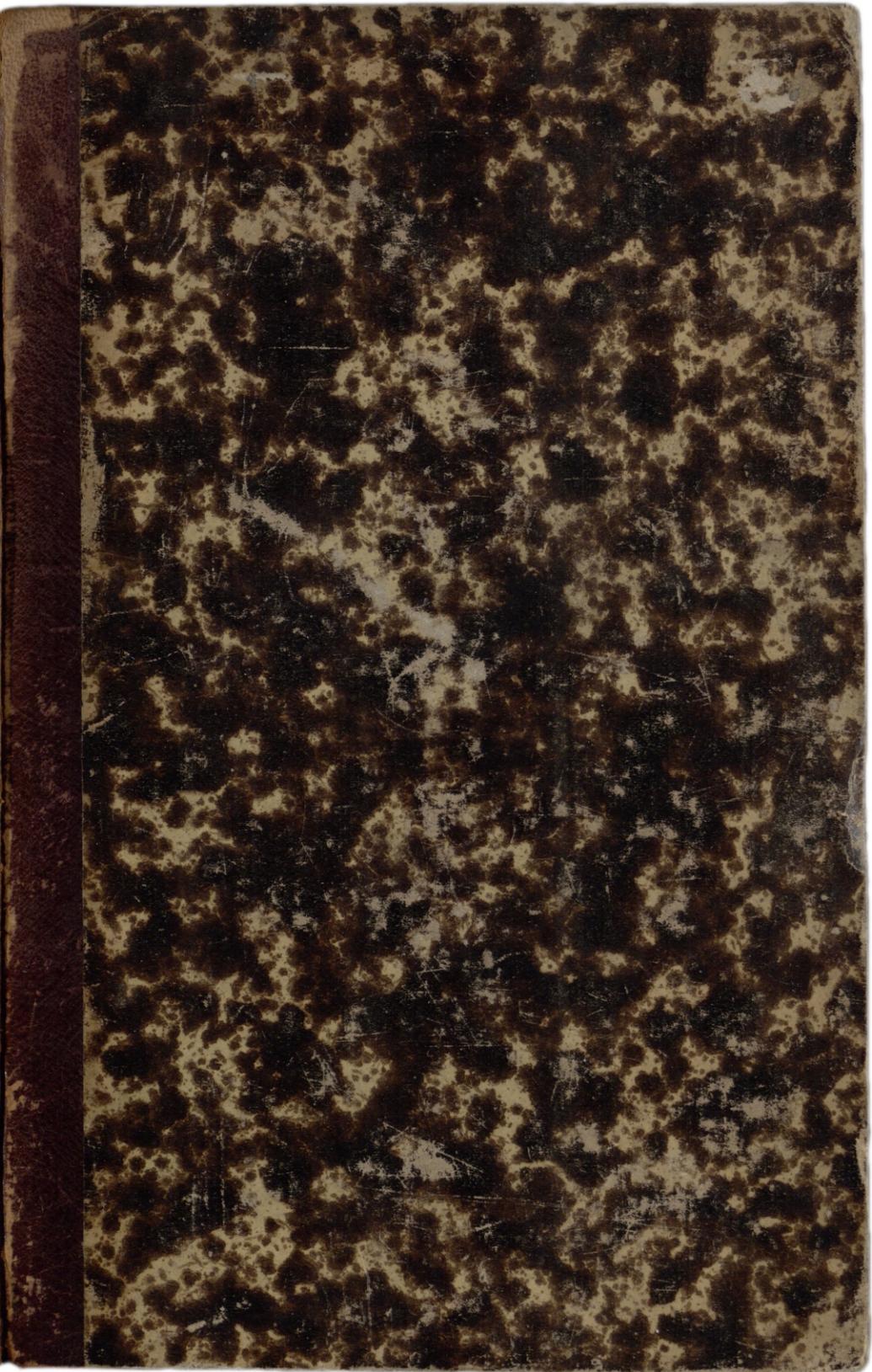


12  
Doly  
Hallen-  
torf

Veter-  
narien-  
ken

S P



1482

90, 91

*Handwritten scribble*

1772

1772  
*Handwritten signature*



DIE  
**DETERMINANTEN**

NEBST ANWENDUNG AUF DIE LOESUNG ALGEBRAISCHER  
UND ANALYTISCH-GEOMETRISCHER AUFGABEN.

ELEMENTAR BEHANDELT

VON

**DR. H. DÖLP,**

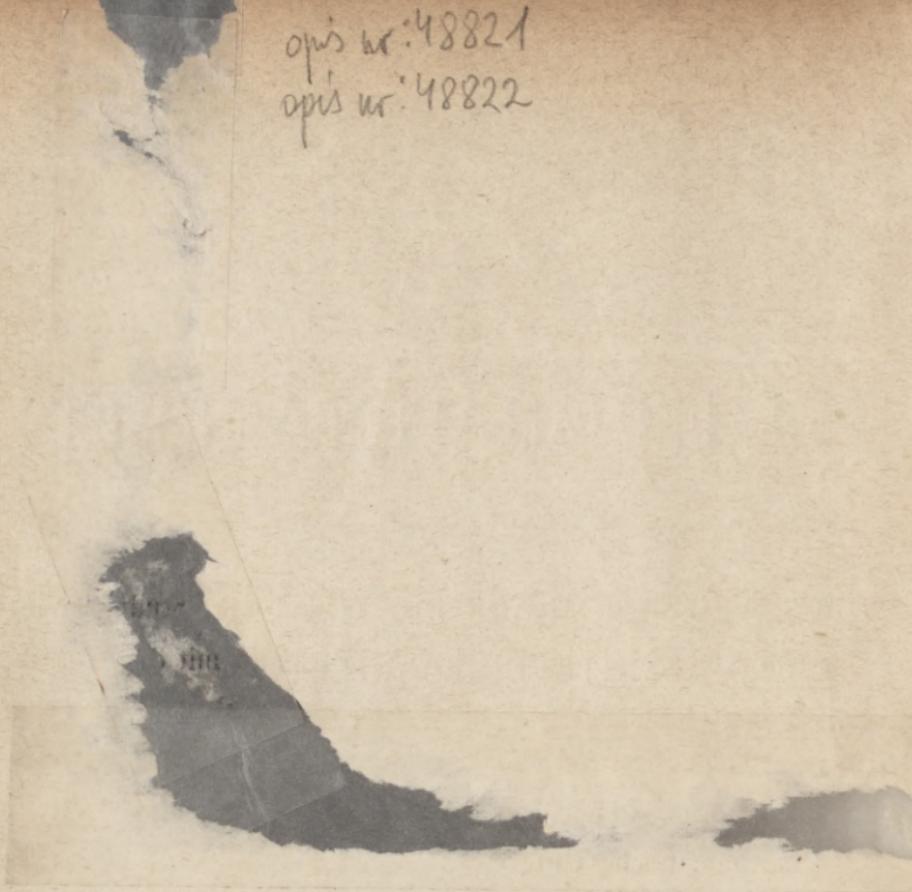
ORDENTL. PROFESSOR AM GROSSH. POLYTECHNIKUM ZU DARMSTADT.



DARMSTADT, 1874.

VERLAG VON LUDWIG BRILL.

opis nr: 48821  
opis nr: 48822



6384

G. M. II. 436.

## VORWORT.

---

Für Jeden, den seine mathematischen Studien über die Elemente hinausführen, ist die Bekanntschaft mit den Determinanten heute nicht mehr zu entbehren. Hiernach sind entweder die akademischen Studien damit zu beginnen, oder es muss, was nach der Ansicht des Verfassers noch empfehlenswerther sein dürfte, der mathematische Unterricht in der Schule damit abgeschlossen werden. Selbstverständlich hat sich die Lehrmethode der neuen Disciplin diesem Alter und den entsprechenden Vorkenntnissen der Lernenden anzupassen, und es erwächst somit für die Lehrer der Mathematik die Verpflichtung, dafür zu sorgen, dass es auch für diesen Theil ihrer Wissenschaft an geeigneten Lehrbüchern nicht fehle. Zu wiederholten Malen hat der Verfasser Schülern von 16 bis 18 Jahren die Determinanten vorgetragen und bringt in dem vorliegenden Schriftchen die von ihm eingehaltene Methode in geeigneter Ergänzung zur Kenntniss des mathematischen Publikums. Derselbe war bemüht, die Entwicklungen und Beweise, obgleich er sie in wissenschaftlicher Strenge durchführt, mit Hülfe einer zweckmässigen Anordnung einfach und leicht verständlich zu halten. Nicht selten ist für den nämlichen Satz mehr als ein Beweis gegeben, und zahlreiche Beispiele dienen dazu, bereits entwickelte Lehrsätze näher zu erläutern und den Lernenden in den Sinn derselben einzuführen. Die beiden letzten Abschnitte enthalten Anwendungen der Determinanten auf die

analytische Geometrie der Ebene und die Algebra. Insbesondere der Erstere setzt Nichts als die Grundbegriffe der betreffenden Disciplin als bekannt voraus und kann somit als elementare Einleitung in dasjenige Gebiet der Mathematik angesehen werden, in welchem die Theorie der Determinanten bis jetzt die fruchtbarste Verwendung gefunden hat.

Darmstadt, im October 1873.

**Dr. H. Dölp.**

## INHALT.

---

	Seite
Bildungsweise und Anzahl aller möglichen Permutationsformen aus gegebenen Elementen . . . . .	1
Eintheilung aller Permutationsformen in 2 Klassen. Inversionen . .	3
Das Differenzenprodukt. . . . .	6
Begriffsentwicklung, Bildungsweise und Definition einer Determinante	8
Entwicklung der Determinantenglieder aus dem Differenzenprodukt	17
Vertauschung zweier Reihen . . . . .	22
Gleiche Reihen . . . . .	24
Von den Unterdeterminanten und ihrer Verwerthung zur Berechnung der Hauptdeterminante . . . . .	25
Gemeinsamer Factor der Elemente einer Reihe . . . . .	31
Eigenschaften der Unterdeterminanten . . . . .	33
Zerlegung einer Determinante in eine Summe von Determinanten von gleichem Grade . . . . .	34
Erlaubte Veränderung der Elemente einer Reihe . . . . .	35
Zerlegung einer Determinante . . . . .	38
Auflösung linearer Gleichungen . . . . .	44
Produkt zweier Determinanten . . . . .	55
Die adjungirten Determinanten . . . . .	68
Anwendung der Determinanten auf Entwicklungen aus der ana- lytischen Geometrie der Ebene . . . . .	69
Anwendung der Determinanten auf algebraische Entwicklungen . .	87

---



§. 1. **Bildungsweise und Anzahl aller möglichen Permutationsformen aus gegebenen Elementen.**

Durch die Symbole  $a, b, c \dots n$ , oder  $a_1, a_2, a_3 \dots a_n$  wollen wir einzelne ganz beliebige Grössen bezeichnen und dieselben Elemente nennen. Ihre besonderen Eigenschaften und Werthe sind für die beabsichtigten Entwicklungen ohne jede Bedeutung, und wir unterscheiden sie nur von einander durch die Verschiedenheit der zu ihrer Bezeichnung dienenden Buchstaben oder Indices. Aus einer bestimmten Anzahl solcher Elemente lassen sich Verbindungen herstellen, von denen jede alle gegebenen Elemente enthält, doch so geordnet, dass deren Reihenfolge in allen Formen eine andere ist. Eine solche Verbindung gegebener Elemente nennen wir eine Permutationsform oder Permutation und sagen, Elemente seien permutirt, wenn alle möglichen Permutationen daraus hergestellt sind. Aus 3 Elementen sind z. B. die folgenden 6 Permutationen möglich:

$$a b c, \quad a c b, \quad b a c, \quad b c a, \quad c a b, \quad c b a;$$
$$a_1 a_2 a_3, \quad a_1 a_3 a_2, \quad a_2 a_1 a_3, \quad a_2 a_3 a_1, \quad a_3 a_1 a_2, \quad a_3 a_2 a_1.$$

Wir sehen es als unsere nächste Aufgabe an, ein Verfahren zu ermitteln, nach dem alle aus gegebenen Elementen möglichen Permutationen mit Sicherheit gewonnen werden können, und führen zu dem Zwecke unter den Elementen eine gewisse Rangordnung in der Weise ein, dass wir bestimmen,  $b$  soll höher sein als  $a$ ,  $c$  wieder höher als  $b$  und  $a$ , auch  $d$  höher als  $c$ ,  $b$  und  $a$  u. s. w., sowie wir auch  $a_2$  höher als  $a_1$ ,  $a_3$  höher als  $a_1$  und  $a_2$ ,  $a_4$  höher als  $a_3$ ,  $a_2$  und  $a_1$  u. s. w. annehmen.

Aus 2 Elementen  $a_1$  und  $a_2$  können nur die beiden Permutationen  $a_1 a_2$ ,  $a_2 a_1$  gewonnen werden. Um 3 Elemente zu permutiren, stellen wir zuerst die 3 Formen  $a_1 a_2 a_3$ ,  $a_2 a_1 a_3$ ,  $a_3 a_1 a_2$  her, in welchen je eines der Elemente am Anfang steht und die übrigen in natürlicher Ordnung nachfolgen. Aus jeder dieser 3 Formen lässt sich noch eine zweite dadurch ableiten, dass man nur die beiden letzten Indices permutirt, und so er-

geben sich aus 3 Elementen im Ganzen die folgenden 6 Permutationen:

$$\begin{array}{lll} a_1 a_2 a_3, & a_2 a_1 a_3, & a_3 a_1 a_2 \\ a_1 a_3 a_2, & a_2 a_3 a_1, & a_3 a_2 a_1. \end{array}$$

Es ist nicht schwer, das angezeigte Verfahren auf 4 Elemente zu übertragen. Der Vereinfachung wegen sollen hierbei die Elemente durch ihre Indices vertreten sein. Wieder stellen wir zuerst nur diejenigen 4 Formen her, in denen je eines der gegebenen Elemente an der Spitze steht und die übrigen sich in natürlicher Ordnung anschliessen. Sie heissen:

$$1234, \quad 2134, \quad 3124, \quad 4123.$$

Werden nun in jeder dieser 4 Formen unter Beibehaltung des Anfangselementes die 3 letzten Indices permutirt, so gehen aus einer jeden, sie selbst mitgezählt, im Ganzen 6 Formen hervor, die wir hier folgen lassen:

1234	2134	3124	4123
1243	2143	3142	4132
1324	2314	3214	4213
1342	2341	3241	4231
1423	2413	3412	4312
1432	2431	3421	4321.

Nichts ist leichter, als dieses Verfahren auf eine grössere und beliebige Anzahl von Elementen auszudehnen. Es findet einen präcisen Ausdruck in der folgenden Regel:

Um die Elemente  $a_1, a_2, a_3 \dots a_n$  zu permutiren, geht man von der Grundform ihrer Indices aus, also von der Form  $1\ 2\ 3 \dots n$ , und leitet jede folgende Form aus der vorhergehenden dadurch ab, dass man in dieser dasjenige am weitesten rechts stehende Element aufsucht, welchem noch ein oder mehrere Elemente von höherem Range nachfolgen. Alle Elemente, welche dem so ermittelten vorangehen, werden unverändert in die neue Form übernommen, das bezeichnete Element selbst aber durch dasjenige nachfolgende ersetzt, welches ihm hinsichtlich des Ranges (nicht des Ortes) am nächsten steht. Alle weiteren Elemente folgen dann in natürlicher Ordnung nach.

Auch die Frage nach der Zahl aller Permutationen, welche aus  $n$  Elementen im Ganzen möglich sind, kann im Anschluss an die vorhergehenden Erörterungen leicht beantwortet werden. Zur Bezeichnung dieser Zahl soll uns das Symbol  $P_n$  dienen, so dass das Symbol  $P_{n-1}$  die Zahl aller Permutationen vorstellt, welche aus  $(n-1)$  Elementen gebildet werden können. Wie bisher, wer-



stimmter Zahl enthalten. So zählen wir z. B. in  $a_3 a_1 a_5 a_4 a_2$  die 5 Inversionen 31, 32, 54, 52, 42 und in  $d b a c$  deren vier, nämlich  $db$ ,  $da$ ,  $dc$  und  $ba$ .

Nach der Zahl der Inversionen hat man alle Permutationsformen in 2 Klassen getheilt und zählt alle Formen, in welchen eine gerade Anzahl von Inversionen vorkommt, in die erste, dagegen alle Formen mit ungerader Zahl von Inversionen in die zweite Klasse. Hiernach muss 3 4 7 1 6 2 5 zur ersten, dagegen 4 2 1 5 7 3 6 zur zweiten Klasse gerechnet werden, weil dort 10, hier 7 Inversionen vorhanden sind. Für die Lehre von den Determinanten ist nun der folgende Satz von grösster Wichtigkeit:

Werden in einer Permutationsform 2 beliebige Elemente oder deren Indices vertauscht, so nimmt die Zahl der vorhandenen Inversionen um eine ungerade Zahl zu oder ab; sie wird daher gerade, wenn sie vorher ungerade war, und ungerade, wenn sie vorher gerade Zahl war, oder in kürzeren Worten: Durch den Tausch von 2 Elementen oder deren Indices wechselt jede Permutationsform ihre Klasse.

Der Sinn dieses Satzes soll zuerst an einem Beispiele festgestellt werden. Von den 4 Formen

$$\begin{array}{ll} a_3 a_4 a_7 a_1 a_6 a_2 a_5; & a_3 a_4 a_2 a_1 a_6 a_7 a_5; \\ a_3 a_2 a_4 a_1 a_6 a_7 a_5; & a_1 a_2 a_4 a_3 a_6 a_7 a_5 \end{array}$$

ist aus der vorhergehenden jede folgende dadurch hervorgegangen, dass man 2 Indices vertauscht hat. Sie zählen der Reihe nach 10, 7, 6, 3 Inversionen und gehören daher abwechselnd zur ersten und zweiten Klasse. Um den Satz allgemein zu beweisen, bezeichnen wir die Indices einer beliebigen Permutationsform in nachstehender Weise:

$$r_1 r_2 \dots i s_1 s_2 \dots k t_1 t_2 \dots \quad (A)$$

Hier sind  $i$  und  $k$  die beiden Indices, welche wir zu vertauschen die Absicht haben. Wird dieser Tausch ausgeführt, so entsteht die Form:

$$r_1 r_2 \dots k s_1 s_2 \dots i t_1 t_2 \dots \quad (B)$$

und wir wollen untersuchen, in welcher Weise sich die Anzahl der Inversionen durch diesen Tausch verändert hat. Thatsache ist, dass ein grosser Theil der Inversionen von  $A$  unverändert in  $B$  fortbesteht und deshalb bei unserer Untersuchung unberücksichtigt bleiben kann. Es sind dies:

1) Alle diejenigen Inversionen, welche die Indices der Gruppen  $r$ ,  $s$  und  $t$  unter einander bilden, weil deren gegenseitige Stellung von  $i$  und  $k$  ganz unabhängig ist.

2) Alle diejenigen Inversionen, welche gebildet werden von irgend einem Index der Gruppen  $r$  und  $t$  mit den beiden vertauschten  $i$  und  $k$ , weil die Stellung dieser Gruppen zu  $i$  und  $k$  durch den Wechsel von  $i$  mit  $k$  nicht verändert wird.

Dagegen finden wir in  $B$  diejenigen Inversionen verändert, welche in  $A$  zwischen den Indices der Gruppe  $s$  einerseits und  $i$  und  $k$  andererseits bestehen, weil deren gegenseitige Stellung durch den Tausch eine andere geworden ist, sowie auch die vertauschten Indices  $i$  und  $k$  selbst nur in einer der beiden Formen eine Inversion bilden können. Nehmen wir nun an, unter den Indices der Gruppe  $s$  seien der Zahl nach  $m$  höher und  $n$  niedriger als  $i$ , und ebenso  $p$  höher und  $q$  niedriger als  $k$ , so kann die Anzahl aller Indices innerhalb der Gruppe  $s$  sowohl durch  $(m + n)$ , als auch durch  $(p + q)$  ausgedrückt werden, und dies führt zu der Relation:

$$m + n = p + q.$$

Wird noch weiter angenommen,  $k$  sei höher als  $i$ , so lässt sich die Zahl der in Betracht zu nehmenden Inversionen in  $A$  und  $B$  in folgender Weise feststellen:

In der Form  $A$  sind zu berücksichtigen:

1)  $n$  Inversionen zwischen  $i$  und denjenigen  $s$ , welche gemäss der Annahme niedriger als  $i$  sind und ihm nachfolgen.

2)  $p$  Inversionen, gebildet von  $k$  mit denjenigen  $s$ , welche, wie vorausgesetzt wird, höher als  $k$  sind und vorhergehen.

Die Zahl aller Inversionen in  $A$ , soweit sie hier in Frage kommen, beträgt mithin:

$$A = n + p.$$

Ebenso müssen in der Form  $B$  in Anrechnung gebracht werden:

1)  $m$  Inversionen zwischen  $i$  und denjenigen  $s$ , welcher höher als  $i$  vorausgesetzt sind und diesem vorangehen.

2)  $q$  Inversionen zwischen  $k$  und denjenigen  $s$ , welche niedriger als  $k$  sind und in der zweiten Form dem  $k$  nachfolgen.

3) Die 1 Inversion, welche in  $B$   $k$  mit  $i$  selbst bildet.

Die Zahl aller Inversionen in  $B$ , die hier berücksichtigt werden müssen, beläuft sich mithin auf:

$$B = m + q + 1,$$



Die Form des Produktes zeigt uns, dass es jede nur mögliche Differenz zwischen je zweien der Elemente als Factor enthält, und dass dies auch noch dann der Fall sein muss, wenn  $a_i$  seinen Ort mit  $a_k$  getauscht hat. Daraus ziehen wir nun den Schluss, dass hinsichtlich des absoluten Werthes die einzelnen Factoren von  $P$  und  $P_1$  übereinstimmen müssen, womit nachgewiesen ist, dass auch  $P$  und  $P_1$  gleiche absolute Werthe besitzen. Die Differenzen der einzelnen Elementepaare entstehen in der Weise, dass immer das in der Elementenreihe voranstehende Element von dem nachfolgenden abgezogen wird, niemals umgekehrt, und daher muss der Tausch von  $a_i$  mit  $a_k$  bei einer Anzahl dieser Differenzen Zeichenwechsel veranlassen, deren Einwirkung auf das ganze Produkt untersucht werden muss. Klar ist, dass diejenigen Differenzen, welche weder von  $a_i$  noch von  $a_k$  abhängen, bei dem erwähnten Tausche auch hinsichtlich des Vorzeichens unverändert bleiben. Das Gleiche lässt sich übrigens auch von einer beträchtlichen Anzahl derjenigen Differenzen behaupten, welche  $a_i$  und  $a_k$  mit den übrigen Elementen hervorbringen, und zwar sind dies:

1) Alle Differenzen zwischen  $a_i$  und  $a_k$  und den Elementen  $a_0, a_1, a_2 \dots$  bis  $a_{i-1}$ , weil diese auch in der Reihe  $B$ , wie in  $A$ , den vertauschten Elementen vorausgehen.

2) Diejenigen Differenzen, welche von  $a_i$  und  $a_k$  mit  $a_{k+1}, a_{k+2}, a_{k+3} \dots$  bis  $a_n$  gebildet werden, weil diese auch in der Reihe  $B$ , genau wie in  $A$ , den vertauschten Elementen nachfolgen.

Es bleibt uns jetzt noch übrig zu untersuchen, welchen Einfluss der Wechsel von  $a_i$  mit  $a_k$  auf die Vorzeichen derjenigen Differenzen ausübt, die gebildet werden von  $a_i$  und  $a_k$  mit den Elementen, welche in  $A$  und in  $B$  zwischen ihnen stehen. Nennen wir ein solches Element  $a_s$ , so entsprechen ihm aus der Reihe  $A$  die beiden Differenzen  $(a_s - a_i)$  und  $(a_k - a_s)$ , während dieselben, aus der Reihe  $B$  entnommen,  $(a_i - a_s)$  und  $(a_s - a_k)$  heissen, weil ja stets das vorhergehende Element von dem nachfolgenden abgezogen werden muss.

Dieser Vergleich überzeugt uns, dass die bezeichneten Differenzen beim Wechsel von  $a_i$  mit  $a_k$  alle die Vorzeichen wechseln. Dennoch wird hierdurch das Vorzeichen des Produktes nicht verändert, weil diese Differenzen in gerader Zahl auftreten müssen, indem jedem zwischen  $a_i$  und  $a_k$  stehenden Elemente 2 Differenzen entsprechen. So bleibt nur noch die Differenz  $(a_k - a_i)$  zu berücksichtigen, welche sich in  $(a_i - a_k)$  umwandelt, d. h. ebenfalls das Vorzeichen wechselt. Da aber dieser Zeichenwechsel nicht, wie solches vorher der Fall war, durch einen correspondirenden auf-



so müssen die Constanten der Bedingung entsprechen:

$$a_2 : a_1 = b_2 : b_1, \text{ oder } a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0.$$

Zu der nämlichen Relation wird man gelangen, wenn man die Unbekannten in beiden Gleichungen als gleichwerthig ansieht und eliminirt. Die linke Seite, nämlich die Form:

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 \quad (6)$$

wird die Determinante der Constanten beider Gleichungen genannt. Dieselbe kann auch ohne Auflösung der Gleichungen auf folgende Weise erhalten werden: Löscht man in (5) die Unbekannten und Verbindungszeichen weg, so bleibt das folgende Schema der Constanten zurück:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}, \quad (7)$$

und hieraus gehen die beiden Theile der Determinante dadurch hervor, dass man die Constanten nach den Richtungen der Diagonalen zu Produkten vereinigt und das Glied mit umgekehrter Indicesform von dem anderen abzieht.

Beispiel.

$$3x + 6 = 0$$

$$5x + 10 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 10 \end{vmatrix} = 3 \cdot 10 - 6 \cdot 5 = 0$$

Der gemeinsame Werth ist  $x = -2$ , die Determinante verschwindet.

Wenn wir ebenso aus 2 von den 3 Gleichungen:

$$a_1 x + a_2 y + a_3 = 0$$

$$b_1 x + b_2 y + b_3 = 0 \quad (8)$$

$$c_1 x + c_2 y + c_3 = 0$$

die Unbekannten  $x$  und  $y$  berechnen und ihre Werthe in die dritte substituiren, oder wenn wir in den 3 Gleichungen die beiden Unbekannten als gleichwerthig ansehen und eliminiren, so erhalten wir wieder die Bedingung, unter welcher die 3 Gleichungen zwischen nur 2 Unbekannten zugleich bestehen können. Die linke Seite dieser auf Null gebrachten Bedingungsgleichung, nämlich die Form:

$$a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 + a_2 b_3 c_1 - a_2 b_1 c_3 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1 \quad (9)$$

ist wieder die Determinante aus den Constanten der 3 Gleichungen. Entnimmt man auch jetzt dem Systeme (8) das folgende Schema:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}, \quad (10)$$

so können daraus die einzelnen Theile der Determinante abgeleitet werden, indem man zuerst die Constanten  $a_1, b_2, c_3$ , welche in der Richtung der einen Diagonale stehen, zu dem Produkte  $a_1 b_2 c_3$  vereinigt, und daraus dann die übrigen Glieder ableitet. Das Glied  $a_1 b_2 c_3$  wird das Haupt- oder Diagonalglied der Determinante genannt, die entsprechende Diagonale ist die Hauptdiagonale des Schemas. Die Grössen  $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$  heissen Elemente der Determinante. Die Ableitung der sämtlichen Determinantenglieder aus dem Hauptgliede wird nach folgender Regel ausgeführt: Mit dem Hauptgliede beginnend, leitet man jedes folgende Glied aus dem vorhergehenden dadurch ab, dass man in diesem 2 Indices vertauscht und das Vorzeichen wechselt, doch hierbei darauf achtet, dass sich nicht Glieder von gleicher Indicesform wiederholen. Das Verfahren ist erst dann beendet, nachdem alle möglichen Permutationen der Indices gebildet sind. Die Form (9) kann so aus dem Anfangsgliede hergeleitet werden.

Nach der vorstehenden Regel ist die Wahl der Reihenfolge, in welcher die Indicespaare vertauscht werden können, dem Ausführenden ganz überlassen, d. h. beliebig, und deshalb bleibt uns noch übrig zu beweisen, dass das Resultat, d. h. die Determinante, von dieser Reihenfolge ganz unabhängig ist, indem die verschiedensten Abwechslungen in dieser Beziehung zu der nämlichen letzten Form führen. In der Absicht, die Richtigkeit dieser Behauptung vor der Hand nur empirisch nachzuweisen, lassen wir noch einige andere Arten der Ableitung nachfolgen:

$$\begin{aligned} a_1 b_2 c_3 - a_3 b_2 c_1 + a_2 b_3 c_1 - a_1 b_3 c_2 + a_3 b_1 c_2 - a_2 b_1 c_3; \\ a_1 b_2 c_3 - a_2 b_1 c_3 + a_2 b_3 c_1 - a_1 b_3 c_2 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1; \\ a_1 b_2 c_3 - a_2 b_1 c_3 + a_3 b_1 c_2 - a_1 b_3 c_2 + a_2 b_3 c_1 - a_3 b_2 c_1. \end{aligned}$$

Die völlige Uebereinstimmung dieser Formen mit der unter (9) angeführten kann durch Vergleich leicht nachgewiesen werden.

Wenn auch dieses letzte Beispiel schon hinreichen würde, um die Definition der Determinante festzustellen, so soll doch weiter auch noch ein System von 4 Gleichungen zwischen nur 3 Unbekannten hierbei in Betracht gezogen werden:

$$\begin{aligned} a_1 x + a_2 y + a_3 z + a_4 &= 0, \\ b_1 x + b_2 y + b_3 z + b_4 &= 0, \\ c_1 x + c_2 y + c_3 z + c_4 &= 0, \\ d_1 x + d_2 y + d_3 z + d_4 &= 0. \end{aligned} \tag{11}$$

Wir suchen wieder die Bedingung auf, unter welcher es möglich

ist, dass diesen 4 Gleichungen die nämlichen Werthe der 3 Unbekannten genügen können. Zu dem Zwecke können wieder die Werthe der 3 Unbekannten, wie solche aus 3 der Gleichungen hervorgehen, in die vierte substituirt, oder die 3 Unbekannten aus den 4 Gleichungen eliminirt werden. Wird die gefundene Relation auf Null gebracht, so ist die andere Seite aus folgenden Theilen zusammengesetzt:

$$\begin{array}{lll}
 + a_1 b_2 c_3 d_4 & + a_2 b_1 c_4 d_3 & + a_3 b_4 c_1 d_2 \\
 - a_1 b_2 c_4 d_3 & - a_2 b_1 c_3 d_4 & - a_3 b_1 c_4 d_2 \\
 + a_1 b_3 c_4 d_2 & + a_2 b_3 c_1 d_4 & + a_4 b_1 c_3 d_2 \\
 - a_1 b_3 c_2 d_4 & - a_2 b_3 c_4 d_1 & - a_4 b_1 c_2 d_3 \\
 + a_1 b_4 c_2 d_3 & + a_3 b_2 c_4 d_1 & + a_4 b_2 c_1 d_3 \\
 - a_1 b_4 c_3 d_2 & - a_3 b_2 c_1 d_4 & - a_4 b_2 c_3 d_1 \\
 + a_2 b_4 c_3 d_1 & + a_3 b_1 c_2 d_4 & + a_4 b_3 c_2 d_1 \\
 - a_2 b_4 c_1 d_3 & - a_3 b_4 c_2 d_1 & - a_4 b_3 c_1 d_2
 \end{array}$$

Auch jetzt wird die Summe dieser Produkte die Determinante aus den Constanten der gegebenen Gleichungen genannt. Sollen die 4 Gleichungen zwischen nur 3 Unbekannten zugleich bestehen können, so muss diese Determinante verschwinden. Aus den Gleichungen kann nun das nachfolgende Schema leicht gewonnen werden:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix} \quad (13)$$

Sollen aus diesem Schema die obigen Produkte abgeleitet werden, so bildet man zuerst das Diagonalglied und geht, mit diesem beginnend, zu jedem folgenden dadurch über, dass man in dem vorhergehenden ein beliebiges Indicespaar vertauscht und des Gliedes Vorzeichen wechselt, und das Verfahren schliesst, nachdem alle Permutationsformen der Indices abgeleitet sind. Schon bei diesen 4 Indices herrscht hinsichtlich der Reihenfolge, in welcher dieselben paarweise gewechselt werden können, eine solche Mannigfaltigkeit, dass wir allgemein nachweisen müssen, dass alle Ableitungsweisen zu der nämlichen Determinante führen. Wir fassen zu dem Ende die Beziehungen ins Auge, welche bei den einzelnen Gliedern zwischen der Klasse der Indicesform und dem Vorzeichen bestehen. Weil jeder Tausch von 2 Indices nach dem Modus der Ableitung einen Vorzeichenwechsel und nach dem früher bewiesenen Satze einen Klassenwechsel der Indicesform zur Folge hat, so müssen gleiche Vorzeichen mit gleicher

Klasse der Indicesform zusammenfallen. Da nun das erste oder Diagonalglied positiv ist und zur ersten Klasse gehört, weil seine Indices die natürliche Reihenfolge einhalten, so muss auch das dritte, fünfte, siebente u. s. w. Glied positiv sein und zur ersten, dagegen das zweite, vierte, sechste u. s. w. Glied negativ sein und zur zweiten Klasse gehören. Hiernach besteht das unterscheidende Merkmal der positiven von den negativen Gliedern darin, dass bei jedem positiven Gliede die Indicesform eine gerade, bei jedem negativen dagegen eine ungerade Anzahl von Inversionen enthält, oder, kurz gesagt, dass die Indicesformen der positiven Glieder zur ersten, die der negativen dagegen zur zweiten Klasse gehören.

Werden die an diesen Beispielen gewonnenen Begriffe und Regeln verallgemeinert, so geht daraus das Ableitungsgesetz und die davon abhängende Definition einer Determinante allgemein gültig hervor. Hiernach ist eine Determinante völlig bestimmt, wenn 4, 9, 16, 25 u. s. w., allgemein  $n^2$  Zahlenwerthe als Elemente gegeben und zugleich in ein Schema von der Form

$$A = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & b_3 & \dots & b_n \\ c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n_1 & n_2 & n_3 & \dots & n_n \end{vmatrix} \quad (14)$$

so eingereiht sind, dass jedem Elemente ein ganz bestimmter Ort innerhalb des Schemas angewiesen ist, und zwar in der Weise, dass der Buchstaben die Reihe, der Index die Columnne des Elementes genau anzeigt. Werden nun die Elemente der Hauptdiagonale zu dem Produkte

$$a_1 b_2 c_3 d_4 \dots n_n$$

vereinigt, dann bei unveränderter Folge der Buchstaben die Indices dieses Gliedes permutirt, und endlich die so entstandenen Produkte mit dem positiven oder negativen Vorzeichen versehen, je nachdem die Indicesform eine gerade oder ungerade Anzahl von Inversionen zählt, d. h. zur ersten oder zweiten Klasse gehört, so wird die Summe dieser Produkte die Determinante der gegebenen Elemente genannt. Eine Determinante ist vom zweiten, dritten, vierten u. s. w. Grade, wenn in den Reihen oder Columnnen des Schemas 2, 3, 4, u. s. w. Elemente stehen und desshalb auch in ihren einzelnen Gliedern ebenso viele Elemente zu Produkten verbunden sind.

So lange die Elemente nicht als besondere Zahlenwerthe gegeben, sondern, wie in (14), nur durch allgemeine Symbole darge-

stellt sind, reicht das Diagonalglied  $a_1 b_2 c_3 \dots n_n$  vollständig hin, um sowohl das Schema daraus aufzubauen, als auch die Ableitung aller Determinantenglieder auszuführen. Man pflegt deshalb die Determinante symbolisch nur durch ihr Diagonalglied darzustellen, indem man dazu eine der beiden Formen benutzt:

$$(15) \quad \Sigma \pm a_1 b_2 c_3 \dots n_n, \text{ oder: } (a_1 b_2 c_3 \dots n_n).$$

Zur Uebung folgt noch die Entwicklung einiger Determinanten nach den gegebenen Regeln. Die Indices sind nicht mehr, wie früher, durch fortgesetztes Vertauschen der Paare, sondern auf gewöhnliche Weise permutirt und die Vorzeichen nach der Klasse der Indicesform bestimmt. So ist:

$$\begin{aligned} \Sigma \pm a_1 b_2 c_3 &= a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 & (16) \\ &+ a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1. \end{aligned}$$

Zur Entwicklung einer Determinante vom dritten Grade kennt man ein einfacheres Verfahren, welches durch das nachfolgende Schema veranschaulicht werden soll:

$$\mathcal{A} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \quad (17)$$

$$\mathcal{A} = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3.$$

Wie hieraus ersichtlich ist, sind dem Schema auf der rechten Seite die beiden ersten Columnen beige setzt. Durch Multiplication in der Richtung der Hauptdiagonale und parallel dazu entstehen die 3 positiven, durch Multiplication in der Richtung der zweiten Diagonale und parallel zu ihr entstehen die 3 negativen Glieder. Auch Determinanten aus gewöhnlichen Zahlen mögen hier eine Stelle finden.

$$\mathcal{A}_1 = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 4 & 7 & 8 \\ 9 & 2 & 6 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 7 \\ 9 & 2 \end{vmatrix}; \quad \mathcal{A}_2 = \begin{vmatrix} 5 & -3 & 11 \\ 2 & 7 & 8 \\ 1 & -9 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 7 \\ 1 & -9 \end{vmatrix},$$

$$\mathcal{A}_1 = 2 \cdot 7 \cdot 6 + 5 \cdot 8 \cdot 9 + 3 \cdot 4 \cdot 2 - 3 \cdot 7 \cdot 9 - 2 \cdot 8 \cdot 2 - 5 \cdot 4 \cdot 6 = 127,$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_2 &= 5 \cdot 7 \cdot 4 + (-3) \cdot 8 \cdot 1 + 11 \cdot 2 \cdot (-9) - 11 \cdot 7 \cdot 1 - 5 \cdot 8 \cdot (-9) \\ &\quad - (-3) \cdot 2 \cdot 4 = 225. \end{aligned}$$

Wir lassen jetzt noch eine Determinante vom vierten Grade folgen. Die Indices des Diagonalgliedes wurden wieder auf ge-

wöhnliche Weise permutirt und die Vorzeichen der einzelnen Glieder nach der Klasse der zugehörigen Indicesform bestimmt.

$$A = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix} = \quad (17)$$

$$\begin{array}{lll} + a_1 b_2 c_3 d_4 & + a_2 b_3 c_1 d_4 & + a_3 b_4 c_1 d_2 \\ - a_1 b_2 c_4 d_3 & - a_2 b_3 c_4 d_1 & - a_3 b_4 c_2 d_1 \\ - a_1 b_3 c_2 d_4 & - a_2 b_4 c_1 d_3 & - a_4 b_1 c_2 d_3 \\ + a_1 b_3 c_4 d_2 & + a_2 b_4 c_3 d_1 & + a_4 b_1 c_3 d_2 \\ + a_1 b_4 c_2 d_3 & + a_3 b_1 c_2 d_4 & + a_4 b_2 c_1 d_3 \\ - a_1 b_4 c_3 d_2 & - a_3 b_1 c_4 d_2 & - a_4 b_2 c_3 d_1 \\ - a_2 b_1 c_3 d_4 & - a_3 b_2 c_1 d_4 & - a_4 b_3 c_1 d_2 \\ + a_2 b_1 c_4 d_3 & + a_3 b_2 c_4 d_1 & + a_4 b_3 c_2 d_1 \end{array}$$

Die vorstehende Summe von Producten ist gleichsam als eine Formel anzusehen, aus welcher die Werthe aller Determinanten vierten Grades dadurch hervorgehen, dass man statt der Symbole die besonderen Zahlenwerthe der Elemente setzt, z. B.

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 9 & 3 \\ 1 & -4 & 6 & 5 \\ 10 & 0 & 5 & 7 \\ 8 & 11 & 6 & 1 \end{vmatrix}$$

Hier ist:  $a_1 = 2$ ;  $a_2 = 5$ ;  $a_3 = 9$ ;  $a_4 = 3$ ;  $b_1 = 1$ ;  $b_2 = -4$ ;  $b_3 = 6$ ;  $b_4 = 5$  u. s. w., und daher  $a_1 b_2 c_3 d_4 = 2 \cdot (-4) \cdot 5 \cdot 1 = -40$ ;  $-a_1 b_2 c_4 d_3 = -2 \cdot (-4) \cdot 7 \cdot 6 = 336$ ;  $-a_1 b_3 c_2 d_4 = -2 \cdot 6 \cdot 0 \cdot 1 = 0$ ;  $a_1 b_3 c_4 d_2 = 2 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 11 = 924$  u. s. w.

Bei der Ableitung der Determinantenglieder wurden seither nur die Columnenzeiger, Indices genannt, permutirt, dagegen die Buchstaben oder Reihenzeiger in unveränderter Folge beibehalten. Die Elemente des nämlichen Gliedes gehören desshalb verschiedenen Reihen und verschiedenen Columnen an. Man kann sich die Zusammensetzung der Glieder aus den Elementen desswegen auch so ausgeführt denken, dass man, um ein Glied aus den Elementen zusammenzusetzen, von Reihe zu Reihe übergehend, einer jeden je 1 Element entnimmt und darauf achtet, dass dieselben zugleich verschiedenen Columnen angehören. Nun kann es nicht zweifelhaft sein, dass die nämlichen Verbindungen der Elemente entstehen müssen, wenn man in gleicher Weise die Columnen durchschreitet

und aus jeder je 1 Element so auswählt, dass sie verschiedenen Reihen angehören. Diese Verbindungen unterscheiden sich von den vorhergehenden nur dadurch, dass hier die Buchstaben oder Reihenzeiger permutirt sind, während die Colonnenzeiger die natürliche Ordnung festhalten. Dass sich aber auch jetzt noch die Vorzeichen in bekannter Weise aus der Klasse der Permutationsformen bestimmen lassen, weisen wir kurz dadurch nach, dass wir zwei Entwicklungen einer Determinante vierten Grades so nebeneinander stellen, dass in der einen die Indices, in der anderen die entsprechenden Buchstaben vertauscht sind, während in der ersten die Buchstaben, in der zweiten die Indices ihre natürliche Folge beibehalten.

Erste Form:	Zweite Form:
1) $+ a_1 b_2 c_3 d_4$	1) $+ a_1 b_2 c_3 d_4$
2) $- a_1 b_2 c_4 d_3$	2) $- a_1 b_2 d_3 c_4$
3) $+ a_1 b_3 c_4 d_2$	3) $+ a_1 d_2 b_3 c_4$
4) $- a_1 b_3 c_2 d_4$	4) $- a_1 c_2 b_3 d_4$
5) $+ a_1 b_4 c_2 d_3$	5) $+ a_1 c_2 d_3 b_4$
6) $- a_1 b_4 c_3 d_2$	6) $- a_1 d_2 c_3 b_4$
7) $+ a_2 b_4 c_3 d_1$	7) $+ d_1 a_2 c_3 b_4$
8) $- a_2 b_4 c_1 d_3$	8) $- c_1 a_2 d_3 b_4$
9) $+ a_2 b_3 c_1 d_4$	9) $+ c_1 a_2 b_3 d_4$
10) $- a_2 b_3 c_4 d_1$	10) $- d_1 a_2 b_3 c_4$
11) $+ a_2 b_1 c_4 d_3$	11) $+ b_1 a_2 d_3 c_4$
12) $- a_2 b_1 c_3 d_4$	12) $- b_1 a_2 c_3 d_4$

u. s. w.

Die Glieder unter gleichen Ordnungsnummern stimmen in dieser Zusammenstellung genau überein, indem sie aus den nämlichen Elementen zusammengesetzt sind, gleich viele Inversionen zählen und gleiche Vorzeichen haben. Daher können aus dem Hauptgliede die übrigen Determinantenglieder auch in der Art abgeleitet werden, dass man die Buchstaben oder Reihenindices permutirt und die gewöhnlichen oder Colonnenindices in unveränderter Folge beibehält.

Diese übereinstimmende Bedeutung der Reihen- und der Colonnenindices tritt deutlicher hervor, wenn wir auch die Reihen durch beigefügte Zahlen angeben, indem wir unter dem Symbol  $a_{pq}$  ein Element verstehen, das in der  $p^{\text{ten}}$  Reihe und in der  $q^{\text{ten}}$  Colonne steht. Das frühere Schema (14) erscheint nach dieser veränderten Bezeichnungsart der Elemente in der folgenden Gestalt:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \quad (19)$$

Während die ersten Indices die Reihen der Elemente anzeigen, geben die zweiten ihre Columnen an. Um aus dem Diagonalgliede  $a_{11} a_{22} a_{33} \dots a_{nn}$  die übrigen herzuleiten, darf man sowohl die ersten, als auch die zweiten Indices permutiren, nur müssen die nichtpermutirten in allen Gliederreihen die ursprüngliche Folge unverändert beibehalten. Der Modus der Ausführung soll wieder an einer Determinante vom dritten Grade gezeigt werden:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Man bildet folgende Zusammenstellung:

$$\begin{array}{cccccc} 123 & 123 & 123 & 123 & 123 & 123 \\ 123 & 132 & 213 & 231 & 312 & 321. \end{array}$$

Die übereinander stehenden Indicespaare gehören zusammen; man hängt sie dem Symbole  $a$  an, bestimmt in bekannter Weise die Vorzeichen und erhält:

$$\begin{aligned} \Delta &= a_{11} a_{22} a_{33} - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} \\ &\quad + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{13} a_{22} a_{31}, \end{aligned}$$

oder:

$$\begin{aligned} \Delta &= a_{11} a_{22} a_{33} - a_{11} a_{32} a_{23} - a_{21} a_{12} a_{33} + a_{21} a_{32} a_{13} \\ &\quad + a_{31} a_{12} a_{23} - a_{31} a_{22} a_{13}. \end{aligned}$$

Beide Entwicklungen sind dem Werthe nach gleich, der Form nach verschieden, indem in der ersten die Indices der Columnen, in der zweiten diejenigen der Reihen permutirt sind.

Da es hiernach gleichgültig ist, ob man die Columnenindices permutirt, oder die der Reihen, so dürfen wir folgenden Satz als leicht nachweisbar ansehen:

**Lehrsatz:** Werden in dem Schema einer Determinante die Reihen in unveränderter Folge in Columnen umgewandelt (die Columnen werden dabei von selbst zu Reihen), so bleibt der Werth der Determinante unverändert.

Vorausgesetzt, dass gleiche Symbole gleiche Zahlenwerthe repräsentiren, muss also

$$\begin{vmatrix} & \mathcal{A}_1 & \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ n_1 & n_2 & \dots & n_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & \mathcal{A}_2 & \\ a_1 & b_1 & \dots & n_1 \\ a_2 & b_2 & \dots & n_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & b_n & \dots & n_n \end{vmatrix} \quad (19)$$

sein. Beide Schemata haben das gemeinschaftliche Diagonalglied  $a_1 b_2 c_3 \dots n_n$ . Werden die Indices desselben permutirt und die einzelnen Vorzeichen nach der Klasse der Indicesformen bestimmt, so kann diese Entwicklung sowohl für  $\mathcal{A}_1$ , als auch für  $\mathcal{A}_2$  gelten. Der Unterschied liegt nur darin, dass die permutirten Indices in  $\mathcal{A}_1$  die Columnen, in  $\mathcal{A}_2$  die Reihen bezeichnen.

Beispiel.

$$\mathcal{A}_1 = \begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 4 & 7 & 2 \\ 6 & 8 & 4 \end{vmatrix} = \begin{matrix} + 2 \cdot 7 \cdot 4 & - (-3) \cdot 7 \cdot 6 \\ + 5 \cdot 2 \cdot 6 & - 2 \cdot 2 \cdot 8 \\ + (-3) \cdot 4 \cdot 8 & - 5 \cdot 4 \cdot 4 \end{matrix} = 34.$$

$$\mathcal{A}_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 5 & 7 & 8 \\ -3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{matrix} + 2 \cdot 7 \cdot 4 & - 6 \cdot 7 \cdot (-3) \\ + 4 \cdot 8 \cdot (-3) & - 2 \cdot 8 \cdot 2 \\ + 6 \cdot 5 \cdot 2 & - 4 \cdot 5 \cdot 4 \end{matrix} = 34.$$

§. 5. Entwicklung der Determinantenglieder aus dem Differenzenprodukt.

Wir haben in §. 3 bereits nachgewiesen, dass das Produkt

$$(20) \quad P = (a_1 - a_0) (a_2 - a_0) (a_3 - a_0) \dots (a_n - a_0) \\ (a_2 - a_1) (a_3 - a_1) \dots (a_n - a_1) \\ (a_3 - a_2) \dots (a_n - a_2) \\ \dots \dots \dots \\ (a_n - a_{n-1})$$

sein Vorzeichen wechselt, wenn 2 Elemente vertauscht werden. Dieser Eigenschaft fügen wir jetzt noch die weitere hinzu, dass dieses Produkt verschwindet, wenn 2 Elemente gleich werden, weil dann eine Differenz verschwindet. Was nun die wirkliche Ausrechnung des Produktes anbelangt, so ist eine direkte Multiplication von Factor zu Factor schon darum nicht wohl möglich, weil die Anzahl der Factoren unbestimmt ist, und desshalb sehen wir uns nach weiteren Eigenschaften dieses Produktes um, durch welche dessen Herstellung auf indirekte Weise ermöglicht wird. Die Anzahl aller Differenzfactoren erhalten wir aus der Formel

$$s = n + (n - 1) + (n - 2) + \dots + 3 + 2 + 1 = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Aus 2, 3, 4 solcher Differenzen gehen Produkte hervor, welche aus 4, 8, 16 Gliedern bestehen, und da allgemein ein Produkt aus  $k$  Differenzen 2 mal so viele Glieder enthält, als ein solches aus  $(k-1)$  Differenzen, so muss  $P$  im Ganzen aus  $2^{\frac{n(n+1)}{2}}$  Gliedern zusammengesetzt sein, wobei freilich auch diejenigen mitgezählt sind, welche sich bei weiterer Reduktion aufheben oder vereinigen lassen. Die Glieder müssen ferner zur Hälfte positiv und zur Hälfte negativ sein. Als Beispiel soll das Produkt entwickelt werden, welches aus den 3 Elementen  $a_0, a_1, a_2$  hervorgeht und heisst:

$$P = (a_1 - a_0) (a_2 - a_0) (a_2 - a_1),$$

$$P = a_1 a_2^2 - a_0 a_2^2 + a_0^2 a_2 - a_1^2 a_2 + a_0 a_1^2 - a_0^2 a_1.$$

Zwei weitere Glieder haben einander aufgehoben. Wird in jedem Theilprodukte das fehlende Element auf der Potenz Null als Factor zugesetzt, und werden die Indices natürlich geordnet, so gewinnt  $P$  die folgende Gestalt:

$$P = a_0^0 a_1^1 a_2^2 - a_0^0 a_1^2 a_2^1 - a_0^1 a_1^0 a_2^2 \\ + a_0^1 a_1^2 a_2^0 + a_0^2 a_1^0 a_2^1 - a_0^2 a_1^1 a_2^0.$$

Schreibt man nun in einer Determinante vom dritten Grade die Columnenindices wie Exponenten an, so erhält man das folgende Schema:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_0^0 & a_0^1 & a_0^2 \\ a_1^0 & a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^0 & a_2^1 & a_2^2 \end{vmatrix}. \quad (21)$$

Werden die oberen Indices permutirt, so findet man:

$$\Delta = a_0^0 a_1^1 a_2^2 - a_0^0 a_1^2 a_2^1 - a_0^1 a_1^0 a_2^2 \\ + a_0^1 a_1^2 a_2^0 + a_0^2 a_1^0 a_2^1 - a_0^2 a_1^1 a_2^0.$$

Vergleichen wir  $\Delta$  mit  $P$ , so finden wir sie der Form nach vollständig übereinstimmend; dagegen sind beide hinsichtlich ihrer Bedeutung ausserordentlich verschieden, indem die oberen Zahlen in  $P$  Exponenten, in  $\Delta$  nur Indices vorstellen, so dass die verschiedenen Potenzen der gleichen Basis in  $\Delta$  als selbstständige und von einander unabhängige Elemente auftreten. Es können mithin alle Eigenschaften, welche sich nur auf die Form des Produktes beziehen, auf die Determinante übertragen werden.

Als weitere Eigenschaft dieses Produktes führen wir an, dass die Summe der Exponenten, oder der Grad, in allen Gliedern gleich und  $= \frac{n(n+1)}{2}$  ist, indem die Exponentensumme mit der

Zahl der Factoren übereinstimmen muss, weil die Differenzen homogen und vom ersten Grade sind. Da ferner jedes Element mit allen übrigen zu je einer Differenz verbunden ist, so müssen  $n$  Differenzfactoren das nämliche Element enthalten. So kommt z. B.  $a_0$  in folgenden Differenzen vor:

$$(a_1 - a_0) (a_2 - a_0) (a_3 - a_0) \dots (a_n - a_0).$$

Werden nun diese  $n$  Factoren unter sich und auch alle übrigen  $a_0$  nicht enthaltenden Differenzen unter sich multiplicirt, und diese beiden Produkte wieder miteinander, so erhält man das ganze Produkt  $P$ , und zwar wird das Element  $a_0$  in allen Theilen, einen einzigen ausgenommen, als Factor auftreten. Fügen wir auch diesem einzigen Theile den Factor  $a_0^0$  zu, so dürfen wir behaupten, dass das Produkt  $P$  in jedem Theile irgend eine Potenz von  $a_0$  aufzuweisen hat und zwar von  $a_0^n$  bis  $a_0^0$ . Die übrigen Elemente treten gleichsam als Coefficienten mit den verschiedenen Potenzen von  $a_0$  in Verbindung. Da nun die einzelnen Elemente sich in genau gleicher Weise an der Zusammensetzung des Produktes betheiligen, so dass bekanntlich der Tausch von zweien nur einen Vorzeichenwechsel des ganzen Produktes bewirkt, so muss das Gesagte nicht bloß für  $a_0$ , sondern für jedes beliebige Element  $a_p$  Geltung haben, und wir können sagen:  $P$  ist für jedes beliebige Element von der Form:

$$P = A_0 a_p^n + A_1 a_p^{n-1} + A_2 a_p^{n-2} + \dots + A_{n-1} a_p^1 + A_n a_p^0.$$

Wie aber  $a_p$ , so muss auch jedes andere Element in jedem Theile von  $P$  auf irgend einer Potenz enthalten sein, und deswegen haben die einzelnen Glieder in Bezug auf allé Elemente die allgemeine Form:

$$\pm c \cdot a_0^\alpha a_1^\beta a_2^\gamma \dots a_n^\nu$$

worin  $c$  eine noch zu bestimmende Constante bedeutet, deren Werth von den Elementen nicht abhängt. Um zuerst diesen zu ermitteln, müssen wir uns erinnern, dass  $P$  verschwindet, wenn 2 Elemente gleich werden, indem dann je 2 Glieder, die entgegengesetzte Vorzeichen haben, gleich werden und einander aufheben. Lässt man aber nach einander die verschiedenen Elementepaare gleich werden, so wird jedes positive Glied ein Mal jedem negativen gleich, und daraus folgt, dass der constante Factor  $c$  in allen Gliedern den nämlichen Werth haben muss. Stellen wir uns vor, die Multiplication in (20) sei ausgeführt, so wird ein Glied das Produkt aller ersten Theile der Differenzen sein und

$$a_1 a_2^2 a_3^3 a_4^4 \dots a_n^n \quad (22)$$

heissen. Da hier  $c = 1$  ist, so muss auch in allen übrigen Theilen  $c = 1$  sein.

Es wurde oben bewiesen, dass das Produkt sein Vorzeichen wechselt, wenn 2 Elemente vertauscht werden, und zwar hat diese Erscheinung darin ihren Grund, dass jedem positiven Gliede ein anderes mit negativem Vorzeichen entspricht, welche beide sich nur dadurch von einander unterscheiden, dass 2 Elemente, resp. deren Indices, vertauscht sind. Zur Veranschaulichung sollen die beiden Formen dienen:

$$\begin{aligned} &+ a_0^\alpha \dots a_k^\times \dots a_r^\rho \dots a_n^\nu \\ &- a_0^\alpha \dots a_r^\times \dots a_k^\rho \dots a_n^\nu \end{aligned}$$

Werden  $k$  und  $r$  gewechselt, so wird das erste zum zweiten und das zweite zum ersten, jedoch mit unveränderten Vorzeichen, d. h. beide Glieder erscheinen nach dem angeführten Indiceswechsel mit umgekehrten Vorzeichen wieder. Diese Umwandlung der positiven in gleichwerthige negative Glieder und umgekehrt bei dem einfachen Wechsel von 2 Indices würde aber nicht möglich sein, wenn wir annehmen wollten, dass in dem nämlichen Gliede 2 gleiche Exponenten vorkommen könnten, weil ein Glied mit 2 gleichen Exponenten unverändert bleiben muss, wenn die Indices, welche zu diesen gleichen Exponenten gehören, vertauscht werden. Hiermit erscheint aber die Behauptung gerechtfertigt, dass die Exponenten eines und desselben Gliedes einmal ganze und positive, ferner aber auch unter sich verschiedene Zahlen sein müssen. Weiter ist bereits nachgewiesen worden, dass in einem jeden Gliede die Summe aller Exponenten gleich  $\frac{n(n+1)}{2}$  sein muss. Wir drücken dies durch die Formel aus:

$$\alpha + \beta + \gamma + \dots + \nu = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Weil nun in jedem Gliede alle Elemente vertreten und diese in der Anzahl  $(n+1)$  gegeben sind, so muss auch die Anzahl aller Exponenten eines jeden Gliedes  $= (n+1)$  sein. So haben wir zu Exponenten diejenigen Zahlen zu wählen, welche ganz und positiv sind und den beiden angeführten Bedingungen genügen. Dass aber die natürliche Reihe der Zahlen von 0 bis  $n$  alle Anforderungen erfüllt, beweist uns die folgende Formel:

$$0 + 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

und ausserdem ist es einfach, sich zu überzeugen, dass keine weitere

Reihe von  $(n + 1)$  ganzen und positiven Zahlen die nämliche Summe geben kann.

Durch Hinzunahme des Factors  $a_0^0 = 1$  gestaltet sich das unter (22) angeführte Glied so, dass es heisst:

$$+ a_0^0 a_1^1 a_2^2 a_3^3 \dots a_n^n,$$

und da aus ihm ein anderes hervorgehen muss, wenn man 2 Indices vertauscht und das Vorzeichen wechselt, so dürfen wir auch das abgeleitete Glied

$$- a_1^0 a_0^1 a_2^2 a_3^3 \dots a_n^n$$

als zu dem Produkte gehörig ansehen. Wird das Vertauschen der Indicespaare unter beständigem Wechsel des Vorzeichens so lange fortgesetzt, bis die Indices vollständig permutirt sind, so stellt die Summe aller Glieder das Differenzenprodukt vor.

Früheren Erörterungen gemäss müssen auch jetzt die Permutationsformen der Indices abwechselnd zur ersten und zweiten Klasse gehören, und da ferner auch die Vorzeichen abwechseln, das erste auch positiv ist, so werden die Indicesformen der positiven Glieder der ersten, die der negativen aber der zweiten Klasse angehören, genau so, wie es bei den Determinantengliedern der Fall ist.

Zum Schluss dieses Abschnittes bleiben noch die Beziehungen aufzusuchen, welche zwischen diesem Differenzenprodukt und einer Determinante bestehen. Lassen wir zu dem Zwecke in Schema (19) die Indicesreihe nicht mit 1, sondern mit 0 anfangen, und schreiben wir die Indices der Columnen den Elementen in der Form von Exponenten bei, so erscheint das Diagonalglied in folgender Gestalt:

$$a_0^0 a_1^1 a_2^2 a_3^3 \dots a_n^n,$$

und daraus werden alsdann nach den nämlichen Regeln sowohl die Theile des Differenzenproduktes, als auch die Glieder der Determinante abgeleitet. Beide stimmen mithin in ihrer äusseren Erscheinung vollständig überein; der einzige, aber auch wesentliche Unterschied besteht, wie schon früher angeführt, darin, dass die oberen Zahlen bei dem Produkte die Bedeutung von Exponenten haben, bei der Determinante aber nur Indices vorstellen, wodurch die verschiedenen Potenzen der nämlichen Basis in der Determinante zu selbstständigen und von einander unabhängigen Elemente werden. Die Summe der Glieder, welche aus einem der beiden Schemata

$$\begin{vmatrix} a_0^0 & a_0^1 & a_0^2 & \dots & a_0^n \\ a_1^0 & a_1^1 & a_1^2 & \dots & a_1^n \\ a_2^0 & a_2^1 & a_2^2 & \dots & a_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n^0 & a_n^1 & a_n^2 & \dots & a_n^n \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} a_0^0 & a_1^0 & a_2^0 & \dots & a_n^0 \\ a_0^1 & a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_n^1 \\ a_0^2 & a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_0^n & a_1^n & a_2^n & \dots & a_n^n \end{vmatrix} \quad (23)$$

nach den bekannten Regeln hervorgehen, kann daher ebensowohl ein Differenzenprodukt, als auch eine Determinante bedeuten, je nach der Bedeutung der oberen Zahlen. Falls wir ein Differenzenprodukt darunter verstehen wollen, können alle  $0^{\text{ten}}$  Potenzen der Elemente durch 1 ersetzt werden, wodurch folgende Gleichung entsteht:

$$(24) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_0^2 & a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_0^n & a_1^n & a_2^n & \dots & a_n^n \end{vmatrix} = \begin{matrix} (a_1 - a_0) (a_2 - a_0) (a_3 - a_0) \dots (a_n - a_0) \\ (a_2 - a_1) (a_3 - a_1) \dots (a_n - a_1) \\ (a_3 - a_2) \dots (a_n - a_2) \\ \dots \dots \dots \dots \dots \\ (a_n - a_{n-1}). \end{matrix}$$

In dieser Determinante sind die Elemente der Columnen Potenzen der nämlichen Grösse, und der Werth der Determinante ist gleich dem Differenzenprodukt.

### §. 6. Vertauschung zweier Reihen.

Werden in dem Schema einer Determinante zwei Reihen, resp. Columnen, vertauscht, so bleibt der absolute Werth der Determinante unverändert, sie wechselt aber das Vorzeichen.

$$\begin{vmatrix} \mathcal{A}_1 \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \mathcal{A}_2 \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (25)$$

Die Reihen  $p$  und  $r$  sind gewechselt. Wird  $\mathcal{A}_1$  in der Art entwickelt, dass man die Indices der Reihen permutirt, so lassen sich die Glieder zu Paaren so zusammenstellen, dass jedes Paar aus 2 solchen Gliedern besteht, welche sich nur dadurch von

einander unterscheiden, dass die Indices  $p$  und  $r$  vertauscht, und daher die Vorzeichen verschieden sind. Allgemein wird ein solches Paar die nachstehende Form haben:

$$A_1 = \pm \dots \dots a_{pq} \dots \dots a_{rs} \dots \dots$$

$$B_1 = \mp \dots \dots a_{rq} \dots \dots a_{ps} \dots \dots$$

Die übereinstimmenden Theile sind durch Punkte angedeutet, die Indices  $p$  und  $r$  gewechselt und die Vorzeichen verschieden, indem  $B_1$  negativ sein muss, wenn  $A_1$  positiv ist, und umgekehrt. Wir wandeln dieses Paar in ein zu  $A_2$  gehöriges um, indem wir, wie dies auch im Schema geschehen ist, die Indices  $p$  und  $r$  vertauschen, und die Vorzeichen unverändert beibehalten. So erhalten wir:

$$A_2 = \pm \dots \dots a_{r,q} \dots \dots a_{p,s} \dots \dots$$

$$B_2 = \mp \dots \dots a_{p,q} \dots \dots a_{r,s} \dots \dots$$

und erkennen, dass  $A_2 = -B_1$  und  $B_2 = -A_1$  geworden ist. Wird dieses Verfahren auf die ganze Entwicklung von  $A_1$  ausgedehnt, so gehen alle Glieder von  $A_2$  aus denen von  $A_1$  dadurch hervor, dass man in diesen nur die Vorzeichen wechselt.

Zu näherer Erläuterung soll in einer Determinante vierten Grades die zweite Reihe mit der vierten vertauscht werden.

$$\begin{matrix} A_1 \\ \left| \begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{array} \right| \end{matrix} = - \begin{matrix} A_2 \\ \left| \begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{array} \right| \end{matrix}$$

$$A_1 =$$

- |                        |                         |                         |
|------------------------|-------------------------|-------------------------|
| 1) $+ a_1 b_2 c_3 d_4$ | 3) $+ a_1 b_4 c_2 d_3$  | 5) $+ a_1 b_3 c_4 d_2$  |
| 2) $- a_1 b_4 c_3 d_2$ | 4) $- a_1 b_3 c_2 d_4$  | 6) $- a_1 b_2 c_4 d_3$  |
| 7) $+ a_2 b_1 c_4 d_3$ | 9) $+ a_2 b_3 c_1 d_4$  | 11) $+ a_2 b_4 c_3 d_1$ |
| 8) $- a_2 b_3 c_4 d_1$ | 10) $- a_2 b_4 c_1 d_3$ | 12) $- a_2 b_1 c_3 d_4$ |

u. s. w.

Werden nun in diesen Paaren, genau wie im Schema, die Zeichen  $b$  und  $d$ , oder, was gleichbedeutend ist, die Indices von  $b$  und  $d$  vertauscht, so gehen dieselben in solche über, wie sie zu  $A_2$  gehören. Man findet:

$$\Delta_2 =$$

- |                        |                         |                         |
|------------------------|-------------------------|-------------------------|
| 1) $+ a_1 b_4 c_3 d_2$ | 3) $+ a_1 b_3 c_2 d_4$  | 5) $+ a_1 b_2 c_4 d_3$  |
| 2) $- a_1 b_2 c_3 d_4$ | 4) $- a_1 b_4 c_2 d_3$  | 6) $- a_1 b_3 c_4 d_2$  |
| 7) $+ a_2 b_3 c_4 d_1$ | 9) $+ a_2 b_4 c_1 d_3$  | 11) $+ a_2 b_1 c_3 d_4$ |
| 8) $- a_2 b_1 c_4 d_3$ | 10) $- a_2 b_3 c_1 d_4$ | 12) $- a_2 b_4 c_3 d_1$ |
- u. s. w.

Durch Vergleich überzeugen wir uns leicht, dass alle Glieder von  $\Delta_1$  auch in  $\Delta_2$  vorkommen, aber mit gewechselten Vorzeichen.

Beispiel.	4 7 9		+ 4.6.1	- 9.6.4	
$\Delta_1 =$	3 6 8	=	+ 7.8.4	- 4.8.5	= - 14.
	4 5 1		+ 9.3.5	- 7.3.1	
	4 7 9		+ 4.5.8	- 9.5.3	
$\Delta_2 =$	4 5 1	=	+ 7.1.3	- 4.1.6	= + 14.
	3 6 8		+ 9.4.6	- 7.4.8	

Zweiter Beweis. Wir haben bereits nachgewiesen, dass das Differenzenprodukt und mit ihm auch die durch dasselbe repräsentirte Determinante das Vorzeichen wechselt, wenn 2 Elemente vertauscht werden. Ein solcher Wechsel von 2 Elementen des Differenzenproduktes hat aber auch in der schematischen Aufstellung (23) den Wechsel von 2 Reihen oder 2 Columnen zur Folge, und damit ist der Satz bewiesen.

### §. 7. Gleiche Reihen.

Wenn in dem Schema einer Determinante 2 Reihen, beziehungsweise Columnen, gleich sind, oder in Folge zulässiger Transformationen gleich werden können, so ist der Werth dieser Determinante gleich Null.

Macht man in dem Schema von  $\Delta_1$  in (25) die entsprechenden Elemente der Reihen  $p$  und  $r$  gleich, also

$$a_{p1} = a_{r1}; \quad a_{p2} = a_{r2}; \quad a_{p3} = a_{r3} \text{ u. s. w. bis } a_{pn} = a_{rn},$$

so werden auch die beiden Glieder eines jeden Paares, wie solche in §. 6 zusammengestellt sind, einander gleich und behalten ihre entgegengesetzten Vorzeichen bei, so dass sie einander aufheben. Unter dieser Voraussetzung wird nämlich

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \pm \dots \dots a_{pq} \dots \dots a_{rs} \dots \dots \\ \Delta_2 &= \mp \dots \dots a_{pq} \dots \dots a_{rs} \dots \dots, \end{aligned}$$

und daraus folgt:  $A_1 + B_1 = 0$ . Ebenso verschwinden auch die übrigen Glieder paarweise und mit ihnen die ganze Determinante.

Zweiter Beweis. Erwiesenermassen muss eine Determinante das Vorzeichen wechseln, wenn 2 beliebige Reihen oder Colonnen vertauscht werden. Wechselt man nun die beiden identisch gleichen Reihen, so muss einmal die Determinante ganz unverändert bleiben und doch auch ihr Vorzeichen wechseln. Beiden Anforderungen zugleich kann nur durch den Werth Null entsprochen werden.

Dritter Beweis. Das Differenzenprodukt und die mit diesem identificirte Determinante verschwinden, wenn 2 Elemente gleich werden. Tritt dieser Fall ein, so werden in dem entsprechenden Schema (23) 2 Reihen oder 2 Colonnen gleich. Umgekehrt müssen in dem Differenzenprodukt 2 Elemente gleich sein, wenn das Schema 2 gleiche Reihen oder Colonnen enthält, und die Determinante muss in diesem Falle verschwinden.

Beispiel. 
$$\begin{vmatrix} 5 & 9 & 7 \\ 8 & 3 & 4 \\ 5 & 9 & 7 \end{vmatrix} = \begin{matrix} + 5 \cdot 3 \cdot 7 & - 7 \cdot 3 \cdot 5 \\ + 9 \cdot 4 \cdot 5 & - 5 \cdot 4 \cdot 9 \\ + 7 \cdot 8 \cdot 9 & - 9 \cdot 8 \cdot 7 \end{matrix} = 0.$$

§. 7. Von den Unterdeterminanten und ihrer Verwerthung zur Berechnung der Hauptdeterminante.

Der leichteren Verständlichkeit wegen führen wir die nächsten Entwicklungen an einem Schema vom vierten Grade aus:

$$A = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix}. \quad (26)$$

Wie bekannt ist, darf  $a_1$  nicht mit solchen Elementen verbunden werden, welche mit ihm in der nämlichen Reihe und Colonne stehen. Werden mithin die Reihe der  $a$  und die Colonne 1 unterdrückt, so bleiben diejenigen Elemente zurück, mit welchen  $a_1$  in Verbindung treten kann, und zwar eingefügt in ein Schema vom dritten Grade, das wir symbolisch durch  $A_1$  bezeichnen wollen.

$$A_1 = \begin{vmatrix} b_2 & b_3 & b_4 \\ c_2 & c_3 & c_4 \\ d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix}.$$

Wir sagen,  $A_1$  sei die zu  $a_1$  gehörige Unterdeterminante. Ausgerechnet heisst dieselbe:

$$A_1 = b_2 c_3 d_4 - b_2 c_4 d_3 - b_3 c_2 d_4 + b_3 c_4 d_2 + b_4 c_2 d_3 - b_4 c_3 d_2.$$

Durch Multiplication mit  $a_1$  geht sie über in:

$$a_1 A_1 = a_1 b_2 c_3 d_4 - a_1 b_2 c_4 d_3 - a_1 b_3 c_2 d_4 + a_1 b_3 c_4 d_2 \\ + a_1 b_4 c_2 d_3 - a_1 b_4 c_3 d_2.$$

Auf der rechten Seite sehen wir diejenigen 6 Glieder von  $\Delta$ , welche mit  $a_1$  anfangen, und können daher deren Summe durch den einfacheren Ausdruck  $a_1 A_1$  darstellen. Streicht man in (26) ebenso die Reihe  $a$  und die Columnen 2 durch, so bleibt ein Schema zurück, welches alle Elemente enthält, die mit  $a_2$  verbunden werden dürfen. Aus einem bald anzuführenden Grunde nennen wir dieses Schema aber erst dann die zu  $a_2$  gehörige Unterdeterminante, nachdem das Vorzeichen gewechselt ist. Hiernach ist:

$$A_2 = - \begin{vmatrix} b_1 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_3 & d_4 \end{vmatrix}.$$

Wieder erhält man durch Entwicklung:

$$A_2 = - [b_1 c_3 d_4 - b_1 c_4 d_3 - b_3 c_1 d_4 + b_3 c_4 d_1 + b_4 c_1 d_3 - b_4 c_3 d_1].$$

Wird nun beiderseits mit  $a_2$  multiplicirt, so erhöht sich rechts die Zahl der Inversionen in allen Gliedern um 1, weil 2 vor 1 tritt, und die Vorzeichen stimmen nicht mehr mit der Klasse der Indicesformen überein. Diese Uebereinstimmung wird aber wieder dadurch hergestellt, dass man die Klammer auflöst, womit ja für alle Glieder ein Zeichenwechsel verbunden ist. So erhält man:

$$a_2 A_2 = - a_2 b_1 c_3 d_4 + a_2 b_1 c_4 d_3 + a_2 b_3 c_1 d_4 - a_2 b_3 c_4 d_1 \\ - a_2 b_4 c_1 d_3 + a_2 b_4 c_3 d_1.$$

Auf der rechten Seite sehen wir hier 6 weitere Glieder von  $\Delta$  und können deren Summe durch das Produkt  $a_2 A_2$  einfacher ausdrücken.

Auch durch das Element  $a_3$  ist das Schema einer Unterdeterminante  $A_3$  vollständig bestimmt. Man findet es, wenn man in (26) die Reihe  $a$  und die Columnen 3 beseitigt, das Zeichen aber beibehält. Mithin ist:

$$A_3 = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_4 \end{vmatrix};$$

$$A_3 = b_1 c_2 d_4 - b_1 c_4 d_2 - b_2 c_1 d_4 + b_2 c_4 d_1 + b_4 c_1 d_2 - b_4 c_2 d_1.$$

Wird jetzt auf beiden Seiten mit  $a_2$  multiplicirt, so nehmen die Inversionen in allen Theilen auf der rechten Seite um 2 zu, weil 3 vor 1 und vor 2 tritt und die bestehende Uebereinstimmung zwischen der Klasse der Indicesform und dem Vorzeichen der einzelnen Glieder nicht stört. So erhält man:

$$a_3 A_3 = a_3 b_1 c_2 d_4 - a_3 b_1 c_4 d_2 - a_3 b_2 c_1 d_4 + a_3 b_2 c_4 d_1 \\ + a_3 b_4 c_1 d_2 - a_3 b_4 c_2 d_1,$$

und findet abermals auf der rechten Seite 6 Glieder der Determinante (26), deren Summe sich mithin in der Form des Produktes  $a_3 A_3$  darstellen lässt.

Eben so leicht ist es, zu dem Elemente  $a_4$  die Unterdeterminante zu gewinnen. Zu diesem Zweck wird in (26) die Reihe  $a$  und die Column 4 beseitigt und das zurückgebliebene Schema wieder mit gewechseltem Vorzeichen gesetzt. Hiernach ist:

$$A_4 = - \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix};$$

$$A_4 = - [b_1 c_2 d_3 - b_1 c_3 d_2 - b_2 c_1 d_3 + b_2 c_3 d_1 + b_3 c_1 d_2 - b_3 c_2 d_1].$$

Wird wieder auf beiden Seiten mit  $a_4$  multiplicirt, so treten in jedem Gliede auf der rechten Seite 3 weitere Inversionen hinzu, gebildet von 4 mit 1, 2 und 3. Dem hierdurch veranlassten Klassenwechsel der einzelnen Glieder entspricht wieder der mit der Klammerrauflösung verbundene Wechsel aller Vorzeichen. So gibt es:

$$a_4 A_4 = - a_4 b_1 c_2 d_3 + a_4 b_1 c_3 d_2 + a_4 b_2 c_1 d_3 - a_4 b_2 c_3 d_1 \\ - a_4 b_3 c_1 d_2 + a_4 b_3 c_2 d_1.$$

Auch diese letzten 6 Glieder von  $\mathcal{A}$  können zu dem Produkt  $a_4 A_4$  vereinigt werden. Hiernach lässt sich die ganze Determinante (26) aus diesen Produkten nach folgender Formel zusammensetzen:

$$\mathcal{A} = a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3 + a_4 A_4. \quad (27)$$

Einfacher und leichter zu verallgemeinern ist die nachfolgende Entwicklungsweise dieser Formel. Zuerst stellt man die folgenden 4 Formen her:

$$a_1 b_2 c_3 d_4; \quad - a_2 b_1 c_3 d_4; \quad a_3 b_1 c_2 d_4; \quad - a_4 b_1 c_2 d_3.$$

Wird nun in dem ersten Theile  $a_1$  festgehalten, und werden die 3 letzten Indices durch fortgesetzten Indiceswechsel permutirt, so erhält man diejenigen 6 Glieder, welche mit  $a_1$  anfangen und heißen:

$$a_1 [b_2 c_3 d_4 - b_2 c_4 d_3 + b_3 c_4 d_2 - b_3 c_2 d_4 + b_4 c_2 d_3 - b_4 c_3 d_2].$$

Dass der Ausdruck in der Klammer nichts Anderes ist, als die zu  $a_1$  gehörige Unterdeterminante  $A_1$ , bedarf wohl keines weiteren Nachweises, und wir setzen den ganzen Ausdruck gleich dem Produkt  $a_1 A_1$ .

Hält man ebenso in dem folgenden Theile den Factor  $-a_2$  fest, und vertauscht man fortgesetzt die anderen Indices, so entstehen diejenigen Theile von  $\Delta$ , welche mit  $a_2$  anfangen:

$$- a_2 [b_1 c_3 d_4 - b_1 c_4 d_3 + b_3 c_4 d_1 - b_3 c_1 d_4 + b_4 c_1 d_3 - b_4 c_3 d_1].$$

Wieder repräsentirt der Klammerwerth in Verbindung mit dem  $-$  Zeichen den Ausdruck, welchen wir oben durch  $A_2$  bezeichnet haben, und somit dürfen wir das Ganze unter der Form  $a_2 A_2$  zusammenfassen.

Auf gleiche Weise gehen die beiden anderen Theile in folgende Ausdrücke über:

$$a_3 [b_1 c_2 d_4 - b_1 c_4 d_2 + b_2 c_4 d_1 - b_2 c_1 d_4 + b_4 c_1 d_2 - b_4 c_2 d_1] \\ - a_4 [b_1 c_2 d_3 - b_1 c_3 d_2 + b_2 c_3 d_1 - b_2 c_1 d_3 + b_3 c_1 d_2 - b_3 c_2 d_1],$$

und diese lassen sich wieder in die Form der beiden Produkte  $a_3 A_3$  und  $a_4 A_4$  bringen.

Wie die Schemata dieser Unterdeterminanten aus dem Hauptschema entnommen werden müssen, ist durch diese Entwicklung hinlänglich festgestellt. Ebenso kann es keine Schwierigkeiten bieten, die Entwicklungen selbst auf Determinanten von noch höherem Grade auszudehnen, und ist es wohl gestattet, die Formel (27) ohne Weiteres als allgemein gültig anzusehen. In dem Schema:

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pr} & \dots & a_{pn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nr} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (28)$$

müssen die Unterdeterminanten der ersten Reihe durch  $A_{11}$ ,  $A_{12} \dots A_{1r} \dots A_{1n}$  bezeichnet werden, und da wir wissen, dass die zugehörigen Schemata abwechselnd mit den positiven und negativen Vorzeichen zu nehmen sind, so fügen wir dem Schema von  $A_{1r}$  noch den Factor  $(-1)^{1+r}$  zu, weil hierdurch das Vorzeichen regulirt wird, indem  $(-1)^{1+1} = +1$ ;  $(-1)^{1+2} = -1$  ist u. s. w. Der Unterdeterminante  $A_{1r}$  entspricht hiernach das folgende Schema:

$$A_{1r} = (-1)^{1+r} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2, r-1} & a_{2, r+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{p, r-1} & a_{p, r+1} & \dots & a_{pn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n, r-1} & a_{n, r+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (29)$$

Um also aus dem Hauptschema das der Unterdeterminante  $A_{1r}$  herzustellen, unterdrücken wir die Reihe 1 und die Colonne  $r$  und versehen den zurückgebliebenen Theil mit dem Vorzeichenfactor  $(-1)^{1+r}$ . Werden so alle Unterdeterminanten der ersten Reihe gebildet, so setzt sich aus ihnen und den zugehörigen Elementen die Hauptdeterminante nach folgender Formel zusammen:

$$\mathcal{A} = a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + a_{13} A_{13} + \dots + a_{1n} A_{1n}. \quad (30)$$

Diese Formel ist zwar nur auf die erste Reihe anwendbar; allein da durch Reihentausch und entsprechenden Zeichenwechsel eine jede Reihe in die Lage der ersten gebracht werden kann, so ist es nicht schwer, dieselbe in eine andere umzuwandeln, die für jede beliebige Reihe gültig ist. Soll z. B. die Reihe  $p$  in die Lage der ersten verschoben und dabei die anfängliche Ordnung der übrigen Reihen festgehalten werden, so vertauschen wir die Reihe  $p$  nach und nach mit den Reihen  $(p-1)$ ,  $(p-2)$ ,  $(p-3)$  u. s. w. So gelangt sie nach  $(p-1)$  Vertauschungen in die Lage der ersten, und die übrigen haben ihre Lage zu einander nicht verändert. Da mit dieser Transformation auch  $(p-1)$  Zeichenwechsel verbunden sind, so muss die Determinante so umgestaltet sein, dass sie jetzt heisst:

$$\mathcal{A} = (-1)^{p-1} \begin{vmatrix} a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pr} & \dots & a_{pn} \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p-1, 1} & a_{p-1, 2} & \dots & a_{p-1, r} & \dots & a_{p-1, n} \\ a_{p+1, 1} & a_{p+1, 2} & \dots & a_{p+1, r} & \dots & a_{p+1, n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nr} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (31)$$

Werden aus diesem Schema die zur ersten Reihe gehörigen Unterdeterminanten bestimmt, diese selbst mit ihren zugehörigen Elementen multiplicirt, diese Produkte alsdann mit dem Transformationsfactor  $(-1)^{p-1}$  verbunden und nach (30) zu einer Summe vereinigt, so hat man eine zweite Form der Determinante. Hier-

bei sollen zwar die Unterdeterminanten der ersten Reihe durch  $A_{p_1}, A_{p_2}, A_{p_3} \dots A_{p_n}$  bezeichnet werden, den Elementen entsprechend, doch sind die Vorzeichen ganz nach den früheren Regeln zu bestimmen, so dass zu  $A_{p_r}$  das Vorzeichen  $(-1)^{1+r}$  gehört. Wird aber damit der allen Theilen gemeinschaftliche und aus der Transformation hervorgegangene Factor  $(-1)^{p-1}$  vereinigt, so gehört zur Unterdeterminante  $A_{p_r}$  im Ganzen der Vorzeichenfactor  $(-1)^{1+r} \cdot (-1)^{p-1} = (-1)^{p+r}$ . Hiernach gestaltet sich aber die allgemeine Formel zur Bildung der Unterdeterminanten wie folgt:

$$(32) \quad A_{p_r} = (-1)^{p+r} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,r-1} & a_{1,r+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,r-1} & a_{2,r+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p-1,1} & a_{p-1,2} & \dots & a_{p-1,r-1} & a_{p-1,r+1} & \dots & a_{p-1,n} \\ a_{p+1,1} & a_{p+1,2} & \dots & a_{p+1,r-1} & a_{p+1,r+1} & \dots & a_{p+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,r-1} & a_{n,r+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Dieses Schema entsteht aus (31), indem man die erste Reihe und  $r^{\text{te}}$  Colonne unterdrückt. Es kann aber auch ebenso leicht aus dem ursprünglichen Schema (28) entnommen werden, indem man dort die  $p^{\text{te}}$  Reihe und  $r^{\text{te}}$  Colonne wegnimmt, weil die übrigen Reihen und alle Columnen in beiden Schematen in der nämlichen Ordnung aufeinander folgen. Werden also nach diesem Schema die Unterdeterminanten, welche zu den Elementen der  $p^{\text{ten}}$  Reihe des Hauptschemas gehören, aus diesem direkt abgeleitet und mit den ihnen zugehörigen Elementen multiplicirt, so wird aus diesen Produkten die Determinante selbst nach folgender Formel zusammengesetzt:

$$\mathcal{A} = a_{p_1} A_{p_1} + a_{p_2} A_{p_2} + a_{p_3} A_{p_3} + \dots + a_{p_n} A_{p_n}. \quad (33)$$

Wie früher nachgewiesen wurde, dürfen Lehrsätze, die für Reihen gültig sind, ohne Weiteres auch auf Columnen angewendet werden. Berechnen wir mithin nach (32) die Unterdeterminanten, welche zu den Elementen der Colonne  $r$  gehören, und bilden wieder die Produkte aus diesen und den Elementen selbst, so kann  $\mathcal{A}$  auch nach folgender Formel berechnet werden:

$$\mathcal{A} = a_{1r} A_{1r} + a_{2r} A_{2r} + a_{3r} A_{3r} + \dots + a_{nr} A_{nr}. \quad (34)$$

Beispiel. 
$$A = \begin{vmatrix} 4 & 9 & 2 & 6 \\ -3 & 5 & 1 & 4 \\ 5 & 7 & -2 & 8 \\ 4 & -9 & 3 & 7 \end{vmatrix}$$
 Hier ist:  
 $a_{31} = 5; a_{32} = 7;$   
 $a_{33} = -2; a_{34} = 8.$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 9 & 2 & 6 \\ 5 & 1 & 4 \\ -9 & 3 & 7 \end{vmatrix} = -43; \quad A_{32} = - \begin{vmatrix} 4 & 2 & 6 \\ -3 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 7 \end{vmatrix} = 24;$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 4 & 9 & 6 \\ -3 & 5 & 4 \\ 4 & -9 & 7 \end{vmatrix} = 659; \quad A_{34} = - \begin{vmatrix} 4 & 9 & 2 \\ -3 & 5 & 1 \\ 4 & -9 & 3 \end{vmatrix} = -227.$$

$$A = 5 \cdot (-43) + 7 \cdot 24 + (-2) \cdot 659 + 8 \cdot (-227) = -3181.$$

Es ist auch:  $a_{12} = 9; a_{22} = 5; a_{32} = 7; a_{42} = -9;$

$$A_{12} = - \begin{vmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 5 & -2 & 8 \\ 4 & 3 & 7 \end{vmatrix} = -203; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 5 & -2 & 8 \\ 4 & 3 & 7 \end{vmatrix} = -20;$$

$$A_{32} = - \begin{vmatrix} 4 & 2 & 6 \\ -3 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 7 \end{vmatrix} = 24; \quad A_{42} = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 6 \\ -3 & 1 & 4 \\ 5 & -2 & 8 \end{vmatrix} = 158.$$

$$A = 9 \cdot (-203) + 5 \cdot (-20) + 7 \cdot 24 + (-9) \cdot 158 = -3181.$$

§. 8. Gemeinsamer Factor der Elemente einer Reihe.

Werden alle Elemente einer Reihe, beziehungsweise einer Columnne, mit der nämlichen Zahl multiplicirt oder dividirt, so wird hierdurch die ganze Determinante mit dieser Zahl multiplicirt oder dividirt.

Schematisch hat dieser Lehrsatz die folgende Gestalt:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m \cdot a_{p1} & m \cdot a_{p2} & \dots & m \cdot a_{pn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = m \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (35)$$

Als selbstverständlich wird vorausgesetzt, dass in  $\Delta_1$  und  $\Delta_2$  gleiche Elementesymbole auch gleiche Zahlenwerthe bedeuten. Dann sind auch die Unterdeterminanten der Reihe  $p$  in beiden identisch gleich und wir haben:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= m \cdot a_{p1} A_{p1} + m \cdot a_{p2} A_{p2} + \dots + m \cdot a_{pn} A_{pn} \\ &= m [a_{p1} A_{p1} + a_{p2} A_{p2} + \dots + a_{pn} A_{pn}]. \end{aligned}$$

$$\Delta_2 = a_{p1} A_{p1} + a_{p2} A_{p2} + \dots + a_{pn} A_{pn}.$$

$$\Delta_1 = m \cdot \Delta_2.$$

Die Richtigkeit dieses Satzes kann auch so nachgewiesen werden: Bei der Zusammensetzung der Determinantenglieder wird in jedes einzelne Glied aus jeder Reihe und Colonne je ein Element aufgenommen. Werden nun die Elemente einer Reihe oder Colonne mit  $m$  multiplicirt, so wird dieser Factor auch in jedes Glied, und zwar nur ein Mal, eingeführt und erscheint so als gemeinschaftlicher Factor aller Glieder oder der ganzen Determinante.

Die Multiplication wird thatsächlich zu einer Division, wenn man, statt mit  $m$ , mit  $\frac{1}{m}$  multiplicirt.

Einige Sätze, die in den vorhergehenden Abschnitten implicite enthalten sind, sollen hier noch besonders hervorgehoben werden.

1) Haben alle Elemente einer Reihe oder einer Colonne den gemeinschaftlichen Factor  $m$ , so kann derselbe als gemeinschaftlicher Factor vor das Schema gesetzt werden, wie in (35).

2) Werden alle Elemente einer Reihe oder Colonne mit dem nämlichen Factor multiplicirt, und wird zugleich die ganze Determinante mit diesem Factor dividirt, so bleibt deren Werth unverändert.

3) Wechselt man die Vorzeichen aller Elemente in einer Reihe oder in einer Colonne, so wechselt hierdurch die ganze Determinante das Vorzeichen.

4) Sind alle Elemente, welche auf einer Seite einer Diagonale stehen, gleich Null, so ist die ganze Determinante gleich diesem Diagonalgliede.

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n_1 & n_2 & n_3 & n_4 & \dots & n_n \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ c_2 & c_3 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n_2 & n_3 & n_4 & \dots & n_n \end{vmatrix} = a_1 b_2 \begin{vmatrix} c_3 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ n_3 & n_4 & \dots & n_n \end{vmatrix}, \\ \Delta &= a_1 b_2 c_3 \dots n_n. \end{aligned} \tag{36}$$

5) Das nachfolgende Schema kann dazu dienen, eine Determinante in eine andere zu verwandeln, welche um einen Grad höher, aber von gleichem Werthe ist.

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ n_1 & n_2 & \dots & n_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ x & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ y & b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ z & c_1 & c_2 & \dots & c_n \end{vmatrix}. \quad (37)$$

Die Elemente  $x, y, \dots, z$  sind beliebig.

### §. 9. Eigenschaften der Unterdeterminanten.

Werden die Elemente einer Reihe, beziehungsweise einer Colonne, mit solchen Unterdeterminanten, welche zu den Elementen einer anderen Reihe, beziehungsweise Colonne, gehören, multiplicirt, so ist die Summe dieser Produkte gleich Null.

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{sn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \quad (38)$$

Nach der Reihe  $p$  entwickelt, erhält man:

$$A = a_{p1} A_{p1} + a_{p2} A_{p2} + a_{p3} A_{p3} + \dots + a_{pn} A_{pn}.$$

Da die Unterdeterminanten von den zugehörigen Elementen ganz unabhängig sind, so bleiben sie unverändert, wenn wir diesen besondere Werthe beilegen, indem wir setzen:

$$a_{p1} = a_{s1}; \quad a_{p2} = a_{s2}; \quad \dots \quad a_{pn} = a_{sn}.$$

Die letzte Formel gestaltet sich jetzt so:

$$A = a_{s1} A_{p1} + a_{s2} A_{p2} + \dots + a_{sn} A_{pn}$$

und repräsentirt die Summe aller Produkte, die entstehen, wenn wir die Elemente der Reihe  $s$  mit denjenigen Unterdeterminanten multipliciren, die zur Reihe  $p$  gehören. Zugleich entstehen aber auch im Schema (38) zwei identisch gleiche Reihen, nämlich die

Reihen  $p$  und  $s$ , so dass der Werth der ganzen Determinante nach (§. 7) verschwinden und die letzte Formel in die nachfolgende übergehen muss:

$$a_{s1} A_{p1} + a_{s2} A_{p2} + \dots + a_{sn} A_{pn} = 0. \tag{39}$$

Wird diese Formel wieder auf die Columnen  $q$  und  $r$  übertragen, so heisst sie:

$$a_{1r} A_{1q} + a_{2r} A_{2q} + \dots + a_{nr} A_{nq} = 0. \tag{40}$$

Beispiel.

$$A = \begin{vmatrix} 7 & 1 & 5 & 3 \\ 4 & 0 & 6 & 8 \\ 9 & 2 & 7 & 5 \\ 10 & 6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$A_{11} = -164; \quad A_{12} = 260; \quad A_{13} = 168; \quad A_{14} = -44.$$

Wenn diese Unterdeterminanten, welche zur ersten Reihe gehören, mit den Elementen einer anderen, z. B. der dritten Reihe multiplicirt werden, so entsteht:

$$(-164) \cdot 9 + 260 \cdot 2 + 168 \cdot 7 - 44 \cdot 5 = 0.$$

§. 10. Zerlegung einer Determinante in eine Summe von Determinanten von gleichem Grade.

Werden die Elemente der Reihe  $p$  in der Weise in 2 Theile zerlegt, dass wir setzen:

$$a_{p1} = \alpha_{p1} + \beta_{p1}; \quad a_{p2} = \alpha_{p2} + \beta_{p2}; \quad \dots \quad a_{pn} = \alpha_{pn} + \beta_{pn},$$

so gestaltet sich das allgemeine Schema folgendermassen:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\alpha_{p1} + \beta_{p1}), (\alpha_{p2} + \beta_{p2}) & \dots & \dots & (\alpha_{pn} + \beta_{pn}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{41}$$

und die nach der Reihe  $p$  entwickelte Determinante erhält folgende Form:

$$A = (\alpha_{p1} + \beta_{p1}) A_{p1} + (\alpha_{p2} + \beta_{p2}) A_{p2} \dots + (\alpha_{pn} + \beta_{pn}) A_{pn}.$$

Wir zerlegen diesen Werth in die beiden folgenden:

$$A_1 = \alpha_{p1} A_{p1} + \alpha_{p2} A_{p2} + \dots + \alpha_{pn} A_{pn}$$

$$A_2 = \beta_{p1} A_{p1} + \beta_{p2} A_{p2} + \dots + \beta_{pn} A_{pn}$$

und haben die Relation  $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2$ . Zugleich erkennen wir, dass  $\mathcal{A}_1$  und  $\mathcal{A}_2$  selbstständige Determinanten sind, welche mit  $\mathcal{A}$  die Unterdeterminanten der Reihe  $p$  gemeinschaftlich haben. Ihre Schemata stimmen daher auch mit dem Schema von  $\mathcal{A}$  genau überein bis auf die Elemente der Reihe  $p$ , welche in  $\mathcal{A}_1$  durch die  $\alpha$ , in  $\mathcal{A}_2$  aber durch die  $\beta$  ersetzt werden muss. Hiernach ist

$$\mathcal{A}_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{p1} & \alpha_{p2} & \dots & \alpha_{pn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}; \quad \mathcal{A}_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{p1} & \beta_{p2} & \dots & \beta_{pn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Wird das gleiche Verfahren bei  $\mathcal{A}_1$  und  $\mathcal{A}_2$  wiederholt, oder werden schon anfangs die Elemente der Reihe  $p$  in mehr als 2 Theile zerlegt, so zerfällt auch  $\mathcal{A}$  in eine grössere Anzahl von Determinanten.

Beispiel.  $\mathcal{A} \qquad \mathcal{A}_1 \qquad \mathcal{A}_2$

$$\begin{vmatrix} 8 & 2 & 5 \\ 7 & 10 & 1 \\ 3 & 6 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 2 & 5 \\ 4 & 5 & 3 \\ 3 & 6 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 8 & 2 & 5 \\ 3 & 5 & -2 \\ 3 & 6 & 4 \end{vmatrix}$$

$7 = 4 + 3; \quad 10 = 5 + 5; \quad 1 = 3 - 2; \quad \mathcal{A}_1 = 47; \quad \mathcal{A}_2 = 235;$   
 $\mathcal{A} = 282, \text{ oder } \mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2.$

§. 11. Erlaubte Veränderung der Elemente einer Reihe.

Werden sämtliche Elemente einer Reihe, beziehungsweise Colonne, mit dem nämlichen ganz beliebigen Factor multiplicirt und diese Produkte zu den Elementen einer anderen Reihe, resp. Colonne, addirt, so bleibt der Werth der Determinante unverändert.

Es soll bewiesen werden, dass

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{sn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (a_{p1} + m \cdot a_{s1}), & (a_{p2} + m \cdot a_{s2}) & \dots & (a_{pn} + m \cdot a_{sn}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{sn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rn} \end{vmatrix}, \tag{42}$$

ist, wenn in  $\mathcal{A}_2$  die Elemente der Reihe  $p$  dadurch entstanden sind, dass man in  $\mathcal{A}_1$  die mit  $m$  multiplicirten Elemente der Reihe  $s$  zu den entsprechenden Elementen der Reihe  $p$  addirt hat. Wird  $\mathcal{A}_2$  nach Anleitung des vorhergehenden Satzes in 2 Determinanten zerlegt, indem man die Elemente der Reihe  $p$  wieder in ihre Theile  $a_{p1}$  und  $m \cdot a_{s1}$ ,  $a_{p2}$  und  $m \cdot a_{s2}$  u. s. w. auflöst, so gehen daraus 2 Determinante hervor, von welchen die eine gleich  $\mathcal{A}_1$  ist, die andere aber so heisst:

$$\mathcal{A}_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m \cdot a_{s1} & m \cdot a_{s2} & \dots & m \cdot a_{sn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{sn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Wird der gemeinsame Factor  $m$  ausgeschieden, so werden 2 Reihen gleich und dann ist  $\mathcal{A}_3 = 0$ . Da aber  $\mathcal{A}_2 = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_3$  ist, so folgt, dass  $\mathcal{A}_2 = \mathcal{A}_1$  sein muss.

Negative  $m$  verwandeln diese Addition thatsächlich in eine Subtraction, für  $m = \pm 1$  werden die Elemente der einen Reihe unverändert mit denen der anderen Reihe vereinigt. Dass dieser Satz auch auf Columnen anwendbar ist, bedarf keines besonderen Beweises.

Für den Fall, dass die Elemente gewöhnliche Zahlen sind, kann mittelst dieser Sätze das Schema zu einer für die Ausrechnung bequemer Form transformirt werden, indem man die Reihen, beziehungsweise Columnen, so mit einander verbindet, dass alle Elemente einer Reihe oder Columnen bis auf ein einziges in Null übergehen. Die ganze Determinante reducirt sich dann, wenn sie nach (39), beziehungsweise (40), dargestellt wird, auf das Produkt aus diesem einzigen Elemente mit der zugehörigen Unterdeterminante.

$$1. \text{ Beispiel: } \begin{vmatrix} \mathcal{A}_1 & & & \\ 6 & 10 & 3 & 11 \\ 1 & 4 & 1 & -5 \\ 6 & 5 & 1 & 8 \\ 3 & 7 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathcal{A}_2 & & & \\ 0 & 10 & 3 & 11 \\ -1 & 4 & 1 & -5 \\ 0 & 21 & 5 & -12 \\ 0 & 3 & 1 & 8 \end{vmatrix}$$

$\mathcal{A}_2$ , welches  $= \mathcal{A}_1$  ist, geht aus diesem hervor, indem man die dritte Columnen doppelt von der ersten, dann die zweite Reihe einfach

von der vierten abzieht und nochmals die zweite Reihe vierfach zur dritten addirt. Nun ist

$$A_2 = a_{21} A_{21} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 10 & 3 & 11 \\ 21 & 5 & -12 \\ 3 & 1 & 8 \end{vmatrix} = A_3.$$

Nachdem in  $A_3$  die dritte Reihe zur zweiten addirt ist, wird in dieser der gemeinsame Factor 2 ausgeschieden, dann die erste Reihe von der zweiten und endlich die dreifache dritte Reihe von der ersten abgezogen. So erhält man:

$$A_3 = 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & -13 \\ 2 & 0 & -13 \\ 3 & 1 & 8 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -13 \\ 2 & -13 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 1 & 13 \\ 2 & 13 \end{vmatrix}.$$

$$A_3 = 26.$$

Dies ist aber auch der Werth von  $A_1$ , und so sehen wir hier eine Determinante vom vierten Grade auf eine solche vom zweiten Grade reducirt, deren Ausrechnung einfach ist.

2. Beispiel:

$$\begin{vmatrix} 2\frac{1}{2} & -1\frac{2}{3} & 2 & -4 \\ 1\frac{3}{4} & -1\frac{1}{2} & 3 & -1 \\ 2 & -3\frac{1}{2} & 1 & -2 \\ 1\frac{1}{3} & -4\frac{1}{2} & 4 & -3 \end{vmatrix} = \frac{1}{72} \begin{vmatrix} 30 & 10 & 2 & 4 \\ 21 & 9 & 3 & 1 \\ 24 & 21 & 1 & 2 \\ 16 & 27 & 4 & 3 \end{vmatrix}.$$

Hier geht  $A_2$  hervor aus  $A_1$ , indem man die erste Colonne mit 12, die zweite mit  $-6$ , die vierte mit  $-1$  multiplicirt und die ganze Determinante wieder mit  $12 \cdot (-6) \cdot (-1) = 72$  dividirt. Wird weiter aus der ersten Reihe der Factor 2 ausgeschieden, dann die zweite Colonne dreifach von der ersten, die dritte fünf-fach von der zweiten und doppelt von der vierten abgezogen, so erhält man das nachfolgende:

$$\frac{1}{36} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -6 & -6 & 3 & -5 \\ -39 & 16 & 1 & 0 \\ -65 & 7 & 4 & -5 \end{vmatrix} = \frac{1}{36} \begin{vmatrix} -6 & -6 & -5 \\ -39 & 16 & 0 \\ -65 & 7 & -5 \end{vmatrix}$$

$A_4$  ist das Produkt aus  $a_{13} = 1$  und der entsprechenden Unter-determinante. Nachdem nun in der ersten und dritten Colonne die Vorzeichen gewechselt sind, wobei das Vorzeichen der Deter-minante selbst unverändert bleibt, zieht man die erste Reihe von der dritten ab und gelangt so zu der Form:

$$\mathcal{A}_4 = \frac{1}{36} \begin{vmatrix} 6 & -6 & 5 \\ 39 & 16 & 0 \\ 59 & 13 & 0 \end{vmatrix} = \frac{5}{36} \begin{vmatrix} 39 & 16 \\ 59 & 13 \end{vmatrix} = \frac{5}{36} \cdot (-437),$$

und wieder ist  $\mathcal{A}_4 = -\frac{2185}{36}$  der Werth von  $\mathcal{A}_1$ .

Anmerkung. In beiden Beispielen sind einfachere, aber deswegen auch weniger instructive Transformationen möglich.

### §. 12. Zerlegung einer Determinante.

Zerlegung einer Determinante vom Grade  $n$  in eine Summe von Produkten, deren beide Factoren wieder Determinanten sind, und zwar vom Grade  $p$  und  $(n-p)$ .

Damit sich die nachfolgenden Entwicklungen nicht allzu umfangreich gestalten, führen wir dieselben nicht an einem allgemeinen Schema, sondern nur an solchen von bestimmten Graden aus und beginnen mit einer Determinante vierten Grades:

$$\mathcal{A} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix}. \quad (43)$$

Zunächst geben wir  $\mathcal{A}$  die folgende Gestalt:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} = & a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 & b_4 \\ c_2 & c_3 & c_4 \\ d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_3 & d_4 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_4 \end{vmatrix} \\ & - a_4 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Wird das gleiche Verfahren auf die zurückgebliebenen Determinanten dritten Grades angewendet, so erhält man:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} = & a_1 \left\{ b_2 \begin{vmatrix} c_3 & c_4 \\ d_3 & d_4 \end{vmatrix} - b_3 \begin{vmatrix} c_2 & c_4 \\ d_2 & d_4 \end{vmatrix} + b_4 \begin{vmatrix} c_2 & c_3 \\ d_2 & d_3 \end{vmatrix} \right\} \\ & - a_2 \left\{ b_1 \begin{vmatrix} c_3 & c_4 \\ d_3 & d_4 \end{vmatrix} - b_3 \begin{vmatrix} c_1 & c_4 \\ d_1 & d_4 \end{vmatrix} + b_4 \begin{vmatrix} c_1 & c_3 \\ d_1 & d_3 \end{vmatrix} \right\} \\ & + a_3 \left\{ b_1 \begin{vmatrix} c_2 & c_4 \\ d_2 & d_4 \end{vmatrix} - b_2 \begin{vmatrix} c_1 & c_4 \\ d_1 & d_4 \end{vmatrix} + b_4 \begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ d_1 & d_2 \end{vmatrix} \right\} \\ & - a_4 \left\{ b_1 \begin{vmatrix} c_2 & c_3 \\ d_2 & d_3 \end{vmatrix} - b_2 \begin{vmatrix} c_1 & c_3 \\ d_1 & d_3 \end{vmatrix} + b_3 \begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ d_1 & d_2 \end{vmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

Die jetzt noch übrig gebliebenen Determinanten sind vom zweiten Grade. Berücksichtigt man, dass eine jede in 2 Theilen als Factor auftritt, so lässt sich  $\mathcal{A}$  auch in folgender Form anschreiben:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} = & (a_1 b_2 - a_2 b_1) \begin{vmatrix} c_3 & c_4 \\ d_3 & d_4 \end{vmatrix} - (a_1 b_3 - a_3 b_1) \begin{vmatrix} c_2 & c_4 \\ d_2 & d_4 \end{vmatrix} \\ & + (a_1 b_4 - a_4 b_1) \begin{vmatrix} c_2 & c_3 \\ d_2 & d_3 \end{vmatrix} + (a_2 b_3 - a_3 b_2) \begin{vmatrix} c_1 & c_4 \\ d_1 & d_4 \end{vmatrix} \\ & - (a_2 b_4 - a_4 b_2) \begin{vmatrix} c_1 & c_3 \\ d_1 & d_3 \end{vmatrix} + (a_3 b_4 - a_4 b_3) \begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ d_1 & d_2 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Bedenkt man endlich noch, dass auch die Klammerwerthe Determinanten zweiten Grades sind, so erscheint schliesslich  $\mathcal{A}$  in folgender Zusammensetzung:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} = & \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_3 & c_4 \\ d_3 & d_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_2 & c_4 \\ d_2 & d_4 \end{vmatrix} \\ & + \begin{vmatrix} a_1 & a_4 \\ b_1 & b_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_2 & c_3 \\ d_2 & d_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_1 & c_4 \\ d_1 & d_4 \end{vmatrix} \\ & - \begin{vmatrix} a_2 & a_4 \\ b_2 & b_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_1 & c_3 \\ d_1 & d_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_3 & a_4 \\ b_3 & b_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ d_1 & d_2 \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (44)$$

Zur einfacheren Darstellung empfiehlt sich hier die symbolische Bezeichnung der Determinanten durch ihr Diagonalglied, und zwar ist dann:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} = & (a_1 b_2) \cdot (c_3 d_4) - (a_1 b_3) \cdot (c_2 d_4) + (a_1 b_4) \cdot (c_2 d_3) \\ & + (a_2 b_3) \cdot (c_1 d_4) - (a_2 b_4) \cdot (c_1 d_3) + (a_3 b_4) \cdot (c_1 d_2). \end{aligned}$$

Die Determinante vierten Grades sehen wir so in eine Summe von Produkten zerlegt, deren Factoren ebenfalls Determinanten sind, für welche die Schemata ohne Schwierigkeit aus dem gegebenen entnommen werden können. Die Elemente bezeichnen nämlich in (43) Rechtecke, die so liegen, dass das Schema des zweiten Factors übrig bleibt, wenn man diejenigen Reihen und Columnen auslöscht, denen die Elemente des ersten Factors angehören. So zusammengehörige Determinanten werden correspondirende genannt. Wird durch Wechsel die Lage der Reihen oder Columnen geändert, so lässt sich die Formel (44) auch auf das transformirte Schema anwenden und so die vorgelegte Determinante in sehr verschiedener Weise in eine Summe von Determinantenprodukten zerlegen.

Nachdem an diesem Beispiele das Wesen der beabsichtigten Zerlegung klar gestellt ist, sollen an einem weiteren allgemein gültige Regeln und Formeln entwickelt werden und mag dazu eine Determinante fünften Grades dienen.

$$\mathcal{A} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & d_5 \\ e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{vmatrix}. \quad (45)$$

Von der Annahme ausgehend, dass die correspondirenden Determinanten vom zweiten und dritten Grade sein sollen, leiten wir zuerst aus der Indicesform des Diagonalgliedes folgende weitere Formen ab:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & & 2 & 4 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 5 & & 2 & 5 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 & 5 & & 3 & 4 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 5 & 2 & 3 & 4 & & 3 & 5 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 5 & & 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \end{array} \quad (46)$$

Wir finden hier jede Form in 2 Gruppen zerlegt und innerhalb jeder Gruppe die Indices in natürlicher Folge. Der ersten Form entspricht das Determinantenglied:  $a_1 b_2 \cdot c_3 d_4 e_5$ , und daraus leiten wir weitere Glieder dadurch her, dass wir den ersten Theil  $a_1 b_2$  festhalten und nur die Indices der zweiten Gruppe durch fortgesetztes Vertauschen permutiren, wodurch entsteht:

$$a_1 b_2 [c_3 d_4 e_5 - c_3 d_5 e_4 + c_4 d_5 e_3 - c_4 d_3 e_5 + c_5 d_3 e_4 - c_5 d_4 e_3].$$

Wird diese Klammer nach Art der Multiplication aufgelöst, so gehen daraus diejenigen 6 Glieder hervor, welche mit  $a_1 b_2$  anfangen. Durch Tausch von 1 mit 2 entstehen hieraus 6 weitere Glieder, welche gewechselte Vorzeichen besitzen und sich auch so zusammenfassen lassen:

$$- a_2 b_1 [c_3 d_4 e_5 - c_3 d_5 e_4 + c_4 d_5 e_3 - c_4 d_3 e_5 + c_5 d_3 e_4 - c_5 d_4 e_3].$$

Der beiden Ausdrücken gemeinschaftliche Klammerfactor ist die Determinante  $(c_3 d_4 e_5)$ , und da auch die beiden Theile  $a_1 b_2$  und  $- a_2 b_1$ , oder  $(a_1 b_2 - a_2 b_1)$  als Determinante  $(a_1 b_2)$  geschrieben werden können, so repräsentirt die symbolische Form:

$$(a_1 b_2) \cdot (c_3 d_4 e_5)$$

diejenigen 12 Glieder von  $\mathcal{A}$ , in welchen die Indices der einen und der anderen Gruppe nur unter sich vertauscht sind.

Ebenso entspricht jeder weiteren unter (46) zusammengestellten Indicesform ein bestimmtes Determinantenglied, aus dem in genau gleicher Weise weitere Glieder hergeleitet werden können. Nehmen wir an, ein solches habe die Form:

$$a_i b_k \cdot c_m d_n e_p, \quad (47)$$

so muss darauf Rücksicht genommen werden, dass  $i < k$  und  $m < n < p$  ist. Um nun auch das Vorzeichen festzustellen, muss man beachten, wie dieses Glied aus dem Hauptgliede hervorgeht. Es wird nämlich zuerst  $i$  mit dem vorhergehenden Index  $(i - 1)$  vertauscht, dann mit  $(i - 2)$ ,  $(i - 3)$  u. s. w., d. h.  $i$  rückt durch Tausch von Stelle zu Stelle vor und gelangt nach  $(i - 1)$  Indiceswechseln an die Stelle von 1. Selbstverständlich muss hierbei auch das Vorzeichen  $(i - 1)$  mal gewechselt werden. Ebenso lassen wir  $k$  von Position zu Position durch Tausch vorrücken bis zur Stelle 2, wohin es nach  $(k - 2)$  Vertauschungen gelangen muss. Da diese Verschiebung  $(k - 2)$  Zeichenwechsel zur Folge hat, so sind deren im Ganzen  $(i - 1) + (k - 2)$  zu verzeichnen, welche durch den Faktor  $(-1)^{(i-1) + (k-2)}$  ihren Ausdruck finden.

Hiernach wird das Glied mit seinem Vorzeichen jetzt so heissen:

$$(-1)^{i-1+k-2} a_i b_k \cdot c_m d_n e_p.$$

Hält man hierin den ersten Theil fest und wechselt fortgesetzt die Indices der zweiten Gruppe, so wandelt sich dieses einzige Glied in folgenden Ausdruck um:

$$(-1)^{i-1+k-2} a_i b_k [c_m d_n e_p - c_m d_p e_n + c_n d_p e_m - c_n d_m e_p + c_p d_m e_n - c_p d_n e_m].$$

Wird dieses Produkt ausmultipliziert, so stellt es 6 Glieder von  $\mathcal{A}$  vor mit abwechselnd positiven und negativen Vorzeichen, genau so, wie es der fortgesetzte Indiceswechsel erfordert. Da nun die Werthe in der Klammer die entwickelte Determinante  $(c_m d_n e_p)$  darstellen, so können diese 6 Glieder unter folgendem Symbole zusammengefasst werden:

$$(-1)^{i-1+k-2} \cdot a_i b_k (c_m d_n e_p).$$

Vertauscht man darin noch die Indices 1 und 2 und wechselt das Zeichen, so gehen daraus 6 weitere Glieder von  $\mathcal{A}$  hervor und zwar unter der Form:

$$(-1)^{i-1+k-2} \cdot - a_k b_i (c_m d_n e_p).$$

Beide Ausdrücke lassen sich vereinigen zu der Summe:

$$(-1)^{i-1+k-2} [a_i b_k - a_k b_i] (c_m d_n e_p),$$



Folge hat, so waren zur Ableitung dieses Gliedes im Ganzen  $i - 1 + k - 2 + m - 3$  Zeichenwechsel erforderlich, so dass das Vorzeichen durch den Factor  $(-1)^{i-1+k-2+m-3}$  geregelt wird und das ganze Glied jetzt heisst:

$$(-1)^{i-1+k-2+m-3} a_i b_k c_m \cdot d_n e_p.$$

Wir haben hier das ganze Glied als Produkt aus 2 Theilen dargestellt; werden im zweiten die Indices gewechselt, so muss auch das Vorzeichen sich ändern und wir erhalten das weitere Glied:

$$(-1)^{i-1+k-2+m-3} a_i b_k c_m \cdot -d_p e_n$$

und fassen beide zu dem Ausdruck zusammen:

$$(-1)^{i-1+k-2+m-3} a_i b_k c_m [d_n e_p - d_p e_n],$$

dem wir die noch kürzere Form geben können:

$$(-1)^{i-1+k-2+m-3} a_i b_k c_m (d_n e_p),$$

worin der zweite Theil wieder eine Determinante zweiten Grades bedeutet. Wird diese unverändert fest gehalten und werden die Indices des ersten Theiles durch fortgesetztes Vertauschen permutirt, so erhält man:

$$\begin{aligned} & (-1)^{i-1+k-2+m-3} [a_i b_k c_m - a_i b_m c_k + a_m b_i c_k \\ & - a_m b_k c_i + a_k b_m c_i - a_k b_i c_m] (d_n e_p), \end{aligned}$$

ein Ausdruck, der wieder kürzer geschrieben werden kann:

$$(-1)^{i-1+k-2+m-3} (a_i b_k c_m) (d_n e_p). \quad (50)$$

Wenden wir diese Formel auf die ganze unter (49) gegebene Zusammenstellung an, so setzt sich die Determinante fünften Grades aus folgenden Theilen zusammen:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} = & (-1)^{0+0+0} (a_1 b_2 c_3) (d_4 e_5) + (-1)^{0+0+1} (a_1 b_2 c_4) (d_3 e_5) \\ & + (-1)^{0+0+2} (a_1 b_2 c_5) (d_3 e_4) + (-1)^{0+1+1} (a_1 b_3 c_4) (d_2 e_5) \\ & + (-1)^{0+1+2} (a_1 b_3 c_5) (d_2 e_4) + (-1)^{0+2+2} (a_1 b_4 c_5) (d_2 e_3) \\ & + (-1)^{1+1+1} (a_2 b_3 c_4) (d_1 e_5) + (-1)^{1+1+2} (a_2 b_3 c_5) (d_1 e_4) \\ & + (-1)^{1+2+2} (a_2 b_4 c_5) (c_1 d_3) + (-1)^{2+2+2} (a_3 b_4 c_5) (d_1 e_2). \end{aligned}$$

Wieder müssen wir uns darauf beschränken, nur eines dieser Produkte vollständig zu entwickeln, und wählen dazu:

$$\begin{aligned} & (-1)^{1+1+2} (a_2 b_3 c_5) (d_1 e_4) = \\ & [a_2 b_3 c_5 - a_2 b_5 c_3 + a_3 b_5 c_2 - a_3 b_2 c_5 + a_5 b_2 c_3 - a_5 b_3 c_2] \\ & \times [d_1 e_4 - d_4 e_1] = \\ & a_2 b_3 c_5 d_1 e_4 - a_2 b_3 c_5 d_4 e_1 - a_2 b_5 c_3 d_1 e_4 + a_2 b_5 c_3 d_4 e_1 \\ & + a_3 b_5 c_2 d_1 e_4 - a_3 b_5 c_2 d_4 e_1 - a_3 b_2 c_5 d_1 e_4 + a_3 b_2 c_5 d_4 e_1 \\ & + a_5 b_2 c_3 d_1 e_4 - a_5 b_2 c_3 d_4 e_1 - a_5 b_3 c_2 d_1 e_4 + a_5 b_3 c_2 d_4 e_1. \end{aligned}$$

Schliesslich soll noch veranschaulicht werden, wie die Schemata correspondirender Determinanten aus dem Hauptschema zu entnehmen sind:

$$\begin{vmatrix} \cdot & a_2 & a_3 & \cdot & a_5 \\ \cdot & b_2 & b_3 & \cdot & b_5 \\ \cdot & c_2 & c_3 & \cdot & c_5 \\ d_1 & \cdot & \cdot & d_4 & \cdot \\ e_1 & \cdot & \cdot & e_4 & \cdot \end{vmatrix}.$$

Die Schemata von  $(a_2 \ b_3 \ c_5)$  und  $(d_1 \ e_4)$  treten hier deutlich genug hervor. Es kann nicht schwer fallen, diese Art der Zerlegung auf beliebige Determinanten zu übertragen.

### §. 13. Auflösung linearer Gleichungen.

Anwendung der Determinanten zur Auflösung eines Systems von  $n$  linearen Gleichungen zwischen  $n$  Unbekannten. Die homogenen linearen Gleichungen.

Zur Entwicklung der hier massgebenden Formeln benutzen wir für den Anfang wieder ein System von 3 Gleichungen zwischen 3 Unbekannten:

$$\begin{aligned} a_{11} x + a_{12} y + a_{13} z &= \alpha \\ a_{21} x + a_{22} y + a_{23} z &= \beta \\ a_{31} x + a_{32} y + a_{33} z &= \gamma. \end{aligned} \quad (51)$$

Ein so geordnetes System von Gleichungen bestimmt durch seine Coefficienten immer das Schema einer Determinante, welche hier heisst:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad (52)$$

Wird die erste Gleichung mit  $A_{11}$ , die zweite mit  $A_{21}$ , die dritte mit  $A_{31}$ , d. h. mit den Unterdeterminanten der ersten Columnne von  $\Delta$  multiplicirt, so erhält man durch Addition derselben die folgende:

$$\begin{aligned} (a_{11} A_{11} + a_{21} A_{21} + a_{31} A_{31}) x + (a_{12} A_{11} + a_{22} A_{21} + a_{32} A_{31}) y \\ + (a_{13} A_{11} + a_{23} A_{21} + a_{33} A_{31}) z = \alpha A_{11} + \beta A_{21} + \gamma A_{31}. \end{aligned}$$

Nach früheren Sätzen (§. 7 und §. 9) ist aber:

$$\begin{aligned} a_{11} A_{11} + a_{21} A_{21} + a_{31} A_{31} &= \mathcal{A} \\ a_{12} A_{11} + a_{22} A_{21} + a_{32} A_{31} &= 0 \\ a_{13} A_{11} + a_{23} A_{21} + a_{33} A_{31} &= 0, \end{aligned}$$

so dass die Coefficienten von  $y$  und  $z$  verschwinden und für die einzige zurückgebliebene Unbekannte  $x$  der folgende Werth aus der vereinfachten Gleichung hervorgeht:

$$x = \frac{\alpha A_{11} + \beta A_{21} + \gamma A_{31}}{a_{11} A_{11} + a_{21} A_{21} + a_{31} A_{31}}. \quad (53)$$

Wie wir sehen, unterscheidet sich der Zähler nur dadurch von dem Nenner, dass die Coefficienten  $a_{11}$ ,  $a_{21}$ ,  $a_{31}$  durch die Constanten  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  vertreten sind. Da nun der Nenner die Determinante der Coefficienten ist, so muss auch der Zähler in Determinantenform geschrieben werden können, und zwar unterscheiden sich Nenner und Zähler nur durch die Elemente der ersten Colonne, weil die hierzu gehörigen Unterdeterminanten ihnen gemeinschaftlich angehören. So schreiben wir:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} \alpha & a_{12} & a_{13} \\ \beta & a_{22} & a_{23} \\ \gamma & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} = \frac{\mathcal{A}_x}{\mathcal{A}}. \quad (54)$$

Um  $y$  zu finden, kann man ebenso die Gleichungen mit den Unterdeterminanten der zweiten Colonne, nämlich mit  $A_{12}$ ,  $A_{22}$ ,  $A_{32}$  multipliciren und dann addiren. Hierbei verschwinden die Coefficienten von  $x$  und  $z$ , und man erhält:

$$y = \frac{\alpha A_{12} + \beta A_{22} + \gamma A_{32}}{a_{12} A_{12} + a_{22} A_{22} + a_{32} A_{32}}.$$

Der Nenner ist wieder die Determinante der Coefficienten, der Zähler ist dem Nenner gleich bis auf die Elemente der zweiten Colonne, in welcher die Constanten  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  erscheinen. Uebrigens kann der Werth für  $y$  aus dem für  $x$  auch dadurch abgeleitet werden, dass man die Coefficienten von  $y$  mit denen von  $x$  vertauscht. Man erhält so:





Der Werth einer Unbekannten eines nach Schema (55) geordneten Systems von Gleichungen ersten Grades ist gleich einem Quotienten, dessen Nenner die Determinante aus den Coefficienten des Systems ist, und dessen Zähler aus dem Nenner dadurch hervorgeht, dass man in dem Schema desselben an die Stelle der Coefficienten, welche der gesuchten Unbekannten angehören, die Constanten  $\alpha$  setzt.

Die homogenen linearen Gleichungen. Das System (55) wird homogen, wenn die Constanten  $\alpha$  verschwinden, d. h.  $\alpha_1 = 0$ ,  $\alpha_2 = 0 \dots \dots \alpha_n = 0$  wird. Man hat dann:

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots \dots \dots + a_{1n} x_n = 0$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots \dots \dots + a_{2n} x_n = 0$$

$$\dots \dots \dots$$

$$a_{p1} x_1 + a_{p2} x_2 + \dots \dots \dots + a_{pn} x_n = 0$$

$$\dots \dots \dots$$

$$a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \dots \dots \dots + a_{nn} x_n = 0.$$

Ein System von  $n$  homogenen Gleichungen zwischen eben so vielen Unbekannten zeigt gewisse Eigenthümlichkeiten, die hier hervorgehoben werden sollen. Es sei  $m_1, m_2, m_3 \dots \dots m_n$  ein System von Werthen, welche die  $n$  homogenen Gleichungen befriedigen. Multipliciren wir diese Lösungen mit dem beliebig gewählten Faktor  $\lambda$ , so entstehen neue Werthe  $\lambda m_1, \lambda m_2, \lambda m_3, \dots \dots \lambda m_n$ , die unzählig viele verschiedene Werthsysteme vorstellen, je nach der Wahl des Werthes  $\lambda$ . Es kann nun nachgewiesen werden, dass jedes dieser Werthsysteme das System von homogenen Gleichungen befriedigen muss, sobald vorausgesetzt werden darf, dass das erste System  $m_1, m_2 \dots \dots m_n$  den Gleichungen Genüge leistet. Nehmen wir z. B. die beliebige Gleichung  $p$  heraus, so muss der Voraussetzung gemäss

$$a_{p1} m_1 + a_{p2} m_2 + a_{p3} m_3 + \dots \dots \dots + a_{pn} m_n = 0$$

sein. Ist dies aber der Fall, so ist auch

$$a_{p1} \lambda m_1 + a_{p2} \lambda m_2 + a_{p3} \lambda m_3 + \dots \dots \dots + a_{pn} \lambda m_n = 0.$$

Wie diese eine, so werden unter der bekannten Voraussetzung auch alle übrigen Gleichungen durch das abgeleitete System befriedigt, was zu beweisen war. Wir müssen es mithin als eine Eigenthümlichkeit homogener Gleichungen ansehen, dass ein System von  $n$  Gleichungen zwischen  $n$  Unbekannten nicht, wie es bei nicht homogenen Gleichungen der Fall ist, durch nur ein einziges, sondern



mit der wir die Determinantenlehre eingeleitet haben. In §. 4 wurde nämlich an einzelnen Beispielen nachgewiesen, dass 3 Gleichungen zwischen 2, oder 4 Gleichungen zwischen 3 Unbekannten nur dann durch das nämliche System von Lösungen befriedigt werden können, wenn die Determinante ihrer Coefficienten verschwindet. Die Gleichungen (61) stellen uns wieder vor diese Aufgabe, nur in allgemeiner Form, indem wir es hier mit  $(n-1)$  Unbekannten und  $n$  Gleichungen zu thun haben. Doch soll abermals von einem besonderen Falle ausgegangen werden:

$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + a_{14} x_4 &= 0 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 + a_{24} x_4 &= 0 \\ a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 + a_{34} x_4 &= 0 \\ a_{41} x_1 + a_{42} x_2 + a_{43} x_3 + a_{44} x_4 &= 0. \end{aligned} \quad (62)$$

Setzen wir  $\frac{x_1}{x_4} = z_1$ ;  $\frac{x_2}{x_4} = z_2$ ;  $\frac{x_3}{x_4} = z_3$ , so gehen diese Gleichungen über in:

$$\begin{aligned} a_{11} z_1 + a_{12} z_2 + a_{13} z_3 + a_{14} &= 0 \\ a_{21} z_1 + a_{22} z_2 + a_{23} z_3 + a_{24} &= 0 \\ a_{31} z_1 + a_{32} z_2 + a_{33} z_3 + a_{34} &= 0 \\ a_{41} z_1 + a_{42} z_2 + a_{43} z_3 + a_{44} &= 0. \end{aligned} \quad (63)$$

Als Determinante des ganzen Systems haben wir zu setzen:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \quad (64)$$

und aus den 3 ersten Gleichungen finden wir folgende Lösungen:

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{\begin{vmatrix} -a_{14} & a_{12} & a_{13} \\ -a_{24} & a_{22} & a_{23} \\ -a_{34} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix}}{A_{44}} = \frac{A_{41}}{A_{44}} \\ z_2 &= \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & -a_{14} & a_{13} \\ a_{21} & -a_{24} & a_{23} \\ a_{31} & -a_{34} & a_{33} \end{vmatrix}}{A_{44}} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix}}{A_{44}} = \frac{A_{42}}{A_{44}} \end{aligned}$$





worin die Anzahl der Unbekannten und Gleichungen die nämliche ist. Wir fügen diesen  $(n-1)$  Gleichungen noch eine weitere zwischen den nämlichen Unbekannten, jedoch mit vor der Hand noch unbestimmten Coefficienten hinzu:

$$a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \dots + a_{n,n-1} x_{n-1} + a_{nn} = 0 \quad (65)$$

und haben jetzt eine Gleichung mehr als Unbekannte. Sollen die Lösungen des Systems (64) auch die Gleichung (65) erfüllen, so dürfen deren Coefficienten nicht mehr ganz beliebig, sondern sie müssen so gewählt sein, dass die Determinante der  $n$  Gleichungen (64) und (65) verschwindet, oder dass

$$a_{n1} A_{n1} + a_{n2} A_{n2} + \dots + a_{nn} A_{nn} = 0. \quad (66)$$

In dieser Gleichung sind die Unterdeterminanten aus den Constanten der Gleichungen (64) zusammengesetzt, also gegebene Grössen, während dagegen die Coefficienten  $a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nn}$  noch unbestimmt angenommen wurden. Da sie aber nur der einzigen Bedingung (66) entsprechen müssen, so können sie, mit Ausnahme eines einzigen, beliebig gewählt werden. Wir dürfen mithin  $a_{n1}, a_{n2}, a_{n3} \dots a_{n,n-1}$  als willkürliche und nur  $a_{nn}$  als abhängige Grössen ansehen. Wird die Bedingungsgleichung (66) durch  $A_{nn}$  dividirt und dann von (65) abgezogen, so entsteht:

$$a_{n1} \left( x_1 - \frac{A_{n1}}{A_{nn}} \right) + a_{n2} \left( x_2 - \frac{A_{n2}}{A_{nn}} \right) + a_{n3} \left( x_3 - \frac{A_{n3}}{A_{nn}} \right) \\ + \dots + a_{n,n-1} \left( x_{n-1} - \frac{A_{n,n-1}}{A_{nn}} \right) = 0.$$

Da die Werthe  $a_{n1}, a_{n2} \dots a_{n,n-1}$  willkürlich sind, so kann diese Gleichung nur dadurch erfüllt werden, dass alle zweiten Factoren verschwinden, d. h., dass die  $x$  so gewählt werden, dass

$$x_1 - \frac{A_{n1}}{A_{nn}} = 0; x_2 - \frac{A_{n2}}{A_{nn}} = 0; x_3 - \frac{A_{n3}}{A_{nn}} = 0; \dots x_{n-1} - \frac{A_{n,n-1}}{A_{nn}} = 0.$$

Daraus ergeben sich für die Unbekannten folgende Werthe:

$$x_1 = \frac{A_{n1}}{A_{nn}}; x_2 = \frac{A_{n2}}{A_{nn}}; x_3 = \frac{A_{n3}}{A_{nn}}; \dots x_{n-1} = \frac{A_{n,n-1}}{A_{nn}}. \quad (67)$$

Die Unterdeterminanten, deren Quotienten diese Lösungen bilden, können sämmtlich aus den Gleichungen (64) berechnet werden, weil dieselben von den Coefficienten der Gleichung (65) nicht abhängen. Will man sich überzeugen, dass diese Lösungen mit denen unter (58) übereinstimmen, so muss man dort die Gleichungen auf Null bringen und die  $\alpha$  zur letzten Colonne transformiren.

Setzt man in den Gleichungen (64) an die Stelle von  $x_i$  wieder  $z_i : z_n$ , so geht das System in ein homogenes über, welches heisst:

$$\begin{aligned} a_{11} z_1 + a_{12} z_2 + \dots + a_{1n} z_n &= 0 \\ a_{21} z_1 + a_{22} z_2 + \dots + a_{2n} z_n &= 0 \quad (68) \\ \dots & \\ a_{n-1,1} z_1 + a_{n-1,2} z_2 + \dots + a_{n-1,n} z_n &= 0. \end{aligned}$$

Wie uns die Gleichungen (67) zeigen, verhalten sich die  $z$  wie die Unterdeterminanten der letzten Reihe der Determinante  $n^{\text{ten}}$  Grades, die entsteht, wenn man den  $(n-1)$  Reihen der gegebenen Gleichungen noch eine weitere als  $n^{\text{te}}$  Reihe zufügt. Dieselbe heisst alsdann:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \dots & a_{n-1,n} \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}.$$

Werden die zur letzten Reihe gehörigen Unterdeterminanten durch  $A_{n1}, A_{n2}, \dots, A_{nn}$  bezeichnet, so ergeben sich die folgenden Verhältnisse:

$$z_1 : z_2 : z_3 : \dots : z_n = A_{n1} : A_{n2} : A_{n3} : \dots : A_{nn}.$$

Für die beiden Gleichungen:

$$a_{11} x + a_{12} y + a_{13} z = 0; \quad a_{21} x + a_{22} y + a_{23} z = 0,$$

erhalten wir die Determinante:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}$$

und die Verhältnisse:

$$x : y : z = (a_{12} a_{23} - a_{22} a_{13}) : (-a_{11} a_{23} + a_{13} a_{21}) : (a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}).$$

Beispiel. Sollen die 3 Gleichungen:  $x + y + z - 3 = 0$ ;

$$2x + 4y + 8z - 13 = 0; \quad 3x + 9y + 27z - 34 = 0$$

aufgelöst werden, so nehmen wir die vierte Gleichung  $\alpha_{41} x + \alpha_{42} y + \alpha_{43} z + \alpha_{44} = 0$  hinzu und setzen folgende Determinante an:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & 8 & -13 \\ 3 & 9 & 27 & -34 \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} \end{vmatrix}.$$

Die entsprechenden Unterdeterminanten sind:  $A_{41} = 10$ ;  $A_{42} = 18$ ;  $A_{43} = 8$ ;  $A_{44} = 12$ , und daraus finden wir:

$$x = \frac{A_{41}}{A_{44}} = \frac{5}{6}; \quad y = \frac{A_{42}}{A_{44}} = \frac{3}{2}; \quad z = \frac{A_{43}}{A_{44}} = \frac{2}{3}.$$

#### §. 14. Product zweier Determinanten.

Das Product aus 2 Determinanten von gleichem Grade, wenn dieselben in schematischer Form gegeben sind, wieder durch eine solche auszudrücken.

Bei der Ableitung der hier in Betracht kommenden Formeln gehen wir in umgekehrter Weise zu Werke, als die gestellte Aufgabe es verlangt, indem wir eine nach bestimmten Regeln zusammengesetzte Determinante als ein Product ansehen und in Factoren zerlegen. Zur Herstellung einer solchen dienen uns wieder die beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned} a_1 x + a_2 y &= m \\ b_1 x + b_2 y &= n \end{aligned} \quad (69)$$

die wir zunächst in der Weise transformiren, dass wir setzen:

$$\begin{aligned} x &= \alpha_1 \xi + \alpha_2 \eta \\ y &= \beta_1 \xi + \beta_2 \eta \end{aligned} \quad (70)$$

wodurch wir erhalten:

$$\begin{aligned} (a_1 \alpha_1 + a_2 \beta_1) \xi + (a_1 \alpha_2 + a_2 \beta_2) \eta &= m \\ (b_1 \alpha_1 + b_2 \beta_1) \xi + (b_1 \alpha_2 + b_2 \beta_2) \eta &= n \end{aligned} \quad (71)$$

Dass die Lösungen von (71) durch Vermittlung von (70) solche Werthe für  $x$  und  $y$  bestimmen, welche auch (69) befriedigen, kommt hier nicht in Betracht; dagegen unterziehen wir die Determinanten aus den Coefficienten dieser 3 Systeme einer weiteren Untersuchung. Sie heissen:

$$A = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}; \quad B = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix};$$

$$C = \begin{vmatrix} (a_1 \alpha_1 + a_2 \beta_1) & (a_1 \alpha_2 + a_2 \beta_2) \\ (b_1 \alpha_1 + b_2 \beta_1) & (b_1 \alpha_2 + b_2 \beta_2) \end{vmatrix}.$$

Nach den Formeln in §. 10 zerfällt  $C$  zuerst in die folgenden 2 Theile:



so erhält man folgende neue Gleichungen:

$$\begin{aligned}
 (a_1 \alpha_1 + a_2 \beta_1 + a_3 \gamma_1) z_1 + (a_1 \alpha_2 + a_2 \beta_2 + a_3 \gamma_2) z_2 \\
 + (a_1 \alpha_3 + a_2 \beta_3 + a_3 \gamma_3) z_3 &= m. \\
 (b_1 \alpha_1 + b_2 \beta_1 + b_3 \gamma_1) z_1 + (b_1 \alpha_2 + b_2 \beta_2 + b_3 \gamma_2) z_2 \\
 + (b_1 \alpha_3 + b_2 \beta_3 + b_3 \gamma_3) z_3 &= n. \\
 (c_1 \alpha_1 + c_2 \beta_1 + c_3 \gamma_1) z_1 + (c_1 \alpha_2 + c_2 \beta_2 + c_3 \gamma_2) z_2 \\
 + (c_1 \alpha_3 + c_2 \beta_3 + c_3 \gamma_3) z_3 &= p.
 \end{aligned} \tag{75}$$

Folgende 3 Determinanten entsprechen diesen Systemen:

$$A = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}; \quad B = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix};$$

$$C = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ (a_1 \alpha_1 + a_2 \beta_1 + a_3 \gamma_1), & (a_1 \alpha_2 + a_2 \beta_2 + a_3 \gamma_2), & (a_1 \alpha_3 + a_2 \beta_3 + a_3 \gamma_3) \\ (b_1 \alpha_1 + b_2 \beta_1 + b_3 \gamma_1), & (b_1 \alpha_2 + b_2 \beta_2 + b_3 \gamma_2), & (b_1 \alpha_3 + b_2 \beta_3 + b_3 \gamma_3) \\ (c_1 \alpha_1 + c_2 \beta_1 + c_3 \gamma_1), & (c_1 \alpha_2 + c_2 \beta_2 + c_3 \gamma_2), & (c_1 \alpha_3 + c_2 \beta_3 + c_3 \gamma_3) \end{vmatrix}.$$

Die Columnen von  $C$  sind dreitheilig. Wird zunächst nur die erste Columnen in ihre Theile zerlegt, indem man die beiden anderen unverändert beibehält, so zerfällt  $C$  in 3 Theile, die symbolisch so bezeichnet werden können:

$$C = \mathcal{A}_{1, (1+2+3), (1+2+3)} + \mathcal{A}_{2, (1+2+3), (1+2+3)} + \mathcal{A}_{3, (1+2+3), (1+2+3)}.$$

Zur Erläuterung lassen wir das Schema eines von diesen Symbolen folgen:

$$\mathcal{A}_{1, (1+2+3), (1+2+3)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ a_1 \alpha_1, & (a_1 \alpha_2 + a_2 \beta_2 + a_3 \gamma_2), & (a_1 \alpha_3 + a_2 \beta_3 + a_3 \gamma_3) \\ b_1 \alpha_1, & (b_1 \alpha_2 + b_2 \beta_2 + b_3 \gamma_2), & (b_1 \alpha_3 + b_2 \beta_3 + b_3 \gamma_3) \\ c_1 \alpha_1, & (c_1 \alpha_2 + c_2 \beta_2 + c_3 \gamma_2), & (c_1 \alpha_3 + c_2 \beta_3 + c_3 \gamma_3) \end{vmatrix}.$$

Diese und die beiden anderen Determinanten zerfallen durch Zerlegung nach den Theilen der zweiten Columnen wieder in je 3 Determinanten, die wir so bezeichnen müssen:

$$\mathcal{A}_{1, (1+2+3), (1+2+3)} = \mathcal{A}_{1, 1, (1+2+3)} + \mathcal{A}_{1, 2, (1+2+3)} + \mathcal{A}_{1, 3, (1+2+3)}.$$

$$\mathcal{A}_{2, (1+2+3), (1+2+3)} = \mathcal{A}_{2, 1, (1+2+3)} + \mathcal{A}_{2, 2, (1+2+3)} + \mathcal{A}_{2, 3, (1+2+3)}.$$

$$\mathcal{A}_{3, (1+2+3), (1+2+3)} = \mathcal{A}_{3, 1, (1+2+3)} + \mathcal{A}_{3, 2, (1+2+3)} + \mathcal{A}_{3, 3, (1+2+3)}.$$

Jede dieser 9 Determinanten ist zusammengesetzt aus einem Theil der ersten, einem Theil der zweiten und der ganzen dritten Columnen, wie beispielsweise die folgende:

$$A_{3,1,(1+2+3)} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & + & 2 & + & 3 \\ a_3 \gamma_1, & a_1 \alpha_2, & (a_1 \alpha_3 + a_2 \beta_3 + a_3 \gamma_3) \\ b_3 \gamma_1, & b_1 \alpha_2, & (b_1 \alpha_3 + b_2 \beta_3 + b_3 \gamma_3) \\ c_3 \gamma_1, & c_1 \alpha_2, & (c_1 \alpha_3 + c_2 \beta_3 + c_3 \gamma_3) \end{vmatrix}.$$

Wird nach denselben Principien abermals in jeder von diesen 9 Determinanten die dritte Column zerlegt, so zerfällt jede wieder in 3, die ganze Determinante  $C$  mithin in 27 einfache Determinanten, die wir hier folgen lassen:

$$\begin{aligned} A_{1,1,(1+2+3)} &= A_{111} + A_{112} + A_{113} \\ A_{1,2,(1+2+3)} &= A_{121} + A_{122} + A_{123} \\ A_{1,3,(1+2+3)} &= A_{131} + A_{132} + A_{133} \\ A_{2,1,(1+2+3)} &= A_{211} + A_{212} + A_{213} \\ A_{2,2,(1+2+3)} &= A_{221} + A_{222} + A_{223} \\ A_{2,3,(1+2+3)} &= A_{231} + A_{232} + A_{233} \\ A_{3,1,(1+2+3)} &= A_{311} + A_{312} + A_{313} \\ A_{3,2,(1+2+3)} &= A_{321} + A_{322} + A_{323} \\ A_{3,3,(1+2+3)} &= A_{331} + A_{332} + A_{333}. \end{aligned}$$

Es kann keine Schwierigkeiten bieten, die Schemata, welche diesen Symbolen entsprechen, aus dem Schema von  $C$  zu entnehmen, indem die 3 Indices diejenigen Theile der 3 Columnen genau bezeichnen, welche in jedem Aufnahme finden sollen. So ist z. B.:

$$A_{111} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 \alpha_1 & a_1 \alpha_2 & a_1 \alpha_3 \\ b_1 \alpha_1 & b_1 \alpha_2 & b_1 \alpha_3 \\ c_1 \alpha_1 & c_1 \alpha_2 & c_1 \alpha_3 \end{vmatrix}; \quad A_{121} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ a_1 \alpha_1 & a_2 \beta_2 & a_1 \alpha_3 \\ b_1 \alpha_1 & b_2 \beta_2 & b_1 \alpha_3 \\ c_1 \alpha_1 & c_2 \beta_2 & c_1 \alpha_3 \end{vmatrix}$$

$$A_{123} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a_1 \alpha_1 & a_2 \beta_2 & a_3 \alpha_3 \\ b_1 \alpha_1 & b_2 \beta_2 & b_3 \alpha_3 \\ c_1 \alpha_1 & c_2 \beta_2 & c_3 \alpha_3 \end{vmatrix}; \quad A_{213} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ a_2 \beta_1 & a_1 \alpha_2 & a_3 \gamma_3 \\ b_2 \beta_1 & b_1 \alpha_2 & b_3 \gamma_3 \\ c_2 \beta_1 & c_1 \alpha_2 & c_3 \gamma_3 \end{vmatrix}$$

u. s. w.

Jedes Element dieser Determinanten ist das Product aus 2 anderen Elementen, von denen das eine aus  $A$ , das andere aus  $B$  stammt. Ebenso übersieht man sofort, dass in den einzelnen Columnen die  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  als gemeinschaftliche Factoren auftreten und ausgeschieden werden können. Geschieht dies, so verschwinden alle, in deren Symbol 2 oder gar 3 gleiche Indices vorkommen, weil dann nach Abscheidung der gemeinsamen Factoren 2 oder 3 Columnen gleich werden müssen. So ist z. B.:

$$\mathcal{A}_{122} = \alpha_1 \beta_2 \beta_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_2 \\ b_1 & b_2 & b_2 \\ c_1 & c_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0; \quad \mathcal{A}_{333} = \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \begin{vmatrix} a_3 & a_3 & a_3 \\ b_3 & b_3 & b_3 \\ c_3 & c_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Hiernach bleiben nur diejenigen 6 Determinanten zurück, deren Indices alle verschieden sind, und welche heissen:

$$\mathcal{A}_{123} = \begin{vmatrix} a_1 \alpha_1 & a_2 \beta_2 & a_3 \gamma_3 \\ b_1 \alpha_1 & b_2 \beta_2 & b_3 \gamma_3 \\ c_1 \alpha_1 & c_2 \beta_2 & c_3 \gamma_3 \end{vmatrix} = \alpha_1 \beta_2 \gamma_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \alpha_1 \beta_2 \gamma_3 A.$$

$$\mathcal{A}_{132} = \begin{vmatrix} a_1 \alpha_1 & a_3 \gamma_2 & a_2 \beta_3 \\ b_1 \alpha_1 & b_3 \gamma_2 & b_2 \beta_3 \\ c_1 \alpha_1 & c_3 \gamma_2 & c_2 \beta_3 \end{vmatrix} = -\alpha_1 \beta_3 \gamma_2 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = -\alpha_1 \beta_3 \gamma_2 A.$$

Ebenso finden wir weiter:  $\mathcal{A}_{213} = -\alpha_2 \beta_1 \gamma_3 A$ ;  $\mathcal{A}_{231} = \alpha_3 \beta_1 \gamma_2 A$ ;  
 $\mathcal{A}_{312} = \alpha_2 \beta_3 \gamma_1 A$ ;  $\mathcal{A}_{321} = -\alpha_3 \beta_2 \gamma_1 A$ .

Diese 6 Determinanten sind das Resultat der Zerlegung von  $C$ , und deswegen muss ihre Summe wieder gleich  $C$  sein.

$C = [\alpha_1 \beta_2 \gamma_3 - \alpha_1 \beta_3 \gamma_2 - \alpha_2 \beta_1 \gamma_3 + \alpha_2 \beta_3 \gamma_1 + \alpha_3 \beta_1 \gamma_2 - \alpha_3 \beta_2 \gamma_1] A$ ,  
 oder, weil die Klammer die Entwicklung von  $B$  vorstellt,  
 $C = A \cdot B$ . Damit man aber leicht übersehen könne, wie sich  
 das Schema des Productes aus seinen Factoren ableiten lässt,  
 stellen wir das Ganze nochmals zusammen.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \quad (76)$$

$$\begin{vmatrix} (a_1 \alpha_1 + a_2 \beta_1 + a_3 \gamma_1), & (a_1 \alpha_2 + a_2 \beta_2 + a_3 \gamma_2), & (a_1 \alpha_3 + a_2 \beta_3 + a_3 \gamma_3) \\ (b_1 \alpha_1 + b_2 \beta_1 + b_3 \gamma_1), & (b_1 \alpha_2 + b_2 \beta_2 + b_3 \gamma_2), & (b_1 \alpha_3 + b_2 \beta_3 + b_3 \gamma_3) \\ (c_1 \alpha_1 + c_2 \beta_1 + c_3 \gamma_1), & (c_1 \alpha_2 + c_2 \beta_2 + c_3 \gamma_2), & (c_1 \alpha_3 + c_2 \beta_3 + c_3 \gamma_3) \end{vmatrix}$$

Zweite Ableitungsart der Multiplicationsformel. Aus dem System (74) erhalten wir für irgend eine der Unbekannten  $z$  die Lösungen nach (58) und finden z. B. für  $z_1$  den folgenden Werth:

$$z_1 = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ x_2 & \beta_2 & \beta_3 \\ x_3 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}} = \frac{\mathcal{A} z_1}{d},$$

wenn unter  $d$  die Determinante  $(\alpha_1 \beta_2 \gamma_3)$  zu verstehen ist. Zur Entwicklung von  $\mathcal{A} z_1$  bedarf es der Werthe  $x_1, x_2, x_3$ , welche wieder aus dem System (73) zu erhalten sind. Wir wollen

$$x_1 = \frac{\mathcal{A} x_1}{\mathcal{A}}, \quad x_2 = \frac{\mathcal{A} x_2}{\mathcal{A}}, \quad x_3 = \frac{\mathcal{A} x_3}{\mathcal{A}}$$

setzen, und erhalten dann für  $\Delta z_1$  den folgenden Ausdruck:

$$\Delta z_1 = \begin{vmatrix} \frac{\Delta x_1}{\Delta} & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \frac{\Delta x_2}{\Delta} & \beta_2 & \beta_3 \\ \frac{\Delta x_3}{\Delta} & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} \Delta x_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \Delta x_2 & \beta_2 & \beta_3 \\ \Delta x_3 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \frac{A}{\Delta},$$

wenn unter  $\Delta$  die Determinante  $(a_1 b_2 c_3)$  verstanden wird. Für  $z_1$  selbst gestaltet sich jetzt der Werth wie folgt:  $z_1 = \frac{A}{\Delta \cdot d}$ .

Werden nun aus (74) die Werthe der  $x$  in (73) substituirt, so geht das letzte System über in das System (75), aus welchem der Werth für  $z_1$  direct abgeleitet werden kann. Bezeichnen wir die Coefficienten-Determinante dieses Systems durch  $D$ , so ist dieselbe der Nenner der Lösung für  $z_1$ . Dieser Nenner ist aber auch schon unter der Form  $\Delta \cdot d$  gefunden, und wir ziehen daraus den Schluss, dass  $\Delta \cdot d = D$  sei. Werden endlich für  $D$ ,  $\Delta$  und  $d$  die betreffenden Determinanten gesetzt, so geht daraus die Formel (76) hervor.

Dritte Ableitungsweise der Multiplicationsformel.

Es ist nicht schwer, nach dem Muster (76) das Schema des Productes auch dann noch zusammenzustellen, wenn die Factoren höher als vom dritten Grade sind; dagegen nimmt die Anzahl der Determinanten, in welche das Product des Beweises wegen zerlegt werden muss, mit wachsendem Grade unverhältnissmässig zu, und damit auch die Schwierigkeit der Ausführung. Daher sehen wir uns nach einer anderen Methode zur Erweiterung der obigen Formel um, die zugleich noch den Vorzug hat, dass das Product direct aus den Factoren gebildet, und nicht, wie bisher, fertig angenommen und in Factoren zerlegt wird. Zu dem Ende untersuchen wir einmal den Werth des folgenden Schemas:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \alpha_1 & \beta_1 \\ 0 & -1 & \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}. \quad (77)$$

Wird dasselbe nach den Regeln von §. 12 und speciell nach Formel (44) zerlegt, so erhält man:

$$\begin{aligned} \Delta = & \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ b_1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & \beta_1 \\ -1 & \beta_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ b_1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & \alpha_1 \\ -1 & \alpha_2 \end{vmatrix} \\ + & \begin{vmatrix} a_2 & 0 \\ b_2 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -1 & \beta_1 \\ 0 & \beta_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_2 & 0 \\ b_2 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -1 & \alpha_1 \\ 0 & \alpha_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

und findet endlich:

$$\mathcal{A} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix},$$

weil die übrigen Theile sämmtlich verschwinden. Um nun noch einen anderen Werth für  $\mathcal{A}$  zu finden, transformiren wir (77) in folgender Weise: Wir addiren zuerst die  $a_1$  fache dritte und  $a_2$  fache vierte Reihe zur ersten, und wenn dies geschehen ist, die  $b_1$  fache dritte und  $b_2$  fache vierte Reihe zur zweiten und erhalten:

$$\mathcal{A} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & (a_1 \alpha_1 + a_2 \alpha_2), & (a_1 \beta_1 + a_2 \beta_2) \\ 0 & 0 & (b_1 \alpha_1 + b_2 \beta_2), & (b_1 \beta_1 + b_2 \beta_2) \\ -1 & 0 & \alpha_1 & \beta_1 \\ 0 & -1 & \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}.$$

Auch diese Determinante ist gleich einem einzigen Product aus 2 correspondirenden, weil alle übrigen verschwinden, und zwar ist:

$$\mathcal{A} = \begin{vmatrix} (a_1 \alpha_1 + a_2 \alpha_2), & (a_1 \beta_1 + a_2 \beta_2) \\ (b_1 \alpha_1 + b_2 \beta_2), & (b_1 \beta_1 + b_2 \beta_2) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

Da aber der zweite Factor gleich 1 ist, so muss  $\mathcal{A}$  gleich dem ersten Factor sein, so dass wir durch Vergleich der beiden Werthe von  $\mathcal{A}$  erhalten:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (a_1 \alpha_1 + a_2 \alpha_2), & (a_1 \beta_1 + a_2 \beta_2) \\ (b_1 \alpha_1 + b_2 \beta_2), & (b_1 \beta_1 + b_2 \beta_2) \end{vmatrix}.$$

Abgesehen von der Umsetzung der Reihen in Columnen, stimmt diese Formel mit (72) überein.

Ebenso reihen wir zwei Determinanten dritten Grades, die mit einander multiplicirt werden sollen, in ein einziges Schema so ein, dass sie die Lage von 2 correspondirenden Determinanten erhalten:

$$\mathcal{A} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 0 & 0 & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ 0 & -1 & 0 & \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ 0 & 0 & -1 & \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} \quad (78)$$

Abermals zerlegen wir dieses Schema nach den Regeln des §. 12 in Producte aus correspondirenden Determinanten vom dritten Grade und finden, dass alle, ein einziges ausgenommen, verschwinden. Es ist daher:

$$\mathcal{A} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}.$$

Nun addirt man in (78) zuerst die  $a_1$  fache vierte, die  $a_2$  fache fünfte und  $a_3$  fache sechste Reihe zur ersten, dann die  $b_1$  fache vierte, die  $b_2$  fache fünfte und  $b_3$  fache sechste zur zweiten und endlich die  $c_1$  fache vierte, die  $c_2$  fache fünfte und  $c_3$  fache sechste zur dritten Reihe, wodurch man erhält:

$$\mathcal{A} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & (a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3), & (a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + a_3\beta_3), & (a_1\gamma_1 + a_2\gamma_2 + a_3\gamma_3) \\ 0 & 0 & 0 & (b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2 + b_3\alpha_3), & (b_1\beta_1 + b_2\beta_2 + b_3\beta_3), & (b_1\gamma_1 + b_2\gamma_2 + b_3\gamma_3) \\ 0 & 0 & 0 & (c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3), & (c_1\beta_1 + c_2\beta_2 + c_3\beta_3), & (c_1\gamma_1 + c_2\gamma_2 + c_3\gamma_3) \\ -1 & 0 & 0 & \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ 0 & -1 & 0 & \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ 0 & 0 & -1 & \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}.$$

Wird diese Determinante, welche vom sechsten Grad ist und als solche allgemein durch das Symbol  $(a_1 b_2 c_3 d_4 e_5 f_6)$  dargestellt werden muss, nach §. 12 in Producte aus correspondirenden Determinanten dritten Grades zerlegt, so ist das Product:

$$(-1)^{4-1+5-2+6-3} (a_4 b_5 c_6) (d_1 e_2 f_3) = - (a_1 b_5 c_6) (d_1 e_2 f_3)$$

das einzige, welches nicht verschwindet, so dass die ganze Determinante  $\mathcal{A}$  gleich diesem Producte ist. Da aber weiter:

$$(d_1 e_2 f_3) = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

ist, so wird  $\mathcal{A} = - (a_4 b_5 c_6) \cdot (-1) = (a_4 b_5 c_6)$ .

Der Vergleich der beiden Werthe von  $\mathcal{A}$  führt zu der Formel:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \quad (79)$$

$$\begin{vmatrix} (a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3), & (a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + a_3\beta_3), & (a_1\gamma_1 + a_2\gamma_2 + a_3\gamma_3) \\ (b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2 + b_3\alpha_3), & (b_1\beta_1 + b_2\beta_2 + b_3\beta_3), & (b_1\gamma_1 + b_2\gamma_2 + b_3\gamma_3) \\ (c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3), & (c_1\beta_1 + c_2\beta_2 + c_3\beta_3), & (c_1\gamma_1 + c_2\gamma_2 + c_3\gamma_3) \end{vmatrix}.$$

Der Vollständigkeit wegen geben wir eine ganz allgemeine Entwicklung dieser Multiplicationsformeln und wählen dazu das Schema:

$$\Delta = \begin{vmatrix}
 a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\
 a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 2 \\
 a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 3 \\
 \dots & \dots \\
 a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n \\
 -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \dots & \alpha_{1n} & n+1 \\
 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \dots & \alpha_{2n} & n+2 \\
 0 & 0 & -1 & \dots & 0 & \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \dots & \alpha_{3n} & n+3 \\
 \dots & \dots \\
 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \alpha_{n3} & \dots & \alpha_{nn} & 2n.
 \end{vmatrix}$$

Diese Determinante ist vom Grade  $2n$  und zusammengesetzt aus 4 Theilen, von denen jeder für sich eine Determinante  $n^{\text{ten}}$  Grades vorstellt, indem der erste Quadrant die Determinante  $(a_{11} a_{22} a_{33} \dots a_{nn})$ , der zweite nur Nulle, der dritte nur Nulle und  $-1$ , und der vierte die Determinante  $(\alpha_{11} \alpha_{22} \alpha_{33} \dots \alpha_{nn})$  enthält. Die Reihen sind durch die Nummern 1 bis  $2n$  bezeichnet, das allgemeine Schema wird durch das Symbol:

$$(a_1 b_2 c_3 \dots g_n h_{n+1} i_{n+2} \dots t_{2n})$$

dargestellt. Wird  $\Delta$  nach §. 12 in Produkte aus correspondirenden Determinanten  $n^{\text{ten}}$  Grades zerlegt, so ist das Produkt:

$$(a_1 b_2 c_3 \dots g_n) (h_{n+1} i_{n+2} \dots t_{2n})$$

das einzige, welches nicht verschwindet, und wir können  $\Delta$  diesem Produkte gleich setzen. Demnach ist:

$$\Delta = \begin{vmatrix}
 a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\
 a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\
 a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn}
 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix}
 \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \dots & \alpha_{1n} \\
 \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \dots & \alpha_{2n} \\
 \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \dots & \alpha_{3n} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \alpha_{n3} & \dots & \alpha_{nn}
 \end{vmatrix}$$

Wir multipliciren jetzt:

- Reihe  $(n + 1)$  mit  $a_{11}$
- „  $(n + 2)$  „  $a_{12}$
- „  $(n + 3)$  „  $a_{13}$
- .....
- „  $2n$  „  $a_{1n}$

und addiren alle zur Reihe 1. Weiter multipliciren wir:

- Reihe  $(n + 1)$  mit  $a_{21}$
- „  $(n + 2)$  „  $a_{22}$
- „  $(n + 3)$  „  $a_{23}$
- .....
- „  $2n$  „  $a_{2n}$

und addiren alle zur Reihe 2. Ebenso multipliciren wir:

$$\begin{array}{r} \text{Reihe } (n+1) \text{ mit } a_{31} \\ \text{„ } (n+2) \text{ „ } a_{32} \\ \text{„ } (n+3) \text{ „ } a_{33} \\ \dots \\ \text{„ } 2n \text{ „ } a_{3n} \end{array}$$

und addiren sie alle zur Reihe 3. Dieses Verfahren wird fortgesetzt, bis endlich

$$\begin{array}{r} \text{Reihe } (n^m+1) \text{ mit } a_{n1} \\ \text{„ } (n+2) \text{ „ } a_{n2} \\ \text{„ } (n+3) \text{ „ } a_{n3} \\ \dots \\ \text{„ } 2n \text{ „ } a_{nn} \end{array}$$

multiplicirt und zur Reihe  $n$  addirt worden ist. Durch diese Transformation gewinnt  $\mathcal{A}$  folgende Gestalt:

$$\mathcal{A} = \begin{array}{cccccccccccc} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & c_{11} & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & c_{21} & c_{22} & c_{23} & \dots & c_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & c_{31} & c_{32} & c_{33} & \dots & c_{3n} \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & c_{n1} & c_{n2} & c_{n3} & \dots & c_{nn} \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \dots & \alpha_{1n} \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \dots & \alpha_{2n} \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 & \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \dots & \alpha_{3n} \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \alpha_{n3} & \dots & \alpha_{nn} \end{array}$$

worin die  $c$  nach folgenden Formeln gebildet werden müssen:

$$c_{11} = a_{11} \alpha_{11} + a_{12} \alpha_{21} + a_{13} \alpha_{31} + \dots + a_{1n} \alpha_{n1}$$

$$c_{12} = a_{11} \alpha_{12} + a_{12} \alpha_{22} + a_{13} \alpha_{32} + \dots + a_{1n} \alpha_{n2}$$

$$c_{13} = a_{11} \alpha_{13} + a_{12} \alpha_{23} + a_{13} \alpha_{33} + \dots + a_{1n} \alpha_{n3}$$

$$\dots$$

$$c_{1n} = a_{11} \alpha_{1n} + a_{12} \alpha_{2n} + a_{13} \alpha_{3n} + \dots + a_{1n} \alpha_{nn}$$

und

$$c_{21} = a_{21} \alpha_{11} + a_{22} \alpha_{21} + a_{23} \alpha_{31} + \dots + a_{2n} \alpha_{n1}$$

$$c_{22} = a_{21} \alpha_{12} + a_{22} \alpha_{22} + a_{23} \alpha_{32} + \dots + a_{2n} \alpha_{n2}$$

$$c_{23} = a_{21} \alpha_{13} + a_{22} \alpha_{23} + a_{23} \alpha_{33} + \dots + a_{2n} \alpha_{n3}$$

$$\dots$$

$$c_{2n} = a_{21} \alpha_{1n} + a_{22} \alpha_{2n} + a_{23} \alpha_{3n} + \dots + a_{2n} \alpha_{nn}$$

und

$$c_{31} = a_{31} \alpha_{11} + a_{32} \alpha_{21} + a_{33} \alpha_{31} + \dots + a_{3n} \alpha_{n1}$$

$$c_{32} = a_{31} \alpha_{12} + a_{32} \alpha_{22} + a_{33} \alpha_{32} + \dots + a_{3n} \alpha_{n2}$$

$$c_{33} = a_{31} \alpha_{13} + a_{32} \alpha_{23} + a_{33} \alpha_{33} + \dots + a_{3n} \alpha_{n3}$$

$$\dots$$

$$c_{3n} = a_{31} \alpha_{1n} + a_{32} \alpha_{2n} + a_{33} \alpha_{3n} + \dots + a_{3n} \alpha_{nn}$$

u. s. w.

Wird zunächst von dem Vorzeichen abgesehen, so ist  $\mathcal{A}$  gleich dem einzigen Product aus der Determinante  $(c_{11} c_{22} c_{33} \dots c_{nn})$  und ihrer correspondirenden, in welcher letzteren alle Elemente der Hauptdiagonale  $-1$ , alle übrigen Elemente aber Null heißen. Der Werth dieser correspondirenden ist deshalb gleich  $(-1)^n$ . Zur Bestimmung des Vorzeichens ist es nothwendig, sich zu erinnern, dass im allgemeinen Schema dieses Product die folgende Gestalt haben würde:

$$(-1)^{(n+1-1)+(n+2-2)+\dots+(n+n-n)} (a_{n+1} b_{n+2} \dots g_{2n}) (h_1 i_2 \dots t_n).$$

Wir erkennen hieraus, dass das Vorzeichen durch den Factor  $(-1)^{n \cdot n}$  oder  $(-1)^n$  bestimmt wird. Bringen wir diesen Zeichenfactor in Verbindung mit dem Werthe  $(-1)^n$ , wie wir ihn für die eine Determinante bereits gefunden haben, so wird  $(c_{11} c_{22} c_{33} \dots c_{nn})$  im Ganzen mit dem Factor  $(-1)^n \cdot (-1)^n = 1$  zu vereinigen sein, so dass wir erhalten:  $\mathcal{A} = (c_{11} c_{22} c_{33} \dots c_{nn})$ . Werden endlich die beiden Werthe von  $\mathcal{A}$  einander gleich gesetzt, so entsteht:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix} \quad (80)$$

worin die  $c$  nach den obigen Formeln aus den  $a$  und  $\alpha$  zusammengesetzt werden müssen.

### Beispiel.

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 & 2 \\ 2 & 7 & 4 \\ 5 & 1 & 5 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 & 9 \\ 7 & 6 & 6 \\ 3 & 1 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (12+14+15), & (15+12+5), & (27+12+40) \\ (24+49+3), & (30+42+1), & (54+42+8) \\ (8+28+15), & (10+24+5), & (18+24+40) \end{vmatrix}$$

$$\mathcal{A}_1 = 87; \mathcal{A}_2 = -121; \mathcal{A}_3 = -10527.$$

Unvollständige Determinanten. Unterdrückt man in dem Schema einer Determinante die letzte Elementenreihe, so bleibt ein anderes Schema zurück, welches als eine unvollständige Determinante angesehen werden kann. So sind z. B.:

$$d = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad e = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}$$

zwei unvollständige Determinanten dritten Grades, aus welchen durch Zusatz der fehlenden dritten Reihen vollständige Determinanten hervorgehen. Den Elementen dieser hinzugedachten Reihen entsprechen in  $d$  und  $e$  bestimmte Unterdeterminanten, welche wir hier folgen lassen:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}; - \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \text{ und } \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}; - \begin{vmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}$$

Durch Verbindung der beiden Schemata nach Art zweier Factoren zu einem Producte entsteht zunächst nur ein Symbol, unter dem wir aber die Summe der 3 Producte verstehen wollen, die man erhält, wenn man jede Unterdeterminante von  $d$  mit der entsprechenden von  $e$  multiplicirt. Hiernach ist:

$$\begin{aligned} S &= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} \\ &= (a_1 b_2) \cdot (\alpha_1 \beta_2) + (a_1 c_2) \cdot (\alpha_1 \gamma_2) + (b_1 c_2) \cdot (\beta_1 \gamma_2). \end{aligned}$$

In der Absicht, noch einen zweiten Ausdruck zu gewinnen, welcher mit  $S$  gleichen Werth hat, untersuchen wir die folgende Determinante fünften Grades:

$$\Delta = - \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & -1 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 & -1 & 0 \\ c_1 & c_2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ 0 & 0 & \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix},$$

indem wir dieselbe nach den in §. 12 aufgestellten Formeln in 10 Producte aus correspondirenden Determinanten des zweiten und dritten Grades zerlegen. Da aber 5 derselben verschwinden, so lassen wir nur die übrigen hier folgen:

$$\begin{aligned} \Delta &= - \left\{ \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 & -1 \\ b_1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_2 & 0 & -1 \\ 0 & \beta_1 & \gamma_1 \\ 0 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ b_1 & -1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_2 & 0 & -1 \\ 0 & \alpha_1 & \gamma_1 \\ 0 & \alpha_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} \right. \\ &\quad \left. + \begin{vmatrix} a_2 & -1 \\ b_2 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_1 & 0 & -1 \\ 0 & \beta_1 & \gamma_1 \\ 0 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_2 & 0 \\ b_2 & -1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_1 & 0 & -1 \\ 0 & \alpha_1 & \gamma_1 \\ 0 & \alpha_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

Die dreigliederigen Determinanten, welche hier als Factoren auftreten, werden abermals in Producte aus den Elementen ihrer ersten Reihen und entsprechenden Unterdeterminanten zerlegt, und da hierbei jedesmal 2 dieser Producte verschwinden, so erscheint schliesslich  $\Delta$  unter folgender Form:

$$\Delta = - \left\{ - \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} - (b_1 c_2 - b_2 c_1) \cdot \begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} - (a_1 c_2 - a_2 c_1) \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} \right\}$$

Da nun auch die Klammerwerthe Determinanten sind, so ist endlich gestattet zu setzen:

$$\mathcal{A} = (a_1 b_2) \cdot (\alpha_1 \beta_2) + (a_1 c_2) \cdot (\alpha_1 \gamma_2) + (b_1 c_2) \cdot (\beta_1 \gamma_2),$$

woraus dann durch Vergleich mit  $S$  folgt, dass  $S = \mathcal{A}$  ist.

Um den Werth für  $\mathcal{A}$  in noch anderer Form zu gewinnen, multipliciren wir in seinem Schema die dritte Colonne mit  $a_1$ , die vierte mit  $b_1$  und die fünfte mit  $c_1$  und addiren diese Producte zur ersten Colonne. Hierauf werden die dritte Colonne mit  $a_2$ , die vierte mit  $b_2$ , die fünfte mit  $c_2$  multiplicirt und die Producte zur zweiten addirt. So erhält man:

$$\mathcal{A} = - \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ (a_1 \alpha_1 + b_1 \beta_1 + c_1 \gamma_1), & (a_2 \alpha_1 + b_2 \beta_1 + c_2 \gamma_1), & \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ (a_1 \alpha_2 + b_1 \beta_2 + c_1 \gamma_2), & (a_2 \alpha_2 + b_2 \beta_2 + c_2 \gamma_2), & \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}.$$

Nach den Formeln des §. 12 zerfällt  $\mathcal{A}$  wiederum in 10 Producte aus correspondirenden Determinanten des dritten und zweiten Grades, von denen jedoch nur ein einziges nicht verschwindet. Somit erscheint  $\mathcal{A}$  unter der neuen Form:

$$\mathcal{A} = - \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} (a_1 \alpha_1 + b_1 \beta_1 + c_1 \gamma_1), & (a_2 \alpha_1 + b_2 \beta_1 + c_2 \gamma_1) \\ (a_1 \alpha_2 + b_1 \beta_2 + c_1 \gamma_2), & (a_2 \alpha_2 + b_2 \beta_2 + c_2 \gamma_2) \end{vmatrix},$$

und da  $\mathcal{A}_1 = -1$  ist, so ist auch  $\mathcal{A} = \mathcal{A}_2$ . Durch Vergleich der beiden Werthe von  $\mathcal{A}$  finden wir schliesslich  $S = \mathcal{A}_2$ . Das Schema  $\mathcal{A}_2$  wird aus den beiden Factoren des Symboles  $S$  nach dem nämlichen Verfahren gebildet, nach welchem bei vollständigen Determinanten das Schema eines Productes aus denen der beiden Factoren gewonnen wird. Zum Schluss soll das Ganze zu einer Formel zusammengestellt werden:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} (a_1 \alpha_1 + b_1 \beta_1 + c_1 \gamma_1), & (a_2 \alpha_1 + b_2 \beta_1 + c_2 \gamma_1) \\ (a_1 \alpha_2 + b_1 \beta_2 + c_1 \gamma_2), & (a_2 \alpha_2 + b_2 \beta_2 + c_2 \gamma_2) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Sobald das Schema  $\mathcal{A}_2$ , d. h. die in der vorstehenden Formel enthaltene Determinante, als gegeben angesehen werden darf, kann die Richtigkeit der Formel auch dadurch nachgewiesen werden, dass man nach §. 10 das Schema in derselben Weise den

Theilen der Elemente entsprechend zerlegt, wie dies oben bei der Ableitung der Multiplicationsformeln geschehn ist, indem diese Zerlegung zu zweigliederigen Determinanten führt, welche sich zu den 3 Producten unserer Formel zusammenstellen lassen. Selbstverständlich kann das erläuterte Verfahren auf unvollständige Determinanten von höheren Graden unverändert übertragen werden.

### §. 15. Die adjungirten Determinanten.

Wird aus einer Determinante eine zweite in der Weise abgeleitet, dass man an die Stelle eines jeden Elementes  $a_{rs}$  die ihm zugehörige Unterdeterminante  $A_{rs}$  setzt, so wird diese zweite die adjungirte der ersten genannt. In der Absicht, beide mit einander zu multipliciren, stellen wir sie in folgender Weise neben einander:

$$\begin{array}{c} d \\ \left| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{array} \right| \times \begin{array}{c} D \\ \left| \begin{array}{cccc} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{array} \right| \end{array}
 \end{array}$$

Wird die Multiplication ausgeführt, so entsteht als Product eine neue Determinante, deren Elemente sich zusammensetzen aus den Producten, welche entstehen, wenn man die Elemente der Columnen in  $d$  mit den Elementen der Columnen in  $D$  multiplicirt. Man erhält:

$$d \cdot D = \left| \begin{array}{cccc} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & \dots & c_{2n} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & \dots & c_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & c_{n3} & \dots & c_{nn} \end{array} \right|, \text{ wenn}$$

$$c_{11} = a_{11} A_{11} + a_{21} A_{21} + a_{31} A_{31} + \dots + a_{n1} A_{n1} = d$$

$$c_{12} = a_{11} A_{12} + a_{21} A_{22} + a_{31} A_{32} + \dots + a_{n1} A_{n2} = 0$$

$$\dots$$

$$c_{1n} = a_{11} A_{1n} + a_{21} A_{2n} + a_{31} A_{3n} + \dots + a_{n1} A_{nn} = 0$$

$$c_{21} = a_{12} A_{11} + a_{22} A_{21} + a_{32} A_{31} + \dots + a_{n2} A_{n1} = 0$$

$$c_{22} = a_{12} A_{12} + a_{22} A_{22} + a_{32} A_{32} + \dots + a_{n2} A_{n2} = d$$

u. S. W.

Werden so alle  $c$  hergestellt, so verschwinden alle, welche zwei verschiedene Indices führen, weil sie in der Art entstehen, dass

man die Elemente einer Colonne mit solchen Unterdeterminanten multiplicirt, welche zu einer anderen Colonne gehören. Dagegen nehmen diejenigen  $c$ , welche 2 gleiche Indices aufweisen, sämmtlich den Werth  $d$  an, weil sie aus einer Summe von Producten bestehen, welche dadurch entstanden sind, dass man die Elemente der einzelnen Columnen mit ihren eigenen Unterdeterminanten multiplicirt hat. So gelangt man zu der Gleichung:

$$d \cdot D = \begin{vmatrix} d & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & d & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & d \end{vmatrix}$$

und daraus folgt:  $d \cdot D = d^n$ , oder:

$$D = d^{n-1}. \quad (81)$$

In Worten: Die adjungirte einer Determinante  $n^{\text{ten}}$  Grades ist die  $(n-1)^{\text{te}}$  Potenz der Hauptdeterminante.

#### §. 16. Anwendung der Determinanten auf Entwicklungen aus der analytischen Geometrie der Ebene.

Wir wollen bei den nachfolgenden Aufgaben voraussetzen, dass der Leser mit der berührten Materie bekannt sei, indem wir uns auf leichte und allgemein bekannte Dinge beschränken.

Erste Aufgabe. Die Gleichung einer geraden Linie zu finden, die durch 2 gegebene Punkte geht.

Die Coordinaten dieser Punkte mögen  $x_1 y_1$  und  $x_2 y_2$  sein. Die Gleichung einer jeden Geraden hat die Form:

$$Ax + By + C = 0.$$

Für unsere Aufgabe sind  $A$ ,  $B$ ,  $C$  noch näher zu bestimmen. Die Thatsache, dass die gesuchte Gerade durch die gegebenen Punkte geht, begründet die 2 Bedingungsgleichungen:

$$Ax_1 + By_1 + C_1 = 0; \quad Ax_2 + By_2 + C = 0.$$

Diese 3 homogenen Gleichungen zwischen den 3 unbekanntenen Grössen  $A$ ,  $B$ ,  $C$  können nur dann gleichzeitig bestehen, wenn

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (82)$$

Vorstehende Determinante ist die gesuchte Gleichung der geraden Linie. Sie ist eine Relation, welche zwischen den Coordinaten  $x y$  eines beliebigen Punktes der Geraden und den Coordinaten der beiden gegebenen Punkte bestehen muss. Wird die zweite Reihe von der ersten und dritte von der zweiten abgezogen, so entsteht durch Auflösung leicht die Form:

$$\frac{x - x_1}{x_1 - x_2} = \frac{y - y_1}{y_1 - y_2},$$

wie wir dieselbe als die gewöhnliche kennen.

Beispiel. Es sei  $x_1 = 3, y_1 = 5; x_2 = -4, y_2 = 8$ .

$$\Delta = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 3 & 5 & 1 \\ -4 & 8 & 1 \end{vmatrix} = 0; \quad 3x + 7y - 10 = 0.$$

Zweite Aufgabe. Man soll die Bedingung dafür aufstellen, dass 3 gegebene Punkte  $x_1 y_1; x_2 y_2; x_3 y_3$  in einer geraden Linie liegen.

Diese Aufgabe fällt mit der vorhergehenden fast zusammen. Legen wir nämlich durch 2 der gegebenen Punkte eine gerade Linie, so haben wir in der vorhergehenden Determinante deren Gleichung. Damit aber der dritte Punkt dieser Geraden angehöre, müssen die Coordinaten  $x_3 y_3$  diese Gleichung befriedigen. Die gesuchte Bedingung heisst mithin so:

$$\begin{vmatrix} x_3 & y_3 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0, \text{ oder: } \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (83)$$

Dritte Aufgabe. Wenn ein Punkt  $x y$  mit zwei anderen Punkten  $x_1 y_1$  und  $x_2 y_2$  in gerader Linie liegt, so soll nachgewiesen werden, dass die Coordinaten  $x$  und  $y$  sich durch folgende Gleichungen ausdrücken lassen:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}; \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}. \quad (84)$$

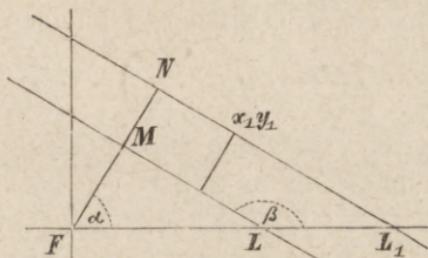
Liegen die 3 Punkte in gerader Linie, so muss die Determinante (82) verschwinden. Eine solche verschwindende Determinante setzt uns (§. 13) in den Stand, 3 nicht homogene Gleichungen zwischen nur 2 Unbekannten anzuschreiben und die Elemente der Determinante als Coefficienten dieser Unbekannten zu benutzen. Diese 3 Gleichungen mögen heissen:

$$\begin{aligned} x_1 + \lambda x_2 + \mu x &= 0 \\ y_1 + \lambda y_2 + \mu y &= 0 \\ 1 + \lambda + \mu &= 0, \end{aligned}$$

wenn  $\lambda$  und  $\mu$  die Unbekannten vorstellen. Wird  $\mu$  aus der dritten Gleichung in die beiden ersten substituiert, so entstehen sofort die beiden gesuchten Gleichungen (84).

Wir können dieselben ansehen als die Gleichung einer Geraden, welche durch die beiden gegebenen Punkte  $x_1 y_1$  und  $x_2 y_2$  geht, indem wir  $\lambda$  als unabhängige Variable betrachten. Wird dieses  $\lambda$  continuirlich geändert, so ändert sich das Coordinatenpaar  $x y$  ebenfalls continuirlich, und der continuirlich fortbewegte Punkt beschreibt eine gerade Linie, weil er in allen Lagen die Determinante (82) befriedigt.

Vierte Aufgabe. Die Coordinaten  $x_1 y_1$ ,  $x_2 y_2$  und  $x_3 y_3$  der 3 Eckpunkte eines Dreiecks sind gegeben, man soll daraus den Flächeninhalt dieses Dreiecks finden.



Zuerst suchen wir eine Formel, welche dazu dient, die Entfernung eines durch seine Coordinaten gegebenen Punktes von einer ebenfalls gegebenen Geraden zu berechnen. Nehmen wir an,  $FM = p$  und  $\sphericalangle \alpha$  seien gegeben, und  $L$  sei eine zu  $FM$  senkrechte Gerade, so ist deren Lage vollständig bestimmt, und es kommt nur darauf an, ihre Gleichung aufzustellen. Nennen wir die Coordinaten des Punktes  $M$  einmal  $uv$ , so ist  $u = p \cos \alpha$ ,  $v = p \sin \alpha$  und die Gleichung der Geraden  $L$  heisst:

$$y - p \sin \alpha = \operatorname{tg} \beta (x - p \cos \alpha), \text{ oder:}$$

$$y - p \sin \alpha = -\operatorname{cotg} \alpha (x - p \cos \alpha), \text{ oder:}$$

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0.$$

Halten wir hier  $\alpha$  unveränderlich fest, lassen wir dagegen  $p$  sich continuirlich ändern, so verschiebt sich  $L$  parallel zu seiner ersten Lage und gelangt auch einmal in die Lage  $L_1$ . Dann ist  $FM = p$  in  $FN = (p \pm d)$  übergegangen, wenn wir  $MN = \pm d$  nennen, je nachdem es in der Richtung von  $p$  selbst, oder in der umgekehrten liegt. Die Gleichung der Geraden heisst jetzt:  $x \cos \alpha + y \sin \alpha - (p \pm d) = 0$ , und zugleich besteht, da  $L_1$  durch Punkt  $x_1 y_1$  geht, die Bedingungsgleichung:  $x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha - (p \pm d) = 0$ , woraus denn die gesuchte Entfernung  $d$  in fol-

gender Gestalt gefunden wird:  $d = \pm (x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha - p)$ . Von dem doppelten Vorzeichen kann abgesehen werden, weil  $d$  eine absolute Länge bedeutet. Der Satz heisst dann: Der Abstand eines Punktes von einer geraden Linie, deren Gleichung in der Normalform gegeben ist, geht aus der linken Seite dieser Gleichung dadurch hervor, dass man an die Stelle der Variablen die Coordinaten des gegebenen Punktes substituirt.

Da nun die Gleichungen der geraden Linien gewöhnlich nicht in der Normalform gegeben sind, so bleibt uns noch übrig, die algebraisch allgemeinste Form in die Normalform umzuwandeln. Sollen die beiden Gleichungen  $Ax + By + C = 0$  und  $x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$  die nämliche Gerade bedeuten, so müssen die linken Seiten dieser Gleichungen entweder identisch gleich sein, oder doch werden, wenn man den einen Theil mit einem möglicherweise weggefallenen gemeinschaftlichen Factor multiplicirt. Wir dürfen also setzen:

$$Ax + By + C \equiv \mu (x \cos \alpha + y \sin \alpha - p),$$

$$A = \mu \cos \alpha; \quad B = \mu \sin \alpha; \quad C = -\mu p.$$

$$A^2 + B^2 = \mu^2; \quad \mu = \sqrt{A^2 + B^2}, \text{ und}$$

$$\frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = x \cos \alpha + y \sin \alpha - p.$$

Wir sagen also auch:  $\frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 0$  ist die Normalform der Gleichung einer geraden Linie. Das Vorzeichen der Wurzel ist so zu wählen, dass das constante Glied wirklich negativ wird, weil es dem Werthe  $-p$  entsprechen soll.

Endlich können wir die eigentliche Aufgabe in Angriff nehmen und zuerst den senkrechten Abstand des Punktes  $x_1 y_1$  von denjenigen Geraden ermitteln, welche durch die beiden anderen gegebenen Punkte  $x_2 y_2$  und  $x_3 y_3$  gelegt ist. Deren Gleichung heisst:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0; \quad \text{oder: } x(y_2 - y_3) - y(x_2 - x_3) + x_2 y_3 - x_3 y_2 = 0$$

und deswegen ist:  $A = (y_2 - y_3); B = -(x_2 - x_3)$ .

Wir gehen jetzt zur Normalform über, indem wir die aufgelöste oder die wirkliche Determinante durch  $\sqrt{A^2 + B^2}$  dividiren, und leiten aus dieser Form den gesuchten senkrechten Abstand ab, indem wir statt  $x$  und  $y$  setzen  $x_1$  und  $y_1$ . Hiernach ist:

$$d = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}}{\sqrt{(y_2 - y_3)^2 + (x_2 - x_3)^2}}.$$

Die Länge der Basis, d. h. die Entfernung des Punktes  $x_2 y_2$  von  $x_3 y_3$  wird nach der Formel gefunden:  $b = \sqrt{(y_2 - y_3)^2 + (x_2 - x_3)^2}$  und da die Fläche des Dreiecks gleich  $\frac{1}{2} d \cdot b$  ist, so finden wir schliesslich die Formel:

$$\text{Dreiecksfläche} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \quad (85)$$

Beispiel:

$$x_1 = 6; \quad x_2 = 14; \quad x_3 = 9; \\ y_1 = 2; \quad y_2 = 4; \quad y_3 = 12;$$

$$F = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 14 & 4 & 1 \\ 9 & 12 & 1 \end{vmatrix} = 37.$$

Anmerkung. Erscheint die Fläche unter negativem Vorzeichen, so hat man nur 2 Reihen oder Columnen zu vertauschen. Wird  $F = 0$ , so liegen die 3 Punkte in gerader Linie.

Fünfte Aufgabe. Drei Punkte  $x_1 y_1; x_2 y_2; x_3 y_3$  sind gegeben. Durch den ersten Punkt soll eine Gerade gelegt werden, welche mit derjenigen Geraden parallel ist, die durch die beiden anderen Punkte geht.

Die 3 gegebenen Punkte schliessen ein bestimmtes Dreieck ein. Jeder Punkt  $x y$ , welcher auf der gesuchten Parallelen liegt, bildet mit den Punkten 2 und 3 ein anderes Dreieck, welches dem ersten flächengleich ist. Wir drücken diesen Zusammenhang aus durch die Gleichung:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}, \text{ oder:} \\ \begin{vmatrix} (x - x_1) & (y - y_1) & 0 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Die beiden Determinanten sind nach §. 10 vereinigt.

Beispiel:  $x_1 = 10; \quad x_2 = 2; \quad x_3 = 8;$   
 $y_1 = 7; \quad y_2 = 5; \quad y_3 = -6.$

Die Gleichung der gesuchten Parallelen heisst:

$$\begin{vmatrix} (x - 10) & (y - 7) & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 8 & -6 & 1 \end{vmatrix} = 0, \\ 11x + 6y - 152 = 0.$$

Sechste Aufgabe. Drei gerade Linien sind durch ihre Gleichungen gegeben. Die Fläche des eingeschlossenen Dreiecks soll durch die Constanten der Gleichungen ausgedrückt werden.

Die Gleichungen der Geraden sollen heißen:

$$1) \quad a_{11} x + a_{12} y + a_{13} = 0$$

$$2) \quad a_{21} x + a_{22} y + a_{23} = 0$$

$$3) \quad a_{31} x + a_{32} y + a_{33} = 0.$$

Zu diesem System gehört wieder die folgende Determinante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad (86)$$

Wir berechnen jetzt die Coordinaten der Schnittpunkte zwischen den 3 Geraden, oder die Ecken des eingeschlossenen Dreiecks und lösen zu dem Zweck zunächst die 2 ersten Gleichungen auf. Wir finden:

$$x_{12} = \frac{\begin{vmatrix} -a_{13} & a_{12} \\ -a_{23} & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{A_{31}}{A_{33}}$$

$$y_{12} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & -a_{13} \\ a_{21} & -a_{23} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{A_{32}}{A_{33}}$$

Ebenso finden wir für die übrigen Ecken:

$$x_{13} = \frac{A_{21}}{A_{23}}, \quad y_{13} = \frac{A_{22}}{A_{23}}; \quad x_{23} = \frac{A_{11}}{A_{13}}; \quad y_{23} = \frac{A_{12}}{A_{13}}.$$

Wird die Formel (85) auf diese Punkte angewendet, so erhält man:

$$F = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \frac{A_{11}}{A_{13}} & \frac{A_{12}}{A_{13}} & 1 \\ \frac{A_{21}}{A_{23}} & \frac{A_{22}}{A_{23}} & 1 \\ \frac{A_{31}}{A_{33}} & \frac{A_{32}}{A_{33}} & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \frac{\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix}}{A_{13} \cdot A_{23} \cdot A_{33}}.$$

Die Zählerdeterminante ist die adjungirte von (86) und, weil vom dritten Grade, dem Quadrat jener gleich. Der Nenner ist das Product aus den 3 Unterdeterminanten der dritten Columnne. Vom Vorzeichen abgesehen, nimmt dieser Ausdruck die folgende Form an:

$$F = \frac{\frac{1}{2} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}^2}{\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \quad (87)$$

Verschwindet der Zähler dieses Werthes, so verschwindet auch  $F$ , und die 3 Geraden schneiden sich in dem nämlichen Punkte. Verschwindet dagegen eine der Nennerdeterminanten, so ist das betreffende Linienpaar parallel, weil dann  $F$  unendlich wird.

Siebente Aufgabe. Drei gerade Linien sind durch ihre Gleichungen gegeben, man soll die Bedingung aufsuchen, unter der sie sich in dem nämlichen Punkte schneiden.

Wir haben eben gesehen, dass in diesem Falle die vorhergehende Determinante verschwinden muss, geben aber doch für den Satz einen selbstständigen Beweis. Die Gleichungen der 3 Geraden mögen sein:

$$A_1 x + B_1 y + C_1 = 0; \quad A_2 x + B_2 y + C_2 = 0; \quad A_3 x + B_3 y + C_3 = 0.$$

Sollen diese 3 Gleichungen durch die Coordinaten eines gemeinschaftlichen Punktes befriedigt werden können, so muss ihre Determinante verschwinden und sein:

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0. \quad (88)$$

Das Verschwinden dieser Determinante lässt noch eine andere Deutung zu. Wir werden nämlich in den Stand gesetzt zu behaupten, dass die folgenden 3 Gleichungen zwischen den Unbekannten  $\lambda$ ,  $\mu$  und  $\nu$  zusammen bestehen können.

$$\begin{aligned} A_1 \lambda + A_2 \mu + A_3 \nu &= 0 \\ B_1 \lambda + B_2 \mu + B_3 \nu &= 0 \\ C_1 \lambda + C_2 \mu + C_3 \nu &= 0. \end{aligned} \quad (89)$$

Multiplicirt man nun die erste Gleichung der 3 Graden mit  $\lambda$ , die zweite mit  $\mu$  und die dritte mit  $\nu$  und addirt dieselben, so erhält man:

$$(A_1 \lambda + A_2 \mu + A_3 \nu)x + (B_1 \lambda + B_2 \mu + B_3 \nu)y + (C_1 \lambda + C_2 \mu + C_3 \nu) = 0.$$

Da nun die Gleichungen (89) möglich sein müssen, wenn die Determinante (88) verschwindet, so muss man, wenn die 3 Geraden durch den nämlichen Punkt gehen, stets 3 Werthe  $\lambda$ ,  $\mu$

und  $\nu$  finden können, welche so beschaffen sind, dass, wenn man die 3 Gleichungen damit multiplicirt und dann addirt, der Coefficient von  $x$ , der Coefficient von  $y$  und auch die Constante für sich verschwindet. Oft gelingt es, die Werthe dieser Coefficienten leicht zu erkennen, und dann ist diese Beweisform ausserordentlich einfach.

Beispiel.  $3x + 7y - 5 = 0$ ;  $5x - 2y - 3 = 0$ ;  $9x - 20y + 1 = 0$  sind die Gleichungen von 3 Geraden, welche sich in dem Punkt  $x = \frac{31}{41}$ ,  $y = \frac{16}{41}$  durchschneiden. Die Determinante ihrer Gleichungen verschwindet. Wird die erste mit 2, die zweite mit  $-3$ , die dritte mit 1 multiplicirt, so verschwindet die Summe der 3 Gleichungen identisch.

Achte Aufgabe. Zwei gerade Linien sind durch ihre Gleichungen gegeben:

$$L_1 = A_1x + B_1y + C_1 = 0; \quad L_2 = A_2x + B_2y + C_2 = 0.$$

Multiplicirt man die eine Gleichung mit  $\mu$ , die andere mit  $\lambda$ , oder die eine mit 1 und die zweite mit  $\lambda$  und addirt sie, so entsteht eine neue Gleichung:

$$L_3 = (A_1x + B_1y + C_1) + \lambda (A_2x + B_2y + C_2) = 0,$$

welche ebenfalls eine gerade Linie bedeutet. Es soll bewiesen werden, dass sich die 3 Geraden in einem Punkte schneiden.

Die Determinante dieser 3 Gleichungen heisst:

$$D = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ (A_1 + \lambda A_2) & (B_1 + \lambda B_2) & (C_1 + \lambda C_2) \end{vmatrix}.$$

Wird die zweite Reihe mit  $\lambda$  multiplicirt und von der dritten abgezogen, so werden 2 Reihen gleich, und die Determinante verschwindet, d. h. die 3 Geraden gehen durch den nämlichen Punkt.

Neunte Aufgabe. Zu beweisen, dass die 3 Transversalen, welche aus den Ecken eines Dreiecks nach den Mittelpunkten der gegenüberliegenden Seiten gezogen werden, sich in dem nämlichen Punkte durchschneiden.

Die Eckpunkte des Dreiecks mögen sein:  $x_1y_1$ ;  $x_2y_2$ ;  $x_3y_3$ . Die Coordinaten des Mittelpunktes der Seite 2—3 sind dann:  $x_4 = \frac{1}{2}(x_2 + x_3)$ ,  $y_4 = \frac{1}{2}(y_2 + y_3)$ , und die Gleichung der Transversalen aus der Ecke  $x_1y_1$  nach diesem Punkte  $x_4y_4$  heisst:

$$T_1 = y(2x_1 - x_2 - x_3) + x(y_2 + y_3 - 2y_1) + y_1x_2 + y_1x_3 - x_1y_2 - x_1y_3 = 0.$$

Durch Vertauschen der Indices 1 mit 2 und 1 mit 3 gehen daraus die Gleichungen der beiden anderen Transversalen hervor:

$$T_2 = y(2x_2 - x_1 - x_3) + x(y_1 + y_3 - 2y_2) + y_2x_1 + y_2x_3 - x_2y_1 - x_2y_3 = 0.$$

$$T_3 = y(2x_3 - x_1 - x_2) + x(y_1 + y_2 - 2y_3) + y_3x_2 + y_3x_1 - x_3y_2 - x_3y_1 = 0.$$

Addirt man in der Determinante dieser 3 Gleichungen die erste und zweite Reihe zur dritten, so verschwindet diese und mit ihr die Determinante selbst.

Zehnte Aufgabe. Es soll bewiesen werden, dass die 3 Senkrechten, welche in den Mitten der Seiten eines Dreiecks errichtet werden können, sich in dem nämlichen Punkte schneiden.

Die Coordinaten der Eckpunkte mögen wieder  $x_1 y_1$ ;  $x_2 y_2$ ;  $x_3 y_3$  heissen, die Coordinaten des Mittelpunktes zwischen 1 und 2 sind dann  $x_{12} = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ ,  $y_{12} = \frac{1}{2}(y_1 + y_2)$ . Die Gerade, welche durch diesen Punkt senkrecht zur Seite (1—2) gezogen wird, hat die Gleichung:

$$P_{12} = 2y(y_1 - y_2) + 2x(x_1 - x_2) - y_1^2 + y_2^2 - x_1^2 + x_2^2 = 0.$$

Durch Vertauschung der Indices gehen daraus die Gleichungen der anderen Senkrechten hervor. Dieselben heissen:

$$P_{13} = 2y(y_1 - y_3) + 2x(x_1 - x_3) - y_1^2 + y_3^2 - x_1^2 + x_3^2 = 0.$$

$$P_{23} = 2y(y_3 - y_2) + 2x(x_3 - x_2) - y_3^2 + y_2^2 - x_3^2 + x_2^2 = 0.$$

Wir betrachten jetzt  $2x$  und  $2y$  als Variablen dieser 3 Gleichungen. Ihre Determinante verschwindet.

Elfte Aufgabe. Es ist zu beweisen, dass sich die 3 Höhen eines Dreiecks in dem nämlichen Punkte durchschneiden.

Die Ecken des Dreiecks sind:  $x_1 y_1$ ,  $x_2 y_2$ ,  $x_3 y_3$ . Die Höhe aus der Ecke 1 auf die Seite (2—3) hat dann die Gleichung:

$$H_1 = y(y_2 - y_3) + x(x_2 - x_3) - y_1y_2 + y_1y_3 - x_1x_2 + x_1x_3 = 0.$$

Werden die Indices 1 und 2, sowie 1 und 3 vertauscht, so gehen daraus die Gleichungen der beiden anderen Höhen hervor:

$$H_2 = y(y_1 - y_3) + x(x_1 - x_3) - y_2y_1 + y_2y_3 - x_2x_1 + x_2x_3 = 0.$$

$$H_3 = y(y_2 - y_1) + x(x_2 - x_1) - y_3y_2 + y_3y_1 - x_3x_2 + x_3x_1 = 0.$$

Es ist nicht schwer nachzuweisen, dass die Determinante dieser 3 Gleichungen verschwindet.

Zwölfte Aufgabe. Es soll bewiesen werden, dass die 3 Winkelhalbierungslinien eines Dreiecks durch einen und denselben Punkt gehen.

Für diese Aufgabe ist es zweckmässig, die Gleichungen der 3 Seiten, als in der Normalform gegeben, anzunehmen, und zwar unter der Voraussetzung, dass der Anfangspunkt des Coordinatensystems innerhalb des Dreiecks liege. Sie heissen dann:

$$N_1 = x \cos \alpha_1 + y \sin \alpha_1 - p_1 = 0$$

$$N_2 = x \cos \alpha_2 + y \sin \alpha_2 - p_2 = 0$$

$$N_3 = x \cos \alpha_3 + y \sin \alpha_3 - p_3 = 0.$$

Den Winkelhalbierungslinien entsprechen dann die folgenden Gleichungen:

$$W_{12} = N_1 - N_2 = x(\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2) + y(\sin \alpha_1 - \sin \alpha_2) - (p_1 - p_2) = 0.$$

$$W_{13} = N_1 - N_3 = x(\cos \alpha_1 - \cos \alpha_3) + y(\sin \alpha_1 - \sin \alpha_3) - (p_1 - p_3) = 0.$$

$$W_{23} = N_2 - N_3 = x(\cos \alpha_2 - \cos \alpha_3) + y(\sin \alpha_2 - \sin \alpha_3) - (p_2 - p_3) = 0.$$

Der Beweis, dass die Determinante dieser 3 Gleichungen verschwindet, ist äusserst leicht. Multiplicirt man übrigens die zweite Gleichung mit  $-1$ , so verschwindet die Summe der 3 Gleichungen identisch. Dasselbe ist auch bei den symbolischen Formen:

$$N_1 - N_2 = 0; \quad N_3 - N_1 = 0; \quad N_2 - N_3 = 0$$

der Fall, deren Summe ebenfalls identisch gleich Null ist.

**Dreizehnte Aufgabe.** Ein Punkt und eine gerade Linie sind gegeben. Die Gleichung der Geraden soll gefunden werden, welche durch den gegebenen Punkt parallel oder senkrecht zur gegebenen gelegt ist.

Die Coordinaten des gegebenen Punktes mögen  $x_1, y_1$ , die Gleichung der gegebenen Geraden mag  $A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$  heissen. Verstehen wir unter:

$$1) \quad A x + B y + C = 0$$

die Gleichung der gesuchten Geraden, so bleibt  $A, B, C$  noch zu bestimmen. Da dieselbe durch  $x_1, y_1$  geht, so besteht die Bedingungsgleichung:

$$2) \quad A x_1 + B y_1 + C = 0$$

und da sie ferner parallel zur gegebenen ist, so muss auch

$$3) \quad A B_1 - A_1 B = 0$$

sein. Sollen diese 3 Gleichungen für  $A, B$  und  $C$  zugleich bestehen können, so muss:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ B_1 - A_1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

sein. Die aufgelöste Determinante ist die gesuchte Gleichung.

Soll die gesuchte Gerade senkrecht zur gegebenen sein, so ändert sich nur die dritte Bedingungsgleichung und geht über in:

$$3) \quad A A_1 + B B_1 = 0,$$

und damit wandelt sich auch die Determinante in die folgende um:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ A_1 & B_1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Beispiel. Wenn  $x_1 = 2$ ,  $y_1 = 5$  und  $4x + 7y - 12 = 0$  gegeben sind, so ist:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 7 & -4 & 0 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 4 & 7 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Es ist  $4x + 7y - 43 = 0$  die Parallele, und  $7x - 4y + 6 = 0$  die Senkrechte.

Vierzehnte Aufgabe. Die Seiten eines Dreiecks sind durch ihre Gleichungen:

$$L_1 = A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$$

$$L_2 = A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$$

$$L_3 = A_3 x + B_3 y + C_3 = 0$$

gegeben. Durch den Schnittpunkt der beiden ersten soll eine Gerade gelegt werden, welche zur dritten senkrecht oder parallel ist, wie heisst ihre Gleichung?

Die Gleichung einer jeden Geraden, welche durch den Schnittpunkt von  $L_1$  mit  $L_2$  geht, ist von der Form:

$$1) \quad (A_1 x + B_1 y + C_1) + \lambda (A_2 x + B_2 y + C_2) = 0.$$

Die besondere Lage dieser neuen Geraden wird durch die Wahl des Factors  $\lambda$  bestimmt. Soll sie senkrecht zur dritten sein, so muss das Product der Coefficienten von  $x$  plus dem Product der Coefficienten von  $y$  gleich Null sein, oder es muss die Relation bestehen:  $(A_1 + \lambda A_2) A_3 + (B_1 + \lambda B_2) B_3 = 0$ . Diese Relation bringen wir auf die Form:

$$2) \quad (A_1 A_3 + B_1 B_3) + \lambda (A_2 A_3 + B_2 B_3) = 0.$$

Sollen die Gleichungen 1) und 2) für den nämlichen Werth von  $\lambda$  bestehen können, so muss ihre Determinante verschwinden:

$$\begin{vmatrix} (A_1 x + B_1 y + C_1) & (A_2 x + B_2 y + C_2) \\ (A_1 A_3 + B_1 B_3) & (A_2 A_3 + B_2 B_3) \end{vmatrix} = 0.$$

Soll dagegen diese neue Linie nicht senkrecht, sondern parallel zur dritten sein, so ist nothwendig, dass

$$3) (A_1 B_3 - A_3 B_1) + \lambda (A_2 B_3 - A_3 B_2) = 0.$$

Wird diese Relation mit der ersten verbunden, so geht folgende Gleichung daraus hervor:

$$\left| \begin{array}{cc} (A_1 x + B_1 y + C_1) & (A_1 B_3 - A_3 B_1) \\ (A_2 x + B_2 y + C_2) & (A_2 B_3 - A_3 B_2) \end{array} \right| = 0.$$

Beispiel:  $L_1 = 3x - 4y + 14 = 0$ ;  $L_2 = 2x + 3y - 19 = 0$ ;  
 $L_3 = x + 6y - 9 = 0$ .

$$\left| \begin{array}{cc} (3x - 4y + 14), & -21 \\ (2x + 3y - 19), & 20 \end{array} \right| = 0; \quad \left| \begin{array}{cc} (3x - 4y + 14), & 22 \\ (2x + 3y - 19), & 9 \end{array} \right| = 0,$$

oder:  $102x - 17y - 119 = 0$  und  $17x + 102y - 544 = 0$   
sind die Gleichungen der Senkrechten und der Parallelen.

Fünfzehnte Aufgabe. Man soll beweisen, dass die Polare eines Kreises sich um einen festen Punkt dreht, wenn der Pol sich auf einer geraden Linie bewegt.

Die Gleichung des Kreises sei  $x^2 + y^2 - r^2 = 0$ . Wir wählen 2 feste Punkte  $\alpha_1 \beta_1$ ,  $\alpha_2 \beta_2$  und einen beweglichen  $\alpha \beta$ . Die Gleichung der Polaren, welche durch diese 3 Punkte zu dem Kreise gezogen werden, heissen:

$$x \alpha + y \beta - r^2 = 0$$

$$x \alpha_1 + y \beta_1 - r^2 = 0$$

$$x \alpha_2 + y \beta_2 - r^2 = 0,$$

wozu bemerkt wird, dass  $x y$  die Variablen der Gleichungen sind, während  $\alpha \beta$ ,  $\alpha_1 \beta_1$ ,  $\alpha_2 \beta_2$  als durch Wahl bestimmte Constanten anzusehen sind. Sollen die 3 Punkte in gerader Linie bleiben, d. h.  $\alpha \beta$  auf der geraden Verbindung der beiden anderen Pole sich bewegen, so muss die Bedingung erfüllt sein:

$$\left| \begin{array}{ccc} \alpha & \beta & 1 \\ \alpha_1 & \beta_1 & 1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & 1 \end{array} \right| = 0.$$

Wird die letzte Column mit  $-r^2$  multiplicirt, so erhält man:

$$\left| \begin{array}{ccc} \alpha & \beta & -r^2 \\ \alpha_1 & \beta_1 & -r^2 \\ \alpha_2 & \beta_2 & -r^2 \end{array} \right| = 0,$$

oder die Bedingung dafür, dass die bewegliche Polare stets durch den Schnittpunkt der beiden festen geht.

Sechszehnte Aufgabe. Es ist zu beweisen, dass die 3 Chordalen dreier Kreise durch den nämlichen Punkt gehen.

Wir wollen annehmen, die Gleichungen der 3 Kreise seien in der folgenden Form gegeben:

$$K_1 = x^2 + y^2 + m_1 x + n_1 y + p_1 = 0$$

$$K_2 = x^2 + y^2 + m_2 x + n_2 y + p_2 = 0$$

$$K_3 = x^2 + y^2 + m_3 x + n_3 y + p_3 = 0.$$

Zieht man die Gleichungen zweier Kreise von einander ab, so erhält man die Gleichung einer geraden Linie. Schneiden sich die Kreise, so ist diese Gerade die gemeinschaftliche Sehne, allgemein heisst sie Chordale. Hiernach sind die Gleichungen der 3 Chordalen:

$$C_{12} = K_1 - K_2 = (m_1 - m_2)x + (n_1 - n_2)y + (p_1 - p_2) = 0$$

$$C_{31} = K_3 - K_1 = (m_3 - m_1)x + (n_3 - n_1)y + (p_3 - p_1) = 0$$

$$C_{23} = K_2 - K_3 = (m_2 - m_3)x + (n_2 - n_3)y + (p_2 - p_3) = 0.$$

Dass die Determinante dieser 3 Gleichungen verschwindet, kann leicht nachgewiesen werden.

Ein noch kürzerer Beweis ist der folgende: In symbolischer Form heissen die Gleichungen der 3 Chordalen:  $K_1 - K_2 = 0$ ,  $K_2 - K_3 = 0$ ,  $K_3 - K_1 = 0$ . Da diese Summe identisch verschwindet, so gehen die 3 Geraden durch den nämlichen Punkt.

Siebenzehnte Aufgabe. Ein Kreis ist durch 3 seiner Punkte gegeben. Man soll seine Gleichung aufstellen.

Die Coordinaten der gegebenen Punkte sollen  $x_1 y_1$ ,  $x_2 y_2$ ,  $x_3 y_3$  sein. Die allgemeinste Form der Kreisgleichung heisst:

$$1) A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0.$$

Soll dieser Kreis durch die gegebenen Punkte gehen, so müssen die Constanten  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  folgenden Bedingungen entsprechen:

$$2) A(x_1^2 + y_1^2) + Bx_1 + Cy_1 + D = 0$$

$$3) A(x_2^2 + y_2^2) + Bx_2 + Cy_2 + D = 0$$

$$4) A(x_3^2 + y_3^2) + Bx_3 + Cy_3 + D = 0.$$

Das gleichzeitige Bestehen dieser 4 homogenen Gleichungen bedingt das Verschwinden ihrer Determinante:

$$\begin{vmatrix} (x^2 + y^2) & x & y & 1 \\ (x_1^2 + y_1^2) & x_1 & y_1 & 1 \\ (x_2^2 + y_2^2) & x_2 & y_2 & 1 \\ (x_3^2 + y_3^2) & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Der gemeinsame Coefficient von  $x^2$  und  $y^2$  ist die Unterdeterminante:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Verschwindet diese, so fallen in der entwickelten Determinante die quadratischen Glieder weg und die Gleichung ist nur noch vom ersten Grade. Sie bedeutet dann eine gerade Linie. Das Verschwinden dieser Unterdeterminante ist aber auch die Bedingung dafür, dass die 3 gegebenen Punkte in gerader Linie liegen.

Achtzehnte Aufgabe. Durch 3 Punkte eines Kreises sind Tangenten gelegt und die Ecken des Tangentendreiecks mit den gegenüber liegenden Berührungspunkten verbunden. Zu beweisen, dass sich diese 3 Transversalen in einem einzigen Punkte schneiden.

Die Gleichung des Kreises soll  $x^2 + y^2 - r^2 = 0$  heissen, die gegebenen Berührungspunkte sollen  $x_1 y_1$ ,  $x_2 y_2$ ,  $x_3 y_3$  sein. Den 3 Tangenten entsprechen dann die Gleichungen:

$$\begin{aligned} t_1 &= x_1 x + y_1 y - r^2 = 0 \\ t_2 &= x_2 x + y_2 y - r^2 = 0 \\ t_3 &= x_3 x + y_3 y - r^2 = 0. \end{aligned}$$

Die Gleichung derjenigen Transversalen, welche den Berührungspunkt  $x_1 y_1$  mit dem Schnittpunkt von  $t_2$  mit  $t_3$  verbindet, hat die Gleichung:

$$u_1 = t_2 + \lambda t_3 = (x_2 x + y_2 y - r^2) + \lambda (x_3 x + y_3 y - r^2) = 0,$$

worin  $\lambda$  ein noch nicht bestimmter Factor ist. Dieser muss der Bedingung gemäss gewählt werden, dass  $u_1$  durch  $x_1 y_1$  gehen soll, d. h. es muss sein:

$$(x_1 x_2 + y_1 y_2 - r^2) + \lambda (x_1 x_3 + y_1 y_3 - r^2) = 0,$$

$$\text{oder: } \lambda = - \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 - r^2}{x_1 x_3 + y_1 y_3 - r^2} = - \frac{(t_2)_{x_1 y_1}}{(t_3)_{x_1 y_1}}.$$

Wird dieser Werth in  $u_1$  substituirt, so erhält man:

$$u_1 = (x_2 x + y_2 y - r^2) \cdot (x_1 x_3 + y_1 y_3 - r^2) - (x_3 x + y_3 y - r^2) \cdot (x_1 x_2 + y_1 y_2 - r^2) = 0,$$

oder in symbolischer Form:

$$1) \quad u_1 = t_2 \cdot (t_3)_{x_1 y_1} - t_3 \cdot (t_2)_{x_1 y_1} = 0.$$

Wird Index 1 mit 2, sowie auch mit 3 vertauscht, so erhält man die beiden anderen Transversalen.

$$2) \quad u_2 = t_1 \cdot (t_3)_{x_2 y_2} - t_3 \cdot (t_1)_{x_2 y_2} = 0$$

$$3) \quad u_3 = t_2 \cdot (t_1)_{x_3 y_3} - t_1 \cdot (t_2)_{x_3 y_3} = 0.$$

Zur Abkürzung wollen wir setzen:

$$(t_3)_{x_2 y_2} = (t_2)_{x_3 y_3} = a; \quad (t_3)_{x_1 y_1} = (t_1)_{x_3 y_3} = b;$$

$$(t_1)_{x_2 y_2} = (t_2)_{x_1 y_1} = c.$$

Unsere 3 Gleichungen gestalten sich jetzt folgendermassen:

$$u_1 = 0 \cdot t_1 - b \cdot t_2 + c \cdot t_3 = 0$$

$$u_2 = a \cdot t_1 + 0 \cdot t_2 - c \cdot t_3 = 0$$

$$u_3 = -a \cdot t_1 + b \cdot t_2 + 0 \cdot t_3 = 0.$$

Weil die Determinante dieser 3 Gleichungen verschwindet, gehen die 3 Transversalen durch den nämlichen Punkt.

Neunzehnte Aufgabe. Wird an eine Parabel durch den Punkt  $x_1 y_1$  eine Tangente gelegt und vom Brennpunkt eine Senkrechte zu dieser Tangente gezogen, so schneiden sich beide auf der durch den Scheitel der Curve gezogenen Tangente.

Ist  $y^2 - 2p x = 0$  die Parabelgleichung, so heist die Gleichung einer durch  $x_1 y_1$  gezogenen Tangente:

$$1) \quad y y_1 - p x - p x_1 = 0.$$

Die Gleichung der Senkrechten vom Brennpunkt nach dieser Tangente heisst:

$$2) \quad 2p y + 2y_1 x - p y_1 = 0.$$

In dem gewählten Systeme fällt die Scheiteltangente mit der  $y =$  Achse zusammen und hat die Gleichung:

$$3) \quad x = 0.$$

Diese 3 Geraden gehen stets durch den nämlichen Punkt weil ihre Determinante:

$$\begin{vmatrix} y_1 & -p & -p x_1 \\ 2p & 2y_1 & -p y_1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Zwanzigste Aufgabe. Durch drei Punkte einer Parabel,  $x_1 y_1$ ,  $x_2 y_2$ ,  $x_3 y_3$  sind Tangenten gelegt. Man soll beweisen, dass das Dreieck, welches von diesen Tangenten eingeschlossen wird, an Fläche nur halb so gross ist, als das Dreieck, welches entsteht, wenn man die drei Berührungspunkte verbindet.

Wird  $y^2 = 2p x$  als Parabelgleichung angenommen, so können die Abscissen der Berührungspunkte durch:

$$x_1 = \frac{y_1^2}{2p}; \quad x_2 = \frac{y_2^2}{2p}; \quad x_3 = \frac{y_3^2}{2p}$$

ausgedrückt werden, und dann finden wir für die Fläche des Sehndreiecks folgenden Ausdruck:

$$F = \frac{1}{4p} \begin{vmatrix} y_1^2 & y_1 & 1 \\ y_2^2 & y_2 & 1 \\ y_3^2 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Um eine Formel für das zwischen den Tangenten gelegene Dreieck aufstellen zu können, stellen wir zuerst die Gleichungen dieser Tangenten her. Sie heissen:

- 1)  $px - y_1 y + px_1 = 0$
- 2)  $px - y_2 y + px_2 = 0$
- 3)  $px - y_3 y + px_3 = 0$ .

Sieht man vom Vorzeichen ab, so gestaltet sich die Fläche des eingeschlossenen Dreiecks nach Aufgabe 6 folgendermassen:

$$f = \frac{\frac{1}{2} \begin{vmatrix} p & -y_1 & px_1 \\ p & -y_2 & px_2 \\ p & -y_3 & px_3 \end{vmatrix}^2}{\begin{vmatrix} p & -y_1 \\ p & -y_2 \\ p & -y_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} p & -y_1 \\ p & -y_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} p & -y_2 \\ p & -y_3 \end{vmatrix}} = \frac{\frac{1}{8p} \begin{vmatrix} y_1^2 & y_1 & 1 \\ y_2^2 & y_2 & 1 \\ y_3^2 & y_3 & 1 \end{vmatrix}^2}{\begin{vmatrix} y_1 & 1 \\ y_2 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} y_1 & 1 \\ y_3 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} y_2 & 1 \\ y_3 & 1 \end{vmatrix}}$$

Daraus ergibt sich durch Division:

$$\frac{f}{F} = \frac{\frac{1}{2} \begin{vmatrix} y_1^2 & y_1 & 1 \\ y_2^2 & y_2 & 1 \\ y_3^2 & y_3 & 1 \end{vmatrix}}{(y_1 - y_2)(y_1 - y_3)(y_2 - y_3)} = \frac{\frac{1}{2} \begin{vmatrix} (y_1^2 - y_2^2), & (y_1 - y_2) & 0 \\ (y_2^2 - y_3^2), & (y_2 - y_3) & 0 \\ y_3^2 & y_3 & 1 \end{vmatrix}}{(y_1 - y_2)(y_1 - y_3)(y_2 - y_3)}$$

$$\frac{f}{F} = \frac{\frac{1}{2} \begin{vmatrix} (y_1^2 - y_2^2), & (y_1 - y_2) \\ (y_2^2 - y_3^2), & (y_2 - y_3) \end{vmatrix}}{(y_1 - y_2)(y_1 - y_3)(y_2 - y_3)} = \frac{\frac{1}{2} \begin{vmatrix} (y_1 + y_2), & 1 \\ (y_2 + y_3), & 1 \end{vmatrix}}{(y_1 - y_3)} = \frac{1}{2}.$$

Einundzwanzigste Aufgabe. Es soll die Bedingung dafür aufgefunden werden, dass die allgemeine Gleichung zweiten Grades zwischen 2 Variablen 2 gerade Linien bedeutet.

Die allgemeine Gleichung zweiten Grades mag heissen:

$$1) \quad Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

Die Gleichung einer Geraden mag hier von der Form sein:  $ux + vy + 1 = 0$ , worin  $x, y$  die Variablen sind. Zwei bestimmten geraden Linien entsprechen mithin die Gleichungen:

$$2) \quad u_1 x + v_1 y + 1 = 0; \quad 3) \quad u_2 x + v_2 y + 1 = 0.$$

Soll 1) diese beiden Geraden vorstellen, so muss sie dem Product dieser beiden Gleichungen identisch gleich sein, und wir erhalten, wenn wir einen etwa weggefallenen gemeinschaftlichen Factor noch zufügen, die folgende Relation:

$$A x^2 + 2 B x y + C y^2 + 2 D x + 2 E y + F \equiv \lambda (u_1 x + v_1 y + 1) \cdot (u_2 x + v_2 y + 1),$$

und daraus durch Vergleich nachstehende Gleichungen:

$$A = \frac{\lambda}{2} (u_1 u_2 + u_1 u_2); \quad D = \frac{\lambda}{2} (u_1 + u_2)$$

$$B = \frac{\lambda}{2} (u_1 v_2 + v_1 u_2); \quad E = \frac{\lambda}{2} (v_1 + v_2)$$

$$C = \frac{\lambda}{2} (v_1 v_2 + v_1 v_2); \quad F = \frac{\lambda}{2} (1 + 1).$$

Es kommt nun darauf an, aus diesen 6 Gleichungen die noch unbestimmten Constanten  $\lambda$ ,  $u_1$ ,  $v_1$ ,  $u_2$ ,  $v_2$  zu eliminiren, um so eine Bedingungsgleichung zwischen den Constanten der gegebenen Gleichung zu erhalten. Verstehen wir unter  $x_1 y_1$  den Schnittpunkt der beiden Geraden, so bestehen die Bedingungsgleichungen:

$$4) \quad u_1 x_1 + v_1 y_1 + 1 = 0; \quad 5) \quad u_2 x_1 + v_2 y_1 + 1 = 0.$$

Durch Multiplicationen mit den Werthen  $x_1 y_1$  und geeignete Verbindungen erhält man nachstehende Gleichungen:

$$A x_1 + B y_1 + D = \frac{\lambda}{2} [u_1 (u_2 x_1 + v_2 y_1 + 1) + u_2 (u_1 x_1 + v_1 y_1 + 1)]$$

$$B x_1 + C y_1 + E = \frac{\lambda}{2} [v_1 (u_2 x_1 + v_2 y_1 + 1) + v_2 (u_1 x_1 + v_1 y_1 + 1)]$$

$$D x_1 + E y_1 + F = \frac{\lambda}{2} [v_1 (u_2 x_1 + v_2 y_1 + 1) + v_2 (u_1 x_1 + v_1 y_1 + 1)].$$

In diesen 3 Gleichungen verschwinden die rechten Seiten in Folge der Relationen 4) und 5), und wir erhalten:

$$A x_1 + B y_1 + D = 0$$

$$B x_1 + C y_1 + E = 0$$

$$D x_1 + E y_1 + F = 0.$$

Sollen endlich diese 3 Gleichungen zusammen zwischen  $x_1 y_1$  möglich sein, so muss ihre Determinante verschwinden, und so entsteht die Bedingung:

$$\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} = 0.$$

Zweiundzwanzigste Aufgabe. Es soll die Bedingung dafür aufgestellt werden, dass eine gegebene Gerade einen gegebenen Kegelschnitt berührt.

Die allgemeine Gleichung eines Kegelschnittes heisst:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0. \quad (90)$$

Sind  $x_1 y_1$  und  $x_2 y_2$  zwei gegebene Punkte, so kann nach (84) ihre Verbindungslinie auch durch die folgenden Gleichungen dargestellt werden:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}. \quad (91)$$

Um nun die Coordinaten der Punkte zu erhalten, in welchen diese Gerade den Kegelschnitt durchschneidet, muss man diejenigen Werthe von  $\lambda$  ermitteln, welche, wenn sie in (91) substituirt werden,  $x$  und  $y$  zu den gesuchten Schnittpunktscoordinaten machen, und dieser Ermittlung wegen setzen wir für  $x$  und  $y$  die Werthe aus (2) in die Function des Kegelschnittes. So entsteht:

$$a(x_1 + \lambda x_2)^2 + 2b(x_1 + \lambda x_2)(y_1 + \lambda y_2) + c(y_1 + \lambda y_2)^2 \quad (92) \\ + 2d(x_1 + \lambda x_2)(1 + \lambda) + 2e(y_1 + \lambda y_2)(1 + \lambda) + f(1 + \lambda)^2 = 0,$$

oder nach  $\lambda$  geordnet:

$$A\lambda^2 + 2B\lambda + C = 0, \quad \text{indem} \quad (93)$$

$$B = (ax_1 + by_1 + d)x_2 + (bx_1 + cy_1 + e)y_2 + dx_1 + ey_1 + f,$$

$$C = ax_1^2 + 2bx_1y_1 + cy_1^2 + 2dx_1 + 2ey_1 + f.$$

Löst man die Gleichung (93) für  $\lambda$  auf, so erhält man diejenigen Werthe, welche den gesuchten Schnittpunkten entsprechen und nur noch in (91) substituirt werden müssen, um deren Coordinaten zu erhalten. Soll die durch  $x_1 y_1, x_2 y_2$  gelegte Linie den Kegelschnitt berühren, so müssen die beiden Schnittpunkte zusammenfallen und demgemäss die beiden Werthe für  $\lambda$  gleich werden, und dann muss  $B^2 - AC = 0$  sein. Diese Gleichung enthält demnach die Bedingung dafür, dass die beiden Punkte  $x_1 y_1$  und  $x_2 y_2$  so liegen, dass ihre Verbindungslinie die Curve berührt. Ist weiter  $x_1 y_1$  der Berührungspunkt, so müssen diese Coordinatenwerthe die Gleichung des Kegelschnitts befriedigen, d. h.  $C = 0$  machen. Dann muss aber auch  $B = 0$  sein, wenn  $B^2 - 4AC$  verschwinden soll. Denken wir uns  $x_1 y_1$  als Berührungspunkt bestimmt gewählt, so liegen alle zweiten Punkte, welche mit  $x_1 y_1$  der Bedingung  $B = 0$  genügen, auf der durch  $x_1 y_1$  gehenden Tangente, und wir dürfen  $B = 0$  als die Gleichung dieser Tangente ansehen, indem  $x_2 y_2$  die Variablen bedeuten. Setzen wir statt

ihrer  $x y$ , so heisst die Gleichung der durch  $x_1 y_1$  gezogenen Tangente wie folgt:

$$(a x_1 + b y_1 + d) x + (b x_1 + c y_1 + e) y + d x_1 + e y_1 + f = 0. \quad (94)$$

Soll endlich die gegebene Gerade:

$$m x + n y + p = 0 \quad (95)$$

mit einer solchen Tangente zusammenfallen, so müssen die linken Seiten der Gleichungen (94) und (95) entweder identisch gleich sein, oder es werden, wenn ein etwa weggefallener gemeinsamer Factor wieder zugefügt wird. Bezeichnen wir diesen durch  $\mu$ , so entsteht die folgende Identität:

$$(a x_1 + b y_1 + d) x + (b x_1 + c y_1 + e) y + d x_1 + e y_1 + f \\ \equiv \mu (m x + n y + p),$$

und daraus gehen wieder durch Vergleich die folgenden Gleichungen hervor:

- 1)  $a x_1 + b y_1 + d - m \mu = 0$
- 2)  $b x_1 + c y_1 + e - n \mu = 0$
- 3)  $d x_1 + e y_1 + f - p \mu = 0.$

Da die gegebene Gerade auch durch den Punkt  $x_1 y_1$  gehen muss, wenn sie mit der Tangente zusammenfallen soll, so besteht die weitere Gleichung:

$$4) \quad m x_1 + n y_1 + p = 0.$$

Die Möglichkeit, dass diese 4 Gleichungen zwischen den 3 Unbekannten  $x_1 y_1$  und  $\mu$  zugleich bestehen können, wird durch das Verschwinden der nachstehenden Determinante bedingt:

$$\begin{vmatrix} a & b & d & -m \\ b & c & e & -n \\ d & e & f & -p \\ m & n & p & 0 \end{vmatrix} = 0. \quad (96)$$

#### §. 17. Anwendung der Determinanten auf algebraische Entwicklungen.

Elimination einer Variablen aus 2 Gleichungen höheren Grades. Resultante. Es ist denkbar, dass zwei Gleichungen mit einer Unbekannten durch den nämlichen Werth der Unbekannten befriedigt werden. Entnimmt man die gemeinsame Wurzel aus der einen Gleichung und substituirt sie in die andere, so entsteht diejenige Verbindung der Constanten, deren Verschwinden uns anzeigt, dass die beiden Gleichungen eine ge-

meinsame Wurzel besitzen. Die erwähnte Verbindung wird Resultante genannt. An einer Gleichung des dritten und einer des zweiten Grades soll die Methode gezeigt werden, nach welcher diese Resultante immer herzustellen ist. Es seien gegeben:

$$\begin{aligned} a x^3 + b x^2 + c x + d &= 0 \\ \alpha x^2 + \beta x + \gamma &= 0. \end{aligned} \quad (97)$$

Da  $x$  hier nur die gemeinsame Wurzel bedeutet, so dürfen die gleich hohen Potenzen von  $x$  in beiden Gleichungen als gleichwerthig angesehen werden. Durch Multiplication der ersten mit  $x$  und 1, der zweiten mit  $x^2$ ,  $x$  und 1 erhält man die 5 Gleichungen:

$$\begin{aligned} a x^4 + b x^3 + c x^2 + d x &= 0 \\ a x^3 + b x^2 + c x + d &= 0 \\ \alpha x^4 + \beta x^3 + \gamma x^2 &= 0 \\ \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x &= 0 \\ \alpha x^2 + \beta x + \gamma &= 0, \end{aligned} \quad (98)$$

in welchen wir  $x^4$ ,  $x^3$ ,  $x^2$  durch  $z$ ,  $u$ ,  $v$  ersetzen und so 5 lineare Gleichungen zwischen nur 4 Unbekannten erhalten, deren Determinante verschwinden muss, weil der Voraussetzung gemäss die Gleichungen zusammen bestehen können. So erhalten wir die gesuchte Resultante unter der folgenden Gestalt:

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d & 0 \\ 0 & a & b & c & d \\ \alpha & \beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \beta & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = 0. \quad (99)$$

Um nun auch die gemeinsame Wurzel selbst aufzusuchen, geben wir der zweiten, vierten und fünften Gleichung folgende Formen:

$$\begin{aligned} (ax + b)x^2 + cx + d &= 0 \\ (\alpha x + \beta)x^2 + \gamma x &= 0 \\ \alpha x^2 + \beta x + \gamma &= 0. \end{aligned} \quad (100)$$

Diese 3 Gleichungen zwischen den Unbekannten  $x^2$  und  $x$  können nur zugleich bestehen, wenn  $x$  so gewählt ist, dass die folgende Determinante verschwindet:

$$\begin{vmatrix} (ax + b) & c & d \\ (\alpha x + \beta) & \gamma & 0 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = 0. \quad (101)$$

Sie zerfällt nach §. 10 in die nachfolgenden Theile, aus welchen  $x$  leicht zu finden ist:

$$\begin{vmatrix} a & c & d \\ \alpha & \gamma & 0 \\ 0 & \beta & \gamma \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} b & c & d \\ \beta & \gamma & 0 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = 0. \quad (102)$$

Beispiel:

$$\begin{aligned} 3x^3 + 5x^2 - 26x + 8 &= 0 \\ 4x^2 - 9x + 2 &= 0. \end{aligned}$$

$$\text{Res.} = \begin{vmatrix} 3 & 5 & -26 & -8 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & -26 & 8 \\ 4 & -9 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -9 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -9 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -26 & 8 \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & -9 & 2 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} 5 & -26 & 8 \\ -9 & 2 & 0 \\ 4 & -9 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Die gemeinsame Wurzel ist  $x = 2$ .

Die entwickelte Methode kann ohne Schwierigkeiten auf 2 Gleichungen von den beliebigen Graden  $m$  und  $n$  übertragen werden. Man multiplicirt dann die erste nach einander mit  $x^{n-1}$ ,  $x^{n-2}$ , . . . .  $x$ , 1, die zweite mit  $x^{m-1}$ ,  $x^{m-2}$ , . . . .  $x$ , 1 und erhält so  $(m+n)$  Gleichungen zwischen den einzelnen variablen Grössen:  $x^{m+n-1}$ ,  $x^{m+n-2}$ , . . . .  $x$ , 1, deren Determinante verschwinden muss, weil  $x$  in allen Gleichungen den nämlichen Werth bedeutet.

Unter der Voraussetzung, dass die beiden Gleichungen von gleich hohem, z. B. dem dritten Grade sind, kann ihre Resultante in einfacherer Form dargestellt werden. Die Gleichungen:

$$\begin{aligned} ax^3 + bx^2 + cx + d &= 0 \\ a_1x^3 + b_1x^2 + c_1x + d_1 &= 0 \end{aligned} \quad (103)$$

gehen durch die angezeigten Multiplicationen in das folgende System über:

$$\begin{aligned} ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 &= 0 \\ ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx &= 0 \\ ax^3 + bx^2 + cx + d &= 0 \\ a_1x^5 + b_1x^4 + c_1x^3 + d_1x^2 &= 0 \\ a_1x^4 + b_1x^3 + c_1x^2 + d_1x &= 0 \\ a_1x^3 + b_1x^2 + c_1x + d_1 &= 0, \end{aligned} \quad (104)$$

deren Resultante heisst:

$$\text{Res.} = \begin{vmatrix} a & b & c & d & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & d & 0 \\ 0 & 0 & a & b & c & d \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \end{vmatrix}. \quad (105)$$

Zum Zweck der Transformation stellen wir die folgende Determinante\*) auf:

$$\mathcal{A} = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 & 0 & 0 & 0 \\ c_1 & d_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ d_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -b & -c & -d & 0 & 0 & -1 \\ -c & -d & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -d & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}. \quad (106)$$

Wird zuerst  $\mathcal{A}$  in Producte aus correspondirenden Determinanten dritten Grades zerlegt, so verschwindet nur ein einziges nicht, und wir finden:

$$\mathcal{A} = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ c_1 & d_1 & 0 \\ d_1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -d_1^3.$$

Werden nun (105) und (106) mit einander multiplicirt, so erhält man nach vollständiger Reduction das Product unter folgender Gestalt:

$$-d_1^3 \cdot \text{Res.} = \begin{vmatrix} (ab_1 - a_1b), & (ac_1 - a_1c), & (ad_1 - a_1d) & 0 & 0 & -a_1 \\ (ac_1 - a_1c), & (ad_1 - a_1d) + (bc_1 - b_1c), & (bd_1 - b_1d) & 0 & -a_1 - b_1 & \\ (ad_1 - a_1d), & (bd_1 - b_1d), & (cd_1 - c_1d) & -a_1 - b_1 - c_1 & & \\ 0 & 0 & 0 & -b_1 - c_1 - d_1 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -c_1 - d_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -d_1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Auch diese Determinante ist einem einzigen Producte aus 2 correspondirenden gleich, weil die übrigen Producte bei der Zerlegung verschwinden. Wird  $(ab_1 - a_1b)$  in der Form des Determinantensymbol  $(ab_1)$  gesetzt und diese Bezeichnungsweise auch bei den übrigen Theilen durchgeführt, so entsteht:

$$-d_1^3 \cdot \text{Res.} = \begin{vmatrix} (ab_1) & (ac_1) & (ad_1) \\ (ac_1) & (ad_1) + bc_1 & (bd_1) \\ (ad_1) & (bd_1) & (cd_1) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -b_1 - c_1 - d_1 \\ -c_1 - d_1 & 0 \\ -d_1 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

\*) Nach einer Mittheilung von Prof. Brill.

Da der zweite Factor den Werth  $d_1^3$  hat, so ergibt sich:

$$\text{Res.} = - \begin{vmatrix} (a b_1) & (a c_1) & (a d_1) \\ (a c_1) & (a d_1) + (b c_1) & (b d_1) \\ (a d_1) & (b d_1) & (c d_1) \end{vmatrix}. \quad (107)$$

Verswindet diese Determinante, so haben die Gleichungen eine gemeinsame Wurzel.

Unter der nämlichen Voraussetzung können auch die Determinanten (101) und (102) vereinfacht werden. Aus (104) ergeben sich zur Berechnung von  $x$  leicht die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} (a x + b) x^3 + c x^2 + d x &= 0 \\ a x^3 + b x^2 + c x + d &= 0 \\ (a_1 x + b_1) x^3 + c_1 x^2 + d_1 x &= 0 \\ a_1 x^3 + b_1 x^2 + c_1 x + d_1 &= 0, \end{aligned} \quad (108)$$

und daraus folgt weiter:

$$\mathcal{A}_1 = \begin{vmatrix} (a x + b) & c & d & 0 \\ & a & b & c & d \\ (a_1 x + b_1) & c_1 & d_1 & 0 \\ & a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \end{vmatrix} = 0, \quad (109)$$

oder:

$$\begin{vmatrix} a & c & d & 0 \\ 0 & b & c & d \\ a_1 & c_1 & d_1 & 0 \\ 0 & b_1 & c_1 & d_1 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} b & c & d & 0 \\ a & b & c & d \\ b_1 & c_1 & d_1 & 0 \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \end{vmatrix} = 0. \quad (110)$$

Wir vereinigen  $\mathcal{A}_2$  und  $\mathcal{A}_3$  mit der folgenden Determinante zu Producten:

$$\mathcal{A}_4 = \begin{vmatrix} c_1 & d_1 & 0 & 0 \\ d_1 & 0 & 0 & 0 \\ -c & -d & 0 & -1 \\ -d & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_1 & d_1 \\ d_1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = d_1^2.$$

$$\mathcal{A}_2 \cdot \mathcal{A}_4 = \begin{vmatrix} (a c_1 - a_1 c) & (a d_1 - a_1 d) & 0 & -a_1 \\ (b d_1 - b_1 d) & (c d_1 - c_1 d) & -b_1 & -c_1 \\ 0 & 0 & -c_1 & -d_1 \\ 0 & 0 & -d_1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\mathcal{A}_2 \cdot \mathcal{A}_4 = \begin{vmatrix} (a c_1) & (a d_1) \\ (b d_1) & (c d_1) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -c_1 & -d_1 \\ -d_1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Da nun  $\mathcal{A}_6 = -d_1^2$  und  $\mathcal{A}_4 = d_1^2$  ist, so folgt, dass  $\mathcal{A}_2 = -\mathcal{A}_5$  ist.

$$\mathcal{A}_2 = - \begin{vmatrix} (a c_1) & (a d_1) \\ (b d_1) & (c d_1) \end{vmatrix}. \quad (111)$$

Ebenso findet man durch Multiplication:

$$\mathcal{A}_3 \cdot \mathcal{A}_4 = \begin{vmatrix} (a d_1 - a_1 d) + (b c_1 - b_1 c), & (b d_1 - b_1 d) - a_1 - b_1 \\ (b d_1 - b_1 d) & , & (c d_1 - c_1 d) - b_1 - c_1 \\ 0 & & 0 & -c_1 - d_1 \\ 0 & & 0 & -d_1 & 0 \end{vmatrix}.$$

$$\mathcal{A}_3 \cdot \mathcal{A}_4 = \begin{vmatrix} (a d_1) + (b c_1), & (b d_1) \\ (b d_1) & , & (c d_1) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -c_1 - d_1 \\ -d_1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Nun ist  $\mathcal{A}_8 = -d_1^2$ ,  $\mathcal{A}_4 = d_1^2$ , also  $\mathcal{A}_3 = -\mathcal{A}_7$ , oder:

$$\mathcal{A}_3 = - \begin{vmatrix} (a d_1) + (b c_1) & (b d_1) \\ (b d_1) & (c d_1) \end{vmatrix}. \quad (112)$$

Werden  $\mathcal{A}_1$  und  $\mathcal{A}_4$  zu einem Product verbunden und die entsprechenden Transformationen ausgeführt, so gewinnt man die Gleichung:

$$\begin{vmatrix} (a c_1) x + (a d_1) + (b c_1), & (a d_1) x + (b d_1) \\ (b d_1) & (c d_1) \end{vmatrix} = 0, \quad (113)$$

woraus dann  $x$  leicht zu berechnen ist.

Zwei gleiche Wurzeln einer höheren Gleichung. Discriminante. Die nachfolgenden Entwicklungen gewinnen an Einfachheit, ohne dass ihre allgemeine Gültigkeit beeinträchtigt wird, wenn wir sie an einer Gleichung von bestimmtem Grade ausführen, und wir wählen dazu die Gleichung dritten Grades:

$$f(x) = a x^3 + 3 b x^2 + 3 c x + d = 0. \quad (114)$$

Es darf wohl als bekannt vorausgesetzt werden, dass eine solche Gleichung durch 3 Wurzelwerthe befriedigt werden kann, und dass dieselben, wenn wir die Wurzeln  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  nennen, zu den Constanten der Gleichung in folgender Beziehung stehen:

$$\alpha + \beta + \gamma = -\frac{3b}{a}; \quad \beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta = \frac{3c}{a}; \quad \alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a}. \quad (115)$$

Weiter nehmen wir als erwiesen an, dass  $f(x)$  auch so geschrieben werden kann:

$$f(x) = a(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) = 0,$$

Wird nun in (114) der Coefficient eines jeden Gliedes mit dem Exponenten multiplicirt, dieser selbst aber um 1 vermindert, so

entsteht eine neue Funktion, die wir die abgeleitete nennen wollen und so heisst:

$$f'(x) = 3ax^2 + 6bx + 3c. \quad (116)$$

Es lässt sich nun nachweisen, dass diese abgeleitete Funktion auch so geschrieben werden kann:

$$f'(x) = a \{ (x - \beta)(x - \gamma) + (x - \gamma)(x - \alpha) + (x - \alpha)(x - \beta) \},$$

und dazu führen wir nur die Multiplication aus:

$$f'(x) = a \{ 3x^2 - 2(\alpha + \beta + \gamma)x + \beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta \}. \quad (117)$$

Nach Substitution der Werthe aus (115) lässt sich die Uebereinstimmung der beiden Werthe für  $f'(x)$  sofort übersehen.

Werden nun 2 Wurzelwerthe gleich, z. B.  $\gamma = \alpha$ , so nennen wir  $\alpha$  eine doppelte Wurzel der Gleichung  $f(x) = 0$ . Die beiden Funktionen gewinnen alsdann folgende Gestalt: —

$$f(x) = a(x - \alpha)^2(x - \beta) = 0$$

$$f'(x) = a(x - \alpha)(3x - \alpha - 2\beta),$$

und wir erkennen daraus, dass die Doppelwurzel  $\alpha$  auch die Gleichung  $f'(x) = 0$  befriedigen, also auch Wurzel von:

$$\frac{1}{3}f'(x) = ax^2 + 2bx + c = 0 \quad (118)$$

sein muss. Die Bedingung für die Existenz einer Doppelwurzel fällt hiernach zusammen mit derjenigen für das Vorhandensein einer gemeinsamen Wurzel in  $f(x) = 0$  und  $\frac{1}{3}f'(x) = 0$ , und hiermit ist diese Aufgabe auf die vorhergehende zurückgeführt. Wird (118) mit  $x$  multiplicirt und dann von (114) abgezogen, so hat man die 2 Gleichungen:

$$\begin{aligned} bx^2 + 2cx + d &= 0 \\ ax^2 + 2bx + c &= 0, \end{aligned} \quad (119)$$

die eine gemeinsame Wurzel haben, wenn:

$$\mathcal{A}_1 = \begin{vmatrix} b & 2c & d & 0 \\ 0 & b & 2c & d \\ a & 2b & c & 0 \\ 0 & a & 2b & c \end{vmatrix} = 0. \quad (120)$$

Wie früher, multipliciren wir  $\mathcal{A}_1$  mit einer weiteren Determinante:

$$\mathcal{A}_2 = \begin{vmatrix} 2b & c & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 \\ -2c & -d & 0 & -1 \\ -d & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2b & c \\ c & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = c^2.$$

Man findet:

$$\mathcal{A}_1 \cdot \mathcal{A}_2 = \begin{vmatrix} (2b^2 - 2ac) & (bc - ad) & 0 & -a \\ (bc - ad) & (2c^2 - 2bd) & -a & -2b \\ 0 & 0 & -2b & -c \\ 0 & 0 & -c & 0 \end{vmatrix}.$$

$$\mathcal{A}_1 \cdot \mathcal{A}_2 = \begin{vmatrix} (2b^2 - 2ac) & (bc - ad) \\ (bc - ad) & (2c^2 - 2bd) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -2b & -c \\ -c & 0 \end{vmatrix},$$

oder, weil  $\mathcal{A}_2 = c^2$  und die zweite Determinante des vorstehenden Produktes  $-c^2$  ist, so folgt:

$$\mathcal{A}_1 = - \begin{vmatrix} (2b^2 - 2ac) & (bc - ad) \\ (bc - ad) & (2c^2 - 2bd) \end{vmatrix}. \quad (121)$$

Verschwindet  $\mathcal{A}_1$ , so besitzt  $f(x) = 0$  eine zweifache Wurzel.

Um diese Doppelwurzel zu ermitteln, gibt man den Gleichungen (119) folgende Form:

$$(bx + 2c)x + d = 0$$

$$(ax + 2b)x + c = 0,$$

und findet aus der Determinante:

$$\begin{vmatrix} (bx + 2c) & d \\ (ax + 2b) & c \end{vmatrix} = 0$$

für  $x$  den folgenden Werth:

$$x = \frac{2(bd - c^2)}{(bc - ad)}.$$

