

158/2001

A09/1

Raport Badawczy

RB/80/2001

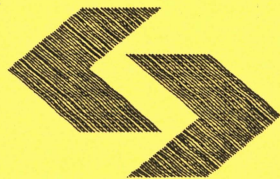
Research Report

**Badania operacyjne
w transporcie lotniczym**

B. Maźbic-Kulma

**Instytut Badań Systemowych
Polska Akademia Nauk**

**Systems Research Institute
Polish Academy of Sciences**



POLSKA AKADEMIA NAUK

Instytut Badań Systemowych

ul. Newelska 6

01-447 Warszawa

tel.: (+48) (22) 8373578

fax: (+48) (22) 8372772

Pracę zgłosił: prof. dr hab. Andrzej Straszak

Warszawa 2001

**BADANIA OPERACYJNE
W TRANSPORCIE LOTNICZYM**

STRESZCZENIE

Zmiany na rynku przewozów lotniczych spowodowane procesem deregulacji, zaostrzyły walkę konkurencyjną pomiędzy przewoźnikami i zaowocowały gwałtownym rozwojem systemów wspomagania decyzji na każdym szczeblu zarządzania. W przemyśle przewozów lotniczych poszukiwania nowych, skutecznych sposobów zarządzania poszły w dwóch kierunkach:

1. udoskonalenia metod marketingu,
2. stworzenia zintegrowanego systemu sterowania procesem eksploatacji.

W pierwszym przypadku postawiono na rozwój komputerowych systemów rezerwacji i sprzedaży biletów

W drugim przypadku, na podstawie doświadczeń z użytkowania systemów wspomagania decyzji eksploatacyjnych o ściśle ograniczonym zasięgu postanowiono stworzyć spójny system optymalizowania decyzji uwzględniający w możliwie dużym stopniu całą złożoność sfery eksploatacji.

Produktem który oferuje przewoźnik lotniczy jest „usługa przewozowa”.

Usługa przewozowa jest oceniana przez potencjalnego pasażera nie tylko z punktu widzenia obsługi w samolocie ale z punktu widzenia całości podróży na co składają się następujące elementy:

- renowa przewoźnika jako bezpiecznej linii lotniczej,
- łatwość uzyskania informacji o warunkach podróży /cena, rozkład, rodzaj samolotu, dostępność miejsc/,
- łatwość zakupu biletu,
- atrakcyjność oferty przewozu, cena, warunki podróży,
- oferowany rozkład lotów /dogodność połączeń/,
- opinia o punktualności przewoźnika,
- komfort podróży /oferowany serwis na pokładzie samolotu/,
- opinia o warunkach obsługi przed i po locie /warunki odprawy przed lotem, łatwość odbioru bagażu w porcie docelowym, itp./.

Tak więc w planowanej na rok 2002 książce zostaną przedstawione te wybrane metody badań operacyjnych które mogą być pomocne w rozwiązywaniu konkretnych zadań, które to powinny przyczynić się do podniesienia sprawności funkcjonowania transportu lotniczego. I tak w kolejności omówimy następujące zagadnienia badań operacyjnych :

- szeregowanie zadań,
- lokalizacja obiektów,
- wyznaczanie dróg ekstremalnych,.
- zagadnienie przydziału.

Dla każdego z przedstawionych powyżej zagadnień przedstawimy konkretne przykłady modeli wspomagających planowanie ruchu lotniczego. Przygotowane w roku 2001 opracowanie zawiera pierwszą część przygotowanej publikacji. Omówiono w nim:

- **Zagadnienie szeregowania zadań.**

W rozdziale tym przedstawiono ogólne sformułowanie tego problemu, klasyfikację takich zadań a także najważniejsze metody rozwiązywania tych zagadnień. Przedstawiono także dwa przykłady takich zadań ściśle związane z transportem lotniczym:

Zagadnienie formowania strumienia samolotów lądujących

Zagadnienie planowania obsługi technicznych i lotów samolotów

Pierwszy z przedstawionych przykładów jest rutynowym działaniem kontrolerów ruchu lotniczego. Jest ono rozwiązywane przy wykorzystaniu wiedzy i doświadczenia kontrolerów bez analizy optymalności podjętych działań. Przedstawiona w opracowaniu metoda polega na formowaniu samolotów w szeregi z określonym czasem separacji czasowej pomiędzy nimi.. Zaproponowane podejście pozwala na wyznaczenie optymalnej kolejności lądowań.

Drugi z ww. przykładów został zdekomponowany na dwa podzadania. Pierwsze z nich polega na określeniu zbioru rozwiązań dopuszczalnych ze względu na terminy dokonania remontów (badanie niesprzeczności ograniczeń). Drugie to harmonogramowanie wykonywania lotów przy uwzględnieniu warunków gwarantujących rozłączność terminów wykonywania przeglądów technicznych.

- **Zagadnienie lokalizacji obiektów.**

W rozdziale tym przedstawiono również ogólne sformułowanie tego problemu, klasyfikację takich zadań a także najważniejsze metody rozwiązywania tych zagadnień. Przedstawiono także dwa przykłady takich zadań ściśle związane z transportem lotniczym:

Zagadnienie lokalizacji hydrantów na lotnisku

Zagadnienie lokalizacji pomocy nawigacyjnych

Każde z ww. zadań należy do klasy zadań lokalizacyjnych dla których odbiorcą nie jest punkt a pewien obszar co pozwala te zadania zapisać jako zadania pokrycia.

1. Wstęp.....	4
1.1 Funkcjonowanie współczesnego przedsiębiorstwa transportu lotniczego w warunkach gospodarki rynkowej.....	5
2. Szeregowanie zadań	10
2.1 Klasyfikacja problemów szeregowania	10
2.2 Sformułowanie ogólnego problemu szeregowania	12
2.3 Szeregowanie sieciowe	14
2.4 Przepływy i ogólne zagadnienie kolejnościowe.....	15
3. Metody rozwiązywania problemów szeregowania.....	16
3.1 Wprowadzenie.....	16
3.2 Metody przeglądu pośredniego.....	17
3.3 Metoda Johnsona.....	17
3.4 Metody przybliżone	18
3.5 Metody heurystyczne	18
3.6 Metoda przeszukiwania sąsiedztwa	22
4. Przykłady zastosowań zadania szeregowania	24
4.1 Zagadnienie formowania strumienia samolotów lądujących.....	24
4.2 Zagadnienie planowania obsługi technicznych – lotów samolotów.....	33
5. Zadanie lokalizacji obiektów.....	45
5.1 Sformułowanie zadania lokalizacji	45
5.2 Klasyfikacja zadań lokalizacyjnych	47
6. Metody rozwiązywania zagadnień lokalizacyjnych.....	53
6.1 Wprowadzenie.....	53
6.2 Metody pokrycia	54
6.3 Metody redukcji	64

7. Przykłady zastosowań zadania lokalizacji.....	68
7.1 Lokalizacja hydrantów na lotnisku	68
7.2 Lokalizacja pomocy nawigacyjnych.....	73

1. Wstęp

Teoria systemów to nauka zajmująca się badaniem ogólnych praw rządzących dowolnymi złożonymi układami stanowiącymi funkcjonowanie całości. Prace w tej dziedzinie zostały zapoczątkowane 1928 roku przez austriackiego biologa i filozofa L.von Bertalanffy'ego []. Ogólna teoria systemów powiązana jest ściśle z cybernetyką i teorią informacji. Pierwsze matematyczne (aksjomatyczne) sformułowanie ogólnej teorii systemów podali Mesarović i Eckman [], [].

W teorii systemów szczególną uwagę zwraca się na określenie celu działania systemu. Jeżeli takim celem jest przemieszczanie ładunków lub (i) osób w przestrzeni i w czasie to taki system nazywamy dalej nazywaliśmy systemem transportowym.

Jak ogólnie wiadomo [] [] system transportowy jest zdefiniowany trzema zasadniczymi wielkościami:

- zadaniem - potrzebą przemieszczania obiektów (ładunków lub (i) osób)
- składem - rodzajem i liczbą elementów określających wyposażenie i załogę systemu,
- organizacją - sposobem oddziaływania elementów systemu podczas realizacji zadania.

Systemem przewozowym nazwiemy system transportowy, który realizuje zadanie przemieszczania obiektów.. Zadania przewozowe określają potrzeby klientów systemu. Są one z kolei scharakteryzowane poprzez następujące wielkości:

- rodzaj i ilość obiektów jaką należy przewieźć
- trasę przewożonych obiektów,
- termin przewożenia.

W literaturze przedmiotu istnieje wiele klasyfikacji systemów transportowych.

I tak np.:

- ze względu na rodzaj przewożonych obiektów (transport towarowy, osobowy),
- ze względu na ilość przewożonych obiektów (transport regularny, sporadyczny)
- ze względu na trasę przewożonych obiektów (transport wewnątrzzakładowy, miejski, międzymiastowy, międzynarodowy)
- ze względu na rodzaj drogi (transport kolejowy, drogowy, lotniczy, morski).

Teoria systemów transportowych [] nie zajmuje się bezpośrednio badaniem zjawisk fizycznych, lecz badaniem modeli tych zjawisk. Model systemu transportowego [] powinien być tak skonstruowany aby mógł zastąpić rzeczywisty system będąc jednocześnie narzędziem umożliwiającym rozwiązanie konkretnego zadania transportowego.

W niniejszej pracy tymi konkretnymi rozwiązywanymi zadaniami będą zagadnienia związane z transportem lotniczym. Transport lotniczy to nie tylko samoloty, ale całe zaplecze dbające o bezpieczną i sprawną obsługę samolotów na ziemi i przestrzeni powietrznej. Duże zalety transportu lotniczego, tj. ekonomiczność, czas przelotu, niezależność od ukształtowania terenu powodują, że tempo rozwoju tej gałęzi transportu jest wysokie. W ciągu stosunkowo krótkiego okresu czasu linie lotnicze objęły swoim zasięgiem cały świat, a sieć połączeń i natężenie przewozów wzrasta z każdym rokiem. Bezpieczeństwo i płynność ruchu lotniczego zależy nie tylko od konstrukcji samolotów, wykszolenia załóg, ale także od układu sieci dróg lotniczych, wyposażenia technicznego portów lotniczych i optymalnej organizacji pracy personelu naziemnego.

1.1 Funkcjonowanie współczesnego przedsiębiorstwa transportu lotniczego w warunkach gospodarki rynkowej.

Zmiany na rynku przewozów lotniczych spowodowane procesem deregulacji, zaostryły walkę konkurencyjną pomiędzy przewoźnikami i zaowocowały gwałtownym rozwojem systemów wspomagania decyzji na każdym szczeblu zarządzania. W przemyśle przewozów lotniczych poszukiwania nowych, skutecznych sposobów zarządzania poszły w dwóch kierunkach:

1. udoskonalenia metod marketingu,
2. stworzenia zintegrowanego systemu sterowania procesem eksploatacji.

W pierwszym przypadku postawiono na rozwój komputerowych systemów rezerwacji i sprzedaży biletów oraz systemowo zintegrowanych z nimi systemów tzw. "yield management", czyli systemów parametryzacji polityki rezerwacyjnej, w celu maksymalizacji wpływów.

W drugim przypadku, na podstawie doświadczeń z użytkowania systemów wspomagania decyzji eksploatacyjnych o ściśle ograniczonym zasięgu postanowiono stworzyć spójny system optymalizowania decyzji uwzględniający w możliwie dużym stopniu całą złożoność sfery eksploatacji.

Wydaje się bardzo istotne określenie wzajemnych relacji pomiędzy sferą "komercyjną" a eksploatacyjną w przemyśle przewozów lotniczych. Jest rzeczą oczywistą, że

w gospodarce rynkowej podstawowym kryterium oceny działalności jest zdolność do wytworzenia zysku, czyli nadwyżki wpływów nad kosztami. Dlatego też w przemyśle przewozów lotniczych, kluczowe stanowiska w zarządzie należą tradycyjnie do specjalistów od sprzedaży. Na podstawie ich znajomości rynku, podejmowane są inne decyzje, w tym decyzje eksploatacyjne.

Z biegiem lat wytworzyła się tradycyjna struktura hierarchiczna w sferze zarządzania, w której specjaliści rynkowi mają decydujący wpływ na sferę eksploatacyjną, tłumacząc to koniecznością posiadania wpływu na kształt "produktu", który oferują na rynku.

Produktem który oferuje przewoźnik lotniczy jest „usługa przewozowa”.

Zgodnie ze współczesnymi poglądami na ten temat usługa przewozowa jest oceniana przez potencjalnego pasażera nie tylko z punktu widzenia obsługi w samolocie ale z punktu widzenia całości podróży na co składają się następujące elementy:

- renowa przewoźnika jako bezpiecznej linii lotniczej,
- łatwość uzyskania informacji o warunkach podróży /cena, rozkład, rodzaj samolotu, dostępność miejsc/,
- łatwość zakupu biletu,
- atrakcyjność oferty przewozu, cena versus warunki podróży,
- oferowany rozkład lotów /dogodność połączeń/,
- opinia o punktualności przewoźnika,
- komfort podróży /oferowany serwis na pokładzie samolotu/,
- opinia o warunkach obsługi przed i po locie /warunki odprawy przed lotem, łatwość odbioru bagażu w porcie docelowym, itp./.

Wymienione elementy oceny oferty przewozu są w istocie oceną dwóch systemów:

1. systemu rezerwacji i sprzedaży,
2. systemu eksploatacji.

Atrakcyjność oferty przewozu zależy od sprawności wymienionych podsystemów. Oferta przewozowa winna być realizowana według koncepcji marketingowej opracowanej przez specjalistów rynkowych. Jednakże możliwość zrealizowania oferty przewozowej zależy od tego czy przewoźnik panuje nad systemem eksploatacji, lub inaczej czy system eksploatacji jest sterowalny.

Sterowalność [] systemu to zdolność do utrzymania parametrów systemu w założonych granicach. Jako przykład najprostszego parametru systemu eksploatacji może służyć punktualność operacji. Zagadnienie sterowalności systemu eksploatacji stało się

zagadnieniem najwyższej wagi wobec coraz trudniejszych i bardziej złożonych warunków realizacji przewozów.

Można wymienić następujące czynniki decydujące o znaczeniu sterowalności:

- możliwość pełnej realizacji koncepcji marketingowej w sferze „produktu”,
- możliwość utrzymania kosztów operacyjnych w założonych granicach,
- możliwość minimalizowania kosztów zakłóceń,
- możliwość elastycznego reagowania na zmiany popytu na przewozy,
- możliwość aktywnego współdziałania w procesie formułowania założeń koncepcji "produktu",
- możliwość kontroli wykonalności założeń rozkładu.

Sterowalność systemem eksploatacji jest jednym z podstawowych narzędzi realizacji koncepcji strategicznej wszystkich czołowych przewoźników, a szczególnie przewoźników amerykańskich. Najlepszym przykładem może być strategia amerykańskiego przewoźnika American Airlines /AA/. Według koncepcji strategicznej AA, wygranie walki konkurencyjnej jest możliwe pod warunkiem precyzyjnego zrealizowania koncepcji marketingowej, co z kolei wymaga:

- udoskonalenia systemu sterowania polityką rezerwacyjno-taryfową /yield management/,
- utrzymania jednostkowych kosztów operacyjnych na możliwie najniższym poziomie.

Sposób podejścia American Airlines do zagadnienia sterowania systemem eksploatacji jest w dużym stopniu zdeterminowany przez skalę operacji i wynikającymi z tej skali konsekwencjami ekonomicznymi, jakie ponosi przewoźnik w przypadku błędów w sterowaniu systemem.

W gospodarce rynkowej na poziomie przedsiębiorstwa popierane są jedynie tylko te działania, które służą wzrostowi jego konkurencyjności na rynku. W przypadku lotniczego przedsiębiorstwa transportowego konkurencyjność "produktu", czyli lotniczej usługi przewozowej jest funkcją dwóch czynników:

- właściwej oferty rynkowej,
- zdolności do precyzyjnej realizacji oferty rynkowej.

Ponieważ odbiór "produktu" na rynku jest w rzeczywistości odbiorem sposobu realizacji zadań przez system sprzedaży i rezerwacji oraz system eksploatacji, wszelkie działania mogące usprawnić funkcjonowanie systemu uzyskały duże wsparcie ze strony zarządów przedsiębiorstw. Tym też należy tłumaczyć wysoki poziom rozwoju rozwiązań systemowych stosowanych przez czołowych przewoźników.

Bardzo duża złożoność i losowy charakter zdarzeń, powodują, że powszechnie stosowane rozwiązania systemowe dotyczą głównie zagadnień o ograniczonym zasięgu czy też pewnych aspektów funkcjonowania systemów. Sukcesy w rozwiązywaniu zagadnień o ograniczonym zasięgu były impulsami, które przyczyniły się do powstania bardzo złożonych systemów obejmujących swym zasięgiem duże obszary funkcjonowania systemów eksploatacji.

Produktem jaki oferuje na rynku lotnicze przedsiębiorstwo transportowe jest usługa transportu lotniczego, oferowana jako regularny przewóz osób, frachtu i poczty.

Rozkład lotów jest podstawową cechą "produktu" /usługi transportowej/ i jest jednym z głównych narzędzi w walce o rynek. Konstrukcja rozkładu ma za założenia wyjść na przeciw popytowi na usługę, lub inaczej ma umożliwić przechwycenie jak największego strumienia ruchu. Z drugiej strony rozkład lotów jest podstawową cechą systemu eksploatacji.

Tradycyjnie system eksploatacji lotniczego przedsiębiorstwa transportowego był ujmowany jako składający się z następujących podsystemów:

- podsystem operacyjny,
- podsystem obsługi technicznej,
- podsystem obsługi portowej /obsługi w porcie lotniczym/.

Powyższy podział jest podziałem funkcjonalnym i obowiązuje niezależnie od struktury zarządzania.

Podsystem operacyjny, którego osią jest rozkład lotów jest systemem wiodącym, zbudowanym przy uwzględnieniu ograniczeń podsystemu obsługi technicznej i obsługi portowej. Można powiedzieć, że podsystem operacyjny programowany przez specjalistów rynkowych ustala podstawowe parametry innym podsystemom. Wraz ze wzrostem skali operacji oraz wzrostem wymagań w zakresie efektywności, zagadnienie ustalania założeń dla podsystemu operacyjnego stało się coraz bardziej złożone i tradycyjne metody planowania działalności operacyjnej oparte na metodach "ręcznych" /graficznych/ stały się nie do przyjęcia. W odpowiedzi na zapotrzebowanie, nastąpił rozwój rozwiązań systemowych w następujących obszarach:

1. ogólne problemy zarządzania, w tym:
 - prognozowanie,
 - planowanie na szczeblu korporacji,
 - finanse,
 - systemy zasilania informacyjnego,
 - gospodarka kadrowa.

2. eksploatacja, w tym:

- budowa rozkładu lotów /wiodącym jest pion marketingu jako odpowiedzialny za "produkt"/,
- planowanie wykorzystania floty /wiodącym jest pion marketingu jako odpowiedzialny za "produkt"/,
- bieżący nadzór operacyjny,
- zarządzanie personelem lotniczym /planowanie wykorzystania personelu lotniczego/,
- zarządzanie personelem pokładowym /planowanie wykorzystania personelu pokładowego/,
- planowanie obsługi technicznej samolotów,
- sterowanie zapasami części zamiennych do sprzętu lotniczego,
- bieżący nadzór nad utrzymaniem założonego poziomu niezawodności sprzętu lotniczego,
- obsługa lotniskowa /handlingowa/ - bez obsługi technicznej,
- żywienie pokładowe /catering/,
- lokalizacja lotnisk.

Powyższy podział na podsystemy, jest podziałem funkcjonalnym tzn. wyróżnia podsystemy od strony funkcji jaką spełniają w systemie.

W wielu organizacjach według wyżej wymienionego podziału zbudowane są struktury zarządzania. W celu rozwiązania problemu usprawnienia funkcjonowania systemów /podsystemów/ coraz częściej wykorzystuje się metody badań operacyjnych oraz rozwija się metody obsługi technicznej wg. stanu technicznego odchodząc od systemu przeglądów i remontów planowo-zapobiegawczych. Rozwinięte zostały metody oceny niezawodnościowej nie tylko w obszarze obsługi technicznej, ale także w szeroko pojętym obszarze użytkowania. Wszystkie te poczynania powinny przyczynić się do podniesienia sprawności funkcjonowania systemów /podsystemów/.

Na koniec warto zauważyć, iż gwałtowny rozwój zdolności przetwarzania systemów komputerowych nie tylko spowodował, że modele decyzyjne mogą uwzględniać coraz większą ilość parametrów, ale także zwiększyć stopień ich integracji. Dzięki temu stało się możliwe sterowanie systemami w taki sposób, aby realizowały one decyzje strategicznego szczebla zarządzania. Sprawna realizacja decyzji strategicznych jest bowiem wyznacznikiem nowoczesności zarządzania i nie jest obecnie zjawiskiem powszechnym. Można powiedzieć że system zarządzania umożliwiający sprawną implementację decyzji strategicznych jest najwyższym poziomem odniesienia dla wszystkich

współczesnych systemów zarządzania. Tak więc w niniejszej książce przedstawimy te wybrane metody badań operacyjnych które mogą być pomocne w rozwiązywaniu konkretnych zadań, które to powinny przyczynić się do podniesienia sprawności funkcjonowania transportu lotniczego. I tak w kolejności omówimy następujące zagadnienia badań operacyjnych :

- szeregowanie zadań,
- lokalizacja obiektów,
- wyznaczanie dróg ekstremalnych,
- zagadnienie przydziału.

Dla każdego z przedstawionych powyżej zagadnień przedstawimy konkretne przykłady modeli wspomagających planowanie ruchu lotniczego.

2. Szeregowanie zadań

Nieformalne metody szeregowania, oparte na intuicji i doświadczeniu, były używane od dłuższego czasu. Natomiast modele formalne pojawiły się w czasie I wojny światowej i były realizowane w formie diagramów Gantta, które są jeszcze obecnie stosowane ale już głównie w charakterze ilustracji graficznych.

Pierwsze formalne modele matematyczne problemów szeregowania zadań zaczęły się pojawiać w połowie lat 50-tych, gdy S.M.Johnson, J.R.Jackson i W.E.Smith opublikowali swoje pierwsze fundamentalne rezultaty.

Mówiąc bardzo ogólnie istnieją trzy główne składniki, które definiują problem szeregowania, mianowicie: czynności (zwane też zadaniami lub operacjami), maszyny (lub procesory) i dodatkowe zasoby. Zakłada się więc istnienie zbioru zasobów, stanowisk obsługi i ustalonego systemu zadań. System zadań zdefiniowany jest przez: zbiór zadań do wykonania, ograniczenia kolejnościowe, czasy wykonania zadań, ilości zasobów potrzebne do wykonania zadań, które mają być wykonane lub obsłużone przy użyciu tych zasobów. Korzystając z przyjętych właściwości zadań systemu i zbioru zasobów oraz nałożonych ograniczeń, należy skonstruować efektywny algorytm znajdowania takiego uszeregowania zadań, który pozwala zoptymalizować lub zmierza do optymalizacji przyjętego kryterium.

2.1 Klasyfikacja problemów szeregowania

Złożoność problemów szeregowania zależy między innymi od ilości operacji związanych z każdym zadaniem oraz ilości maszyn. Z tych też względów problemy szeregowania zadań można sklasyfikować następująco:

A. Każde zadanie wymaga wykonania tylko jednej operacji, która

A_1 może być wykonywana tylko na jednej maszynie,

A_2 może być wykonywana na jednej z wielu maszyn równoległych.

B. Każde zadanie wymaga wykonania ciągu operacji na zbiorze maszyn, przy czym najczęściej dla określonego zadania ustalona jest kolejność operacji (tzw. prosty problem obsługi). W szczególności gdy:

B_1 wszystkie zadania mają tę samą ilość operacji i są wykonywane na tych samych maszynach, mówimy o tzw. przepływowym problemie obsługi,

B_2 gdy nie ma żadnych ograniczeń na kolejność operacji dla zadań, mówimy o tzw. ogólnym problemie obsługi.

W literaturze możemy spotkać się jeszcze z innymi klasyfikacjami problemu szeregowania.

Są to między innymi:

1. Szeregowanie zadań podzielnych - gdy wykonywanie zadania może zostać zawieszona na pewien czas i kontynuowane później, przy założeniu jednak, że przerwa w wykonywaniu zadania nie spowoduje zwiększenia jego czasu wykonywania.

Szeregowanie zadań niepodzielnych tzn. jeśli maszyna zacznie realizować dane zadanie, to nie może zostać ono przerwane przed zakończeniem wykonywania.

2. Szeregowanie listowe lub szeregowanie zgodne z listą priorytetów działa przy założeniu istnienia uporządkowanej listy zadań w T , tzw. listy priorytetów.

W tym przypadku kolejność przydzielania zadań dla danego stanowiska obsługi jest wyznaczana na podstawie listy priorytetowej w taki sposób, że w chwili gdy jakieś stanowisko obsługi jest już wolne przydziela mu się pierwsze zadanie z listy priorytetów, które nie zostało jeszcze wykonane.

Można założyć, że szeregowanie listowe jest szeregowaniem niepodzielnym, tzn. uszeregowania zgodne z listą priorytetów tworzą podklasę uszeregowania niepodzielnych.

Problem szeregowania zadań możemy również sklasyfikować ze względu na ograniczenia kolejnościowe, tzn.:

- problem szeregowania sieciowego, w którym dany jest częściowo uporządkowany zbiór czynności. Mają być one zakończone w najkrótszym możliwym czasie, przy nałożeniu na nie pewnych ograniczeń dotyczących zasobów.

- problem przepływowy, w którym zbiór wszystkich czynności (zwanymi operacjami) jest podzielony na zadania. Te ostatnie powinny być wykonane na zbiorze maszyn, zgodnie z pewnymi ograniczeniami kolejnościowymi między operacjami.

2.2 Sformułowanie ogólnego problemu szeregowania

Szeregowanie na pojedynczej maszynie jak i na wielu maszynach może być przeprowadzane według miary maksymalnego kosztu, całkowitego kosztu, minimalizacji liczby zadań opóźnionych itd. przy uwzględnieniu bądź nie ograniczeń kolejnościowych na zadania.

Nieformalnie, uszeregowanie jest przydziałem zadań do maszyn i do czasów, spełniającym ograniczenia narzucone na oba typy obiektów i ich relacje. Jest ono wobec tego synonimem rozwiązania dopuszczalnego dla problemu szeregowania.

Zadania - najprostsza czynność do wykonania

Maszyna - jednostka wykonująca zadanie

$$Z = \{Z_1, Z_2, \dots, Z_n\} \quad \text{zbiór zadań}$$

$$M = \{M_1, M_2, \dots, M_n\} \quad \text{zbiór maszyn}$$

Maszyny wyróżniają się spośród innych zasobów swoimi szczególnymi własnościami i relacjami względem zadań. Zakładamy, że:

1. Każda maszyna może obsługiwać jednocześnie co najwyżej jedno zadanie.
2. Każde zadanie może być wykonywane na co najwyżej jednej maszynie.
3. Każde zadanie Z_j jest scharakteryzowane zbiorem danych zawierającym:

a/ Czas wykonywania (w szeregowaniu sieciowym zwany czasem trwania czynności) P_j ,

Zawiera on zwykle zarówno czas bezpośredniego wykonywania jak i czas poświęcony na przystosowywanie maszyny do pracy.

b/ Moment przybycia (zwolnienia lub gotowości) r_j , w którym zadanie j staje się dostępne do wykonywania. Gdy wszystkie zadania przybywają równocześnie w momencie rozpoczęcia projektu, wówczas przyjmujemy, że r_j jest równe 0.

Momentów przybycia nie należy mylić z najwcześniejszymi czasami rozpoczynania czynności obliczanymi w szeregowaniu sieciowym, ponieważ te drugie wynikają przede wszystkim z ograniczeń kolejnościowych.

c/ Żądany termin zakończenia d_j , moment czasu, do którego należy zakończyć wykonywanie zadania j . Żądane terminy zakończenia, które muszą być respektowane, nazywa się liniami krytycznymi.

d/ Waga w_j , która wskazuje względną wagę (koszt) zadania j .

e/ Niemalejąca (rzeczywista) funkcja kosztu f_j , gdzie $f_j(t)$ jest kosztem zakończenia zadania j w chwili t .

Mówiąc w sposób bardziej formalny, uszeregowanie może być zdefiniowane jako odwzorowanie, które każdemu zadaniu przyporządkowuje jeden przedział lub ciąg rozłącznych przedziałów na osi czasu $[0, \infty]$ i spełnia podane niżej warunki:

- a/ każdemu podprzedziałowi czasu jest przyporządkowane dokładnie jedno stanowisko obsługi,
- b/ suma długości podprzedziałów przyporządkowanych danemu zadaniu jest dokładnie równa czasowi wykonywania tego zadania, przy czym różnym przedziałom mogą być przyporządkowane różne stanowiska obsługi,
- c/ każde dwa podprzedziały przyporządkowane różnym zadaniom przydzielonym temu samemu stanowiskowi obsługi są rozłączne,
- d/ spełnione są ograniczenia kolejnościowe oraz ograniczenia związane z dodatkowymi zasobami,
- e/ nie istnieje podprzedział czasu należący do przedziału $[0, \max\{f_j\}]$, w którym nie korzysta się z żadnego stanowiska obsługi pomimo, iż istnieje niezakończony zadanie.

Naturalnym założeniem przyjmowanym w teorii szeregowania, jest założenie, że wykonywanie zadania rozpoczyna się tak wcześnie jak to tylko możliwe.

Dlatego, mając dane uszeregowanie, możemy obliczyć moment rozpoczęcia s_j i moment zakończenia c_j każdego zadania z_j .

Miary, którymi ocenia się uszeregowanie, zwane po prostu kryteriami optymalności, są zwykle pewnymi funkcjami czasów zakończenia zadań i innych wielkości związanych z parametrami zadań.

Podstawowymi kryteriami optymalności uszeregowania, spotykanymi w literaturze, jest minimalizacja:

- długości uszeregowania zadań (maksymalnego czasu wykonywania zadań)

$$w(S) = \max_{1 \leq i \leq n} \{f_i(S)\}$$

- średniego ważonego czasu spędzonego przez zadanie w systemie obsługi

$$\bar{w}(S) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n w_i f_i(S)$$

- kosztu uszeregowania (szczególnie dla problemów z ograniczeniem horyzontu czasowego)

Często w problemach szeregowania minimalizowane są także:

- średni ważony czas oczekiwania,
- maksymalne i średnie ważone opóźnienie (spóźnienie).
- opóźnienie L_j zadania j , które określa o ile czas zakończenia przekracza żądany termin zakończenia czyli $L_j = c_j - d_j$,
- czas przepływu F_j , który określa ile czasu zadanie j spędza w systemie, czyli $F_j = c_j - r_j$,
- opóźnienie T_j , które jest opóźnieniem zadania j w sytuacji, gdy nie spełnia ono żadanego terminu zakończenia, lub zerem w przeciwnym przypadku, czyli
$$T_j = \max\{0, L_j\}$$

2.3 Szeregowanie sieciowe

Pierwsze metody dla planowania przedsięwzięć i szeregowania pojawiły się pod koniec lat 50-ych pod akronimami CPM (critical path metod) i PERT (program evaluation and review technique). Wkrótce obie metody zostały powszechnie zaakceptowane jako wygodne i praktyczne narzędzia w tak różnych dziedzinach jak prace naukowo-badawcze, inwestycje, produkcja, konserwacja. Pierwotnie obie metody zaprojektowano z myślą o ograniczeniach kolejnościowych, wiążących elementy przedsięwzięcia i czas ich trwania. Ich celem jest minimalizacja całkowitego czasu potrzebnego do ukończenia całego zamierzenia.

Różnica między metodami CPM i PERT polega na interpretacji i traktowaniu czasu trwania każdej czynności. W modelach CPM wszystkie czasy trwania są deterministyczne.

Natomiast PERT jest modelem sieciowym, w którym relacje między czynnościami są dokładnie określone, ale czasy trwania są obciążone pewną niepewnością o znanym rozkładzie.

2.4 Zagadnienia przepływowe i kolejnościowe

W tym przypadku czynności zwane operacjami są połączone w większe jednostki zwane zadaniami. Każda operacja odpowiada realizacji zadania na pewnej maszynie. Zakłada się, że nie ma ograniczeń kolejnościowych, dotyczących zadań oraz operacji różnych zadań, z wyjątkiem ograniczeń o charakterze dysjunkcyjnym, narzuconych na operacje, które mają być wykonane na tej samej maszynie.

Podstawowe założenia dotyczące operacji i maszyn:

1. Operacje są niepodzielne i żadna operacja nie może być jednocześnie wykonywana na więcej niż jednej maszynie.
2. Żadna maszyna nie może wykonywać więcej niż jedną operację jednocześnie.

Niech $J = \{J_1, J_2, \dots, J_n\}$ będzie zbiorem zadań i niech $M = \{M_1, M_2, \dots, M_m\}$ będzie zbiorem maszyn. Każde zadanie J_j składa się z m_j operacji $O_{1j}, O_{2j}, \dots, O_{m_jj}$ gdzie m_j może być różne dla różnych zadań.

Wektor czasów wykonywania operacji, składających się na zadanie J_j oznaczamy przez p_j . Skojarzenie operacji z maszynami jest dane liczbami m_{ij} ($i = 1, 2, \dots, m_j$, $j = 1, 2, \dots, n$) takimi, że operacja O_{ij} jest wykonywana na maszynie m_{ij} .

Naszym celem jest znalezienie takiego porządku wykonywania operacji na każdej maszynie, który minimalizuje maksymalny czas zakończenia pracy maszyn.

Jeśli operacje żadnego zadania nie są uwarunkowane ograniczeniami kolejnościowymi, to problem nosi nazwę *otwartego zagadnienia kolejnościowego*. W systemie otwartym porządek, w jakim jest wykonywane zadanie na poszczególnych maszynach, jest więc nieistotny.

W przepływowym zagadnieniu kolejnościowym, każde zadanie przechodzi przez wszystkie maszyny w tej samej kolejności, którą ustalamy odtąd jako (M_1, M_2, \dots, M_m) . Przykładem takiej sytuacji jest linia montażowa, gdzie robotnicy i stanowiska pracy reprezentują maszyny.

System przepływowym można scharakteryzować wielkościami $m_j = m$ oraz $m_{ij} = i$ dla $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$

W ogólnym zagadnieniu kolejnościowym uporządkowania maszyn mogą być różne dla różnych zadań. Zadanie w zagadnieniach przepływowym i ogólnym jest ciągiem operacji określonych kolejnością maszyn, na których ma być ono realizowane.

3 Metody rozwiązywania problemów szeregowania

3.1 Wprowadzenie

Jak ogólnie wiadomo metody wyznaczania rozwiązań problemów szeregowania można sklasyfikować według tego, czy służą one do znajdowania optymalnych rozwiązań czy też jedynie do rozwiązań przybliżonych.

Mamy więc:

- metody dokładne (służą do znajdowania rozwiązań optymalnych)
- metody przybliżone (służą do znajdowania „dobrych” rozwiązań dopuszczalnych, ale nie gwarantują uzyskania rozwiązania optymalnego)
- metody o zagwarantowanej dokładności (są to algorytmy wyznaczające rozwiązania przybliżone, co do których można mieć pewność, że wartość funkcji celu będzie różna od optymalnej jedynie w granicach tolerancji).

Zwykle w dokładnych metodach wyznaczania rozwiązań problemów dyskretnych (w tym również zadań szeregowania) stosuje się pewien sposób ograniczonego przeglądu przestrzeni rozwiązań - nie można bowiem uniknąć gwałtownego wzrostu rozmiarów przestrzeni rozwiązań.

Ideą tych metod jest dokonanie efektywnego przeglądu, wykorzystującego maksimum informacji w celu okrojenia drzewa przeszukiwań. Do tych metod należy ogólnie znany algorytm podziału i oszacowań, który w przypadku problemów ze zmiennymi binarnymi nosi nazwę metody przeglądu sterowanego lub metody przeglądu pośredniego. Przeglądowe algorytmy podziału i oszacowań stały się podstawową, ogólną metodą wyznaczania optymalnych rozwiązań dla dyskretnych problemów optymalizacyjnych.

Podstawowym założeniem w metodzie podziału i oszacowań jest założenie o skończoności zbioru rozwiązań dopuszczalnych. „Inteligentny” przegląd tych rozwiązań, tzn. taki, który eliminuje jak najwięcej punktów bez ich bezpośredniego sprawdzania, decyduje o skuteczności metody podziału i oszacowań.

Warto zauważyć iż konstrukcja efektywnego algorytmu, wyznaczającego rozwiązanie optymalne dla problemu o dużych rozmiarach lub o skomplikowanej postaci ograniczeń jest bardzo trudna. Opiera się ona w dużej mierze na intuicji i znajomości szczególnych własności problemu. W algorytmach podziału i oszacowań wykorzystywane fakt ten ma miejsce przy konstrukcji dolnych i górnych oszacowań oraz formułowaniu reguł dominacji.

Pomimo, że algorytmy podziału i oszacowań są bardziej efektywne od metod pełnego przeglądu, to jednak wymagane przez nie nakłady obliczeniowe są często funkcją wykładniczą (lub wielomianową wysokiego stopnia) rozmiaru problemu.

W wielu sytuacjach praktycznych nie jest niezbędne uzyskanie optymalnego rozwiązania. Ponadto, gdy natrafimy na złożony problem o dużych rozmiarach, znalezienie rozwiązania optymalnego jest praktycznie niewykonalne, nawet na bardzo szybkich komputerach.

3.2 Metody przeglądu pośredniego

Przełgądem pośrednim przyjęto nazywać klasę algorytmów podziału i oszacowań dostosowanych specjalnie do zadań programowania binarnego. Należy uznać, że w swojej obecnej postaci metoda ta jest ogólna i pozwala na rozwiązywanie wszelkich zadań programowania dyskretnego (w tym również nieliniowych).

Metody te w swej idei wykorzystują kombinatoryczny charakter zadania, czyli zakłada się skończoną liczbę rozwiązań dopuszczalnych.

Idea tych metod polega na zastąpieniu przeglądu wszystkich rozwiązań dopuszczalnych zadania przeglądem częściowym. Przeprowadza się to przez odrzucanie niektórych podzbiorów rozwiązań, o których wiadomo, że nie zawierają rozwiązania optymalnego, dokonując zarazem przeglądu pozostałych rozwiązań dopuszczalnych.

Wśród metod przybliżonych najbardziej znana jest metoda podziału i ograniczeń opracowana przez A.Landa i A.Doiga []. Ponadto z bardziej znanych algorytmów metod przybliżonych należy wymienić addytywny algorytm Balasa []

Metoda ta polega na tym, że zbiór rozwiązań dzieli się kolejno na coraz mniejsze podzbiory, odpowiadające wierzchołkom tzw. drzewa rozwiązań. Dla każdego z nich oblicza się wartość funkcji ograniczającej, która stanowi dolne oszacowanie funkcji celu, odpowiadające rozwiązaniom należącym do określonego podzbioru.

Metoda obejmuje również eliminację podzbiorów niedopuszczalnych ze względu na określone warunki (ograniczenia) i nieperspektywicznych z punktu widzenia określonego kryterium. Istotnym elementem tej metody jest określenie tzw. funkcji ograniczającej.

3.3 Metoda Johnsona

Algorytm Johnsona [] zwany również *regułą Johnsona* jest uważany za pierwszy poważny rezultat w teorii szeregowania i prowadzi do bardzo szybkiej metody rozwiązywania. Przypadek 2 maszyn.

Autor rozważa obróbkę n detali na 2 maszynach, przy ustalonej kolejności wejścia każdego detalu na maszyny, tzn. każdy detal przechodzi przez pierwszą maszynę, a następnie

wychodzi na maszynę drugą. Należy wyznaczyć w jakiej kolejności podawać detale na pierwszą maszynę, aby zminimalizować łączny czas obróbki wszystkich detali.

3.4 Metody przybliżone

Przeniesienie metod przybliżonych na zadania binarnego programowania nieliniowego jest niemal bezpośrednio. Tego rodzaju metody są przydatne z kilku powodów. Po pierwsze, dotychczasowe doświadczenia maszynowe z algorytmami dokładnymi, szczególnie dla problemów rzeczywistych, wciąż nie są zadowalające.

Wiele problemów spotykanych w praktyce ma zbyt duże rozmiary, aby mogły być rozwiązane dokładnie. Po drugie efektywność algorytmów przeglądu pośredniego znacznie wzrasta, gdy przegląd rozpoczyna się od "dobrego" rozwiązania dopuszczalnego. W końcu rozwiązanie dopuszczalne pozwala obliczyć oszacowanie od dołu wartości optymalnej funkcji celu. Oszacowanie to można wykorzystać w algorytmach przeglądu pośredniego.

3.5 Metody heurystyczne

Metodą przybliżoną (heurystyczną) nazywamy taką metodę, która z założenia powinna dać rozwiązanie "dobre", jednak nie gwarantuje rozwiązania optymalnego.

W stosunku do metod heurystycznych trudno o uogólnienia. Mogą być one stosowane w powiązaniu z algorytmami podziału i ograniczeń w celu określenia początkowych rozwiązań i górnych ograniczeń.

Heurystyczne metody rozwiązywania modeli dyskretnych dostarczają rozwiązań suboptymalnych. Z tego też względu określa się je niekiedy mianem metod przybliżonych.

Metody przybliżone konstruowane są zasadniczo dwoma sposobami. Pierwszy z nich jest poszukiwaniem losowym, a drugi jest poszukiwaniem deterministycznym, polegającym na opracowaniu heurystycznych zasad, wykorzystujących specyfikę modelu dyskretnego.

Metody poszukiwania losowego polegają albo na pełnym rozwiązaniu zadania stosując pewien mechanizm przypadkowego błędzenia albo też na połączeniu poszukiwania losowego z lokalną optymalizacją. Ta ostatnia koncepcja ma szersze znaczenie praktyczne.

Polega ona na tym, że rozwiązanie wstępne ustala się w drodze wyboru losowego, a następnie w jego otoczeniu wyznacza się lokalne optimum funkcji celu. Otoczenie to tworzone jest tak, aby zawierało zaledwie kilka punktów, dzięki czemu optimum lokalne można wyznaczyć przez przebadanie wszystkich jego punktów. Następnie dokonuje się nowego wyboru losowego, szukając w jego otoczeniu lokalnego optimum. Spośród odpowiednio dużej liczby tak wyznaczonych optimum lokalnych wybiera się najlepsze, które jest poszukiwanym rozwiązaniem przybliżonym. Sposób ten może być dokładniej skonkretyzowany dla danego rodzaju zagadnienia.

Metody heurystyczno-deterministyczne odnoszą się do specjalnych typów zadań. Są one dostosowane do struktury modelu dzięki czemu dają na ogół dobre wyniki.

Metody heurystyczne mogą być wykorzystywane jako tzw. metody inauguracyjne. Pozwalają one na wyznaczenie rozwiązania wyjściowego, które następnie może być poprawione inną metodą (dokładną albo heurystyczną). Przykładem może być tu metoda VAM, czy też metoda minimalnego elementu macierzy kosztów wyznaczania rozwiązań wstępnych zadania transportowego. Metody te są w gruncie rzeczy metodami heurystycznymi dostarczającymi rozwiązań suboptymalnych, przy czym rozwiązania te są na ogół poprawiane za pomocą dokładnych algorytmów transportowych

Zasady tworzenia metod heurystycznych nie poddają się jakiegokolwiek formalizacji. Ogólnie można powiedzieć, że metody te wykorzystują pewne reguły heurystyczne poszukiwania rozwiązań lepszych od aktualnie istniejącego. Oparciem do tworzenia takich metod są metody intuicyjne poszukiwania twórczych rozwiązań.

Dość szerokie zastosowanie znalazły metody heurystyczne, w których rozwiązania przybliżone wyznacza się przy zastosowaniu tzw. reguł priorytetu.

Polegają one na tym, że każdej zmiennej decyzyjnej x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) przyporządkowuje się pewną zdefiniowaną odpowiednio dla danego zadania liczbę p_i zwaną wskaźnikiem priorytetu, po czym wskaźniki te porządkuje się w ciąg nierosnący lub niemalejący w zależności od rodzaju optimum. Rozwiązanie przybliżone problemu konstruujemy, przydzielając każdej zmiennej x_i , wybieraną z listy zgodnie z określoną w powyższy sposób kolejnością, możliwie największą (najmniejszą) wartość dopuszczalną.

Dla ilustracji przedstawimy tę metodę dla problemu znanego pod nazwą zadania załadunku. Zadanie to można przedstawić następująco:

$$(\max) z = \sum_{j=1}^N c_j x_j$$

przy warunkach ograniczających

$$\sum_{j=1}^N w_j x_j \leq b$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, N)$$

x_j - liczby całkowite

Założmy, że $w_j \leq b$ dla co najmniej jednego j (w przeciwnym przypadku zadanie byłoby sprzeczne). Każdej zmiennej x_j (przedmiotowi j) przyporządkowujemy wskaźnik priorytetu

$$p_j = \frac{c_j}{w_j}$$

którego interpretacja oznacza wartość jednostki objętości przedmiotu j . Wskaźniki te porządkujemy nie rosnąco, tzn. wyznaczamy ciąg

$$p_{i_1} \geq p_{i_2} \geq \dots \geq p_{i_n}$$

a następnie przydzielamy zmiennej x_r , w kolejności $r = i_1, i_2, \dots, i_n$ ustalonej przez ciąg, możliwie największej liczby całkowitej, dopuszczalnej ze względu na ograniczenie

$$x_r \leq b - \sum_{j < r} w_j x_j$$

Oznacza to załadowanie możliwie największej liczby sztuk przedmiotu r , która mieści się w pozostałej wolnej ładowności środka transportowego.

Metody wykorzystujące reguły priorytetu noszą również w literaturze nazwę heurystyki zachłannej. Znalazły one dość powszechne zastosowanie w rozwiązywaniu zadań harmonogramowania. Wynika to stąd, że zadania harmonogramowania należą do klasy obliczeniowo trudnych, a z drugiej, dysponowanie rozwiązaniem optymalnym (dokładnym) nie jest tak bardzo istotne, gdyż w sytuacji jakichkolwiek zakłóceń procesu produkcyjnego nastąpi i tak dezaktualizacja harmonogramu. Wystarczające jest wtedy dysponowanie rozwiązaniem suboptymalnym, takim, jakie można uzyskać za pomocą szeregowania listowego metodą reguł priorytetu czyli heurystyki zachłannej.

Idea heurystyki zachłannej w rozwiązywaniu zadań harmonogramowania polega na tym, że kolejność przydzielania operacji (zadań) do maszyn jest wyznaczona na podstawie uporządkowanej listy wskaźników priorytetu w taki sposób, że w chwili gdy jakakolwiek maszyna jest wolna, przydziela się jej pierwszą operację z listy, która nie została jeszcze wykonana i aktualnie jest gotowa do wykonywania. Wskaźniki priorytetu w tych metodach definiuje się w oparciu o szereg różnych reguł, które wykorzystują różne informacje jak np.: czasy wykonywania operacji, dyrektywny termin ukończenia operacji, czasy przebrojenia maszyn, terminy gotowości operacji i wiele innych. Tego rodzaju reguł, wykorzystujących w wielu przypadkach specyfikę rozważanego zadania harmonogramowania, jest bardzo dużo.

Spśród metod heurystycznych wymienić można ponadto metodę wyznaczania suboptymalnych rozwiązań zadania transportowego z kosztami stałymi. Zadanie transportowe (zbilansowane) z kosztami stałymi można przedstawić w postaci następującego modelu dyskretnego:

$$(\min) \quad z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (c_{ij} x_{ij} + d_{ij} y_{ij}) \quad (3.11)$$

przy warunkach ograniczających

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (3.12)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (3.13)$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n) \quad (3.14)$$

$$x_{ij} \leq M_{ij} y_{ij} \quad (i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n) \quad (3.15)$$

$$y_{ij} \in \{0, 1\} \quad (3.16)$$

gdzie

$$M_{ij} = \min\{a_i, b_j\} \quad (3.17)$$

Dość prostą heurystyczną metodę rozwiązywania zadania (3.11) - (3.17) opracował M. Baliński [], którą poniżej przedstawiamy. Idea tej metody opiera się na następującym twierdzeniu:

Twierdzenie

Jeżeli $\bar{x}_{ij}, \bar{y}_{ij}$ ($i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$) jest rozwiązaniem optymalnym zadania (3.11) - (3.15), tzn. zadania z pominięciem warunku całkowitoliczbowego, to zachodzi równość

$$\bar{x}_{ij} = M_{ij} \bar{y}_{ij}$$

(3.18)

Z twierdzenia tego wynika, że przy poszukiwaniu rozwiązania optymalnego zadania (3.11) - (3.15) otrzymujemy zależność

$$y_{ij} = \frac{x_{ij}}{m_{ij}}$$

i możemy przejść do minimalizacji formy liniowej

$$z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left(c_{ij} x_{ij} + d_{ij} \frac{x_{ij}}{M_{ij}} \right) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left(c_{ij} + \frac{d_{ij}}{M_{ij}} \right) x_{ij}$$

(3.19)

przy warunkach (3.12) - (3.14).

Oznacza to, że zadanie transportowe, z kosztami stałymi można aproksymować za pomocą zwykłego zadania transportowego, dla którego - jak wiadomo - istnieją efektywne algorytmy.

Przy zastosowaniach metod heurystycznych do rozwiązywania modeli dyskretnych powstaje dodatkowy problem oszacowania dokładności tych metod. Dokładność tę daje się oszacować dla większości algorytmów heurystycznych za pomocą metod statystycznych, analizy probabilistycznej algorytmu albo też za pomocą jego analizy w „najgorszym” przypadku.

3.6 Metoda przeszukiwania sąsiedztwa

Idea algorytmów reprezentujących tę metodę polega na przeszukiwaniu sąsiedztwa danego rozwiązania, poprawianiu go gdy znajdzie się lepsze rozwiązanie i kontynuowaniu tego procesu do chwili, gdy w sąsiedztwie nie ma już lepszych rozwiązań.

Proces ten można powtarzać wychodząc od różnych rozwiązań początkowych, co zwiększa prawdopodobieństwo uzyskania lepszego rozwiązania. Tę klasę algorytmów oznacza się przez LNS (I, Q, N), gdzie

1. I jest metodą wyboru rozwiązań początkowych.
2. Q jest regułą przeszukiwania sąsiedztwa, która akceptuje znalezione lepsze rozwiązania.
3. N jest sąsiedztwem przeszukiwanym w celu poprawienia rozwiązania.

Przykładem korzystnego zastosowania tej metody jest podejście Shen Lina [] do problemu komiwojażera, który w rzeczywistości można rozważać jako problem szeregowania.

Według Lina, o rozwiązaniu mówi się, że jest λ -optymalne, jeżeli nie można otrzymać rozwiązania o mniejszym koszcie zastępując dowolne λ krawędzi tego rozwiązania dowolnym innym zbiorem λ krawędzi. Dla dowolnego rozwiązania π , należy przeszukiwać sąsiedztwo o rozmiarze $O(n^\lambda)$, gdzie n jest liczbą miast. Lin generował rozwiązania λ -

optymalne, wybierając losowo rozwiązania początkowe i akceptując pierwsze ulepszone rozwiązanie znalezione przy przeszukiwaniu każdego sąsiedztwa.

Stwierdził on, że rozwiązania 3-optymalne są o wiele lepsze od 2-optymalnych w tym sensie, że:

- a/ każde rozwiązanie 3-optymalne jest także 2-optymalne,
- b/ średnia długość rozwiązania 3-optymalnego jest znacznie mniejsza od średniej długości rozwiązania 2-optymalnego,
- c/ prawdopodobieństwo optymalności rozwiązania 3-optymalnego jest znacznie wyższe niż rozwiązania 2-optymalnego.

Zagadnienie znalezienia kompromisu między rozmiarem sąsiedztwa i liczbą rozwiązań występuje we wszystkich zastosowaniach metody LNS.

Określenie algorytmu LNS (I, Q, N) dla danego problemu wymaga uważnego wyboru zarówno postaci i rozmiaru N , jak i postaci I oraz Q . Metoda wyboru rozwiązań początkowych I może być losowa lub konstrukcyjna (np. metoda podziału i ograniczeń z ograniczonym cofaniem lub pewna metoda heurystyczna) albo może być kombinacją powyższych dwóch typów, otrzymaną przez wprowadzenie wyborów losowych do procedury konstrukcyjnej. Najczęstszym powodem tego ostatniego jest możliwość otrzymania różnorodnych rozwiązań początkowych, które różniąc się między sobą, mają jednakowo małe wartości funkcji celu.

Wybór reguły Q przeszukiwania sąsiedztwa, która akceptuje znalezione lepsze rozwiązanie może polegać na przeszukiwaniu całego sąsiedztwa w celu znalezienia najlepszego rozwiązania. Jest ona nazywana strategią najszybszego spadku i nie jest warta dużych nakładów obliczeniowych. Zazwyczaj procedury akceptują pierwsze znalezione lepsze rozwiązanie, co oznacza, że zwykle pełnego przeszukiwania wymaga jedynie ostatnie sąsiedztwo. Ostatnie przeszukiwanie nazwał Lin „okresem sprawdzania”.

Istnieją dwa zasadnicze uporządkowania przeszukiwania sąsiedztwa:

1. sąsiedztwo może być uporządkowane losowo dla każdego przeszukiwania
2. sąsiedztwo może być uporządkowane leksykograficznie przez indeksowanie w ustalony sposób; uporządkowanie leksykograficzne dla kolejnego sąsiedztwa albo można rozpocząć od nowa, albo kontynuować indeksowanie od punktu, w którym zakończono przeszukiwanie ostatniego sąsiedztwa

4 Przykłady zastosowań zadania szeregowania

4.1 Zagadnienie formowania strumienia samolotów lądujących

W niniejszym paragrafie zostanie przedstawiony problem formowania strumienia samolotów lądujących umożliwiający poprawę organizacji ruchu lotniczego w rejonie lotniska. Formowanie strumienia samolotów lądujących polega na wyznaczeniu kolejności lądowań samolotów na danym lotnisku, czyli na ich uszeregowaniu.

Zapotrzebowanie na taką metodę jest wynikiem występowania opóźnień czasów lądowania kolejnych samolotów, wywołanych przez to, iż w określonym przedziale czasu liczba samolotów, które przylatują w rejon danego lotniska z zamiarem lądowania na nim, jest większa niż liczba samolotów, które w tym czasie mogą bezpiecznie wylądować na tym lotnisku. Taka sytuacja prowadzi do powstania kolejki samolotów oczekujących na lądowanie. Samoloty te zmuszone są do krążenia w określonych rejonach przestrzeni powietrznej nad lotniskiem lub w jego pobliżu. Konieczność oczekiwania na możliwość lądowania jest zjawiskiem bardzo niekorzystnym. Powoduje ona dodatkowe zużycie paliwa oraz zwiększa stopień zużycia eksploatacyjnego statków powietrznych. Obniża także komfort przelotu z punktu widzenia pasażera, którego czas podróży ulega wydłużeniu. W skrajnym przypadku wydłużenie czasu przebywania w powietrzu danego samolotu może doprowadzić do tego, iż zużyje on cały zapas paliwa niezbędny do przeprowadzenia lądowania, co jest równoznaczne z zagrożeniem dla bezpieczeństwa lotu. Problem ten staje się coraz poważniejszy w miarę rozwoju transportu powietrznego, gdyż liczba użytkowanych statków powietrznych rośnie znacznie szybciej niż rozbudowywana jest infrastruktura lotniskowa. Powoduje to ciągły wzrost obciążenia poszczególnych lotnisk.

Zadaniem metody szeregowania samolotów lądujących jest wprowadzenie takich zmian w wyjściowej kolejności lądowań, które pozwolą na wyeliminowanie opóźnień spowodowanych koniecznością oczekiwania na lądowanie lub też w znaczący sposób zmniejszą wartości tych opóźnień. Kolejność podejść do lądowania wpływa na wielkości opóźnień w wyniku konieczności stosowania, ze względów bezpieczeństwa, określonych odstępów czasowych pomiędzy operacjami lądowania kolejnych samolotów na tym samym pasie, których długość zależy od wielkości tych samolotów, wyrażonej przez ich maksymalną masę startową. Odstępy te, zwane separacjami czasowymi, wprowadzone zostały w celu zapobieżenia ewentualnemu zakłóceniu przebiegu lądowania danego samolotu przez samolot lądujący poprzednio, gdyż zaburzenia powietrza spowodowane przelotem

jednego samolotu mogą spowodować zagrożenie dla bezpieczeństwa lotu kolejnego samolotu. Dzięki zmianie kolejności operacji lądowania kilku samolotów można skrócić łączny czas ich trwania i tym samym zmniejszyć wielkości opóźnień dla następnych samolotów.

Zadanie szeregowania samolotów lądujących jest rutynowym działaniem kontrolerów ruchu lotniczego. Jest ono rozwiązywane przy wykorzystaniu wiedzy i doświadczenia kontrolerów, bez analizy optymalności podjętych działań. Zaprezentowany w książce problem był przedmiotem rozważań opracowania [] wykonanego przez zespół pod kierunkiem dr inż. Jacka Skorupskiego i może stanowić podstawę do zbudowania systemu wspomagania kontrolera w tym zakresie. Może również posłużyć do oceny działań różnych kontrolerów, stosujących różne warianty szeregowania i tym samym ocenić ich skuteczność w aspekcie bezpieczeństwa.

Analiza ruchu lotniczego w rejonie lotniska.

Ruch lotniczy w rejonie lotniska generowany jest przez statki powietrzne podchodzące do lądowania, statki powietrzne startujące oraz statki powietrzne oczekujące w kolejce do lądowania. W rejonie tym wytyczone są korytarze powietrzne dla statków powietrznych startujących i lądujących, a także wyznaczone są strefy oczekiwania dla samolotów, które muszą czekać na zgodę na rozpoczęcie operacji lądowania. Przyjmujemy, że ruch lotniczy tranzytowy nie jest rozpatrywany przy analizie ruchu w rejonie lotniska, gdyż korytarze powietrzne dla tego ruchu powinny zostać tak wyznaczone, aby nie kolidowały z korytarzami dla ruchu lotniskowego.

Cały ruch lotniczy w rejonie lotniska powinien podlegać kontroli. Oznacza to, iż pilot każdego statku powietrznego znajdującego się w tym rejonie musi uzyskać zgodę na wykonanie każdego manewru związanego ze zmianą kierunku lub poziomu lotu. Służbami sprawującymi kontrolę w rejonie lotniska są: służba kontroli zbliżania oraz służba kontroli lotniska.

Służba kontroli zbliżania - jest to służba ustanowiona w celu sprawowania kontroli ruchu lotniczego w odniesieniu do lotów kontrolowanych statków powietrznych przylatujących i odlatujących.

Służba kontroli lotniska - jest to służba ustanowiona w celu sprawowania kontroli ruchu lotniczego w ruchu lotniskowym. Jako ruch lotniskowy określamy wszelki ruch na polu manewrowym oraz ruch wszystkich statków powietrznych wykonujących loty w pobliżu lotniska (znajdujących się w kręgu nadlotniskowym oraz wchodzących w ten krąg lub wychodzących z niego).

Granica odpowiedzialności za samolot przez poszczególne służby jest płynna i zależy od odpowiednich uzgodnień pomiędzy tymi służbami na konkretnym lotnisku. Działania poszczególnych służb muszą być w pełni skoordynowane, tak więc można je z powodzeniem rozpatrywać jako wspólny organ kontroli ruchu lotniczego w rejonie lotniska.

Organy kontroli lotniska powinny udzielać statkom powietrznym znajdującym się pod ich kontrolą informacji i zezwoleń w celu osiągnięcia bezpiecznego, uporządkowanego i sprawnego przepływu ruchu lotniczego na lotnisku i w jego pobliżu. Ich działania mają zapobiegać ewentualnym sytuacjom kolizyjnym między:

- statkami powietrznymi wykonującymi loty w kręgach nadlotniskowych;
- statkami powietrznymi poruszającymi się na polu manewrowym;
- lądującymi i startującymi statkami powietrznymi;
- statkami powietrznymi a pojazdami na polu manewrowym;
- statkami powietrznymi na polu manewrowym a przeszkodami znajdującymi się na tym polu.

Zasady ustalania kolejności podejścia do lądowania

Podstawowym zadaniem organów kontroli ruchu lotniczego jest określenie kolejności dla przylatujących i odlatujących statków powietrznych. Kolejność ta ustalana jest na podstawie ogólnych zasad zawartych w przepisach o lotniczym ruchu kontrolowanym []:

- a). Statek powietrzny lądujący lub znajdujący się w końcowej fazie podejścia do lądowania powinien normalnie mieć pierwszeństwo przed statkiem powietrznym zamierzającym odlecieć.
- b). Normalnie odlatujące statki powietrzne powinny otrzymywać zezwolenie na odlot w takiej kolejności, w jakiej będą one gotowe do startu, z wyjątkiem przypadków, w których stosowane są odstępstwa od tej kolejności pierwszeństwa w celu umożliwienia wykonania jak największej liczby odlotów z najmniejszym średnim opóźnieniem.
- c). Kolejność podejść do lądowania powinna być ustalona w sposób, który umożliwi przylot jak największej liczby statków powietrznych z jak najmniejszym średnim opóźnieniem.

Specjalne pierwszeństwo może być udzielone:

- statkowi powietrznemu, który przewiduje, że będzie zmuszony do lądowania ze względu na czynniki mające wpływ na bezpieczeństwo lotu (np: awarię czy brak paliwa);
- statkom powietrznym sanitarnym, biorącym udział w akcji poszukiwawczej lub ratowniczej, mającym na pokładzie osoby ranne lub chore oraz działającym w ochronie porządku i bezpieczeństwa publicznego.

Następne przylatujące statki powietrzne mogą otrzymać zezwolenie na wykonanie podejścia, jeżeli poprzedzający je statek powietrzny:

- zawiadomił, że może wykonać swoje podejście bez napotkania warunków meteorologicznych dla lotów według wskazań przyrządów;
- utrzymuje łączność z organem kontroli lotniska i jest przez niego widziany oraz istnieje uzasadniona pewność, że normalne lądowanie może być wykonane.

Przy ustalaniu kolejności podejść do lądowania stosowana jest procedura podejścia według wyznaczonego czasu. Oznacza to, iż organ kontroli ruchu lotniczego określa czas, w którym każdy kolejny statek powietrzny może rozpocząć schodzenie do lądowania. Aby możliwe było zastosowanie tej procedury muszą zostać spełnione następujące warunki:

- na torze podejścia powinien być ustalony odpowiedni punkt, który może być dokładnie określony przez pilota i będzie służyć jako punkt kontrolny przy wyznaczaniu czasów następnych kolejnych podejść.
- statkom powietrznym powinien być podany czas, o którym mają mijać ustalony punkt. Czas ten powinien być określony w celu osiągnięcia pożądanego odstępu między kolejno następującymi lądowaniami, z zachowaniem przez cały czas obowiązujących minimów separacji, włącznie z czasem zajęcia drogi startowej.

Czas, o którym statek powietrzny powinien minąć ustalony punkt, powinien być określony przez organ zapewniający służbę kontroli zbliżania i podany statkowi powietrznemu z wystarczającym wyprzedzeniem w celu umożliwienia pilotowi odpowiedniego ustalenia toru lotu.

- każdy statek powietrzny znajdujący się w kolejce do podejścia powinien otrzymać zezwolenie minięcia ustalonego punktu o czasie uprzednio podanym lub poprawionym po tym, gdy poprzedzający statek powietrzny zgłosił minięcie tego punktu.

Każdy statek powietrzny, który przyleciał w rejon lotniska z zamiarem wylądowania na tym lotnisku, może zostać zmuszony do oczekiwania na rozpoczęcie operacji lądowania. Statek powietrzny oczekuje w powietrzu na zgodę na lądowanie krążąc w ramach określonej przestrzeni powietrznej, zwanej strefą oczekiwania. Każdy ze statków powietrznych znajdujących się w kolejce do lądowania ma wyznaczony punkt oczekiwania oraz poziom lotu. Między oczekującymi statkami powietrznymi powinny być zapewnione wymagane minima separacji pionowej, bocznej lub podłużnej (w zależności od systemu separowania statków powietrznych wykorzystywanego w danym punkcie oczekiwania). Poziomy lotu w punkcie oczekiwania powinny być przydzielone statkom powietrznym w taki sposób, który ułatwi udzielenie każdemu statkowi powietrznemu zezwolenia na wykonanie podejścia we

właściwej kolejności. Zwykle pierwszy statek powietrzny przylatujący nad punkt oczekiwania powinien znajdować się na najniższym poziomie, a następne przylatujące statki na kolejno wyższych poziomach. Jednakże statki powietrzne posiadające duże zużycie paliwa na niskich poziomach (dotyczy to głównie samolotów naddźwiękowych) powinny otrzymywać zezwolenie na oczekiwanie na poziomach wyższych niż to wynika z kolejności ich pierwszeństwa do podejścia bez utraty tego pierwszeństwa, jeżeli dostępność wykorzystania odrębnych torów zniżania i możliwości radaru pozwalają na udzielenie tym statkom powietrznym zezwolenia na zniżanie z przecięciem poziomów zajętych przez inne statki powietrzne.

W przypadkach awaryjnych może być konieczne, aby w celu zapewnienia sobie bezpieczeństwa statek powietrzny wszedł do kręgu nadlotniskowego i wylądował bez otrzymania na to uprzedniej zgody. Kontrolerzy powinni liczyć się z możliwością takiego działania w sytuacji awaryjnej i udzielać mu wszelkiej możliwej pomocy.

Specjalna zgoda na wykorzystanie pola manewrowego może być udzielona:

- statkowi powietrznemu, który przewiduje, że będzie zmuszony do natychmiastowego lądowania ze względu na czynniki wpływające na bezpieczeństwo jego lotu, takie jak: niesprawność silnika lub brak paliwa;
- statkowi powietrznemu sanitarnemu lub statkowi powietrznemu transportującemu chore lub ciężko ranne osoby, które wymagają natychmiastowej pomocy lekarskiej.

Separacje czasowe pomiędzy samolotami lądującymi.

Podstawą kontroli ruchu lotniczego w rejonie lotniska jest zapewnienie służby radarowej na tym obszarze. Wskazania radaru pozwalają na określenie aktualnej pozycji każdego statku powietrznego i prognozowanie przebiegu jego dalszego lotu. Identyfikacja statków powietrznych możliwa jest dzięki łączności radiowej pomiędzy statkiem powietrznym a organem kontroli ruchu lotniczego. Drogą radiową przekazywane są wszelkie niezbędne informacje dotyczące aktualnej sytuacji statku powietrznego oraz polecenia dotyczące jego lotu. Za rejestrowanie i przekazywanie informacji o postępach lotu statków powietrznych odpowiedzialna jest służba informacji powietrznej. Skoordynowana praca tych wszystkich służb umożliwia bezpieczne i sprawne zarządzanie ruchem powietrznym w rejonie lotniska.

Zapewnienie bezpieczeństwa ruchu lotniczego w rejonie lotniska ma szczególne znaczenie dla bezpieczeństwa całego transportu powietrznego. Z danych statystycznych wynika bowiem, że większość katastrof i wypadków lotniczych ma miejsce podczas wykonywania

operacji startu lub lądowania oraz bezpośrednio po starcie i przed lądowaniem. Oznacza to, że rejon lotnisk są statystycznie najbardziej niebezpiecznymi obszarami przestrzeni powietrznej. Przyczyn takiego stanu rzeczy jest wiele. Zagęszczenie ruchu lotniczego jest tu największe, co zwiększa ryzyko kolizji pomiędzy statkami powietrznymi. Operacje startu i lądowania są najtrudniejszymi etapami lotu każdego statku powietrznego, przez co wzrasta ryzyko popełnienia błędu przez załogę. Na tym etapie lotu statki powietrzne znajdują się na bardzo małej wysokości. Skraca to znacznie dopuszczalny czas reakcji pilota na nagłe zdarzenie w powietrzu (nagły podmuch wiatru, chwilową utratę sterowności czy siły nośnej). Wszystkie te przyczyny sprawiają, iż w procesie sterowania przepływem ruchu lotniczego w rejonie lotniska należy kierować się przede wszystkim koniecznością zapewnienia bezpieczeństwa wszystkim statkom powietrznym znajdującym się w tym rejonie.

Jednym z głównych powodów, dla których stworzono służby kontroli ruchu powietrznego, jest zapewnienie bezpieczeństwa w powietrzu przez zapobieganie powstawaniu sytuacji kolizyjnych. Szczególnie ważne jest to w rejonie lotniska, gdzie intensywność ruchu lotniczego jest największa. Podstawowym sposobem zapobiegania sytuacjom kolizyjnym jest wyznaczenie minimalnych separacji pomiędzy statkami powietrznymi znajdującymi się w powietrzu. Separacje te mogą zostać określone zarówno w stosunku do czasu, jak i do przestrzeni. Sposób ich wyznaczania i ich wartości zależne są od rejonu przestrzeni powietrznej, w którym aktualnie znajdują się separowane statki powietrzne.

Ponieważ ustalanie kolejności podejść do lądowania odbywa się według ustalonych wartości czasu, także separacje pomiędzy kolejnymi operacjami lądowania wyznaczone są jako separacje czasowe. Wartość separacji czasowej określa się jako minimalny czas, który musi upłynąć pomiędzy momentami rozpoczęcia schodzenia do lądowania dwóch kolejnych statków powietrznych. W celu określenia czasu rozpoczęcia operacji schodzenia do lądowania na torze podejścia powinien być ustalony odpowiedni punkt, który może być dokładnie określony przez pilota i będzie służył jako punkt kontrolny przy wyznaczaniu czasów następnych kolejnych podejść. Statkom powietrznym podawany jest czas, o którym mają mijać ten punkt. Czas ten jest określony tak, aby zapewnić zachowanie pożądanego odstępu w przestrzeni pomiędzy kolejnymi lądującymi statkami powietrznymi.

Minimalna wartość odstępu pomiędzy dwoma kolejnymi lądowaniami nosi nazwę minimum separacji czasowej w warunkach turbulencji w śladzie aerodynamicznym. Wartość ta została określona ze względów bezpieczeństwa w celu zapobiegania skutkom zaburzeń powietrza wywołanych przelotem statku powietrznego. Noszą one nazwę zaburzeń turbulentnych w śladzie aerodynamicznym statku powietrznego. Mogą one zakłócić przebieg lotu innego

statku powietrznego, powodując chwilową utratę sterowności i nagły spadek siły nośnej. Zjawisko to jest szczególnie groźne w trakcie podchodzenia do lądowania, gdy statek powietrzny znajduje się na małej wysokości. Wtedy czas na reakcję pilota i maszyny jest minimalny i każde zakłócenie przebiegu lotu może doprowadzić do katastrofy.

Wielkość wywołanych dany statek powietrzny turbulencji oraz jego stopień podatności na turbulencje spowodowane przez przelot innego statku powietrznego związane są z jego wielkością, wyrażoną przez maksymalną masę startową. Na podstawie masy startowej każdemu statkowi powietrznemu przyznawana jest kategoria turbulencji w śladzie aerodynamicznym.

Kategorie turbulencji dwóch statków powietrznych, które podchodzą kolejno do lądowania na tym samym pasie startowym są podstawą do wyznaczenia minimum separacji pomiędzy nimi [1]. Przepisy określają trzy rodzaje minimum separacji czasowej:

a). separacja 1 minutowa (b_1) - stosowana jest w przypadkach podejścia do lądowania:

- ciężkiego statku powietrznego (H) za ciężkim, średnim (M) lub lekkim (L) statkiem powietrznym;

- średniego statku powietrznego za średnim lub lekkim statkiem powietrznym;

- lekkiego statku powietrznego za lekkim statkiem powietrznym.

b). separacja 2 minutowa (b_2) - stosowana jest w przypadku podejścia do lądowania średniego statku powietrznego za ciężkim statkiem powietrznym.

c). separacja 3 minutowa (b_3) - stosowana jest w przypadku podejścia do lądowania lekkiego statku powietrznego za ciężkim lub średnim statkiem powietrznym.

Wartości minimalnych separacji w poszczególnych przypadkach mogą ulegać zwiększeniu, np. na skutek niekorzystnych warunków meteorologicznych (mgły, opadów), złego stanu nawierzchni drogi startowej, awarii któregoś z urządzeń naziemnych ułatwiających przeprowadzenie lądowania itp. Przepisy nie zezwalają natomiast na zmniejszenie tych wartości.

Możliwości zastosowania istniejących metod szeregowania w procesie formowania strumienia samolotów lądujących.

Aby możliwe było zastosowanie jednej z metod szeregowania do wyznaczenia kolejności lądowań należy ustalić, co w tym wypadku będziemy rozumieć pod pojęciami operacji i maszyny, pamiętając jednocześnie o przedstawionych powyżej założeniach. W tym celu jako operację należy przyjąć lądowanie samolotu, natomiast maszynę skojarzyć można z pasem startowym, na którym ono nastąpi. Jest to zgodne z założeniami szeregowania, gdyż operacja lądowania jest niepodzielna i nie może być przeprowadzona jednocześnie na więcej niż

jednym pasie startowym. Przepisy ruchu lotniczego pasażerskiego zabraniają także jednoczesnego lądowania na danym pasie więcej niż jednego samolotu.

Podstawą każdego procesu szeregowania jest określenie czasu trwania każdej z operacji. Ponieważ jako operację przyjęto lądowanie pojedynczego samolotu na pasie startowym, logicznym byłoby przyjęcie jako czasu trwania operacji przedziału czasowego od momentu rozpoczęcia procesu lądowania do momentu jego zakończenia. Jednak długość tego przedziału czasowego dla wszystkich samolotów lądujących na danym pasie jest zbliżona, tak że można przyjąć, iż jest to wartość stała. W takiej sytuacji jako czas trwania operacji przyjąć należy przedział czasu pomiędzy momentem rozpoczęcia lądowania przez dany samolot a momentem, w którym możliwe będzie lądowanie na tym pasie następnego samolotu. Oznacza to iż czas trwania operacji równy będzie separacji czasowej pomiędzy operacjami lądowania kolejnych samolotów. Długość tej separacji w określonej sytuacji jest stała i zależna jedynie od kategorii turbulencji lądujących kolejno samolotów. Tak więc przy poszukiwaniu metody szeregowania użytecznej w tej sytuacji możemy z góry odrzucić wszystkie te metody, w których czas trwania operacji nie jest wartością stałą (np. wszystkie probabilistyczne techniki szeregowania, gdzie czasy trwania operacji są obciążone pewną niepewnością o znanym rozkładzie).

Problem szeregowania samolotów lądujących można przedstawić jako ogólne zagadnienie kolejnościowe dla jednej maszyny (skojarzonej z pasem startowym). Jako zadanie przyjąć należy operację lądowania samolotu na danym pasie. Momentem przybycia zadania będzie przewidywany czas przylotu, a momentem zakończenia zadania - spodziewany czas podejścia. Czas przepływu będzie wtedy równoznaczny z opóźnieniem samolotu, czyli czasem spędzonym w kolejce do lądowania. Jako miarę jakości szeregowania można przyjąć np. wartość średniego opóźnienia samolotów lądujących.

Zasadniczym problemem przy takim podejściu do szeregowania samolotów lądujących jest określenie czasu trwania czynności. Ponieważ czas trwania samej operacji lądowania jest w tym przypadku nieistotny jako czas trwania czynności należy przyjąć czas, który upłynie pomiędzy momentami rozpoczęcia podejścia do lądowania dwóch kolejnych samolotów, czyli wartość separacji czasowej pomiędzy nimi. Oznacza to, że czas trwania czynności nie będzie z góry określony dla każdego z samolotów, lecz zależny będzie od tego, jaki samolot lądował poprzednio. Uniemożliwia to zastosowanie któregoś z istniejących algorytmów szeregowania, gdyż w każdym z nich czas trwania danej czynności jest stały i niezależny od konkretnego uszeregowania. Koniecznym więc stało się opracowanie nowego algorytmu,

opartego na założeniach szeregowania ogólnego, lecz dostosowanego do potrzeb szeregowania samolotów lądujących.

Założenia Metody Szeregowania Samolotów Lądujących - MESSAL.

Podstawowym typem lotniska dla ruchu pasażerskiego jest lotnisko eksploatujące w danej chwili jeden pas startowy. Wszystkie lotniska pasażerskie znajdujące się w Polsce są lotniskami właśnie takiego typu, np. lotnisko Okęcie posiada dwa przecinające się pasy startowe, lecz tylko jeden z nich może być eksploatowany w danym momencie. Jedynie mały procent największych portów lotniczych świata posiada dwa lub więcej niezależnych pasów startowych.

Tak więc dla dalszych rozważań założono, że w danej chwili tylko jeden pas startowy, obsługującego ruch pasażerski realizowany jedynie przez samoloty. Przykładem takiego lotniska jest np. Okęcie.

Strumień i szereg samolotów lądujących.

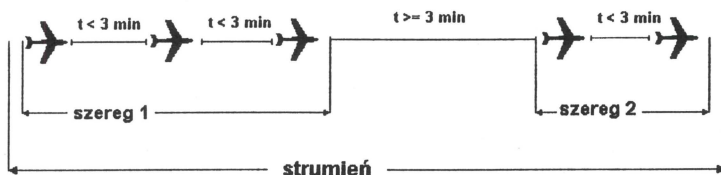
Przedmiotem szeregowania jest strumień samolotów lądujących. Dla dalszych rozważań założono, że jako strumień samolotów lądujących rozumieć należy zbiór samolotów, które mają podejść do lądowania na danym pasie startowym w określonym przedziale czasu.

Nie jest także brany pod uwagę strumień samolotów startujących z tego lotniska, gdyż zgodnie z przepisami o ruchu lotniczym kontrolowanym przyjęto założenie, iż samolot oczekujący na lądowanie ma zawsze pierwszeństwo przed samolotem oczekującym na start.

Proces szeregowania ma na celu uporządkowanie strumienia samolotów lądujących, przez ustalenie kolejności podejść tych samolotów do lądowania. W tym celu strumień samolotów lądujących można podzielić na szeregi samolotów lądujących.

Każdy szereg jest uporządkowanym zbiorem samolotów, które mają wylądować na danym pasie startowym w określonym przedziale czasu, przy czym przebieg operacji lądowania każdego z samolotów w szeregu może mieć wpływ na przebieg operacji lądowania przynajmniej jednego z pozostałych samolotów w szeregu. Wpływ ten wyraża się przez opóźnienie czasu rozpoczęcia podejścia do lądowania przez dany samolot spowodowane lądowaniem innego samolotu z szeregu. Możemy przyjąć, że dany samolot wchodzi w skład szeregu samolotów lądujących jeżeli różnica pomiędzy jego czasem przylotu a czasem podejścia samolotu lądującego poprzednio jest mniejsza niż 3 minuty. Jeżeli różnica ta wynosi trzy minuty lub więcej wtedy przebieg operacji lądowania poprzednika nie będzie

miał żadnego wpływu na przebieg lądowania tego samolotu. Oczywiście pod warunkiem, że lądowanie poprzednika będzie się odbywało bez opóźnień.



Rys.4.1.1.1. Podział strumienia samolotów lądujących na szeregi.

Tak więc opracowana metoda szeregowania samolotów lądujących jest to taki sposób wyznaczania kolejności podejść do lądowania, który pozwala na uzyskanie optymalnej kolejności przy określonym kryterium optymalności, Jednocześnie muszą być spełnione wszystkie wymogi bezpieczeństwa ruchu powietrznego w rejonie lotniska. Szeregowanie samolotów lądujących zostało określone jako szereg procesów wyboru samolotów, które będą pierwsze w kolejce do lądowania w kolejnych chwilach czasu t . Wybór ten został przeprowadzony w sposób, który umożliwi optymalizację wartości określonego wskaźnika opisującego skutki procesu szeregowania. Szczegółowy opis tej metody został przedstawiony w pracach [], [].

4.2 Zagadnienie planowania obsługi technicznych – lotów samolotów

Drugim konkretnym przykładem zastosowania metod szeregowania jest problem planowania obsługi technicznych W tym paragrafie wyjaśnione będzie pojęcie obsługi technicznej, jak również przedstawiony zostanie opis jakim etapom w rzeczywistości podlega obsługa techniczna samolotu na przykładzie PLL-LOT, oraz przepisy i czynniki, które trzeba uwzględnić przy jej planowaniu.

Jak ogólnie wiadomo w szeroko rozumianym transporcie mamy do czynienia z różnego rodzaju systemami obsługi. We wszystkich tych systemach można wyróżnić trzy następujące elementy:

- zgłoszenie do obsługi (nadchodzące na ogół w losowych momentach czasu)
- proces określonego rodzaju obsługi
- kanały obsługi (stanowiska obsługi) realizujące proces obsługi zgłoszeń.

Przykładowo na lotnisku zgłoszeniami są startujące, lądujące i wymagające przeglądu technicznego samoloty, procesem obsługi jest start, lądowanie i przegląd techniczny samolotu, natomiast kanałami obsługi są hangary, pasy startowe i lotniska.

Ciąg zgłoszeń nadchodzących do systemu obsługi nazywamy strumieniem zgłoszeń. Nadchodzące zgłoszenie jest kierowane do jednego z wolnych kanałów, po czym po zrealizowaniu obsługi opuszcza system. Jeśli wszystkie kanały obsługi w momencie zgłoszenia są zajęte, to zgłoszenie może oczekiwać w kolejce na obsługę lub zrezygnować z oczekiwania. Systemy obsługi, w których dopuszczalna jest możliwość tworzenia się kolejki noszą nazwę systemów z oczekiwaniem (np. samoloty oczekujące na opuszczenie hangaru przez znajdujący się tam samolot)

W modelach systemów obsługi z oczekiwaniem istotna jest dyscyplina obsługi, tzn. kolejność obsługi oczekujących zgłoszeń. Niekoniecznie bowiem zgłoszenia muszą być obsługiwane w kolejności ich przybycia. Niekiedy konieczne jest uwzględnienie określonych priorytetów lub dość specyficznych reguł określających kolejność w systemach obsługi.

W transporcie funkcjonują trzy podstawowe reguły:

- FIFO (first in - first out) - kolejność obsługi jest określona kolejnością zgłoszeń
- LIFO (last in - first out) - pierwszeństwo obsługi ma zgłoszenie, które przybyło ostatnie
- SIRO (service in - random order) - kolejność obsługi jest losowa.

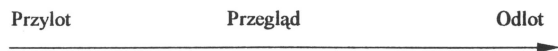
Modele te wykorzystuje się także w transporcie lotniczym do układania rotacji, planowania przeglądów technicznych. Rysunek 4.2.1 przedstawia jak wygląda rotacja samolotów dla każdego typu modelu i w jaki sposób optymalnie planować przeprowadzanie przeglądów technicznych. Oba modele FIFO i LIFO pozwalają optymalnie i racjonalnie wykorzystywać flotę powietrzną, jednak w różny sposób. Stosując je zapewniamy przede wszystkim równomierne rozłożenie przeglądów na wszystkie egzemplarze samolotów.

Z rysunku tego widać, że system FIFO zapewnia w miarę równomierne odstępy (charakterystyczny pasek) między poszczególnymi rejsami. W sezonie letnim ze względu na zwiększoną ilość operacji lotniczych rotacje planuje się w oparciu o system FIFO. Rejsy dalekodystansowe także rotują się FIFO.

System LIFO ma szczególne odniesienie do planowania przeglądów technicznych samolotów, ze względu na charakterystycznie powiększające się odstępy czasu między kolejnymi rejsami (charakterystyczny trójkąt). Gdy odstęp ten będzie odpowiednio duży, można wtedy wyłączyć z obiegu dany egzemplarz samolot, w celu wykonania przeglądu technicznego. Odstępy te można wykorzystać nie tylko do kontroli technicznych, ale także na zaplanowanie dodatkowych rejsów.

Możliwa jest również kombinacja tych modeli: do pewnego momentu rotacje układamy w oparciu o metodę FIFO, a gdy zbliża się przegląd techniczny danego samolotu wtedy przechodzimy na LIFO, by zapewnić czasoprzestrzeń na wykonywanie tej kontroli. Po jej wykonaniu można wrócić do rotacji samolotu wg FIFO.

Modele planowania przeglądów technicznych i rotacji samolotów.



Przypadkowe ułożenie rotacji

<u>XS 125</u>		<u>XS 602</u>
<u>XS 101</u>		<u>XS 146</u>
<u>XS 119</u>		<u>XS 200</u>
<u>XS 405</u>		<u>XS 118</u>

Algorytm LIFO

<u>XS 405</u>		<u>XS 146</u>
<u>XS 101</u>		<u>XS 200</u>
<u>XS 125</u>		<u>XS 118</u>
<u>XS 119</u>	<u>A4 B737</u>	<u>XS 602</u>

Algorytm FIFO

<u>XS 119</u>		<u>XS 200</u>
<u>XS 125</u>		<u>XS 146</u>
<u>XS 101</u>		<u>XS 118</u>
<u>XS 405</u>		<u>XS 602</u>

rys 3.7.2

Definicja obsługi technicznej i jej podział

Obsługa techniczna samolotu jest to zestaw działań mających na celu utrzymanie samolotu w stanie technicznym zapewniającym właściwy poziom bezpieczeństwa eksploatacji. Program obsługi określa szczegółowo jakie działania należy podjąć aby zrealizować obsługę samolotu.

Czynność (operacja) techniczna - każde zetknięcie się personelu lotniczego podczas jego postoju na ziemi a mające na celu utrzymanie na właściwym poziomie sprawności technicznej i niezawodności samolotu.

Grupy operacji technicznych wykonywanych na samolocie w ustalonych odstępach czasu lub zależnie od liczby cykli godzin lotu, lub czasu kalendarzowego nazywane są *przeglądami technicznymi*.

W skład przeglądu technicznego wchodzi następujące rodzaje operacji technicznych:

- a/ sprawdzenie stanu technicznego samolotu,
- b/ czynności profilaktyczne wykonywane w celu utrzymania właściwego poziomu niezawodności samolotu,
- c/ sprawdzenie kompletności samolotu i jego wyposażenia oraz usunięcie braków,
- d/ uzupełnienie cieczy i gazów eksploatacyjnych,
- e/ usunięcie usterek samolotu stwierdzonych podczas przeglądu lub na podstawie wpisów w dokumentacji pokładowej,
- f/ sprawdzenie dokumentacji pokładowej samolotu w celu stwierdzenia czy zachodzi konieczność wykonania dodatkowych operacji technicznych i ewentualne ich wykonanie,
- g/ sprawdzenie kompletności i prawidłowości wypełnienia dokumentacji pokładowej samolotu.

Przeglądy są wykonywane według następujących kryteriów:

1. Po upływie określonych dni (np. TU5 15±5 dni lub AT7 - przegląd WEEKLY co 7±1 dzień),
2. po wylataniu godzin (np. DC-10 co 500 godzin)
3. po cyklach :
 - lądowanie
 - rozruchy silników
 - startowe

Ograniczenia przy planowaniu przeglądów są następujące:

1. Trasy jednodcinkowe lub wielodcinkowe,
2. Ograniczenia w lataniu nocą,
3. Minimum i maksimum wylatywanych godzin.

Wytwórnia Boeing zaleca firmom rozpoczynającym eksploatację samolotów typu B-737 i B-767, system obsługi technicznej zapewniający utrzymanie właściwego poziomu niezawodności samolotów i ich instalacji przy obsłudze przez niezbyt doświadczony personel techniczny. System ten składa się z następujących elementów:

Obsługa startowa

- Przegląd "PP"

Przygotowanie samolotu do postoju. Jest wykonywany bezpośrednio po zakończeniu każdego lotu. Zawiera czynności przeglądowe mające na celu między innymi sprawdzenie czy w kabinie załogi wszystkie dźwignie i przełączniki znajdują się w

położeniu wymagalnym do postoju, czy w bagażniku nie ma ładunku, zamknięcia osłon, wzierników i luków, ponadto sprzątnięcie wnętrza samolotu.

- Przegląd tranzytowy - "T"

Przegląd ten wykonuje się *po każdym lądowaniu samolotu*. Zawiera czynności przeglądowe mające na celu stwierdzenie ewentualnych uszkodzeń na zewnątrz - jak i również wewnątrz samolotu, podcieków płynów technicznych oraz koniecznego sprawdzenia niektórych instalacji i zespołów.

- Przegląd codzienny - "D"

Przegląd ten wykonuje się *przed rozpoczęcie m lotów każdego dnia*. Oprócz wszystkich czynności z przeglądu T, zawiera dodatkowo sprawdzenie niektórych instalacji i urządzeń z wykorzystaniem wbudowanych urządzeń testujących.

Obsługa okresowa

- Przegląd "A" - przegląd wykonywany z wycofaniem samolotu z eksploatacji.

Wytwórnia zaleca jego wykonywanie w początkowym okresie co 125h lotu. Zawiera wszystkie czynności z przeglądów startowych "T" i "D".

- Przegląd "B" - przegląd znacznie bardziej pracochłonny niż "A", zawierający sprawdzenie większej liczby instalacji i zespołów, wymianę filtrów, częściowe smarowanie połączeń itp. Wytwórnia zaleca jego wykonywanie co 750h lotu. Zawiera w sobie wszystkie czynności z przeglądów "T", "D" i "A" (obecnie nie stosowany).

- Przegląd "C" - poważny przegląd techniczny o wielokrotnie większej pracochłonności niż A i B, zawierający prace przeglądowe struktury samolotu, sprawdzenie wszystkich instalacji samolotu, pełne smarowanie itp. Wytwórnia zaleca wykonywanie tego przeglądu co 3000h. Zawiera wszystkie czynności z przeglądów "T", "D", "A" i "B".

Podsumowując kontrole techniczne samolotów przeprowadza się w celu zapewnienia bezpieczeństwa osób korzystających z samolotów oraz utrzymania floty w wysokiej sprawności technicznej, zachodzi konieczność dokonywania kontroli technicznych floty latającej.

Kontrole techniczne wykonywane są przez zespół ludzi, producenta danego typu samolotu oraz zespół ludzi użytkownika tego samolotu.

Częstotliwość dokonywania przeglądów technicznych zależy od nalotu jaki wykonuje dany egzemplarz samolotu w określonym okresie czasu. Wykonanie kontroli technicznej fizycznie wiąże się z wyłączeniem danego samolotu z obiegu

Przy obecnym nalocie floty LOT-u kontrole A przeprowadzane są średnio raz na miesiąc, zaś kontrole C raz na rok.

Istnieją dwa kryteria kwalifikowania samolotów do kontroli:

- wykonanie kontroli po wyczerpaniu odpowiedniego nalotu samolotu, licząc od daty ostatniej kontroli (np. po 500 godzinach lotu),

- wykonanie kontroli po upływie określonego czasu, licząc od daty ostatniej kontroli (np. po jednym miesiącu).

Poniższa tabela przedstawia zależność typu kontroli technicznej od czasu jej wykonywania oraz nalotu lub okresu czasu po jakim powinna być wykonana.

Typ Samolotu	Typ kontroli Technicznej	Nalot (godz.), po którym jest kontrola techniczna	Okres czasu (miesiące), po którym jest kontrola	Czas wykonywania kontroli technicznej
Boeing 767	A	500	3	20-24 godz.
	C	6000	12	10-23 dni
Boeing 737	A	250	1	9-12 godz.
	C	4000	18	6-8 dni
ATR - 72	A	300	2	16 godz.
	C	2400	12	1 tydzień

W system obsługi wchodzi również czynności strukturalne niższego rzędu, które wykonywane są z częstotliwościami: AS - 300 cykli i 1CS - 3000 cykli lub 18 miesięcy..

Na obsługę techniczną samolotu, oprócz przeglądu technicznego, składają się następujące operacje:

- tankowanie samolotu pod nadzorem mechanika pokładowego lub delegowanego przez przewoźnika pracownika obsługi technicznej,
- dostawa i uzupełnienie olejów,
- podgrzewanie lub chłodzenie, uruchomienie silników - przez dostarczenie agregatów prądowórczych i rozruchowych oraz nadzorowanie ich pracy,
- w razie konieczności odlodzenie samolotu (do tej czynności potrzebne są agregaty i płyn odladzający, a także nadzór nad tą operacją).

Każdy przylatujący i odlatujący samolot powinien być dokładnie sprawdzony w porcie lotniczym przez wykwalifikowanych i licencjonowanych mechaników obsługi naziemnej. Zakres wykonywanego przeglądu zależy, jak już wcześniej wspomniano, od typu samolotu, czasu jego postoju przy rękawie itd. Zależnie od zawartych umów o obsłudze, przegląd techniczny w zagranicznych portach lotniczych wykonywany jest przez agenta handlingowego (o ile posiada on mechaników licencjonowanych w zakresie obsługi tego

typu samolotów oraz jeżeli na podstawie zawartych umów przewoźnik honoruje te licencje), przez specjalnie delegowanych do tego celu, przez przewoźnika, własnych mechaników naziemnych, bądź też w przypadku przeglądu tranzytowego po krótkim locie - przez mechanika pokładowego.

W portach odległych ze względu na większą możliwość usterek po długim locie (np. w Nowym Yorku czy Montrealu) znajdują się licencjonowani mechanicy PLL LOT. Niezależnie od tego kto wykonuje obsługę techniczną samolotu (pracownicy przewoźnika czy agenta handlingowego) agent handlingowy obowiązany jest udostępnić w razie potrzeby przewoźnikowi nielicencjonowany personel techniczny do pomocy przy wykonywaniu obsługi technicznej.

Sformułowanie zadania harmonogramowania pracy obsługi technicznych-lotów samolotu

Przedstawione poniżej sformułowanie zadania harmonogramowania przeglądów technicznych i lotów ma postać zadania wielu komiwojażerów z dodatkowymi ograniczeniami i jako takie zadanie przybiera następującą interpretację.

Trzeba przy użyciu M różnych samolotów odwiedzić N lotnisk w takiej kolejności, aby zminimalizować całkowite koszty podróży, przy czym:

a/ każde lotnisko może być odwiedzane tylko raz - co odpowiada jednokrotnemu wykonaniu każdego zadania,

b/ przelot z lotniska i do j m -tym samolotem trwa t_{ij}^m i kosztuje c_{ij}^m ,

c/ pobyt na lotnisku i m -tego samolotu trwa t_i^m i kosztuje c_i^m ,

d/ nie każdy samolot może latać na wszystkich trasach,

e/ każdy samolot musi co określony czas podlegać pewnym przeglądom (naprawom) w bazie,

co trwa τ^m i kosztuje c^m . Odpowiednikiem tego ograniczenia w przedstawionym powyżej modelu matematycznym jest terminowe wykonywanie remontów samolotów

f/ czas wykorzystania każdego samolotu jest ograniczony, co odpowiada wykonywaniu zadań w ograniczonym horyzoncie planowania T ,

g/ w bazie nie mogą być obsługiwane dwa samoloty jednocześnie. Odpowiednikiem tego warunku jest rozłączność terminów remontów w czasie.

Problem komiwojażera jest jednym z klasycznych zadań programowania kombinatorycznego. Istnieje pewna wyspecjalizowana grupa metod rozwiązywania tego

problemu przy różnych założeniach, dotyczących macierzy kosztów (symetryczna, niesymetryczna, spełniająca warunek trójkąta itp.)

Sformułowanie zagadnienia harmonogramowania przeglądów technicznych samolotu i wykonywanych przez nie lotów ukierunkowuje poszukiwanie metody rozwiązania tego problemu na grupę metod, charakterystyczną dla rozwiązywania zadania komiwojażera (wielu komiwojażerów).

Zadanie wyznaczania harmonogramu ograniczymy do:

- wyznaczenia rotacji dla jednego sezonu
- lotów transatlantycznych i europejskich na 3 typach samolotów: ATR, B737 i B767
- loty i przeglądy techniczne traktujemy na równi jako zadania

Opis matematyczny zadania

Klasyczne sformułowanie matematyczne problemu układania harmonogramu lotów i przeglądów technicznych samolotu prowadzi do dużego zagadnienia programowania matematycznego, które jest problemem NP-zupełnym. Rozmiar tego zadania powoduje, że z reguły przestaje mieć ono sens praktyczny ze względu na brak realnych możliwości jego rozwiązania. Ponadto jest możliwe w pewnym momencie, że ograniczenia dotyczące wykonywania remontów maszyn w określonych odstępach czasu i ograniczenia dotyczące rozłączności remontów w czasie będą sprzeczne, dlatego uzasadnione jest stwierdzenie *a priori*, czy istnieje rozwiązanie dopuszczalne problemu ze względu na warunki dotyczące terminów remontów.

Stąd też zaistniała konieczność dekompozycji zadania na mniejsze podproblemy:

1. Określenie zbioru rozwiązań dopuszczalnych ze względu na warunki dotyczące terminów przeglądów (badanie niesprzeczności ograniczeń)
2. Harmonogramowanie wykonywania lotów przy uwzględnieniu warunków gwarantujących rozłączność terminów wykonywania przeglądów technicznych. Minimalizacja funkcji celu na określonym w pierwszym etapie zbiorze rozwiązań dopuszczalnych.

Należy odpowiednio uszeregować przeglądy dla każdego samolotu, aby loty wykonywane były minimalnym kosztem.

Funkcję celu problemu harmonogramowania pracy jednostek obsługi technicznej można przedstawić w następującej postaci:

$$f_c = \sum_{m=1}^M \sum_{q=1}^{Q^{m+1}} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{N+1} z_{ij}^{qm} (c_i^m + c_{ij}^m) + \sum_{q=1}^{Q^m} y_q^m c^m \quad (4.2.1)$$

gdzie:

k - kolejność wykonywania zadań

i, j - numery zadań $i, j \in N$

N - zbiór numerów zadań

q - numer przeglądu technicznego dla danego samolotu

Q - max liczba przeglądów technicznych w danym horyzoncie czasowym dla danego typu samolotu

c_i - koszt wykonywania i-tego zadania na danym samolocie

c_{ij} - koszt przelotu samolotu z portu lotniczego i do portu lotniczego j

c^m - koszt przeglądu technicznego m-tego samolotu

$$z_{ij}^{qm} = \begin{cases} 1, & \text{jeżeli zadanie } i - \text{te jest wykonywane bezpośrednio przed zadaniem } j - \text{tym} \\ & \text{w przedziale } q \text{ na } m - \text{tym samolocie} \\ 0, & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

$$i = 1, 2, \dots, N + 1 \quad m = 1, 2, \dots, M$$

$$j = 1, 2, \dots, N + 1 \quad q = 1, 2, \dots, Q^m + 1$$

q - przedział czasu pomiędzy przeglądami technicznymi o numerach q - 1 i q

q = 1 - przedział czasu od chwili t = 0 do momentu rozpoczęcia pierwszego przeglądu technicznego

q = $Q^m + 1$ - przedział czasu po ostatnim remoncie do końca okresu planowania

N + 1 - oznacza zadanie rozpoczynające i kończące sekwencję zadań wykonywanych w każdym przedziale

$$y_q^m = \begin{cases} 1, & \text{jeżeli przegląd techniczny o numerze } q \text{ na } m - \text{tym samolocie jest wykonywany} \\ 0, & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

Ograniczenia

- Pierwszy przegląd techniczny każdego samolotu nie może rozpocząć się wcześniej niż w chwili $T_{1\min}^m$ i nie później niż w chwili $T_{1\max}^m$ licząc od początku okresu planowania

$$\forall m = 1, 2, \dots, M$$

$$T_{1\min}^m y_1^m \leq \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{N+1} z_{ij}^{1m} (t_i^m + \tau_{ij}^m) \leq T_{1\max}^m \quad (4.2.2)$$

- Jeżeli zadanie i-te występuje w przedziale q na m-tym samolocie jako poprzednik, to musi wystąpić w tym przedziale jako następnik

$$\forall m = 1, 2, \dots, M$$

$$\forall q = 1, 2, \dots, Q^m + 1 \quad (4.2.3)$$

$$\forall i = 1, 2, \dots, N + 1$$

$$\sum_{j=1}^{N+1} z_{ij}^{qm} = \sum_{j=1}^{N+1} z_{ji}^m$$

- Każde zadanie ze zbioru N zostanie wykonane (dokładnie raz)

$$\forall i = 1, 2, \dots, N$$

$$\sum_{m=1}^M \sum_{q=1}^{Q^m+N+1} \sum_{j=1}^{N+1} a_i^m a_j^m z_{ij}^{qm} = 1 \quad (4.2.4)$$

oznacza to, że każde zadanie $i \in N$ występuje jako poprzednik tylko raz,
oraz

$$\forall j = 1, 2, \dots, N$$

$$\sum_{m=1}^M \sum_{q=1}^{Q^m+N+1} \sum_{i=1}^{N+1} a_i^m a_j^m z_{ij}^{qm} = 1 \quad (4.2.5)$$

• Przeglądy techniczne muszą odbywać się w ustalonych dla każdego samolotu odstępach czasu od T_{\min}^m do T_{\max}^m

$$\forall m = 1, 2, \dots, M$$

$$\forall q = 2, 3, \dots, Q^m \quad (4.2.6)$$

$$T_{\min}^m y_q^m \leq \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{N+1} z_{ij}^{qm} (t_i^m + \tau_{ij}^m) \leq T_{\max}^m y_{q-1}^m$$

• W tym samym czasie może odbywać się remont tylko jednego samolotu

$$\forall (m_1, m_2) m_1 = 1, 2, \dots, M; m_2 = 1, 2, \dots, M; m_1 \neq m_2$$

$$\forall (q_1, q_2) q_1 = 1, 2, \dots, Q^{m_1}; q_2 = 1, 2, \dots, Q^{m_2}$$

$$TR_{q_1}^{m_1} \geq TZ_{q_2}^{m_2} \quad \text{lub} \quad TR_{q_2}^{m_2} \geq TZ_{q_1}^{m_1} \quad \dots(4.2.7)$$

gdzie $TR_{q_1}^{m_1}$ jest momentem rozpoczęcia

$$TZ_{q_1}^{m_1} \quad \text{momentem zakończenia przeglądu } q_1 \text{ na } m_1\text{-ym samolocie}$$

Mogą być one wyrażone następującymi wzorami (4.2.8)

$$TZ_{q_1}^{m_1} = y_{q_1}^{m_1} \sum_{q=1}^{q_1} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{N+1} z_{ij}^{qm} (t_i^{m_1} + \tau_{ij}^{m_1}) + \sum_{q=1}^{q_1} y_q^{m_1} \tau^{m_1}$$

$$TR_{q_1}^{m_1} = TZ_{q_1}^{m_1} - y_{q_1}^{m_1} \tau^{m_1}$$

• Wszystkie zadania zostaną wykonane w horyzoncie planowania T

$$\sum_{q=1}^{Q^m+N+1} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{N+1} z_{ij}^{qm} (t_i^m + \tau_{ij}^m) + \sum_{q=1}^{Q^m} y_q^m \tau^m \leq T \quad (4.2.9)$$

• Ograniczenie eliminujące podcykle

$$\forall m = 1, 2, \dots, M$$

$$\forall q = 1, 2, \dots, Q^m + 1$$

$$(4.2.10)$$

$$\forall \Omega \subset N, \Omega \neq \emptyset$$

$$\sum_{i \in \Omega} \sum_{j \in \Omega} z_{ij}^{qm} \leq |\Omega| - 1$$

Tak jak wspomniano powyżej przedstawione powyżej zadanie zdekomponowano na następujące podzadania

1. Określenie zbioru rozwiązań dopuszczalnych ze względu na warunki dotyczące terminów przeglądów (badanie niesprzeczności ograniczeń)
2. Harmonogramowanie wykonywania lotów przy uwzględnieniu warunków gwarantujących rozłączność terminów wykonywania przeglądów technicznych.

Problem badania niesprzeczności ograniczeń dotyczących terminów wykonywania przeglądów technicznych może być sformułowany jako problem wyznaczenia najwcześniejszych i najpóźniejszych momentów rozpoczęcia każdego przeglądu, przy założeniu spełnienia ograniczeń nałożonych na te przeglądy.

Problem wyznaczenia zbioru rozwiązań dopuszczalnych może być sformułowany następująco:

$$\max \sum_{m=1}^M \sum_{q=1}^{Q_{\max}^m} (t_q^m - \underline{t}_q^m)$$

przy ograniczeniach:

- Przeglądy techniczne muszą odbywać się w przedziałach określonych przez \tilde{t}_q^m i \underline{t}_q^m

$$\underline{t}_q^m \leq \underline{t}_q^m \leq \tilde{t}_q^m \leq \tilde{t}_q^m$$

- Przegląd techniczny o numerze wyższym może być wykonywany tylko wtedy, gdy wykonywany jest przegląd o numerze niższym.

$$v_{q+1}^m \leq v_q^m$$

- Zachowane są odległości czasowe między przeglądami

$$T_{\min}^m v_q^m \leq \underline{t}_q^m - (\underline{t}_{q-1}^m + \tau^m v_{q-1}^m) \leq T_{\max}^m v_{q-1}^m$$

$$T_{\min}^m v_q^m \leq \tilde{t}_q^m - (\tilde{t}_{q-1}^m + \tau^m v_{q-1}^m) \leq T_{\max}^m v_{q-1}^m$$

- Przeglądy techniczne muszą odbywać się w terminach gwarantujących ich rozłączność w czasie

$$\tilde{t}_{q_2}^{m_2} + \tau^{m_2} \geq \underline{t}_{q_1}^{m_1} - \delta_{q_1, q_2}^{m_1, m_2} \cdot T$$

$$\underline{t}_{q_1}^{m_1} + \tau^{m_1} \geq \underline{t}_{q_2}^{m_2} - (1 - \delta_{q_1, q_2}^{m_1, m_2}) T$$

gdzie

Q_{\max}^m - maksymalna liczba przeglądów m-tego samolotu w horyzoncie planowania T

\tilde{t}_q^m - najpóźniejszy termin rozpoczęcia przeglądu o numerze q dla m-tego samolotu

\underline{t}_q^m - najwcześniejszy termin rozpoczęcia przeglądu o numerze q dla m-tego samolotu

\underline{t}_q^m - najwcześniejszy możliwy termin rozpoczęcia przeglądu q na m-tym samolocie

\tilde{t}_q^m - najpóźniejszy możliwy termin rozpoczęcia przeglądu q na m -tym samolocie

v_q^m - zmienna decyzyjna przyjmująca wartość 1 gdy przegląd q może być wykonywany

$\delta_{q_1, q_2}^{m_1, m_2}$ - zmienna decyzyjna przyjmująca wartość 1 gdy przegląd q_1 na m_1 samolocie poprzedza przegląd q_2 na m_2 - ym samolocie

Funkcją celu jest tutaj maksymalizacja sumy różnic pomiędzy najpóźniejszym i najwcześniejszym momentem rozpoczęcia każdego przeglądu.

Bowiem maksymalizacja funkcji powoduje maksymalne możliwe rozsuniecie przeglądów w czasie, a tym samym minimalizację liczby (a zatem i kosztów) przeprowadzania przeglądów w horyzoncie planowania T . Ponadto możliwość wyboru terminu przeglądu w szerokim zakresie ułatwia znalezienie rozwiązania dla drugiego podproblemu. Im większa jest tolerancja terminów rozpoczęcia przeglądów technicznych, tym łatwiej można dopasować sekwencje zadań do wykonywania w poszczególnych przedziałach między przeglądami.

Jeżeli istnieje rozwiązanie podproblemu 1, to wówczas wartości zmiennych decyzyjnych \bar{t}_q^m i \underline{t}_q^m określają dopuszczalne terminy rozpoczynania poszczególnych przeglądów. Drugi podproblem ma podobną postać jak problem pierwotny.

W wyniku dekompozycji otrzymaliśmy dwa zadania programowania dyskretnego o znacznie mniejszych rozmiarach niż problem pierwotny. Zaproponowana w tym rozdziale dekompozycja problemu pierwotnego zapewnia znalezienie jego rozwiązania optymalnego tylko wówczas, gdy drugi z podproblemów zostanie rozwiązany dla wszystkich rozwiązań dopuszczalnych podproblemu pierwszego.

Rozwiązując drugi podproblem dla konkretnych warunków na terminy przeglądów, otrzymujemy rozwiązanie tym bliższe rozwiązaniu optymalnemu problemu niezdekomponowanego im stosunek odległości czasowych pomiędzy przeglądami do czasów wykonywania zadań jest większy.

Drugim elementem mającym wpływ na jakość otrzymanego rozwiązania drugiego podproblemu w stosunku do problemu pierwotnego jest zakres zmian terminów rozpoczynania przeglądów.

5 Zadanie lokalizacji obiektów

5.1 Sformułowanie zadania lokalizacji

Zadanie lokalizacji, zwane też zadaniem rozmieszczenia, należy do klasy zadań optymalizacji dyskretnej. Szczegółowy opis zagadnień lokalizacyjnych został przedstawiony [] W tym rozdziale powtórzymy jedynie te fragmenty które mają ścisły związek z transportem loniczym.

Z dyskretnym modelem decyzyjnym mamy do czynienia wówczas, gdy co najmniej jedna zmienna decyzyjna przyjmuje wartości z dyskretnego, tzn. niespójnego zbioru punktów.

Szczególnym przypadkiem modeli dyskretnych są modele całkowitoliczbowe, w których część lub wszystkie zmienne decyzyjne przyjmują wartości całkowite.

Przesłanki do wprowadzenia zmiennych dyskretnych wynikają z istnienia określonych źródeł dyskretności w modelach decyzyjnych. Najbardziej oczywistym źródłem dyskretności jest rozpatrywanie w modelu obiektów fizycznie niepodzielnych. Przykładem tego rodzaju obiektów są wszelkiego rodzaju środki transportowe. Jeśli zatem zmienna decyzyjna w modelu określa liczbę środków, które należy zaangażować do realizacji określonych zadań, to z uwagi na ich niepodzielność, odpowiednia zmienna musi przyjmować wartości całkowite.

Niekiedy warunek dyskretności zmiennych decyzyjnych można pominąć. Możliwe jest to tylko wtedy, gdy źródłem dyskretności jest niepodzielność obiektów, przy czym problem decyzyjny dotyczy obiektów o niewielkiej wartości. W przypadku obiektów o dużej wartości postępowanie takie jest niemożliwe, gdyż prowadzi do znaczących błędów. Problematyka ujęcia dyskretności w modelach decyzyjnych jest dość złożona i nie jest tu możliwy do zastosowania jakiegokolwiek ogólny schemat postępowania.

Źródła dyskretności, poza niepodzielnością obiektów, powodują wprowadzenie do modelu decyzyjnego tzw. zmiennych binarnych (boolowskich), tzn. zmiennych, które mogą przyjmować jedną z dwóch wartości binarnych: 0 lub 1.

Dlatego model zagadnienia lokalizacji ze względu na warunek binarności zmiennej decyzyjnej, należy do klasy zagadnień programowania boolowskiego.

Modele dyskretne mogą być zarówno modelami liniowymi jak i nieliniowymi.

Zagadnienie programowania liniowego różni się od wszystkich innych zagadnień, w których może być sformułowany model matematyczny albo opis problemu tym, że wykorzystuje zależności, zwane prostoliniowymi albo liniowymi. Pełne matematyczne sformułowanie zagadnienia programowania liniowego zawiera układ równań liniowych, które opisują warunki zagadnienia i funkcję liniową, która wyraża cel zagadnienia.

Praktyczne zagadnienie programowania liniowego, ma zwykle nieujemne rozwiązanie dające skończoną wartość funkcji celu.

Zagadnienia programowania nieliniowego są trudne do rozwiązania, dlatego w większości przykładów przeprowadza się transformację tego zadania do postaci liniowej.

Matematyczne sformułowania zagadnień lokalizacyjnych klasyfikuje je do mieszanego problemu całkowitoliczbowego. Problemy te są trudne do rozwiązywania i w literaturze nazywa się je NP-trudne.

Klasyczne zadanie lokalizacji omówimy na przykładzie rozmieszczenia wydziałów $W_1 \dots W_n$ na planie projektowanego zakładu przemysłowego. Wydziały chcemy rozmieścić na działkach $D_1 \dots D_n$ tak, żeby łączne koszty transportu wewnątrzzakładowego liczone np: w skali roku były minimalne i żeby każdy wydział był lokalizowany na jednej i tylko jednej działce.

Niech d_{ik} będzie odległością od działki D_i do działki D_k i niech q_{jl} będzie ilością towarów przesyłanych z wydziału W_j do wydziału W_l np: w skali roku. W ogólnym przypadku może być $d_{ik} \neq d_{ki}$ oraz $q_{jl} \neq q_{lj}$. Niech $x_{ij} = 1$, jeżeli na D_i został zlokalizowany wydział W_j . Wówczas zagadnienie lokalizacji można sformułować jako:

$$v(ZL) = \min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n (d_{ik}q_{jl} + d_{ki}q_{lj})x_{ij}x_{kl} \quad (5.1.1)$$

przy ograniczeniach:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \quad (4.1.2)$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, \quad (4.1.3)$$

$$x_{ij} = 0 \text{ lub } 1 \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, n. \quad (4.1.4)$$

Ograniczenia (4.1.2), (4.1.3) mówią, że:

- każdy wydział musi być zlokalizowany dokładnie na jednej działce,
- na każdej działce można umieścić tylko jeden wydział.

5.2. Klasyfikacja zadań lokalizacyjnych

Zagadnienia uwzględniające pojęcie lokalizacji pojawiają się w literaturze światowej od 1927 roku. Twórcą pierwszej systematycznej teorii lokalizacji jest Alfred Weber []. Według jego teorii pierwszoplanowymi czynnikami lokalizacji są koszty transportowe, koszty siły roboczej oraz korzyści aglomeracji. Klasyfikacja przeprowadzona przez A. Webera nie była dokonywana z punktu widzenia modeli lokalizacyjnych, ale z punktu widzenia optymalnego rozmieszczenia produktów oraz własności tych produktów, czyli tzw. geografii ekonomicznej. Celem tej teorii było poszukiwanie optymalnego miejsca lokalizacji prywatnego przedsiębiorstwa w punkcie zapewniającym maksymalną oszczędność.

Pojawiające się od czasu A. Webera różnorodne modele, spowodowały potrzebę ich klasyfikacji. Nie istnieje jednak podstawowa, a zarazem obowiązująca klasyfikacja.

W zależności od specyfiki omawianych zadań praktycznych problem zagadnienia lokalizacji przedstawiany jest w różnych kategoriach. Najobszerniejsza jest kategoria, w której minimalizowany jest koszt. W klasie tej umieszczone są m.in. modele z minimalizacją odległości. Drugą istotną kategorią jest klasa problemów zorientowanych na pokrycie i przydział zapotrzebowań. Pozostałe kategorie obejmują maksymalizację zysków i spełnienie wymogów ekologicznych.

C.H. Aikens [] przyporządkowuje modele lokalizacyjne do odpowiednich grup w zależności od tego w jaki sposób uwzględniane są w nich następujące charakterystyki:

- 1/ liczba poziomów magazynów pośrednich,
- 2/ liczba rodzajów towarów (asortymentów),
- 3/ struktura kosztów (liniowe i nieliniowe),
- 4/ horyzont planowania (statyczne lub dynamiczne),
- 5/ zapotrzebowania (deterministyczne lub stochastyczne),
- 6/ sieć dystrybucji (o ograniczonej lub nieograniczonej pojemności).

W oparciu o powyższe charakterystyki powstały najczęściej spotykane modele:

- * Najprostszy model lokalizacji .
- * Prosty model lokalizacji z uwzględnieniem magazynów pośrednich.
- * Wieloasortymentowy model lokalizacji.
- * Dynamiczny model lokalizacji.

- * Model lokalizacji z ograniczoną dostawą.
- * Uogólniony model lokalizacji z ograniczoną dostawą.
- * Stochastyczny model lokalizacji z ograniczoną dostawą.
- * Wieloasortymentowy model lokalizacji z magazynami pośrednimi i z ograniczonymi dostawami.

Ogromna większość matematycznych modeli służących do opisu zadań wyznaczania optymalnej lokalizacji jest uznana jako wieloobektowe, z nieograniczonymi pojemnościami, dyskretne, deterministyczne i statyczne. Nie jest to zaskakujące, gdy weźmiemy pod uwagę wysiłek związany z uzyskaniem komputerowej realizacji algorytmów dających optymalne rozwiązania zagadnień lokalizacyjnych. Przykładowo, duże trudności napotyka się już przy konstrukcji optymalnego algorytmu dla modelu lokalizującego pojedynczy obiekt w ciągłej przestrzeni decyzyjnej. Stąd potrzeba stosowania heurystycznej metody wyznaczania suboptymalnego rozwiązania, do którego zbiegają rozwiązania kolejnych podproblemów powstałych w wyniku dekompozycji problemu podstawowego, przy jednoczesnej anumeracji. Z drugiej strony zagadnienia dyskretne i tak są w większości przypadków rozwiązane metodami aproksymacji rozwiązania optymalnego.

Przytoczone powyżej przykłady klasyfikowania modeli opisujących zagadnienia lokalizacyjno-transportowe pokazują, że głównym celem matematycznego modelowania tych zagadnień jest podanie praktycznych narzędzi wspomagających podejmowanie decyzji inwestycyjnych.

Biorąc pod uwagę możliwość różnorodnego podejścia do problemu, bądź ze względu na specyfikę konkretnych rozwiązywanych zadań, bądź ze względu na różne podejście do matematycznego sformułowania modelu, w klasie zadań lokalizacyjnych występują trzy podstawowe grupy zagadnień uwzględniających parametr czasu []. Są to:

- Zagadnienia lokalizacyjne statyczne.
- Zagadnienia lokalizacyjne semi-dynamiczne.
- Zagadnienia lokalizacyjne dynamiczne.

Sformułowania matematyczne tych zagadnień można przedstawić następująco:

Statyczny model lokalizacji

Definicja

Zagadnienie lokalizacyjne nazywamy statycznym, gdy nie uwzględnia ono horyzontu czasowego.

Model matematyczny przedstawia się następująco:

$$\min \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij} + \sum_j f_j(y_j) \quad (5.2.1)$$

przy ograniczeniach:

$$\sum_i x_{ij} = 1, \quad (5.2.2)$$

$$y_j - x_{ij} \geq 0, \quad (5.2.3)$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, \dots, I, \quad j = 1, \dots, J, \quad (5.2.4)$$

$$X = [x_{ij}], \quad Y = [y_j], \quad C = [c_{ij}]. \quad (5.2.5)$$

gdzie:

i - numer dostawcy,

j - numer odbiorcy,

x_{ij} - zmienna decyzyjna określająca udział i -tego dostawcy w realizacji zapotrzebowania j -tego odbiorcy,

y_j - zmienna lokalizacji przyjmująca wartości:

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli rozpatrywany jest } j\text{-ty odbiorca} \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

c_{ij} - koszty powiększania dostaw przez i -tego dostawcę dla j -tego odbiorcy
niezmienne w czasie,

C - macierz kosztów,

$f(\bullet)$ - funkcja kosztów binarnych zmiennych decyzyjnych.

Ograniczenie (5.2.2) zapewnia o zaspokojeniu zapotrzebowania, zaś ograniczenie (5.2.3) gwarantuje, że dany odbiorca zostanie obsłużony przez rozpatrywanego dostawcę.

Zadania statyczne charakteryzują się swoją niezależnością od horyzontu czasowego w postaci zbioru przedziałów czasowych.

Semi-dynamiczny model lokalizacji

Definicja

Zagadnienie lokalizacyjne nazywamy semi-dynamicznym, gdy nie uwzględnia ono horyzontu czasowego, a parametr czasu występuje w ograniczeniach.

Model matematyczny w tym przypadku jest następujący :

$$\min \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij} + \sum_j f_j(y_j) \quad (5.2.6)$$

przy ograniczeniach :

$$\sum_i x_{ij} = 1, \quad (5.2.7)$$

$$y_j - x_{ij} \geq 0, \quad (5.2.8)$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad (5.2.9)$$

$$AX \leq TY, \quad (5.2.10)$$

$$A = [a_{ij}], \quad X = [x_{ij}], \quad T = [T_{ij}], \quad Y = [y_j], \quad C = [c_{ij}], \quad (5.2.11)$$

$$i = 1, \dots, I, \quad j = 1, \dots, J.$$

gdzie :

i - numer dostawcy,

j - numer odbiorcy,

x_{ij} - zmienna decyzyjna określająca udział i -tego dostawcy w realizacji

zapotrzebowania j -tego odbiorcy,

y_j - zmienna lokalizacji przyjmująca wartości:

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli rozpatrywany jest } j\text{-ty odbiorca} \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

c_{ij} - koszty powiększania dostaw przez i -tego dostawcę dla j -tego odbiorcy
niezmiennie w czasie,

C - macierz kosztów,

A - macierz współczynników zmiennych x ,

T - macierz współczynników czasowych,

$f(\bullet)$ - funkcja kosztów binarnych zmiennych decyzyjnych.

Model ten różni się tym od poprzedniego, że występują tu dwie dodatkowe macierze A i T. Natomiast ograniczenia (5.2.7) i (5.2.8) są podobne do ograniczeń (5.2.2) i (5.2.3).

Semi-dynamiczny model lokalizacji traktuje występowanie w nim czasu jako pewnego, dodatkowo narzuconego ograniczenia (5.2.10). Przedstawiona charakterystyka jest jedną z wielu charakterystyk modelu, dla którego sam proces lokalizacji dotyczy pojedynczego, ustalonego przedziału czasowego. Jest to przypadek, w którym koszty i zapotrzebowania nie zmieniają się w czasie i ostatecznie jest on sprowadzany do pojedynczego modelu statycznego. Dla niektórych zadań współczynniki funkcji celu są niestacjonarne w badanym horyzoncie czasowym. Wykazując niezależność zmiennych decyzyjnych w kolejnym przedziale czasu od wartości tych zmiennych ze wszystkich okresów poprzedzających, model ten można sprowadzić do serii statycznych zadań lokalizacyjnych. W tym przypadku dane otrzymywane z okresu poprzedzającego mogą determinować dane wejściowe okresu następnego.

Dynamiczny model lokalizacji

Definicja

Zagadnienie lokalizacyjne nazywamy dynamicznym, gdy parametr czasu występuje jako indeks w zmiennych decyzyjnych.

Model matematyczny jest następujący:

$$\min \left(\sum_i \sum_j \sum_p c_{ijp} x_{ijp} + \sum_j f_{jp} (y_{jp}, y_{jp-1}) \right) \quad (5.2.12)$$

przy ograniczeniach :

$$\sum_i \sum_p x_{ijp} = 1, \quad (5.2.13)$$

$$y_{jp} - \sum_i x_{ijp} \geq 0, \quad (5.2.14)$$

$$\sum_p y_{jp} \leq 1, \quad (5.2.15)$$

$$x_{ijp} \geq 0, \quad y_{jp} \in \{0, 1\}, \quad (5.2.16)$$

$$A_p X_p \leq T_p Y_p, \quad (5.2.17)$$

$$A = [a_{ijp}], \quad X = [x_{ijp}], \quad T = [T_{ijp}], \quad Y = [y_{jp}], \quad C = [c_{ijp}], \quad (5.2.18)$$

$$i = 1, \dots, I, \quad j = 1, \dots, J, \quad p = 1, \dots, P.$$

gdzie:

- i - numer dostawcy,
- j - numer odbiorcy,
- p - numer okresu czasowego,
- x_{ijp} - zmienna decyzyjna określająca udział i -tego dostawcy w realizacji zapotrzebowania j -tego odbiorcy w czasie p ,
- y_{ip} - zmienna lokalizacji przyjmująca wartości :

$$y_{ip} = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli w czasie } p \text{ rozpatrywany jest } j\text{-ty odbiorca} \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

- c_{ijp} - koszty powiększenia dostaw przez i -tego dostawcę dla j -tego odbiorcy w czasie p ,
- C - macierz kosztów,
- A - macierz współczynników zmiennych x ,
- T - macierz współczynników czasowych,
- $f(\bullet)$ - funkcja kosztów binarnych zmiennych decyzyjnych.

Funkcja celu składa się z następujących składników :

- 1 - koszty transportowe ponoszone w każdym momencie czasowym p ,
- 2 - suma kosztów związanych ze zmianą lokalizacji dostawców między momentem czasowym $p-1$, a momentem czasowym p .

Dla ustalonego momentu czasowego ograniczenia (5.2.13), (5.2.14), (5.2.15) są podobne do analogicznych ograniczeń z semi-dynamicznego modelu lokalizacji.

O dynamice procesów należy mówić wtedy, gdy w wieloetapowym procesie decyzyjnym na każdym etapie trzeba podejmować optymalne decyzje. W szczególności problem lokalizacji jest dynamiczny, gdy spełnione są następujące dwa warunki :

- zapotrzebowania lub koszty zmieniają się w czasie ,
- koszty powiększania dostaw lub ich relokacji w horyzoncie czasowym są znaczące.

Jeżeli nie jest spełniony warunek pierwszy to mamy do czynienia ze statycznym modelem lokalizacji. W przypadku, gdy nie jest spełniony warunek drugi wystarczy rozważyć serię nie powiązanych ze sobą modeli statycznych.

6 METODA ROZWIĄZANIA ZADANIA LOKALIZACJI

6.1. Wprowadzenie

Jak już wspomnieliśmy we wstępie, zadania wyznaczenia optymalnej lokalizacji należą do klasy zadań programowania całkowitoliczbowego.

Pewna klasa zadań lokalizacyjnych jest sformułowana jako problem pokrycia. Najbardziej popularne modele pokrycia są definiowane na strukturze grafów i sieci. Jeżeli przyjmiemy, że dany jest zbiór odbiorców o określonych zapotrzebowaniach na usługi lub towary to problem sprowadza się do ustalenia sieci dostawców dla odbiorców, tak aby spełnione były ich zapotrzebowania. Gdy odbiorca został obsłużony przez dostawcę, to mówimy, że zapotrzebowanie jego zostało pokryte przez danego dostawcę i problem pokrycia należy sformułować określając numer i lokalizację dostawcy, tak aby nastąpiło pokrycie rozpatrywanego obszaru o minimalnym koszcie. Punkty na sieci, gdzie dostawca może być lokalizowany określone są jako potencjalne miejsca jego lokalizacji.

Lokalizując dostawców bierzemy pod uwagę trzy typy kosztów:

- 1) Koszt inwestycyjny, czyli koszt ustalenia lokalizacji dostawcy w danym miejscu. W przypadku, gdy dostawcy mogą być lokalizowani gdziekolwiek wzdłuż sieci, to przyjmujemy, że wszystkie tego typu koszty są równe.
- 2) Koszty transportowe świadczonych usług lub przewozu towarów między odbiorcą, a dostawcą określone przez nierosnącą funkcję odległości.
- 3) Koszt "karny", który ma zastosowanie tylko wtedy, jeżeli odbiorca nie jest obsłużony przez żadnego z dostawców.

W występujących w literaturze modelach zawarte są ograniczenia, dotyczące zarówno odbiorców, jak i dostawców.

Odnosnie odbiorców wymaga się, aby każdy z nich był obsłużony przez dostawcę, który jest zlokalizowany w określonej odległości od danego odbiorcy. Ustalony poprzez punkty obszar odległości dostawcy od odbiorcy jest regionem atrakcyjnym dla odbiorcy. Problem ten występuje na przykład przy rozważaniu wejścia nowego przedsiębiorstwa na istniejący rynek.

Ograniczenia nałożone na dostawców, dotyczą przypadku, gdy dostawca może tylko obsłużyć odbiorców, którzy są zlokalizowani w danej, niewielkiej odległości od niego. Tutaj możemy przyjąć, że połączenie z odbiorcami, którzy znajdują się w dalszych odległościach daje bardzo duże koszty transportowe świadczonej usługi.

Zgodnie z powyższymi ograniczeniami wyróżnia się następujące zagadnienia:

- minimalizacji maksymalnych kosztów transportowych.
- minimalizacji sumy kosztów transportowych
- minimalizacji sumy kosztów transportowych i kosztów inwestycyjnych
- minimalizacji sumy kosztów "karnych" i kosztów inwestycyjnych
- minimalizacji kosztów "karnych".
- minimalizacji kosztów inwestycyjnych.

6.2 Metody pokrycia

W wielu zadaniach pojawia się następujący problem: mając skończony zbiór V i ustalony zbiór podzbiorów V_j tego zbioru ($j=1, \dots, n$) spełniający warunek

$$\bigcup_{j=1}^n V_j = V \quad (6.2.1)$$

należy wybrać najmniejszą liczbę tych podzbiorów w ten sposób, aby w sumie tworzyły one cały zbiór V .

Przyjmijmy następujące założenia:

1. Określmy pewien zbiór dla lokalizacji odbiorców - V , $v_i \in V$.
2. Dla istniejących lub potencjalnych dostawców mamy ściśle określony zbiór - V_j , $v_j \in V_j$.
3. Załóżmy, że wszyscy dostawcy mają nieograniczoną pojemność.

Przyjmijmy oznaczenia:

- i - odbiorcy $i=1, \dots, m$,
- j - dostawcy $j=1, \dots, n$,
- x_j - zmienna decyzyjna określająca lokalizację dostawcy, przyjmująca wartości:

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli rozpatrywany jest } j\text{-ty dostawca} \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

z_i - zmienna decyzyjna określająca zaspokojenie zapotrzebowań odbiorców i przyjmująca wartości:

$$z_i = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli } i\text{-ty odbiorca nie jest obsłużony przez żadnego dostawcę} \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

a_{ij} - macierz określająca wzajemne zależności odbiorcy z dostawcą, przyjmująca wartości:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli } j\text{-ty dostawca pokrył zapotrzebowanie } i\text{-tego odbiorcy} \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

c_j - koszt inwestycyjny dla j -tego dostawcy, $c_j \geq 0$,

p_i - koszt "karny" wynikający z nieobsłużenia i -tego odbiorcy, $p_i \geq 0$,

S - podzbiór zbioru V_j definiowany następująco: $S = \{v_j; x_j = 1\}$,

r_i - promień obszaru, w którym zlokalizowany jest i -ty odbiorca,

s_j - promień obszaru, w którym zlokalizowany jest j -ty dostawca,

$d(v_i, v_j)$ - odległość między i -tym odbiorcą, a j -tym dostawcą,

$D(v_i, S)$ - odległość i -tego odbiorcy do dostawcy zlokalizowanego w zbiorze S .

Zadanie pokrycia polega na znalezieniu pokrycia o minimalnym koszcie i może być zapisane jako zadanie programowania całkowitoliczbowego ze zmiennymi binarnymi.

Poniżej przedstawione są różne warianty modeli matematycznych dla zadania pokrycia.

1) Model zadania pokrycia uwzględniający tylko koszty inwestycyjne:

$$\min \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad (6.2.2)$$

przy ograniczeniach:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \geq 1, \quad (6.2.3)$$

$$x_j \in \{0,1\}, \quad i=1,\dots,m, \quad j=1,\dots,n. \quad (6.2.4)$$

2) Model zadania pokrycia uwzględniający koszty inwestycyjne i koszty "karne":

$$\min \sum_{j=1}^n c_j x_j + \sum_{i=1}^m p_i z_i \quad (6.2.5)$$

przy ograniczeniach :

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \geq 1, \quad (6.2.6)$$

$$x_j \in \{0,1\}, \quad j = 1,\dots,n, \quad (6.2.7)$$

$$z_i \in \{0,1\}, \quad i = 1,\dots,m. \quad (6.2.8)$$

3) Model matematyczny zadania pokrycia uwzględniający koszty inwestycyjne i koszty transportowe.

Koszty transportowe dla i -tego odbiorcy określone są przez nierosnącą funkcję $f_i(d)$ określającą odległość między danym odbiorcą, a obsługującym go dostawcą.

$F_i(\infty)$ oznacza, że i -ty odbiorca nie jest obsługiwany przez żadnego dostawcę. Problem przedstawia się wówczas następująco:

$$\min_{S \subseteq V_j} \left\{ \sum_{j: v_j \in S} c_j + \sum_{i=1}^m f_i(D(v_i, S)) \right\} \quad (6.2.9)$$

przy ograniczeniach:

- dla dostawców:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli } d(v_i, v_j) \leq s_j \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

$a_{ij} = 0$ odpowiada ograniczeniu nałożonemu na dostawcę, które mówi, że połączenia z odbiorcami, którzy znajdują się w dalszych odległościach daje bardzo duże koszty transportowe świadczonej usługi.

- dla odbiorców:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli } d(v_i, v_j) \geq r_i \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

Dla ustalonego kosztu "karnego", $p_i \geq 0$, zaspokojenie zapotrzebowań odbiorców określone przez zmienną z_i wyraża się następująco:

$$z_i = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli } \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = 0 \text{ lub } D(v_j, S) > r_i \\ 0 & \text{jeżeli } \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq 1 \text{ lub } D(v_j, S) \leq r_i \end{cases}$$

Jeżeli zdefiniujemy funkcję $f_i(r)$ dla $i=1, \dots, m$ jako:

$$f_i(r) = \begin{cases} p_i & \text{jeżeli } r > r_i \\ 0 & \text{jeżeli } r \leq r_i \end{cases}$$

to wartość optymalna uzyskana na podstawie modelu uwzględniającego koszty inwestycyjne i koszty "karne" odpowiada wartości uzyskanej na podstawie modelu zawierającego koszty inwestycyjne i koszty transportowe.

Uwzględniając ograniczenia nałożone na odbiorców, funkcja celu (6.2.9) definiowana jest w następująco:

$$\min \left\{ \sum_{j=1}^n c_j x_j + \sum_{i=1}^m f_i \left(\min_{\{v_j: x_j=1\}} \{d(v_i, v_j)\} \right) \right\} \quad (6.2.10)$$

$$\text{przy ograniczeniu, } x_j \in \{0, 1\} \quad j = 1, \dots, n. \quad (6.2.11)$$

Poniżej opisane jest przekształcenie nieliniowej funkcji celu (6.2.10) do postaci liniowej.

Przyjmijmy zatem następujące założenia:

1. Wprowadźmy $m \cdot n$ ograniczeń, $m \cdot n$ nowych (0,1) wartości, aby zlinearyzować funkcję celu.
2. Oznaczmy przez $r_{i1} \leq r_{i2} \leq \dots \leq r_{in}$ odległość od i -tego odbiorcy do n potencjalnych miejsc lokalizacji dostawców w zbiorze V_j .
3. Przyjmijmy $r_{i,n+1} = \infty$.
4. Jeżeli w odległości r_{ik} od i -tego odbiorcy nie jest zlokalizowany żaden dostawca, to ustalmy go co najmniej w odległości $r_{i,k+1}$ od tegoż odbiorcy. W tym przypadku koszty transportowe dla i -tego odbiorcy wzrastają od wartości $f_i(r_{ik})$ (koszt lokalizacji dostawcy w odległości r_{ik} od odbiorcy) do wartości $f_i(r_{i,k+1})$. Tak więc koszt "karny" wynikający z nieustalenia lokalizacji dostawcy w odległości r_{ik} od i -tego odbiorcy jest określony przez różnicę funkcji $f_i(r_{i,k+1}) - f_i(r_{ik})$.

Zdefiniujmy zatem macierz $A = (a_{ik,j})_{(m \cdot n) \times n}$ i zmienną określającą zaspokojenie zapotrzebowań odbiorcy.

Macierz $A = (a_{ik,j})_{(m \cdot n) \times n}$ określająca wzajemne zależności odbiorcy z dostawcą przyjmuje następujące wartości:

$$a_{ik,j} = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli } d(v_i, v_j) \leq r_{ik} \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

Zmienna z_{ik} jest definiowana jako:

$$z_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli w odległości } r_{ik} \text{ od } i\text{-tego odbiorcy nie ma żadnego dostawcy} \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

Przyjmijmy, że rozwiązaniem zadania określonego funkcją celu (5.2.10) jest wartość zmiennej x_j . Wówczas koszty transportowe dla i -tego odbiorcy przedstawiają się następująco:

$$f_i(\min_{\{v_j: x_j=1\}} \{d(v_i, v_j)\}) = \min \sum_{k=1}^n (f_i(r_{i,k+1}) - f_i(r_{ik}))z_{ik} + f_i(r_{i1}) \quad (6.2.12)$$

przy ograniczeniach:

$$\sum_{j=1}^n a_{ik,j}x_j + z_{ik} \geq 1, \quad (6.2.13)$$

$$z_{ik} \in \{0,1\} \quad i = 1, \dots, m, \quad k = 1, \dots, n. \quad (6.2.14)$$

Dla zdefiniowanych powyżej kosztów transportowych zmienna z_{ik} przyjmuje wartości:

$$z_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli } \sum_{j=1}^n a_{ik,j}x_j = 0 \\ 0 & \text{jeżeli } \sum_{j=1}^n a_{ik,j}x_j \geq 1 \end{cases}$$

Uwzględniając wszystkie założenia i ograniczenia nałożone na zmienne decyzyjne, nieliniowa funkcja celu przetransformowana jest do postaci liniowej, której postać jest następująca:

$$\min \sum_{j=1}^n c_j x_j + \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n (f_i(r_{i,k+1}) - f_i(r_{ik}))z_{ik} + \sum_{i=1}^m f_i(r_{i1}) \quad (6.2.15)$$

przy ograniczeniach:

$$\sum_{j=1}^n a_{ik,j}x_j + z_{ik} \geq 1, \quad (6.2.16)$$

$$z_{ik} \in \{0,1\} \quad i = 1, \dots, m, \quad k = 1, \dots, n, \quad (6.2.17)$$

$$x_j \in \{0,1\} \quad j = 1, \dots, n. \quad (6.2.18)$$

Zadanie wielokrotnego pokrycia

Przyjmijmy następujące oznaczenia:

i - odbiorcy, $i = 1, \dots, m$,

- j - dostawcy, $j = 1, \dots, n$,
 b_i - liczba całkowita określająca ilość dostawców obsługujących i -tego odbiorcę,
 u_j - liczba całkowita określająca ilość dostawców umieszczonych w j -tej lokalizacji,
 x_j - zmienna decyzyjna określająca lokalizację dostawcy,
 a_{ij} - macierz określająca wzajemne zależności odbiorcy z dostawcą, przyjmująca wartości:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{gdy } j\text{-ty dostawca pokrył zapotrzebowanie } i\text{-tego odbiorcy} \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

- c_j - koszt inwestycyjny dla j -tego dostawcy $c_j \geq 0$,

Przyjmijmy, że każdy i -ty odbiorca musi być obsługiwany przez b_i dostawców. Model matematyczny dla zadania wielokrotnego pokrycia przedstawia się wówczas następująco:

$$\min \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad (6.2.19)$$

przy ograniczeniach:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i \quad (6.2.20)$$

$$0 \leq x_j \leq u_j \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n. \quad (6.2.21)$$

Jeśli natomiast przyjmiemy koszty inwestycyjne równe np. $c_j = 1$, dla $j = 1, \dots, n$, to zmienna y_i jest zdefiniowana następująco: $y_i = u_j - x_j$. Wówczas zadanie wielokrotnego pokrycia przyjmuje postać:

$$\min \sum_{j=1}^n u_j - \sum_{j=1}^n y_j \quad (6.2.22)$$

przy ograniczeniach:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} y_j \leq \sum_{j=1}^n a_{ij} u_j - b_i, \quad (6.2.23)$$

$$0 \leq y_j \leq u_j \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n. \quad (6.2.24)$$

Dla zdefiniowanego powyżej modelu zmienna określająca lokalizację dostawcy i będąca rozwiązaniem zadania wyznaczana jest w następujący sposób:

$$x_j = \max \left\{ 0, \max_{i: a_{ij} > 0} \left\{ b_i - \sum_{k=j+1}^n a_{ik} u_k - \sum_{k=1}^{j-1} a_{ik} x_k \right\} \right\} \quad (6.2.25)$$

gdzie:

- $\sum_{k=1}^{j-1} a_{ik} x_k$ - oznacza odbiorcę i -tego, który został obsłużony przez dostawcę już zlokalizowanego,
- $\sum_{k=j+1}^n a_{ik} u_k$ - górne ograniczenie nałożone na dostawcę, który mógłby być ustanowiony w lokalizacji $j+1, \dots, n$, aby pokryć zapotrzebowania odbiorcy.

Zastosowanie teorii sieci i grafów do zadania pokrycia

Wprowadźmy następujące pojęcia:

Siecią nazywamy uporządkowaną trójkę $S = \langle G, \{\varepsilon_i\}, \{\psi_j\} \rangle$ przy czym:

$G = (V, E, P)$ - dowolny graf,

$|V| = n, |E| = m, P \subset V \times E \times V$,

$\{\varepsilon_i\}$ - zbiór funkcji $\varepsilon_i: V \subset \mathbb{R}$, określonych na zbiorze wierzchołków grafu,

$\{\psi_j\}$ - zbiór funkcji $\psi_j: E \subset \mathbb{R}$, określonych na zbiorze gałęzi grafu,

Jeżeli oba zbiory funkcji $\{\varepsilon_i\}$ i $\{\psi_j\}$ są puste, to sieć staje się grafem G .

Grafem nazywamy uporządkowaną trójkę $G = (V, E, P)$ przy czym:

V - zbiór wierzchołków grafu,

E - zbiór gałęzi grafu,

P - relacja trójczłonowa ($P \subset W \times U \times W$) spełniająca następujące warunki:

a/ dla każdej gałęzi u istnieje taka para wierzchołków $x, y \in W$, że

$$\langle x, u, y \rangle \in P;$$

b/ jeżeli dla gałęzi u istnieją $\langle x, u, y \rangle \in P$ i $\langle v, u, z \rangle \in P$, to albo $x = v$ i $y = z$ lub $x = z$ i $y = v$.

Szczególnym przypadkiem relacji P jest relacja, w której każdej gałęzi u odpowiada wzajemnie jednoznacznie jedna para uporządkowana $\langle x, y \rangle \in WxW$, taka, że $\langle x, u, y \rangle \in P$. Wówczas takie grafy można zapisać w postaci dwójki uporządkowanej $G = (V, E)$, która nosi nazwę **grafu niezorientowanego**.

Dla grafu $G = (V, E, P)$ wierzchołek $x \in V$ i gałąź $u \in E$ są **incydentne**, gdy istnieje wierzchołek $y \in V$, taki, że $\langle x, u, y \rangle \in P$ lub $\langle y, u, x \rangle \in P$.

Stopniem wierzchołka grafu niezorientowanego nazywamy liczbę krawędzi incydentnych z danym wierzchołkiem.

Rozważmy zadanie lokalizacji, którego model matematyczny jest następujący:

$$\max_S \{z(S) : S \subseteq J, |S| = K\} \quad (6.2.26)$$

gdzie:

$z(S) = \sum_{i \in I} \max_{j \in S} a_{ij}$ - otrzymujemy na podstawie macierzy incydencji grafu niezorientowanego,

i - krawędź grafu, $i \in I$,

j - wierzchołek grafu, $j \in J$,

S - podzbiór zbioru wierzchołków, $S \subset J$,

K - podzbiór zbioru J , zawierający wierzchołki o największym stopniu,

a_{ij} - zero-jedynkowa macierz incydencji określona na podstawie grafu

$G = (V, E)$, przyjmująca wartości:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{gdy krawędź } j\text{-ta i wierzchołek } i\text{-ty są incydentne} \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

W tym przypadku zadanie pokrycia polega na wyznaczeniu zbioru wierzchołków S , pokrywającego maksymalną liczbę krawędzi incydentnych z wierzchołkami zbioru S .

Przyjmijmy następujące założenia:

1. Niech dla wierzchołków j, k funkcja $z(S)$ przyjmuje następujące wartości:

$$z(\{j\}) + z(\{k\}) = \begin{cases} z(\{j, k\}) + 1 & \text{gdy istnieje krawędź łącząca wierzchołki } (j, k) \\ z(\{j, k\}) & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

2. Ustalmy, że dla grafu $G = (V, E)$, $V(e)$ oznacza parę wierzchołków połączonych krawędzią $e \in E$.

Model matematyczny dla zadania pokrycia krawędzi grafu, sformułowany w oparciu o powyższe założenia jest następujący:

$$\max \sum_{e \in E} \sum_{v \in V(e)} x_{ev} \quad (6.2.27)$$

przy ograniczeniach:

$$\sum_{v \in V(e)} x_{ev} \leq 1, \quad (6.2.28)$$

$$x_{ev} - y_v \leq 0, \quad (6.2.29)$$

$$\sum_{v \in V} y_v = K, \quad (6.2.30)$$

$$x_{ev} \geq 0, \quad \forall e \in E, v \in V(e), \quad (6.2.31)$$

$$y_v \in \{0, 1\}, \quad \forall v \in V \quad (6.2.32)$$

gdzie:

y_v - zmienna decyzyjna przyjmująca wartości:

$$y_v = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli wierzchołek } v \text{ wchodzi do pokrycia} \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

x_{ev} - zmienna decyzyjna określająca pokrycie krawędzi e przez wierzchołek v .

Jeżeli krawędź e zdefiniujemy w ten sposób, że $e = (u, v)$ dla pewnych wierzchołków u, v , to:

$$x_{eu} + x_{ev} = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli } y_u + y_v \geq 1 \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

Liniowe sformułowanie problemu pokrycia, uzyskujemy, jeżeli pominiemy warunki nałożone na zmienne decyzyjne w modelu (5.2.27). Model matematyczny dla liniowego problemu pokrycia przedstawia się następująco:

$$\max \sum_{e \in E} \sum_{v \in V(e)} x_{ev} \quad (6.2.33)$$

przy ograniczeniach:

$$\sum_{v \in V(e)} x_{ev} \leq 1, \quad (6.2.34)$$

$$x_{ev} - y_v \leq 0, \quad (6.2.35)$$

$$\sum_{v \in V} y_v = K, \quad (6.2.36)$$

$$x_{ev} \geq 0, \quad \forall e \in E, v \in V(e), \quad (6.2.37)$$

$$0 \leq y_v \leq 1, \quad \forall v \in V \quad (6.2.38)$$

W tym przypadku zmienna decyzyjna y_v przyjmuje wartości:

$$y_v = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli wierzchołek } v \in K \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

Na podstawie modelu matematycznego (6.2.27) można uzyskać wartości bardzo bliskie rozwiązaniu optymalnemu, gdy liczba wierzchołków grafu jest stosunkowo duża i istnieje zbiór K -wierzchołków o największym stopniu, którego wymiar nie wzrasta zbyt szybko wraz z ilością wierzchołków grafu.

6.3. Metody redukcji

Zauważmy, że istotnym parametrem, który wpływa na skuteczność zastosowanej metody podczas rozwiązywania zadań z programowania całkowitoliczbowego, jest rozmiar zadania. Rozwiązanie uzyskujemy stosując pewną ilość kroków redukcyjnych. W przypadku bardzo rozbudowanych zadań rozwiązanie optymalne jest trudne do osiągnięcia. Ogólnie stosowaną metodą traktowania trudnych zagadnień dyskretnych jest zredukowanie ich rozmiaru poprzez zastosowanie prostego algorytmu redukcji.

Dla zadania pokrycia istnieje wiele efektywnych metod rozwiązania. Przedstawiona w pracy metoda polega na redukcji macierzy określającej wzajemne zależności między odbiorcą, a dostawcą.

Przyjmijmy następujące oznaczenia:

- A - macierz,
- I - zbiór wierszy, $i \in I, i=1, \dots, m$,
- J - zbiór kolumn, $j \in J, j=1, \dots, n$,
- R - wiersz macierzy, określający odbiorcę,
- C - kolumna macierzy, określająca dostawcę,
- P - podzbiór zbioru J , taki, że $P_j \subseteq I$,

- c - koszt inwestycyjny,
- p - koszt "karny",
- x_j - zmienna opisująca dostawców i przyjmująca wartość 1 dla każdego rozwiązania dopuszczalnego.

Istnieją trzy warianty rozwiązania postawionego zadania, w przypadku gdy:

1. Nie uwzględniamy żadnych kosztów.
2. Uwzględniamy tylko koszty inwestycyjne.
3. Uwzględniamy koszty inwestycyjne i koszty "karne".

Dla każdego z powyższych warunków przedstawiony jest algorytm postępowania.

Wariant 1. Nie uwzględniamy żadnych kosztów.

Krok 1. Usunięcie zerowych wierszy.

Jeżeli R_i jest zerowym wektorem dla pewnego i , to zadanie nie ma rozwiązania dopuszczalnego, gdyż i -te ograniczenie nie może być spełnione.

Krok 2. Usunięcie zerowych kolumn.

Jeżeli C_j jest zerowym wektorem dla pewnego j , to zadanie nie ma rozwiązania dopuszczalnego. $J \leftarrow J - \{j\}$

Krok 1 i krok 2 są stosowane zazwyczaj tylko raz, na początku redukcji. Jakkolwiek zerowe wiersze, czy kolumny mogą pojawić się po zastosowaniu następnych kroków redukcji.

Krok 3. Oszacowanie wartości x .

Jeżeli $R_i = e_k$, gdzie e_k jest wektorem jednostkowym z jedynką na k -tej pozycji dla pewnych wartości i, k , to $x_k = 1$ dla każdego rozwiązania dopuszczalnego. Kolumnę C_k można usunąć. Również można usunąć każdy wiersz R_t taki dla którego $t \in P_k$. Jest tak dlatego, że R_i nie może być pokryty przez C_k , zaś każdy element P_k będzie pokryty przez C_k .

Krok 4. Usunięcie dominujących wierszy.

Jeżeli $R_i \geq R_p$ dla pewnych i, p , to wiersz R_i można usunąć, gdyż pokrycie wiersza R_p pokrywa również wiersz R_i . Zatem $I \leftarrow I - \{i\}$.

Krok 5. Usunięcie dominujących kolumn.

Jeżeli $C_j \leq C_k$ to kolumnę C_j można usunąć. $J \leftarrow J - \{j\}$.

Wariant 2. Uwzględniamy tylko koszty inwestycyjne.

Algorytm składa się z następujących kroków:

Krok 1. Usunięcie zerowych wierszy.

Jeżeli R_i jest zerowym wektorem dla pewnego i , to zadanie nie ma rozwiązania dopuszczalnego, gdyż i -te ograniczenie nie może być spełnione.

Krok 2. Usunięcie zerowych kolumn.

Jeżeli C_j jest zerowym wektorem dla pewnego j , to zadanie nie ma rozwiązania dopuszczalnego. $J \leftarrow J - \{j\}$

Krok 3. Oszacowanie wartości x .

Jeżeli $R_i = e_k$, gdzie e_k jest wektorem jednostkowym z jedynką na k -tej pozycji dla pewnych wartości i, k , to $x_k = 1$ dla każdego rozwiązania dopuszczalnego. Kolumnę C_k można usunąć. Również można usunąć każdy wiersz R_t taki dla którego $t \in P_k$. Jest tak dlatego, że R_t nie może być pokryty przez C_k , zaś każdy element P_k będzie pokryty przez C_k .

Krok 4. Usunięcie dominujących wierszy.

Jeżeli $R_i \geq R_p$ dla pewnych i, p , to wiersz R_i można usunąć, gdyż pokrycie wiersza R_p pokrywa również wiersz R_i . Zatem $I \leftarrow I - \{i\}$.

Krok 5. Usunięcie dominujących kolumn.

Jeżeli $C_j \leq C_k$ to kolumnę C_j można usunąć. $J \leftarrow J - \{j\}$. Kolumna C_k pokrywa wszystkie elementy pokrywane przez C_j z mniejszym kosztem.

Wariant 3. Uwzględniamy koszty inwestycyjne i koszty "karne".

W tym przypadku algorytm przedstawia się następująco:

Wprowadźmy dodatkową zmienną y , dotyczącą odbiorców, taką że:

$$\sum_{i=1}^m y_i a_{ij} \leq c_j$$
$$0 \leq y_i \leq p_i$$

Krok 1. Wyznaczenie wartości y .

Wartość zmiennej y_k dla $k = 1, \dots, m$ wyznacza się następująco:

$$y_k = \min \left\{ p_k, \min_{j: a_{kj}=1} \left\{ c_j - \sum_{i=1}^{k-1} y_i a_{ij} \right\} \right\}$$

Krok 2. Wyznaczenie zbioru J^* .

Zbiór J^* jest podzbiorem zbioru J ($J^* \subset J$) utworzonym przez dodanie do zbioru J^* indeksu $k \in J$ dla którego zmienna y_k przyjmuje wartość maksymalną.

Krok 3. Wyznaczenie zbioru J^{**}

Zbiór J^{**} zawiera te numery kolumn, dla których y_k spełnia następujące zależności :

$$\sum_{i=1}^{k-1} y_i a_{ij} < c_j \quad \text{lub}$$

$$\sum_{i=1}^k y_i a_{ij} = c_j$$

Krok 4. Oszacowanie wartości x, z .

$$x_k = \begin{cases} 1 & \text{dla } k \in J^{**} \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

$$z_i = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli } \sum_{j \in J^{**}} a_{ij} = 0 \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

Jeżeli $c_j = 0$ to przyjmujemy, że $x_j = 1$ i usuwamy wszystkie wiersze i -te oraz wartości z_i dla których $a_{ij} = 1$,

Jeżeli $p_i = 0$ to przyjmujemy $z_i = 1$ i usuwamy wiersz i -ty.

Stosując powyższe kroki redukcji stwierdzamy, że :

- każdy wiersz $i \in I$ jest pokryty przez dokładnie jedną kolumnę $j \in J^{**}$,
- każdy wiersz $i \notin I$ dla którego $y_i = 0$ jest pokryty przynajmniej przez jedną kolumnę $j \in J^{**}$,
- każdy wiersz $i \notin I$, dla którego $y_i = p_i$ jest pokryty przez więcej niż jedną kolumnę $j \in J^{**}$.

7 Przykłady zastosowań zadania lokalizacji

7.1 Lokalizacja hydrantów na lotnisku

Analiza katastrof i wypadków lotniczych przeprowadzona przez kraje należące do ICAO wskazuje, że pożary stanowią znaczny procent zagrożenia dla życia ludzkiego. Zwykle związek przyczynowy pomiędzy katastrofą, a pożarem układa się tak, że pożar jest następstwem katastrofy lub wypadku lotniczego.

Problem powyższy spowodował, że zaistniała konieczność połączenia ratownictwa technicznego, chemicznego i medycznego w jednolity system ratowniczo-gaśniczy. Jednym z jego elementów jest system zaopatrzenia wodnego terenu lotniska. Podstawową częścią tego systemu jest sieć hydrantowa, której układ jest ważnym czynnikiem decydującym o skuteczności prowadzonej akcji ratowniczo-gaśniczej. Tak więc koniecznym stało się wyznaczenie optymalnej lokalizacji elementów ratownictwa lotniczego (hydrantów) na terenie portu lotniczego. Czas ugaszenia pożaru w działaniach ratowniczo-gaśniczych jest istotnym czynnikiem, gdyż od czasu trwania akcji ratowniczo-gaśniczej zależy życie ludzkie. Inspiracją do zajęcia się tą tematyką była katastrofa lotnicza samolotu AIRBUS 320 i stwierdzenie faktu iż rozmieszczenie hydrantów na na terenie Portu Lotniczego Warszawa-Okęcie .nie jest właściwe. Tak więc poniżej przedstawimy przykład zastosowania zadania lokalizacji do wyznaczenia rozmieszczenia hydrantów na terenie Portu Lotniczego Warszawa-Okęcie .

Dane podstawowe

Dnia 14.09.1993 o godz.17.34 uległ wypadkowi samolot pasażerski typu Airbus A-320/200 znak rejestracyjny D-AIPN należący do linii lotniczej "Lufthansa", odbywający rejs rozkładowy z Frankfurtu n/Menam do Warszawy.

Do wypadku doszło na terenie portu lotniczego Warszawa-Okęcie, na pasie 11-29. W tym samym miejscu zdarzyła się katastrofa samolotu TU-134 w 1979 roku. Wypadek został zauważony przez kontrolerów z Wieży Kontroli Ruchu Lotniczego. Punkt Alarmowy Lotniskowej Straży Pożarnej został powiadomiony o zdarzeniu o godz 17.34 przez Wieżę Kontroli Ruchu Lotniczego.

Bezpośrednio przed przyłotem samolotu, nad Warszawą przeszła gwałtowna ulewa połączona z silnym, porywistym wiatrem wiejącym ze zmiennych kierunków. W tych warunkach samolot podczas lądowania nie zdążył wyhamować przed końcem pasa i wjechał w sektor trawiasty na jego przedłużeniu. Następnie uderzył w wał ochronny i przed grzbietem przesunął się na drugą stronę urywając zawieszenie i lewy silnik oraz uszkadzając lewe skrzydło. W wyniku tego nastąpił wyciek paliwa, a następnie jego zapalenie.

Szczegółowy opis tego zdarzenia został przedstawiony w pracy []. Jednakże biorąc pod uwagę fakt, iż jest to z jednej strony przykład rzeczywisty zastosowania metod

rozwiązywania zadań lokalizacyjnych, a jednocześnie dotyczy on transportu lotniczego poniżej powtórzymy pewne fragmenty pracy [].

Rozpoznanie bezpośrednie

Zgłoszenie z Wieży Kontroli Ruchu Lotniczego lokalizowało tylko miejsce wypadku, nie podano typu samolotu i ilości pasażerów na pokładzie, informując jedynie o fakcie przebywania pasażerów w samolocie.

Samolot typu Airbus A-320 leżał kadłubem na ziemi, oparty prawym skrzydłem i ogonem o wał ziemny. Urwany został lewy silnik, a kadłub rozszczelniony. Wyjęcia: lewe przednie, tylne drzwi i wyjęcia awaryjne zostały otwarte. Na zewnątrz samolotu, na powierzchni krytycznej ok. 1200m² rozprzestrzenił się pożar rozlewiska paliwa. Płomienie przedostały się do wnętrza kadłuba.

Na miejscu zdarzenia załoga samolotu przystąpiła do ewakuacji pasażerów trapami ratunkowymi. Ewakuowało się 68 osób.

System zaopatrzenia wodnego

Przy strażnicy LSP znajdują się dwa podziemne zbiorniki wody każdy o pojemności 100 m³. Sieć hydrantowa lotniska zasilana jest przez sieć hydrantową miejską. Hydranty zlokalizowane są przy większych obiektach lotniska, wokół mijanek, a także w okolicach końców pasów startowych. Przy progu 29 pasa 11-29, w dniu zdarzenia nie znajdował się żaden hydrant. Najbliższe ujęcie wody było w odległości 500-800 m od miejsca zdarzenia.

Rozmieszczenie hydrantów na terenie poru lotniczego Warszawa-Okęcie podczas prowadzonej akcji ratowniczo-gaśniczej przedstawiono w [].

Od początku akcji tzn. przez LSP przyjęty został wariant zaopatrzenia wodnego przez dowożenie. Jednostki LSP /4 samochody/ uzupełniały wodę z hydrantów przy Terminalu i przy Cargo oraz ze zbiorników podziemnych przy strażnicy. Samochody PSP również realizowały taką koncepcję zaopatrzenia wodnego.

Ocena działań

W pierwszej fazie LSP prowadziła działania zgodnie z przyjętymi zasadami dla tego typu zdarzeń. Ponieważ ogień przedostał się do części pasażerskiej nieskuteczne okazało się podawanie prądów piany z działek. Sytuację komplikował fakt ściekania kerozyny pod kadłub, w miejsca osłonięte przed dostępem prądów gaśniczych, dlatego też rozwinięto linie szybkiego natarcia. W fazie tej 4 z 5 samochodów LSP zjechały

uzupełniając zapas wody, pozostały więc nieobsadzone stanowiska gaśnicze, które zajęły jednostki PSP. Wracające na teren akcji samochody LSP zmuszone były szukać innych stanowisk. Miało to niewątpliwie wpływ na skuteczność działań gaśniczych, gdyż skuteczność "lekkiej wody", w którą wyposażona jest LSP jest zdecydowanie wyższa niż skuteczność piany gaśniczej wytworzonej z "Roteoru".

Dojazdy pożarowe na terenie płyty lotniska są w technicznie dobrym stanie. Jednakże poruszanie się pojazdów po obszarze lotniska wymaga wykorzystania łączników posiadających łączność radiową z Wieżą Kontroli Ruchu Lotniczego. Dostęp do samolotu był utrudniony ze względu na ukształtowanie terenu.

Akcja ratowniczo-gaśnicza przeprowadzona była w sposób sprawny i efektywny, co wielokrotnie powtarzali świadkowie akcji. Na pozytywną ocenę działań ma wpływ fakt, że udało się wszystkich wyprowadzonych przez załogę z samolotu rannych przenieść w bezpieczne miejsce. Ponadto udało się nie dopuścić do zniszczenia zbiornika paliwa w prawym skrzydle i wybuchu 6 ton paliwa /odzyskanego po akcji/.

Warto również zwrócić uwagę, że akcja prowadzona była w warunkach użytkowania 1 pasa startowego. Port lotniczy nie został zamknięty.

W wyniku wypadku poważnie został uszkodzony samolot Airbus A-320, który w wyniku późniejszego pożaru uległ zniszczeniu. Zniszczony został także nowoczesny, nowo zainstalowany system naprowadzania samolotów na pas startowy.

Sformułowanie zadania lokalizacji wybranych elementów ratownictwa lotniczego metodą pokrycia

W pewnej klasie przykładów spotykamy się ze zjawiskiem, gdy nie istnieje możliwość określenia punktów na sieci, które w zadaniach lokalizacji nazywane się odbiorcami. Natomiast dla istniejących lub potencjalnych dostawców mamy ściśle określone wierzchołki. Nie określony w sposób jawny zbiór wierzchołków odbiorców, gdy istnieje możliwość ich wystąpienia na całej rozpatrywanej przestrzeni, sprowadza to zadanie do problemu znanego w literaturze jako problemu pokrycia. Z takim zagadnieniem mamy do czynienia w przypadku lokalizacji rozmieszczenia wybranych elementów ratownictwa lotniczego (hydrantów) na terenie płyty lotniska. Przyjmijmy zatem następujące założenia:

-
- 1) nie przeprowadzamy minimalizacji kosztów transportowych, ze względu na ratowanie życia ludzkiego,

- 2) zgodnie z międzynarodowymi przepisami odnośnie bezpieczeństwa ruchu lotniczego, rozpatrywany teren musi być w pełni pokryty usługą, więc koszty "karne" pomijamy.

Przyjmijmy oznaczenia:

- i - odbiorca, samolot, który uległ wypadkowi,
 j - dostawca, hydrant,
 y_i - zmienna decyzyjna określająca lokalizację hydrantów i przyjmująca następujące wartości:

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli lokalizowany jest } j\text{-ty hydrant} \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

- z_i - zmienna decyzyjna określająca zaspokojenie zapotrzebowań odbiorców, przyjmująca wartości :

$$z_i = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli } i\text{-ty odbiorca nie jest obsłużony} \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

- a_{ij} - macierz incydencji przyjmująca wartości :

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli } j\text{-ty hydrant może obsłużyć } i\text{-tego odbiorcę} \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

- f_i - koszt inwestycyjny dla j -tego hydrantu, $f_i > 0$,
 p_i - koszt "karny", wynikający z nieobsłużenia i -tego samolotu, $p_i > 0$,
 x_{ij} - zmienna decyzyjna określająca udział j -tego dostawcy w realizacji zapotrzebowania i -tego odbiorcy,
 D - macierz współczynników zmiennych x ,
 T - macierz współczynników czasowych.

Rozpatrywany problem zalicza się do semi-dynamicznego modelu lokalizacji, gdzie parametr czasu występuje w ograniczeniach.

Sformułowanie matematyczne problemu jako zadania pokrycia przedstawia się następująco:

$$\min \sum_{j=1}^J f_j y_j + \sum_{i=1}^I p_i z_i$$

przy ograniczeniach:

$$\sum_j a_{ij} y_j + z_i \geq 1,$$

$$z_i \in \{0, 1\},$$

$$y_j \in \{0, 1\}.$$

Zgodnie z założeniem drugim, z którego wynika, że każdy samolot, który uległ wypadkowi musi być objęty usługą przynajmniej przez jeden hydrant, można przyjąć $p_i = \infty$. Wówczas model matematyczny zadania sformułowany w oparciu o powyższe oznaczenia zmiennych przedstawia się następująco :

$$\min \sum_{j=1}^J f_j y_j$$

przy ograniczeniach :

$$\sum_{j=1}^J a_{ij} y_j \geq 1,$$

$$y_j \in \{0, 1\}, \quad j \in J$$

$$a_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i \in I, \quad j \in J.$$

W szczególnym przypadku przyjmujemy, że $f_i = 1$ dla wszystkich $i = 1, \dots, J$. Zgodnie z definicjami pokryć przedstawionymi przez A.Kolen'a [], powyższy model jest typu "minimum cost covering".

Szczegółowy opis tego zadania został przedstawiony w pracach [] [] [].

7.2 Lokalizacja pomocy nawigacyjnych

Nawigacja podstawowa mimo swojej niezawodności i licznych innych zalet ma również bardzo istotne wady, ograniczające możliwość zastosowania w lotnictwie proponowanych przez nią metod. Po pierwsze zastosowanie klasycznych metod nawigacji wymaga wzrokowej obserwacji punktów orientacyjnych (przedmiotów terenowych). Po drugie metoda ta mimo wielu technicznych środków i udogodnień jest pracochłonna i wymaga kłopotliwych manipulacji przyrządami i mapami. Rozwiązaniem powszechnie stosowanym są metody i

środki radionawigacji i radiolokacji. Wszystkie środki używane w nawigacji samolotu stanowią jego układ nawigacyjny. Są one tak dobrane aby stworzony układ mógł sprostać potrzebom samolotu. Zasada działania środków nawigacyjnych opiera się na promieniowaniu i odbiorze fal elektromagnetycznych. Zasięg ich działania zależy od mocy tych urządzeń, długości fali i warunków rozchodzenia się fal oraz wymaganej dokładności. W zależności od miejsca pracy (ustawienia) radiotechniczne urządzenia dzielą się na naziemne i pokładowe. Do naziemnych systemów zalicza się m.in. radiolatarnie, radiomierniki naziemne, markery, stacje radarowe. Do pokładowych urządzeń zalicza się radiokompassy, radary pokładowe, urządzenia dopplerowskie służące do pomiaru kąta znoszenia i prędkości podróży, itp. W pracy [] została przeprowadzona analiza problemu rozmieszczenia pomocy nawigacyjnych w FIR Warszawa. Polegała ona na badaniu intensywności przelotów statków powietrznych i układu dróg lotniczych. Przecinanie się dróg lotniczych nad niektórymi punktami radionawigacyjnymi powoduje nadmierne zagęszczenie ruchu lotniczego i obniża przepustowość systemu kontroli ruchu. Wiąże się z tym potrzeba instalowania dodatkowych pomocy nawigacyjnych. To z kolei powoduje niepotrzebne wydłużenie czasu lotu statku powietrznego, zmusza pilota do częstych zmian kursu w konsekwencji pociąga za sobą wzrost kosztów przelotu. Stąd też istotnym się staje problem właściwego rozmieszczenia pomocy nawigacyjnych.

Zagadnienie lokalizacji pomocy nawigacyjnych można rozważać w następujących przypadkach

- Wyznaczanie optymalnego rozwiązania dla określonej liczby pomocy nawigacyjnych.
- Rozbudowanie układu pomocy nawigacyjnych poprzez dodanie dodatkowych punktów lokalizacji.

Wymienione powyżej zadania można również zapisać podobnie jak zagadnienie opisane w paragrafie 7.1. W tym przypadku wystarczy przyjąć następujące oznaczenia :

i - odbiorca, samolot, zlokalizowany, przez radiolatarnię,
 j - dostawca, radiolatarnia
 y_i - zmienna decyzyjna określająca lokalizację radiolatarni i przyjmująca następujące wartości:

$$y_j = \begin{cases} 1 & , \text{gdy } j - \text{ta radiolatarnia jest lokalizowany} \\ 0 & , \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

z_i - zmienna decyzyjna określająca zaspokojenie zapotrzebowań odbiorców, przyjmująca wartości :

$$z_i = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli } i - \text{ty odbiorca nie jest obsłużony} \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

a_{ij} - macierz incydencji przyjmująca wartości :

$$a_{ij} \quad a_{ij} = \begin{cases} 1 & , \text{gdy } j - \text{taradiolarnia moze obsluzyc } i - \text{tego odbiorce} \\ 0 & , \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

f_i - koszt inwestycyjny dla j -tej radiolarni $f_i > 0$,

p_i - koszt "karny", wynikający z nie obsłużenia i -tego samolotu, $p_i > 0$,

x_{ij} - zmienna decyzyjna określająca udział j -tego dostawcy w realizacji zapotrzebowania i -tego odbiorcy,

D - macierz współczynników zmiennych x ,

T - macierz współczynników czasowych.

Zauważmy zatem iż sformułowanie matematyczne problemu lokalizacji radiolarni można również przedstawić jako zadania pokrycia. identycznie jak w paragrafie 7.1 Jak wynika z przytoczonych powyżej przykładów istnieje w transporcie lotniczym dość znaczna liczba przykładów związania z problemami bezpieczeństwa ruchu lotniczego. Zadania te z reguły można zapisać jako zadania pokrycia i zastosować metodę redukcji. Do takich zadań zaliczyć jeszcze można problem rozmieszczenia radarów, straży pożarnych, punktów ratownictwa lotniczego.

