
- Kenkel, J. L. (1974): *Dynamic Linear Economic Models*, Gordon and Breach Science Publishers, New York, London, Paris.
- Klein L. R. (1950): *Economic Fluctuation in the United States, 1921-1941*. The Cowles Commission Monograph No.11, New York, John Wiley & Sons, Inc.
- Koyck, L. M. (1954): *Distributed Lags and Investment Analysis*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam.
- Maddala G. S. (1977): *Econometrics*, McGraw-Hill Book Company, New York.
- Otto W. (1985): „Wahania długości opóźnień inwestycyjnych. Próba pomiaru i wyjaśnienia”, rozprawa doktorska, Wydział Nauk Ekonomicznych, Uniwersytet Warszawski.
- Nerlove M. (1958): *Distributed Lags and Demand Analysis For agricultural and Other Commodities*, U. S. Department of Agriculture, Washington D. C.
- Pesando, J. S. (1972): Seasonal Variability in Distributed Lag Models, *Journal of the American Statistical Association*, June.
- Pindyck R. S., Rubinfeld D. L. (1998): *Econometric Models and Econometric Forecasts*, Forth Edition, Irwin/McGraw-Hill, Boston Massachusetts.
- Schmidt P. (1974): An Argument for the usefulness of the gamma Distributed Lag Model, *International Economic Review*, February.
- Solow R. M. (1960): On a Family of Lag Distributions, *Econometrica*, April.
- Tinbergen J. (1959): On the Theory of Trend Movements, w: *Jan Tinbergen Selected Papers*, Amsterdam.









