Raport Badawczy
Research Report

RB/51/2001

Wybrane zadania optymalizacji logistyki inżynieryjnej

Henryk Potrzebowski

Instytut Badań Systemowych
Polska Akademia Nauk

Systems Research Institute
Polish Academy of Sciences

POLSKA AKADEMIA NAUK

Instytut Badań Systemowych

ul. Newelska 6

01-447 Warszawa

tel.: (+48) (22) 8373578

fax: (+48) (22) 8372772

Pracę zgłosił: prof. dr hab. A.Straszak

Warszawa 2001

INSTYTUT BADAŃ SYSTEMOWYCH PAN
Pracownia Systemów Zarządzania i Organizacji

Henryk Potrzebowski

Wybrane zadania optymalizacji logistyki inżynieryjnej

Zadanie badawcze:
Badania operacyjne i zarządzanie w warunkach społeczeństwa informatycznego

Podzadanie badawcze:
Sieciowy model planowania finansowego z uwzględnieniem ryzyka w warunkach przechodzenia do gospodarki elektronicznej

Zespół realizujący pod kierunkiem:
Prof. dr hab. Andrzej Straszak

Warszawa, grudzień 2001

Wybrane zadania optymalizacji logistyki inżynieryjnej

Henryk Potrzebowski

Streszczenie. Globalizacja, outsourcing, specjalizacja, automatyzacja wymuszają konieczność usprawniania logistyki technicznej – dziedziny działalności zajmującej się organizacją przepływu materiałów, produktów, środków finansowych i informacji. W opracowaniu zapewne dalekim od pełnego ujęcia logistyki zwracamy jedynie uwagę na kilka wybranych choć charakterystycznych zagadnień. Znajdziemy wśród nich, poprzedzone pewnym wstępem, nieco wyidealizowane, praktyczne zagadnienia wyboru optymalnej wielkości partii zamówienia, zagadnienia lokalizacji jednego i wielu magazynów pośrednich oraz zagadnienie komiwojażera. Dołączone przykłady mają charakter dydaktyczny.

1. Zapasy – klasyfikacja

Zapasy surowcowe

Zapasy surowcowe tworzone są na wejściu procesu produkcyjnego, jako:

1. ***standardowe*** - wynikają z cykliczności produkcji, pełnią funkcję wyrównawczą
2. ***bezpieczeństwa***, - utrzymywana jako specjalna rezerwa dla kompensacji nieprzewidywalnych odchyleń
3. ***zapobiegawcze*** - tworzone jako efekt długofalowej spekulacji, specjalnych upustów cenowych
4. ***wymuszone*** - zwykle są niepożądane i wynikają z nałożenia pewnego obowiązku.

Fundamentalnym celem planowania, monitoringu i sterowania uzupełnieniami zapasów surowcowych jest niedopuszczenie do powstania ich braku. Wymaga to:

1. znajomości planu produkcji i wynikającego z niego zapotrzebowania na surowce, lub
2. stosownego oszacowania parametrów stochastycznych procesu zaopatrzenia

Jeżeli przyjąć, że zapotrzebowanie na surowce oraz warunki i ograniczenia składowania są znane, to zadanie sprowadza się do opracowania sterowania dostawami. Zakres takiego sterowania zależy od warunków pozyskiwania dostaw, a w szczególności - od elastyczności dostawców i jednostek ich wspomagających. Dostawca lub przewoźnik może określić warunki dotyczące:

- terminów składania zamówień,
- terminów możliwych dostaw,
- częstotliwości i wielkości dostarczanych partii.

Zapasy dystrybucyjne

Zapasy dystrybucyjne powstają na wyjściu procesu produkcji, o ile jej wielkość przekracza potrzeby odbiorców. W takich przypadkach zwykle przyjmuje się, że znana jest wielkość dopływu produktów do miejsca składowania, a zarządzanie zapasami koncentruje się na odpowiednim sterowaniu ich przepływu do odbiorców. Na sposób kształtowania się zapasów dystrybucyjnych znaczący wpływ ma sposób powiązania producenta z odbiorcą.

W przypadku *odbiorcy silnie związanego* (kontrakt, umowa) zapasy mogą powstawać w wyniku:

- przyśpieszenia produkcji przez producenta,
- spóźnionego odbioru przez odbiorcę,
- produkcji na potencjalne zapotrzebowanie, co wynika z określonej polityki obsługi klienta.

W przypadku *klienta nieznanego* tworzenie zapasów zwykle ma charakter spekulacyjny i wymaga podejmowania decyzji w warunkach niepewności i ryzyka. Podstawowym kryterium sterowania zapasami tego typu jest zakładany poziom obsługi ryzyka.

Fundamentalny problem zarządzania zapasami wynika z oddalenia miejsc produkcji od miejsc dystrybucji i polega na tworzeniu własnej infrastruktury logistycznej, tj. sieci magazynów tworzących sieć dystrybucji. Magazynom tym nadaje się rangę magazynów regionalnych, a zarządzający menadżerowie otrzymują szerokie uprawnienia decyzyjne. Istnieje też możliwość wsparcia informatycznego w sterowaniu stanami zapasów, np. w postaci systemu **DRP** (Distribution Requirements Planning).

Klasyfikacja zapasów

Klasyfikacja **ABC**

- klasa **A** – wyróżnione produkty o łącznej wartości 75% - zasada „just-in-time"
- klasa **B** – wyróżnione produkty o łącznej wartości 20%
- klasa **C** – wyróżnione produkty o łącznej wartości 5%

Klasyfikacja **XYZ**

- klasa **X** – produkty wykazujące statystyczną stałość dostawy/pobrania i sporadyczne zakłócenia
- klasa **Y** – produkty wykazujące okresową powtarzalność dostaw/pobrań
- klasa **Z** –produkty cechujące się nieregularnością dostaw/pobrań

Klasyfikacja ze względu na konsekwencje wystąpienia braku i konieczności modyfikacji programu produkcji:

1. strategiczne – o dużym wpływie na wynik końcowy produkcji i znacznym ryzyku nabycia,
2. „wąskie gardła" – o małym wpływie na wynik końcowy produkcji, ale o dużym ryzyku nabycia
3. typu „magnes" – o dużym wpływie na wynik końcowy produkcji i małym ryzyku nabycia
4. neutralne - o małym wpływie na wynik końcowy produkcji i małym ryzyku nabycia

Polityki utrzymywania zapasów surowcowych

Przesłanki planowania zapasów

W odniesieniu do dłuższego okresu planowania plan zaopatrzenia w surowce jest potrzebny przede wszystkim **dla zawarcia umów na dostawy od stałych dostawców** oraz do wskazania tych pozycji surowcowych, dla których takie umowy powinny być zawierane. Do zawarcia samej umowy nie jest potrzebna duża precyzja. Na podstawie planów sprzedaży należy:

- określić przewidywane zmiany w zapotrzebowaniu na surowce,
- dokonać klasyfikacji (ABC, XYZ) i wskazać surowce o dużej wartości, regularnie wykorzystywane.
- dla wyróżnionych grup określić statystyczne wielkości zapotrzebowania, jako podstawy dla umów o dostawy z przewidywaną opcją zmian.

Z wdrożeniem wspomagania komputerowego istnieje możliwość wykorzystania modelu formalnego przy wyznaczaniu planów potrzeb surowcowych i w sterowaniu zapasami. Ale trzeba przy tym zachować kontrolę merytoryczną.

Planowanie długoterminowe

Oznaczenia:

D – planowane zapotrzebowanie roczne, np. 100000 szt.
T – długość okresu planowania – ułamek roku, np. 0,083
n – liczba okresów planowania, np. n =12

Zależności:

$$n \bullet T = 1 \quad (\text{rok})$$

skąd:

$$n = \frac{1}{T}$$

Wielkość zapotrzebowania w okresie T (okresy są równe, każdy ma długość T) wyniesie:

$$Q = \frac{D}{n} = T \bullet D$$

Wzorcowe polityki planowania dostaw

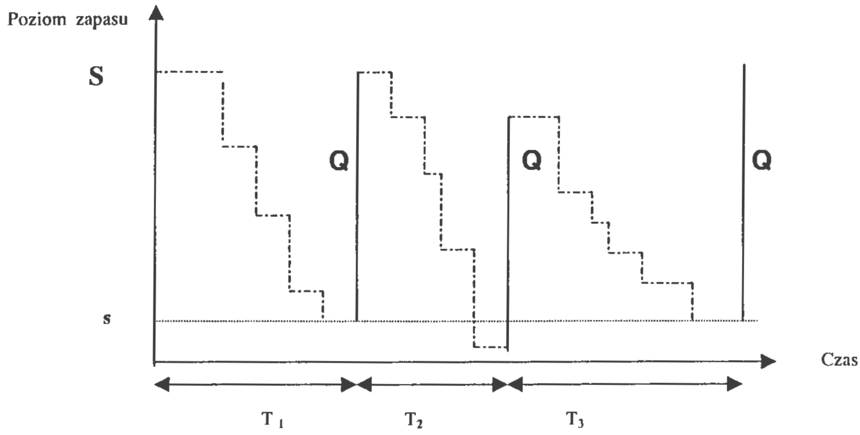
Określenie polityki zaopatrzenia w dany surowiec polega na wskazaniu pewnego wzorca zamówienia, którego charakteryzują:

- wielkość zamówienia, - **Q**
- cykl (termin) składania zamówień - **T**

Parametry te są wzajemnie zależne. Praktycznie na dobór tych parametrów wpływ mają:

S - racjonalny górny poziom zapasu,
s - racjonalny dolny poziom zapasu

Są to wielkości wynikające z technicznych możliwości składowania. Parametr **s** jest nazywany **punktem składania zamówienia**.



Mówimy o **polityce (T, S)**, jeżeli wiodącymi parametrami są **T** i **S**, oraz o **polityce (s, Q)**, jeżeli wiodącymi parametrami są s i Q.

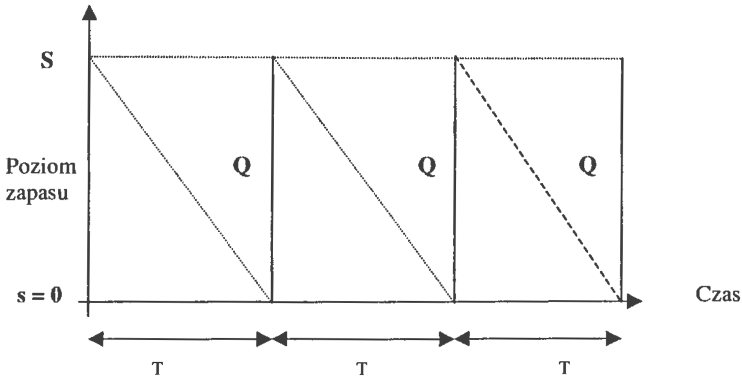
2. Określenie wielkości planowanej partii dostawy

Przesłanki ekonomiczne

W przypadku zakupu surowców, (jeżeli odrzucimy możliwość wystąpienia braku zapasów) w rachunku ekonomicznym należy uwzględnić:

- cenę zakupu,
- koszt obsługi pojedynczego zamówienia,
- koszt utrzymania zapasów (kosztów magazynowania + koszt zamrożonego kapitału).

Budując funkcję kosztów utrzymywania zapasów ograniczymy się do modelu uproszczonego, w przypadku, którego w danym horyzoncie planowania zarówno **T**, jak i **Q** są stałe.



Ekonomiczna wielkość zamówienia (EWZ)
(ang. Economic Order Quantity *- EOQ)*

Składniki kosztu:

D – wielkość zużycia dobra (surowca, produktu) w całym horyzoncie planowania **T.**
k_s – stały, uśredniony koszt obsługi jednego zamówienia.
c – koszt zakupu jednostki dobra.
c_m – koszt magazynowania jednostki dobra, $c_m = i \bullet c$, gdzie stopa **i** jest sumą
- stopy procentowej kapitałowej $\mathbf{i_p}$,
- stopy ubezpieczenia $\mathbf{i_u}$
- stopy kosztów magazynowania $\mathbf{i_s}$

Q – wielkość pojedynczego zamówienia.

Koszt łączny zakupów w horyzoncie T:

$$K_z = k_s D/Q + c_m Q/2 + cD \qquad (1)$$

Szukamy Q^* – wartości optymalnej pojedynczego zamówienia (partii). W tym celu pierwszą pochodną dK/dQ przyrównujemy do 0 i znajdujemy:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2Dk_s}{c_m}} \qquad (2)$$

Weryfikacja wielkości zamówienia

Niech D_w będzie wartością rocznego zapotrzebowania, a Q_w - ekonomiczną wielkością partii wyrażoną <u>wartościowo</u>, wtedy

$$Q_w = Q^* \bullet c = \sqrt{\frac{2 \bullet D_w \bullet k_s}{i}}, \text{ gdzie } D_w = D \bullet c \qquad (3)$$

Zależność ta pozwoli dokonać weryfikacji ekonomicznej wielkości zamówienia, co może być użyteczne w przypadku trudności z określeniem kosztu k_s.

Zauważmy, że dla $X = \sqrt{\frac{2 \bullet k_s}{i}}$ równanie $n = \frac{D_w}{Q_w}$ przy uwzględnieniu (3) przyjmuje postać

$$n \bullet X = \sqrt{D_w}\,. \qquad (4)$$

Jeżeli X jest stałe i równanie (4) zachodzi dla każdej pozycji asortymentowej α, to sumując stronami, po przekształceniu otrzymujemy:

$$X = \sum_\alpha \sqrt{D_w^\alpha} \Big/ \sum_\alpha n^\alpha$$

Otrzymane w ten sposób X można wykorzystać do skorygowania następnej partii zamówień zgodnie z formułą (4).

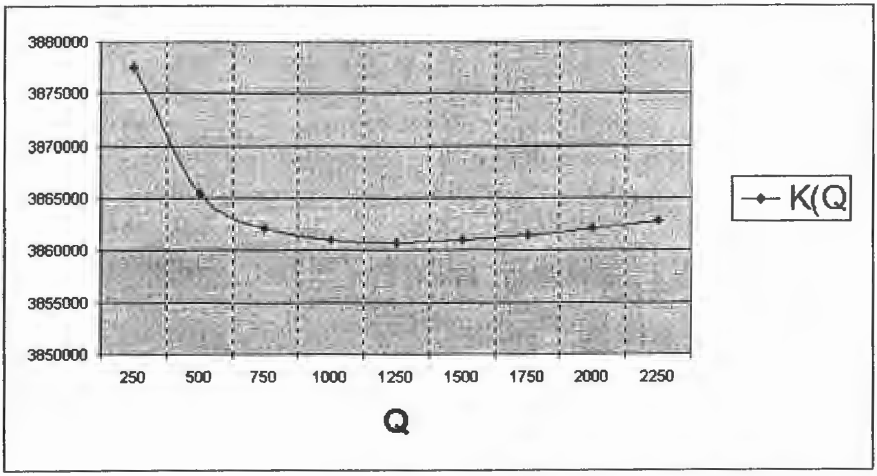
Zadanie A

Zbadaj funkcyjną zależność kosztu utrzymywania zapasu od wielkości zamówienia Q

$$K(Q) = ks*D/Q + km*Q/2 + c*D$$

D=	110000kg	potrzeby roczne
c=	35zł/kg	cena jednego kilograma
ks=	60zł/zamowienie	koszt obsługi jednego zamówienia
i=	25%	koszt utrzymania zapasów wyrażony za pomocą stopy procentowej
km=	8,75zł/kg	koszt przechowywania jednego kilograma w skali roku

Q=	250	500	750	1000	1250	1500	1750	2000	2250
K(Q)=	3877494	3865388	3862081	3860975	3860749	3860963	3861428	3862050	3862777



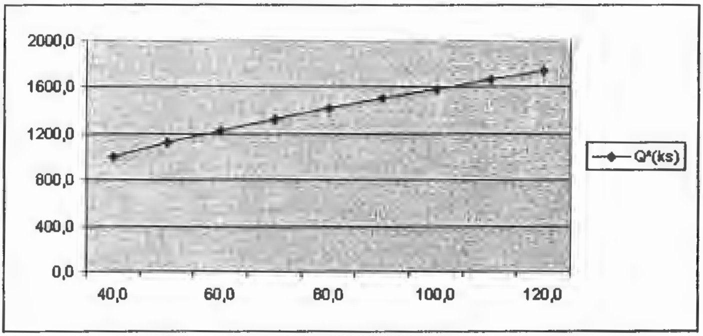
Q*=	1228,24kg	- optymalna wielkość zamówienia
n*=	89,56	- optymana liczba zamówień w roku
T*=	0,011166roku 4,075521dni	- optymalny okres powtarzalności (co 4 dni)

Zadanie B

Zbadaj ekperymentalnie wrażliwość optymalnej wielkości zamówienia Q*

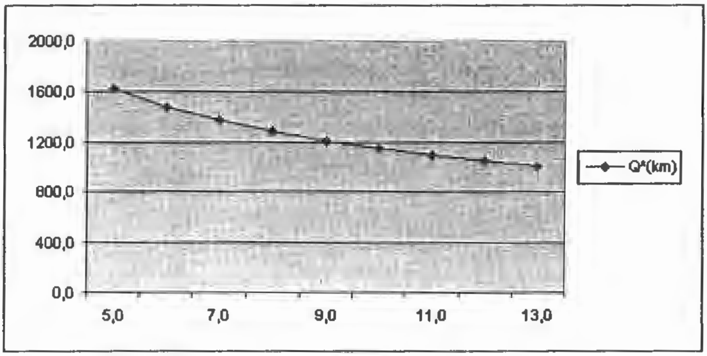
1) Badanie zależności Q*(ks)

ks=	40,0	50,0	60,0	70,0	80,0	90,0	100,0	110,0	120,0
Q*(ks)=	1002,9	1121,2	1228,2	1326,6	1418,2	1504,3	1585,6	1663,0	1737,0



2) Badanie zależności Q*(km)

km=	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0	11,0	12,0	13,0
Q*(km)=	1624,8	1483,2	1373,2	1284,5	1211,1	1148,9	1095,4	1048,8	1007,7



Zadanie C

Wyznacz optymalne wielkości zamówień przy zadanej pojemności magazynowej.
(zadanie programowania nieliniowego rozwiązane za pomocą narzędzia SOLVER)

Wariant A - nieaktywne ograniczenie magazynowe

		Zam1	Zam2	Zam3	
	A=	100000			pojemność magazynu
	a=	1000	2000	1500	jednostkowa zajętość powierz.
	D=	20	30	15	intensywności zapotrzebowania
	k_s=	100,00 zł	150,00 zł	120,00 zł	koszty stałe obsługi zamwienia
	k_m=	15,00 zł	20,00 zł	17,00 zł	k. jednostkowy magazynowania
	Q*=	**16,33**	**21,21**	**14,55**	**optymalne wielko. zamówień**
ograniczenie		80584,51			< A
skladowe funkcji celu		244,95 zł	424,26 zł	247,39 zł	
funkcja celu		917 zł			minimalizowana

Wariant B - aktywne ograniczenie magazynowe

		Zam1	Zam2	Zam3	
	A=	100000			pojemność magazynu
	a=	1000	2000	1500	jednostko. zajętość powierzchni
	D=	40	60	30	**intensywności podwojone**
	k_s=	100,00 zł	150,00 zł	120,00 zł	koszty stałe obsługi p.zamwienia
	k_m=	15,00 zł	20,00 zł	17,00 zł	koszt jednost. magazynowania
	Q*=	**20,89**	**25,98**	**18,09**	**optymalne wielk. zamówień**
ograniczenie		100000			= A
skladowe funkcji celu		348,15 zł	606,21 zł	352,76 zł	
funkcja celu		1 307 zł			minimalizowana

Analiza wrażliwości

Niech ks1 i ks2 będą dwoma wariantami kosztów obsługi partii dostaw o wymiarach odpowiednio równych Q1 i Q2. Uwzględniając (1) można napisać, że

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{\sqrt{k_{s1}}}{\sqrt{k_{s2}}}$$

Przyjmując $\gamma = {}^{k_{s1}}\!/_{k_{s2}}$ prostą formułę korekty ekonomicznej wielkości zamówienia w przypadku zmiany kosztów obsługi zamówienia:

$$Q_2 = Q_1 \bullet \sqrt{\gamma}$$

Przypadek wyodrębnionej usługi transportowej

W celu uwzględnienia kosztu transportu, należy do formuły (1) wbudować składową kosztową transportową, która w ogólności jest zależnością złożoną, nie dającą się łatwo wyrazić analitycznie. Pomijając w większości skomplikowane metody modelowania z użyciem zmiennych całkowitoliczbowych stosunkowo łatwe może okazać się podejście wielowariantowe, które można scharakteryzować następująco:

1. Wybierz listę potencjalnych wariantów liczby dostaw danego surowca w ciągu roku
2. Dla każdego z nich rozpatrz podwarianty planu transportu, wybierz wariant optymalny
3. Dla każdego wariantu dostaw wyznacz całkowity koszt zaopatrzenia dodając do składowej transportowej pozostałe składowe kosztowe występujące w formule kosztowej (1)
4. Porównaj koszty całkowite, wybierz wariant najtańszy.

Zagadnienia wyboru magazynu pośredniego

Zagadnienie wyboru jednego magazynu

Zagadnienie to znane jest w badaniach operacyjnych jako problem Webera. Polega na wyborze takiej lokalizacji magazynu, przy której magazyn będzie położony najbliżej wszystkich punktów dostawy lub odbioru. Wynikowe zadanie jest zadaniem optymalizacji względem dwóch współrzędnych: współrzędnej x i współrzędnej y położenia magazynu. Rozwiązanie zależy od przyjętej miary odległości: prostokątnej, euklidesowej,.. Pokazane jest to na załączonym arkuszu.

Zagadnienie wyboru wielu magazynów

Zagadnienie to jest rozszerzeniem zagadnienia lokalizacji jednego magazynu, jest jednak bardziej złożone. Formalnym modelem zagadnienia jest zadanie optymalizacji całkowitoliczbowej. Poza szczególnymi przypadkami, zadanie to należy do trudno rozwiązywalnych zadań, z reguły wymagających użycia metod podziału i ograniczeń. Przykład zagadnienia rozwiązanego na arkuszu formułujemy następująco:

Literatura, materiały pomocnicze

1. L. Słomiński: Materiały pomocnicze do wykładów z Logistyki inżynieryjnej
2. S. Krawczyk: Zarządzanie procesami logistycznymi. PWE, Warszawa, 2001.

Wybór lokalizacji jednego magazynu

Metryka prostokątna

wsp.x	wsp.y	Funkcja	Dost/Zapotrzeb	KosztJednostk	w
20	450	dostawca	50	7,0	350,0
200	69	dostawca	900	3,0	2700,0
60	320	dostawca	300	6,0	1800,0
480	95	dostawca	700	10,0	7000,0
25	400	dostawca	250	9,0	2250,0
315	130	dostawca	120	4,0	480,0
220	340	dostawca	50	8,0	400,0
405	150	dostawca	500	5,5	2750,0
120	130	odbiorca	200	8,3	1660,0
30	460	odbiorca	1000	5,0	5000,0
350	40	odbiorca	380	3,0	1140,0
420	225	odbiorca	700	7,5	5250,0
180	20	odbiorca	300	9,0	2700,0
50	380	odbiorca	290	6,7	1943,0
		SumaDostaw	2870	SumaW=	35423,0
		SumaPotrzeb	2870	0,5*SumaW=	17711,5

Liczymy x0

lp	wsp.x	w	v		x0 - I	x0 -II
1	20	350,0	350,0			
5	25	2250,0	2600,0			
10	30	5000,0	7600,0			
14	50	1943,0	9543,0			
3	60	1800,0	11343,0			
9	120	1660,0	13003,0			
13	180	2700,0	15703,0			
2	200	2700,0	18403,0	>=0,5*SumaW	200,00	**214,84**
7	220	400,0	18803,0			
6	315	480,0	19283,0			
11	350	1140,0	20423,0			
8	405	2750,0	23173,0			
12	420	5250,0	28423,0			
4	480	7000,0	35423,0			

Liczymy y0

lp	wsp.y	w	v		y0 - I	y0 -II
13	20	2700,0	2700,0			
11	40	1140,0	3840,0			
2	69	2700,0	6540,0			
4	95	7000,0	13540,0			
6	130	480,0	14020,0			
9	130	1660,0	15680,0			
8	150	2750,0	18430,0	>=0,5*SumaW	150,00	**162,66**
12	225	5250,0	23680,0			
3	320	1800,0	25480,0			
7	340	400,0	25880,0			
14	380	1943,0	27823,0			
5	400	2250,0	30073,0			
1	450	350,0	30423,0			
10	460	5000,0	35423,0			

Wybór lokalizacji jednego magazynu

Metryka euklidesowa

wsp.x	wsp.y	Funkcja	Dost/Zap	KosztJed	w	w*x	w*y
20	450	dostawca	50	7,0	350,0	7000	157500
200	69	dostawca	900	3,0	2700,0	540000	186300
60	320	dostawca	300	6,0	1800,0	108000	576000
480	95	dostawca	700	10,0	7000,0	3360000	665000
25	400	dostawca	250	9,0	2250,0	56250	900000
315	130	dostawca	120	4,0	480,0	151200	62400
220	340	dostawca	50	8,0	400,0	88000	136000
405	150	dostawca	500	5,5	2750,0	1113750	412500
120	130	odbiorca	200	8,3	1660,0	199200	215800
30	460	odbiorca	1000	5,0	5000,0	150000	2300000
350	40	odbiorca	380	3,0	1140,0	399000	45600
420	225	odbiorca	700	7,5	5250,0	2205000	1181250
180	20	odbiorca	300	9,0	2700,0	486000	54000
50	380	odbiorca	290	6,7	1943,0	97150	738340
		SumaD=	2870		35423,0	8960550	7630690
		SumaP=	2870				

Procedura iteracyjna:

Bieżąca	
x0=	272,0937
y0=	196,9775
Iteracja 0	
x0=	252,9585
y0=	215,4163
Iteracja 1	
x0=	263,7356
y0=	202,3828
Iteracja 2	
x0=	268,7996
y0=	198,6312
Iteracja 3	
x0=	271,0779
y0=	197,418
Iteracja 4	
x0=	272,0937
y0=	196,9775
Iteracja 5	
x0=	272,5449
y0=	196,8031

w/d	w*x/d	w*x/d
0,980	19,598	440,964
18,381	3676,299	1268,323
7,341	440,474	2349,196
30,228	14509,678	2871,707
7,036	175,890	2814,240
6,035	1900,880	784,490
2,628	578,133	893,478
19,508	7900,926	2926,269
9,989	1198,642	1298,529
13,987	419,607	6433,972
6,505	2276,793	260,205
34,875	14647,511	7846,881
13,533	2436,028	270,670
6,751	337,573	2565,555
105,454	26675,498	22716,514
283,232	77193,531	55740,994

Źródło: Wykład 3

Wybór lokalizacji jednego magazynu

Metryka euklidesowa

wsp.x	wsp.y	Funkcja	Dost/Zap	KosztJed		w*d	w*d^2	w*|d|
20	450	dostawca	50,0	7,0		139600,2	55680628,7	197329,4
200	69	dostawca	900,0	3,0		417211,1	64468544,7	589977,2
60	320	dostawca	300,0	6,0		519566,6	149971897,7	708836,8
480	95	dostawca	700,0	10,0		1316640,5	247648903,6	1758412,5
25	400	dostawca	250,0	9,0		815579,4	295631014,5	1144796,0
315	130	dostawca	120,0	4,0		22587,4	1062895,0	24576,9
220	340	dostawca	50,0	8,0		74655,6	13933664,2	101519,3
405	150	dostawca	500,0	5,5		269757,8	26461553,4	333304,9
120	130	odbiorca	200,0	8,3		325903,6	63983832,2	394266,7
30	460	odbiorca	1000,0	5,0		1993347,1	794686546,6	2818991,0
350	40	odbiorca	380,0	3,0		162335,5	23116511,9	200870,0
420	225	odbiorca	700,0	7,5		627245,8	74940441,7	826822,2
180	20	odbiorca	300,0	9,0		551185,6	112520569,7	776277,2
50	380	odbiorca	290,0	6,7		642096,4	212191323,4	901159,9
		SumaD=	2870,0		**K(x0,y0)=**	7877712,6	2136298327,4	10777139,9
		SumaP=	2870,0			"A"	"B"	"C"

Rozwiązanie A (metryka euklidesowa)

x0=	311	Raport 1	311
y0=	177		177
		Raport 2	311
			177

Rozwiązanie B (bez pierwiastkowania)

Raport 3	253
	215
Raport 4	253
	215

Rozwiązanie C (metryka prostokątna)

Raport 5	229
	150
Raport 6	220
	150

Wykorzystanie narzędzia SOLVER.

Zadanie lokalizacji wielu magazynów

Dane:

- D[i] - pojemność magazynu i-tego
- K[i] - koszt stały utrzymywania magazynu i-tego
- C[i,j] - koszt jednostkowy dostawy produktu z i-tego magazynu do j-tego odbiorcy
- B[j] - zaptrzebowanie j-tego odbiorcy

Zmienne:

- X[i,j] - wielkość dostawy z i-tego magazynu do j-tego odbiorcy
- Y[i] - zmienna binarna wskazująca na wybór i-tej lokalizacji pod i-ty magazyn

Tabela Danych

D	K	C							
2400	1000	5	10	7	6	7	9	5	8
1500	700	12	9	13	7	8	7	8	9
2000	1700	8	3	14	12	14	7	5	10
1500	850	9	8	14	14	11	10	7	12
1200	1200	9	4	12	9	10	4	11	10
2000	900	8	10	4	13	14	12	7	7
2000	1500	10	7	3	11	5	9	9	3
	B=	500	850	600	400	450	700	1000	200	4700

Tabela zmiennych decyzyjnych

D*Y	Y	X								SumaXw
2400	1	500	0	0	400	0	0	0	0	900
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2000	1	0	850	0	0	0	0	1000	0	1850
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	[illegible]
1200	1	0	0	0	0	0	700	0	0	700
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2000	1	0	0	600	0	450	0	0	200	1250
	SumyXk=	500	850	600	400	450	700	1000	200	

Funkcja celu

Z(X,Y)= 25300

Zagadnienie komiwojażera

Zagadnienie komiwojażera jest modelem matematycznym organizacji usług objazdowych np. zaopatrzeniowca, który wyjeżdża z bazy po to, by dotrzeć do określonej liczby punktów w terenie, każdy z nich odwiedzić jeden raz, po czym wrócić do bazy. Trasa objazdu ma być najkrótsza.
Rozróżnia się symetryczne zadanie komiwojażera, gdy długość (koszt) połączenia z miasta A do miasta B jest taka sama, jak z B do A, oraz zagadnienie niesymetryczne, gdy ta zależność nie zachodzi.
Przedstawiamy sposób rozwiązania zagadnienia symetrycznego.

Symetryczne zagadnienie komiwojażera

Dane są:

m - liczba krawędzi grafu (liczba odcinków dróg o ruch dwustronnym, łączącym dwie miejscowości)

K_v - zbiór krawędzi incydentnych z v-tym wierzchołkiem grafu reprezentującego sieć połączeń drogowych pomiędzy miejscowościami

c_i - długość i-tej krawędzi

x_i - zmienna decyzyjna, definiowana w sposób następujący:

$$x_i = \begin{cases} 1, \text{ jeżeli i - ta krawędź wchodzi do drogi komiwojażera} \\ 0, \text{ w przypadku przeciwnym} \end{cases}$$

Zadanie polega na znalezieniu

$$Minimum \sum_{i=1}^{m} c_i x_i$$

przy warunkach:

$\sum_{i \in K_v} x_i = 2,$ dla każdego wierzchołka v

$\sum_{i \in C} x_i \geq 2,$ dla każdego podzbioru wierzchołków C, które mogą tworzyć podcykl

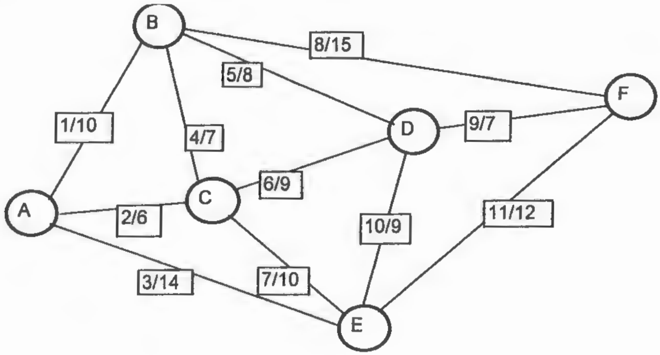
$0 \leq x_i \leq 1,$ dla każdej krawędzi, i = 1,2,...,n

x_i - całkowitoliczbowe, dla każdego i

Przykłady rozwiązania zadania pokazano na załączonych arkuszach kalkulacyjnych

Zadanie Komiwojażera (zadanie laboratoryjne, model dla grafu nieskierowanego)

Graf powiązań



Oznaczenia:

indeks połączenia/długość połączenia

Zmienne decyzyjne i model

xi - zmienna binarna równa 1, jeżeli połączenie i-te wchodzi do drogi komiwojażera
równa 0, jeżeli nie wchodzi.

cx=minimum, Ax=2, A'x>=2, 0<=x<=1, x-całkowitoliczbowe

Wektor odległości:

c=	10	6	14	7	8	9	10	15	7	9	12

Macierz ograniczeń (równania bilansowe dla węzłów grafu powiązań):

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11		Ax
A:	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	=	[illegible]
B:	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	=	[illegible]
C:	0	1	0	1	0	1	1	0	0	0	0	=	[illegible]
D:	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	=	[illegible]
E:	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	1	=	[illegible]
F:	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	=	[illegible]
r.elim.cyklu	0	0	1	0	1	1	1	1	0	0	0	=	[illegible]

Rozwiązanie startowe (nie jest ono dopuszczalne)

x= [illegible] cx= [illegible]

Rozwiązanie pierwsze-dwa podcykle: dodajemy równanie eliminujące cykl DEF

x= [illegible] cx= [illegible]

Rozwiązanie drugie - optymalne

x= [illegible] cx= [illegible]

Zadanie komiwojażera

(przykład z książki Krawczyk S."Zarzadzanie procesami logistycznymi", PWE, s.278)

symetryczne,
płaskie (podane są tylko połączenia do najbliższego sąsiada,
nie przecinają się, można je pokazać na płaszczyźnie).
Zadanie rozwiązano przy użyciu narzędzia Solver
Przyjęty dolno-trójkątny model wykorzystuje minimalną liczbię zmiennych. To jednak utrudnia wykorzystanie wielu funkcji ułatwiających przygotowanie zadania.

Tabela odległości (tabela powiązań)

	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.
1.Piła											
2.Szczecin	175										
3.Koszalin	143	160									
4.Słupsk	178		70								
5.Elbląg											
6.Malbork					40						
7.Gdańsk	205			105	[illegible]	[illegible]					
8.Bydgoszcz	[illegible]					[illegible]	[illegible]				
9.Poznań	[illegible]							[illegible]			
10.ZielonaGóra									[illegible]		
11.GorzówWlkp.	125	105							[illegible]	110	

- pola odległości

Rozwiązanie (droga komiwojażera)

	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.
1.Piła											
2.Szczecin	0										
3.Koszalin	0	1									
4.Słupsk	0		1								
5.Elbląg											
6.Malbork					1						
7.Gdańsk	0			1	1	0					
8.Bydgoszcz	1					1	0				
9.Poznań	1							0			
10.ZielonaGóra									1		
11.GorzówWlkp.	0	1							0	1	
	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2

- pola decyzyjne

1117 - funkcja celu (długość drogi Hamiltona)

Rozwiązanie optymalne uzyskano w pierwszej fazie.
Nie było potrzeby nakładania warunków calkowitoliczbości zmiennych, ani usuwania podcykli)