Raport Badawczy

Research Report

RB/72/2002

Wybrane metody agregacji grafu i ich zastosowania w systemach transportowych

B. Mażbic-Kulma

Instytut Badań Systemowych
Polska Akademia Nauk

Systems Research Institute
Polish Academy of Sciences

POLSKA AKADEMIA NAUK

Instytut Badań Systemowych

ul. Newelska 6

01-447 Warszawa

tel.: (+48) (22) 8373578

fax: (+48) (22) 8372772

Kierownik Pracowni zgłaszający pracę:
Dr Barbara Mażbic-Kulma

Warszawa 2002

Wybrane metody agregacji grafu i ich zastosowania w systemach transportowych

1. Wstęp

Jak ogólnie wiadomo [1] , [2] , [3] ,[5], [8] system transportowy jest zdefiniowany trzema zasadniczymi wielkościami:

- zadaniem - potrzebą przemieszczania obiektów (ładunków lub (i) osób)
- składem - rodzajem i liczbą elementów określających wyposażenie i załogę systemu,
- organizacją - sposobem oddziaływania elementów systemu podczas realizacji zadania.

Systemem przewozowym nazwiemy system transportowy, który realizuje zadanie przemieszczania obiektów.. Zadania przewozowe określają potrzeby klientów systemu. Są one z kolei scharakteryzowane poprzez następujące wielkości:

rodzaj i ilość obiektów jaką należy przewieźć

trasę przewożonych obiektów,

termin przewożenia.

W literaturze przedmiotu istnieje wiele klasyfikacji systemów transportowych. I tak np.:

ze względu na rodzaj przewożonych obiektów (transport towarowy, osobowy),

ze względu na ilość przewożonych obiektów (transport regularny, sporadyczny)

ze względu na trasę przewożonych obiektów (transport wewnątrzzakładowy, miejski, międzymiastowy, międzynarodowy)

ze względu na rodzaj drogi (transport kolejowy, drogowy, lotniczy, morski).

Teoria systemów transportowych [5] nie zajmuje się bezpośrednio badaniem zjawisk fizycznych, lecz badaniem modeli tych zjawisk. Model systemu transportowego [1] powinien być tak skonstruowany aby mógł zastąpić rzeczywisty system będąc jednocześnie narzędziem umożliwiającym rozwiązanie konkretnego zadania transportowego. Przystępując do opisu matematycznego sieci transportowej np. kolejowej, autobusowej, miejskiej czy lotniczej wprowadzamy zwykle pojęcie grafu połączeń. Wierzchołkami tego grafu są zwykle (w zależności od rozpatrywanego zagadnienia bądź stacje kolejowe [1] ,[3], bądź przystanki autobusowe [7] , czy też w przypadku transportu lotniczego – porty lotnicze [5] itp.). Gałęzie tego grafu pozwalają określić istniejące bezpośrednie połączenia między wierzchołkami grafu.. Jak łatwo można zauważyć taki graf może mieć zarówno dużą liczbę wierzchołków jak i połączeń. Posługiwanie się nim jest trudne i ma duży wpływ na czas wykonywanych obliczeń. Stąd też w niniejszej pracy przedstawimy dwie metody agregacji wierzchołków grafu połączeń. Pierwsza z nich dotyczy agregacji grafu skierowanego (tzn. takiego grafu którego gałęziami są łuki). Druga ma zaś zastosowanie wtedy gdy rozpatrywanymi gałęziami grafu są krawędzie.. Przedstawione poniżej metody pozwalają na znaczne zmniejszenie zarówno liczby wierzchołków jak i gałęzi rozpatrywanego grafu połączeń.

2. Graf połączeń

Rozważmy pewien obszar. Na tym obszarze wyróżnimy pewne punkty, które ponumerujemy kolejnymi liczbami naturalnymi. Otrzymamy, zatem zbiór wyróżnionych punktów:

$$I = \{ 1,2,...,i,j,...,I\}$$

Punkty te mogą połączone między sobą. Powstaje wówczas zbiór numerów połączeń:

$$U = \{ 1,2,...,u,...,U\}$$

oraz funkcja $P(i.u,j)$ ($P \subset I \times U \times I$) określona następująco:

$$P(i.u,j) = \begin{cases} 1 & gdy\ istnieje\ polaczenie\ punktu\ i\ z\ punktem\ j \\ 0 & w\ przeciwnym\ przypadku \end{cases}$$

spełniająca następujące warunki:

1 $P : I x U x I \rightarrow \{ 0, 1\}$

2 $\forall_{u \in U} \forall_{i,j \in I} (i,u,j) \in P \vee (j.u,i) \in P$

Tak zdefiniowany graf będziemy dalej nazywać grafem połączeń. Poniżej przedstawimy dwa przykłady takich grafów:

Przykład 1
Każdy proces produkcyjny polega na przetwarzaniu dóbr przez kolejne urządzenia (środki produkcji) aż do otrzymania wyrobów finalnych. Kolejność wykonywana tych operacji jest z góry narzucona poprzez przyjętą technologię. Stąd też proces produkcyjny można przedstawić za pomocą grafu G = { I , U , P } , gdzie I jest zborem numerów urządzeń (środków produkcji), U jest zbiorem numerów połączeń, a funkcja P określa kolejność przetwarzania. Tak zdefiniowany graf połączeń G jest nazywany zwykle grafem produkcji.

Przykład 2
Przyjmijmy, iż rozpatrywanym obszarem jest Polska. Zbiór I jest zbiorem numerów stacji kolejowych w Polsce, zaś zbiór U zbiorem numerów torów kolejowych. W tym przypadku

funkcja P określa która stacja z którą są połączone. Tak zdefiniowany graf nazywany jest w literaturze siecią kolejową.

3. Agregacja grafu połączeń

Zdefiniowany powyżej graf połączeń może składać się zarówno z dużej liczby wierzchołków jak i gałęzi. Posługiwanie się nim w celu znalezienia np. najkrótszej drogi między dwoma wierzchołkami jest skomplikowane i czasochłonne. Stąd też zaistniała konieczność agregacji tych grafów.

3.1. **Agregacja strukturalna**

Niech dany będzie graf połączeń $G = \{I, U, P\}$ Dla dalszych rozważań będziemy zakładać, że:

- Graf G jest unigrafem (tzn., jeżeli między dwoma wierzchołkami i,j istnieje połączenie to jest ono dokładnie jedno.
- Graf G jest grafem skierowanym (tzn., iż dla każdego elementu zbioru U spełniony jest warunek:

  $$(i \neq j \wedge (i,u,j) \in P) \Rightarrow (j,u,i) \notin P \qquad gdzie \quad i,j \in I \ , u \in U$$

- Graf G nie zawiera pętli tzn. dla każdego wierzchołka $i \in I$: $(i.u,i) \notin P$
- Graf G nie zawiera dróg cyklicznych, tzn., że jeżeli istnieje droga między wierzchołkiem i a wierzchołkiem j to nie istnieje droga między wierzchołkiem j a wierzchołkiem i

Przyjmując powyższe założenia graf **G = { I , U , P }** można zapisać w postaci
$G = \langle I, \Gamma \rangle \ gdzie \quad \Gamma : I \rightarrow 2^I$.

Wprowadzimy teraz pojęcie macierzy relacji oraz warstwy grafu G:

Definicja 3.1.1.
Macierz $A = [a_{ij}]_{mxm} gdzie \quad m = \overline{\overline{I}}$

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & gdy \quad j \in \Gamma(i) \\ 0 & w \ przeciwnym \ przypadku \end{cases}$$

nazywamy macierzą relacji grafu G.

Zauważmy, że przy przyjętych założeniach elementy macierzy relacji $dla \quad i = j$. są zerami $(a_{ij} = 0 \ dla \quad i = j)$

Definicja 3.1.2
Ciąg podzbiorów wierzchołków grafu $W_1, W_2, ..., W_k \subset I$. nazywamy warstwami, jeżeli spełnione są następujące warunki:

1 jeżeli $x \in W_1 \ \Rightarrow \Gamma_x^{-1} = \emptyset$

2 jeżeli $x \in W_k \Rightarrow \Gamma_x^{-1} \subset \{W_1, W_2, ..., W_{k-1}\}$

3 jeżeli $x \in W_k$, $k > 0$ to $\Gamma_x^{-1} \cap W_{k-1} \neq \emptyset$

4 $\bigcup_{k=1}^{K} W_k = I$

gdzie :

Γ_x - zbiór tych wierzchołków $y \in I$ dla których istnieje droga z wierzchołka x do wierzchołka y (zbiór następników wierzchołka x).

Γ_x^{-1} - zbiór tych wierzchołków $y \in I$ dla których istnieje droga z wierzchołka y do wierzchołka x (zbiór poprzedników wierzchołka x).

Za Korzanem [4] przytoczymy teraz następujące twierdzenia:

Twierdzenie 3.1.1
Zbiór wierzchołków tworzących warstwę grafu połączeń G spełniającego założenia 1 – 4 tworzy jeden z podgrafów pustych [1] grafu G.

Twierdzenie 3.1.2
Jeżeli $x \in W_l$ to $\Gamma_x \subset \{W_{l+1}, W_{l+2}, ..., W_k\}$ *gdzie* k oznacza liczbę warstw.

Jak łatwo można zauważyć w wyniku podziału grafu na warstwy otrzymujemy trójkątną macierz relacji A' Prawdziwe jest także ogólne twierdzenie:

Twierdzenie 3.1.3
Niech $W_1, W_2, ..., W_k$. są warstwami grafu G, i zakładamy , że wierzchołki grafu G zostały tak przenumerowane, że jeżeli $(i \in W_s \;,\; j \in W_t \wedge s < t) \Rightarrow i < j$. To wówczas elementy a_{ij}' macierzy relacji A' spełniają następujący warunek : $a_{ij}' = 0$ dla $j \leq i$.
Dowód :
Dla $j = i$ element $a_{ii}' = 0$ gdyż z założenia 3 rozpatrywany graf nie ma pętli.
Dla $j < i$ możliwe są dwa przypadki :

- o wierzchołki i, j należą do tej samej warstwy. Wówczas $a_{ij}' = 0$ gdyż z twierdzenia 2.1.1 wynika, iż wewnątrz warstwy nie ma połączeń.
- o wierzchołek j należy do warstwy wcześniejszej niż wierzchołek i. Wówczas korzystając z twierdzenia 2.1.2 wynika, że $a_{ij}' = 0$.

c.n.u

Korzystając z powyższego twierdzenia będziemy więc zakładać, że: $a_{ij} = 0$ dla $j \leq i$.
Dla dalszych rozważań wyróżnimy teraz dwa typy połączeń między wierzchołkami grafu:

1 Połączenie szeregowe

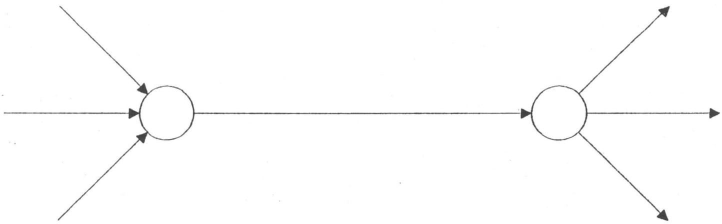
Definicja 3.1.3
Ciąg wierzchołków $i, j_1, j_2, ..., j_n$ *gdzie* $i < j < j_2 < .... < j_n$ jest połączony szeregowo wtedy i tylko wtedy gdy spełniony jest następujący warunek:

---
[1] Grafem pustym nazywamy graf którego zbiór gałęzi jest zbiorem pustym.

$\Gamma_i = \{j_1\}$, $\Gamma_{j_1} = \{j_2\}$,............$\Gamma_{j_{n-1}} = \{j_n\}$ $\wedge$ $\Gamma_{j_1}^{-1} = \{i\}$,..........,$\Gamma_{j_n}^{-1} = \{j_{n-1}\}$,

W przypadku gdy $j \in \Gamma_i$ oraz wierzchołki i, j są połączone szeregowo to zachodzi następujący warunek: $\Gamma_i = \{j\}$ $\Gamma_j^{-1} = \{i\}$

Połączenie szeregowe na rysunku można przedstawić następująco:



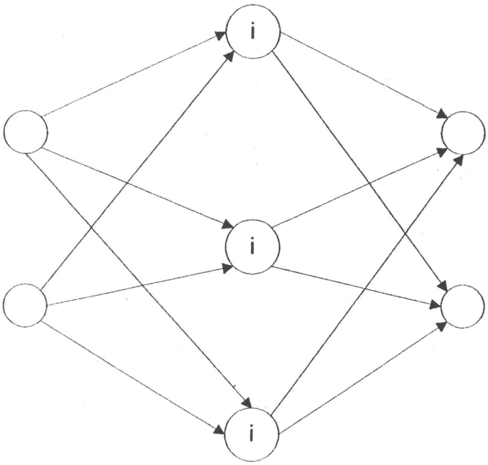
2 Połączenie równoległe

Definicja 3.14

Ciąg wierzchołków i_1, i_2, ...,i_n jest połączony równolegle wtedy i tylko wtedy gdy spełniony jest następujący warunek:

$$(\Gamma_{i_1} = \Gamma_{i_2} = \dots\dots = \Gamma_{i_n}) \wedge (\Gamma_{i_1}^{-1} = \Gamma_{i_2}^{-1} = \dots\dots = \Gamma_{i_n}^{-1})$$

Połączenie równoległe można na rysunku przedstawić następująco:



Wprowadzimy teraz pojęcie agregacji szeregowej i równoległej.:

Agregacja szeregowa:
Załóżmy , że wierzchołki $k, l_1, l_2, ...l_n$ są połączone szeregowo. Wówczas agregacja szeregowa zbioru wierzchołków $\{k, l_1, l_2, ...l_n\}$ polega na zastąpieniu go jednym wierzchołkiem (agregatem) .Nową macierz relacji A_1 otrzymujemy z macierzy A przez podstawienia $a_{kj} = a_{l_n}$ i $a_{l_1 j} = a_{l_2 j} = ... = a_{l_n j} = 0$ *dla* $j = 1,2, ...n$.
Można zatem łatwo udowodnić następujące twierdzenie:

Twierdzenie 3.1.4
Jeżeli wierzchołki k,l są połączone szeregowo to agregacja tych wierzchołków odpowiada lewostronnemu pomnożeniu macierzy A przez macierz: $L = [L_{st}]$ *gdzie* :

$$l_{ss} = 1 \quad dla \quad s \neq k, l$$
$$l_{kk} = 0, \quad l_{ll} = 0, \quad I_{kl} = 1$$
$$l_{st} = 0 \quad dla \quad pozostalyc\ h.$$

Lemat 2.1.1
Jeżeli wierzchołki *i, j, k* gdzie $(i < j < k)$ są połączone szeregowo to kolejność agregacji nie jest istotna.

Lemat ten jest oczywiście prawdziwy przy agregacji n wierzchołków połączonych szeregowo.

Lemat 2.12
Jeżeli wierzchołki $i , j_1 , j_2 , ..., .j_n.$ $(i < j_1 < j_2 < .... < j_n)$ są połączone szeregowo to

$$L(i , j_1 , j_2 , ..., .j_n) = L(i , j_n) .... L(i , j_2) L(i , j_1)$$

Lemat 2.13
Jeżeli wierzchołki $i , j_1 , j_2 , ..., .j_n.$ oraz $k , l_1 , l_2 , ..., l_m.$ są połączone szeregowo i

$$\{ k , l_1 , l_2 , ..., l_m\} \cap \{ i , j_1 , j_2 , ..., .j_n\} = \emptyset$$

to macierze $L(i , j_1 , j_2 , ..., .j_n)$ i $L(k , l_1 , l_2 , ..., l_n)$ komutują.

Agregacja równoległa:
Załóżmy , że wierzchołki $k_1 , k_2 , ..., k_n$ są połączone równolegle. Wówczas agregacja równoległa zbioru wierzchołków $\{ k_1 , k_2 , ..., k_n \}$ polega na zastąpieniu go jednym wierzchołkiem k_1 (agregatem) o wejściach i wyjściach takich samych jak każdego z wierzchołków agregowanych.
Macierz relacji nowego grafu (o zagregowanych połączeniach równoległych) otrzymamy z macierzy A przez wyzerowanie wierszy i kolumn odpowiadającym zagregowanym wierzchołkom z wyjątkiem kolumny i wiersza o najniższym numerze. Tak więc $a_{k_2 j} = ... = a_{kn j} = 0$ *i* $a_{ik_2} = ... = a_{ik_n}. = 0$ *dla* $i, j = 1,2, ..., n.$

Możemy więc analogicznie do twierdzenia 3.1.4 sformułować następujące twierdzenie:

Twierdzenie 3.1.5
Jeżeli wierzchołki $k_1 , k_2 , ..., k_n$ są połączone równolegle to ich agregacja odpowiada pomnożeniu macierzy A lewo i prawostronnie przez macierz:

$$P = [p_{st}] \text{ gdzie } p_{ss} = 1 \text{ dla } s \neq k_2 , ..., k_n \quad i \quad p_{st} = 0 \text{ dla pozostałych}$$

Analogicznie jak dla połączeń szeregowych można łatwo udowodnić następujące lematy:

Lemat 3.1.4
Jeżeli wierzchołki k_1 , k_2 ,........., k_n są połączone równolegle to
$P(k_1,k_2,......,k_n) = P(k_1,k_n)P(k_1,k_{n-1})P(k_1,k_2)$

Lemat 3.1.5
Jeżeli wierzchołki k_1 , k_2 ,........., k_n i l_1 , l_2 ,........., l_m są połączone równolegle i

$$\{ k_1, k_2, ..., k_n \} \cap \{ l_1, l_2, ..., l_m \} = \emptyset$$

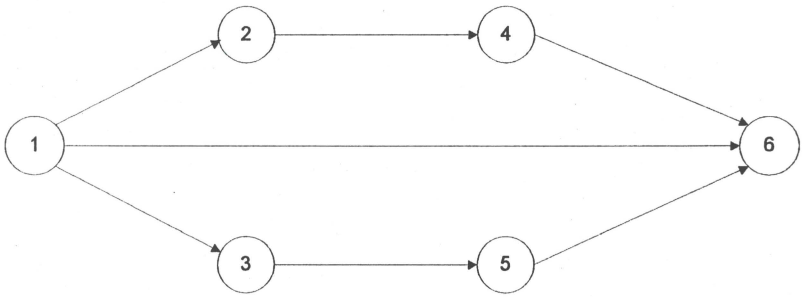
to macierze $P(k_1 , k_2 ,........., k_n)$ *i* $P(l_1 , l_2 ,........., l_m)$ komutują.

Algorytm agregacji strukturalnej grafu składa się z dwu na przemian wykonywanych operacji:

1. Agregacji połączeń szeregowych
2. Agregacji połączeń równoległych.

Ten cykliczny algorytm powtarzamy tak długo, dopóki nie wyczerpią się wszystkie możliwości agregacji wierzchołków grafu. Bazując na powyższym rezultatach można udowodnić następujące twierdzenie:
Twierdzenie 3.1.6
Rezultat agregacji jest taki sam nie zależnie od tego czy zaczniemy od agregacji połączeń szeregowych, czy równoległych.

Przykład 3.1.1
Rozpatrzmy następujący graf:



Macierz relacji rozpatrywanego grafu ma postać:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 1 \\ & & & & 0 & 1 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

1 krok algorytmu

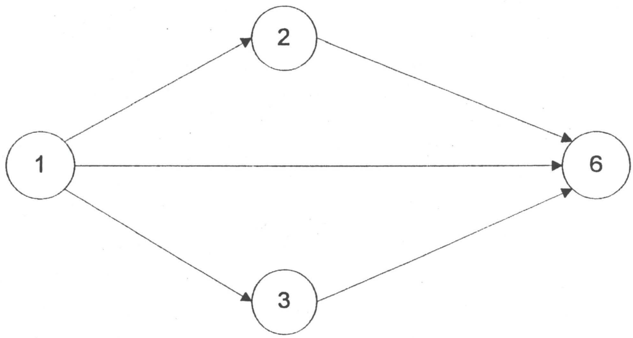
Jak łatwo można zauważyć dwie pary wierzchołków tzn. (2,4) i (3,5) są połączone szeregowo. Stąd macierz $L_1 = L(2,4)\ L(3,5) =$

$$
= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 1 & 0 \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & & & 1 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}
= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}
$$

i $A_1 = L_2 A =$

$$
= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 1 \\ & & & & 0 & 1 \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}
= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}
$$

Stąd graf $\hat{G}$ po agregacji szeregowej będzie następującej postaci:



2 krok algorytmu (agregacja połączeń równoległych)

Jak łatwo można zauważyć w macierzy A_1 dwie kolumny (druga i trzecia) są takie same. Stąd wykorzystując twierdzenie 2.1.5 macierz P jest postaci:

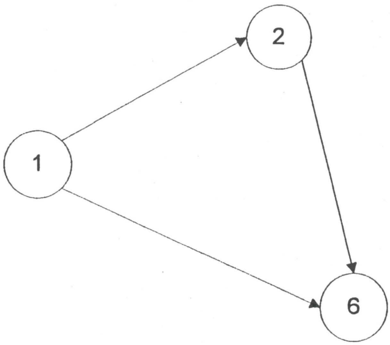
$$
P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 1 & 0 & 0 \\ & & & & 1 & 0 \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}
$$

i macierz relacji ma postać : $A_2 = P\ A_1\ P =$

$$
=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0\\&1&0&0&0&0\\&&0&0&0&0\\&&&1&0&0\\&&&&1&0\\&&&&&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&1&0&0&1\\&0&0&0&0&1\\&&0&0&0&1\\&&&0&0&0\\&&&&0&0\\&&&&&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0\\&1&0&0&0&0\\&&0&0&0&0\\&&&1&0&0\\&&&&1&0\\&&&&&1\end{bmatrix}=
$$

$$
=\begin{bmatrix}0&1&0&0&0&1\\&0&0&0&0&1\\&&0&0&0&0\\&&&0&0&0\\&&&&0&0\\&&&&&0\end{bmatrix}
$$

Tak więc w rezultacie otrzymujemy graf postaci:



3.2. **Agregacja liniowa**

Niech dany będzie graf połączeń **G = { I , U , P}** Podobnie jak poprzednio (punkt 2.1) będziemy zakładać, że:

- Graf G jest unigrafem
- Graf G nie zawiera pętli

Ponadto założymy, że

- G jest grafem niezorientowanym (tzn., iż dla każdego elementu zbioru U spełniony jest warunek:

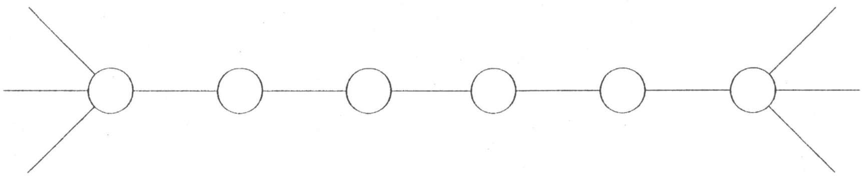
$$(i \neq j \wedge (i,u,j) \in P) \Rightarrow (j,u,i) \in P \qquad gdzie \quad i,j \in I \ , \ u \in U$$

Dla dalszych rozważań wprowadzimy teraz pojęcie połączenia liniowego.:

Definicja 3.2.1
Wierzchołki i oraz j są połączone liniowo wtedy i tylko wtedy gdy

- o istnieje marszruta łącząca wierzchołek i z wierzchołkiem j - $L(i, j)$
- o stopień każdego wierzchołka $k \in L(i, j)$ jest równy 2.

Połączenie liniowe można na rysunku przedstawić następująco:



Poniżej przedstawimy algorytm agregacji połączeń liniowych.
Wprowadzimy następujące oznaczenia:
Ĝ = {Ĭ,Ŭ,P } - graf który powstaje po dokonaniu liniowej agregacji wierzchołków,
$A = \lfloor a_{ij} \rfloor_{IxI}$ - macierz połączeń

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & gdy \quad (i,u,j) \in P \quad i,j \in I \\ 0 & w \ przeciwnym \ przypadku \end{cases}$$

$T = \{t_1, t_2, ..., t_m\}$ - zbiór takich trójek $t_j = (j, w_{1j}, w_{2j})$ gdzie j - numer kolumny dla

której $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 2$, j=1,2,........,m

w_{1j} - numer pierwszego wiersza w którym dla kolumny j $a_{ij} = 1$
w_{2j} - numer drugiego wiersza w którym dla kolumny j $a_{ij} = 1$.

1. Dla każdej kolumny j macierzy A obliczamy $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}$
2. Dla każdej kolumny macierzy A dla której $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 2$ wyznaczamy
   $t_j = (j, w_{1j}, w_{2j})$ zdefiniowane powyżej. Otrzymujemy zbiór $T = \{t_1, t_2, ..., t_m\}$
3. Rozpatrujemy pierwszy element $t_1 = (1, w_{11}, w_{21})$ zbioru T i sprawdzamy czy numery wierszy w_{11} , w_{21} nie występują jako wyróżnione numery kolumn należące do zbioru T :
   (*) w_{11}= j lub w_{21}= j dla $j \in T$

   a. jeżeli nie zachodzi warunek (*) to :
      $T = \{t_2, t_3, ..., t_m\}$; $\hat{I} = I - \breve{I}$: $\breve{U} = U \cup \tilde{U}$
      gdzie

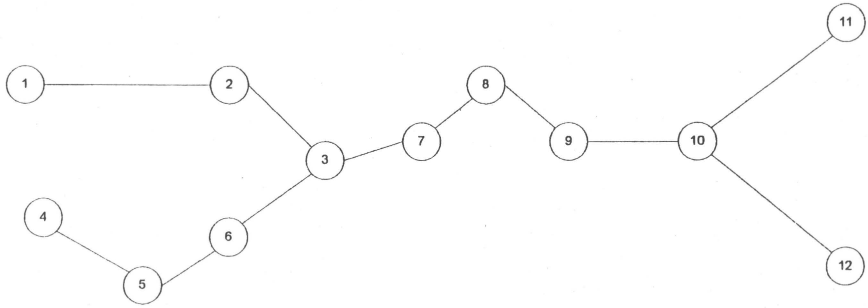
$\breve{I}$ - zbiór wierzchołków pośrednich marszruty między wierzchołkami określonymi w t_l,
$\tilde{U}$ - połączenie pomiędzy wierzchołkami określonymi w t_l.

b. jeżeli zachodzi warunek (*) to dołączamy kolejno te trójki dla których ten warunek jest spełniony i postępujemy analogicznie jak w punkcie a).

4 Sprawdzamy czy zbiór T jest pusty. Jeżeli tak to koniec działania algorytmu, jeżeli nie to bierzemy następny element zbioru T i przechodzimy do punktu 3.

Przykład 2.2.1

Rozpatrzmy następujący graf



Dla przedstawionego powyżej grafu G macierz A *jest* postaci:

$$A = \begin{bmatrix} & 1 & & & & & & & & & & \\ 1 & & 1 & & & & & & & & & \\ & 1 & & & & 1 & 1 & & & & & \\ & & & & 1 & & & & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & & & & \\ & & 1 & & 1 & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & 1 & & & & \\ & & & & & & 1 & & 1 & & & \\ & & & & & & & 1 & & 1 & & \\ & & & & & & & & 1 & & 1 & 1 \\ & & & & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & & & 1 & & \end{bmatrix}$$

Stąd zgodnie z punktem 1 algorytmu wektor sum poszczególnych kolumn przedstawia się następująco:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Zbiór T jest w tym przypadku postaci: $T = \{t_1, t_2, t_3, t_4., t_5., t_6\}$ gdzie :

$t_1 = (2,1,3)$; $t_2 = (5,4,6)$; $t_3 = (6,3,5)$; $t_4 = (7,3,8)$; $t_5 = (8,7,9)$; $t_6 = (9,8,10)$;
Rozważmy zatem element $t_1 = (2,1,3)$ zbioru T. Zgodnie z punktem 3 proponowanego powyżej algorytmu sprawdzamy czy wierzchołki 1, 3 są nurami tych kolumn macierzy A dla których $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 2$. Ponieważ tak nie jest to zgodnie z punktem 3a zaprezentowanego algorytmu :

$$T := \{ t_2, t_3, t_4., t_5., t_6 \} \quad ; \quad \hat{I} = I - \{2\} \quad ; \quad \check{U} = U \cup \{u(1,3)\} ;$$

Następnie rozpatrujemy element $t_2 = (5,4,6)$. Zauważmy , iż w tym przypadku wierzchołek 6 jest numerem kolumny dla której $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 2$.. Stąd zgodnie z punktem 3b algorytmu elementy $t_2 = (5,4,6)$ i $t_3 = (6,3,5)$ łączymy ze sobą w następujący element { 5 , 6 , 4 . 3 }.

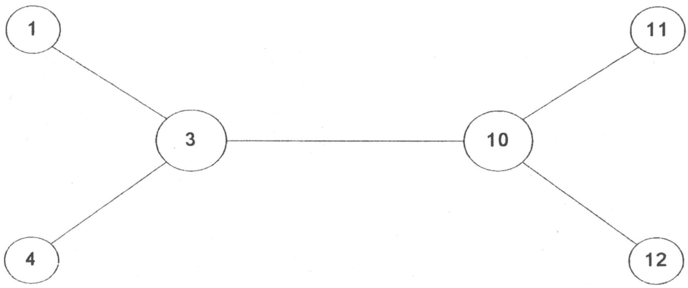
A więc nowy graf Ĝ będzie postaci $\hat{I} := \hat{I} - \{5,6\}$; $\check{U} := \check{U} \cup \{u(4,3)\}$;.

Zbiór T będzie teraz postaci : $T := \{ t_4., t_5, t_6 \}$. Następnie bierzemy element $t_4 = (7,3,8)$ i postępując analogicznie dołączamy do niego elementy $t_5 = (8,7,9)$ i $t_6 = (9,8,10)$

Powstaje element postaci : { 7 , 8 , 9 , 3, 10 }. Nowy graf Ĝ będzie postaci

$\hat{I} := \hat{I} - \{7,8,9\}$; $\check{U} := \check{U} \cup \{u(3,10)\}$. . Zbiór $T :=$ $\emptyset$. co oznacza zakończenie działania algorytmu.

Rozpatrywany przez nas graf po agregacji liniowej będzie postaci:



Bibliografia

[1] Ambroziak T.: O pewnych aspektach modelowania systemów transportowych , Prace naukowe. Transport z.44 OW PW Warszawa 2000.
[2] Bąk Czesław : Systemy transportowe , Politechnika Krakowska Kraków 1986.

[3] Jacyna M.: Modelowanie wielokryterialne w zastosowaniu do oceny systemów transportowych , Prace naukowe. Transport z.47 OW PW Warszawa 2001.
[4] Korzan B.: Elementy teorii grafów i sieci – metody i zastosowania, WNT Warszawa 1978.
[5] Leszczyński J.: Modelowanie systemów i procesów transportowych OW PW Warszawa 1994
[6] Malarski M.: Modelowanie procesów ruchu lotniczego dla kontroli i planowania lotów, Prace naukowe. Transport z.49 OW PW Warszawa 2002
[7] Mażbic-Kulma B. Automatyczny system wyznaczania rozkładu jazdy autobusów dla potrzeb PKS Materiały konferencyjne nt „ Matematyczne podstawy teorii systemów transportowych" PWN Warszawa – Łódź 1981..
[8] Piasecki S.: Optymalizacja systemów przewozowych, WKiŁ Warszawa 1973.