DÉVELOPPEMENT

DES

FONCTIONS D'UN NOMBRE QUELCONQUE DE VARIABLES INDÉPENDANTES

A L'AIDE D'AUTRES FONCTIONS DE CES MÊMES VARIABLES

DÉRIVÉES DES FONCTIONS DE FONCTIONS

PAR

CH. LAGRANGE

ASTRONOME A L'OBSERVATOIRE ROYAL DE BRUXELLES

(Présenté à la Classe des sciences le 11 octobre 1884.)

Opis nr 47552

(Extrait des *Mémoires couronnés et des Mémoires des savants étrangers*, publiés par l'Académie royale de Belgique, tome XLVIII, in-4°. — 1885.)

DÉVELOPPEMENT

DES

FONCTIONS D'UN NOMBRE QUELCONQUE DE VARIABLES INDÉPENDANTES

A L'AIDE D'AUTRES FONCTIONS DE CES MÊMES VARIABLES

Soit $U = F(x_1 x_2 \ldots x_m)$ une fonction des m variables indépendantes $x_1 x_2 \ldots x_m$;

$$V_1 = \varphi_1(x_1 x_2 \ldots x_m), \quad V_2 = \varphi_2(x_1 x_2 \ldots x_m), \quad \ldots, \quad V_n = \varphi_n(x_1 x_2 \ldots x_m)$$

étant des fonctions de ces mêmes variables, on demande de développer $F(x_1 x_2 \ldots x_m)$ sous la forme

$$(1) \quad . \quad . \quad . \quad F(x_1 x_2 \ldots x_m) = a_0 + a_1\varphi_1(x_1 x_2 \ldots x_m) + \cdots + a_n\varphi_n(x_1 x_2 \ldots x_m) + R,$$

$a_0, a_1, \ldots, a_n$ étant des coefficients constants et R un reste fonction de $x_1 x_2 \ldots x_m$.

Solution. — I. Posons

$$\begin{aligned} x_1 &= b_1 + h_1, \\ x_2 &= b_2 + h_2, \\ &\ldots\ldots \\ x_m &= b_m + h_m. \end{aligned}$$

Soit $\Psi(x_1 x_2 \ldots x_m a_0 a_1 \ldots a_p a_{p+1}) = W$ une fonction de $x_1 x_2 \ldots x_m$ contenant les $p + 2$ paramètres arbitraires $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_p, a_{p+1}$, et déterminons-les par les conditions suivantes :

$$(2) \quad w = 0, \quad dw = 0, \quad d^2w = 0, \ldots \, d^s w = 0, \quad W_{(x_1 = b_1 + h_1,\, x_2 = b_2 + h_2, \ldots\, x_m = b_m + h_m)} = 0,$$

la minuscule w indiquant qu'après les différentiations, il faut faire $x_1 = b_1$, $x_2 = b_2$, ..., $x_m = b_m$. (s est avec p dans une certaine relation définie ainsi que nous allons le voir.)

On a pour un nombre général s, en se servant d'une notation connue,

$$d^s\mathrm{W} = \left(\frac{d\mathrm{W}}{dx_1}dx_1 + \frac{d\mathrm{W}}{dx_2}dx_2 + \cdots + \frac{d\mathrm{W}}{dx_m}dx_m\right)^{(s)}.$$

Pour que $d^s w = 0$, quels que soient $dx_1, dx_2, \ldots, dx_m$, chacun des termes du développement symbolique précédent, qui sont en nombre $\frac{m.m+1\ldots m+s-1}{1.\ 2\ \ldots\ s} = \mathrm{M}_s$, doit être nul pour $x_1 = b_1$, $x_2 = b_2$, ..., $x_m = b_m$, ce qui exige que l'on ait M_s conditions de la forme

$$(3)\quad \ldots\ldots\ldots \frac{d^s w}{dx_1^{s_1}\, dx_2^{s_2} \ldots dx_m^{s_m}} = 0 \quad (s_1 + s_2 + \cdots + s_m = s).$$

En faisant successivement $s = 1, 2, 3, \ldots, s$, on voit que les conditions générales (2) renferment $\mathrm{M}_1 + \mathrm{M}_2 + \ldots + \mathrm{M}_s + 2$ conditions distinctes et exigent que l'on prenne pour p les valeurs de la suite

$$p_1 = \mathrm{M}_1,\quad p_2 = \mathrm{M}_1 + \mathrm{M}_2,\quad p_3 = \mathrm{M}_1 + \mathrm{M}_2 + \mathrm{M}_3,\quad \ldots,\quad p_s = \mathrm{M}_1 + \mathrm{M}_2 + \cdots + \mathrm{M}_s,$$

c'est-à-dire, en général,

$$(4)\quad \ldots\ldots\ p_s = \frac{m}{1} + \frac{m\,.\,m+1}{1\,.\,2} + \cdots + \frac{m\,.\,m+1\ldots m+s-1}{1\,.\,2\ldots s}.$$

S=1, S=2 S=3

Pour $m = 1$ on aura donc $p = 1,\ 2,\ 3, \ldots$

» $m = 2$ » $p = 2,\ 5,\ 9, \ldots$

» $m = 3$ » $p = 3,\ 9,\ 19, \ldots$ etc.

II. Supposons $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{p+1}$ déterminés conformément aux conditions précédentes. Si l'on donne à $x_1, x_2, \ldots, x_m$ les déterminations particulières

$$(5)\quad \ldots\ldots\ldots\ x_1 = \chi_1(t),\quad x_2 = \chi_2(t),\quad \ldots,\quad x_m = \chi_m(t),$$

t étant une nouvelle variable et $\chi_1(t), \chi_2(t), \dots, \chi_m(t)$ étant des fonctions soumises à la condition que, pour deux valeurs déterminées de t, 0 et 1 par exemple, on ait

$$\chi_1(0) = b_1, \quad \chi_2(0) = b_2, \quad \dots, \quad \chi_m(0) = b_m,$$
$$\chi_1(1) = b_1 + h_1, \quad \chi_2(1) = b_2 + h_2, \quad \dots, \quad \chi_m(1) = b_m + h_m,$$

la fonction $\Psi(x_1 x_2 \dots x_m a_0 a_1 \dots a_{p+1}) = \mathrm{W}$ sera une fonction de t que nous désignerons par $w^{(t)}$. En vertu des conditions (2) on aura donc

$$w^{(t)_0} = 0, \quad w'^{(t)_0} = 0, \quad w''^{(t)_0} = 0, \quad \dots, \quad w^{s(t)_0} = 0, \quad w^{(1)} = 0,$$

$w^{s(t)_0}$ indiquant qu'après avoir pris la dérivée $s^{\text{ième}}$ de $w^{(t)}$, il faut y faire $t = 0$.

Si donc la fonction de t, $w^{(t)}$, et ses ν premières dérivées $(\nu \overline{<} s+1)$ sont finies et continues de $t = 0$ à $t = 1$, on aura

$$(6) \quad \dots\dots\dots \quad w^{\nu(t)\theta} = 0 \, (0 < \theta < 1)$$

et l'on pourra substituer à la dernière des conditions (2), savoir : $\mathrm{W}_{(x_1 = b_1 + h_1,\ x_2 = b_2 + h_2,\ \dots\ x_m = b_m + h_m)} = 0$, cette nouvelle condition résultante (6).

III. Si maintenant, pour simplifier l'écriture, on désigne par $(s)_1, (s)_2, \dots, (s)_{\mathrm{M}_s}$ les M_s systèmes des valeurs de $s_1, s_2, \dots, s_m$ dans les conditions (3), et par $w^{(s)_1}, w^{(s)_2}, \dots w^{(s)_{\mathrm{M}_s}}$ l'opération

$$\frac{d^s w}{dx_1^{s_1}\, dx_2^{s_2} \dots dx_m^{s_m}},$$

pour ces différents systèmes de valeurs, les conditions générales (2) (développées, comme il vient d'être dit, en (3) et (6)) pourront s'écrire

$$(7) \quad \dots \left\{ \begin{array}{l} w = 0, \quad w^{(1)_1} = 0, \quad w^{(1)_2} = 0, \quad \dots, \quad w^{(1)_{\mathrm{M}_1}} = 0, \quad w^{\nu(t)\theta} = 0, \\ \qquad w^{(2)_1} = 0, \quad w^{(2)_2} = 0, \quad \dots, \quad w^{(2)_{\mathrm{M}_2}} = 0, \\ \qquad \dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad w^{(s)_1} = 0, \quad w^{(s)_2} = 0, \quad \dots, \quad w^{(s)_{\mathrm{M}_s}} = 0; \end{array} \right.$$

$w^{\nu(t)\theta}$ indique qu'il faut prendre la dérivée $\nu^{\text{ième}}$ de $w^{(t)}$ et y faire $t = \theta$.

IV. Posons :

$$\begin{aligned} \mathrm{W} &= \psi(x_1x_2 \dots x_m a_0 a_1 \dots a_{p_s} a_{p_s+1}) \\ &= \mathrm{F}(x_1x_2 \dots x_m) - \big[a_0\varphi_0(x_1x_2 \dots x_m) + a_1\varphi_1(x_1x_2 \dots x_m) + \dots + a_n\varphi_n(x_1x_2 \dots x_m) + \\ &\qquad + a_{n+1}\varphi_{n+1}(x_1x_2 \dots x_m) + \dots + a_{p_s+1}\varphi_{p_s+1}(x_1x_2 \dots x_m)\big] \\ &= \mathrm{U} - \big(a_0\mathrm{V}_0 + a_1\mathrm{V}_1 + \dots + a_n\mathrm{V}_n + a_{n+1}\mathrm{V}_{n+1} + \dots + a_{p_s+1}\mathrm{V}_{p_s+1}\big), \end{aligned}$$

$\varphi_0 = \mathrm{V}_0$, $\varphi_{n+1} = \mathrm{V}_{n+1}$, $\varphi_{n+2} = \mathrm{V}_{n+2}$, ..., $\varphi_{p_s+1} = \mathrm{V}_{p_s+1}$, étant de nouvelles fonctions de $x_1, x_2, \dots, x_m$.

En indiquant par les minuscules $u, v_0, v_1, \dots, v_{p_s+1}$ qu'après avoir pris les dérivées, il faut faire $x_1 = b_1, x_2 = b_2, \dots, x_m = b_m$, et désignant par $u^{(t)}, v_0^{(t)}, v_1^{(t)}, \dots, v_{p_s+1}^{(t)}$ les fonctions de t qui résultent de la substitution des expressions (5) dans $\mathrm{U}, \mathrm{V}_0, \mathrm{V}_1, \dots, \mathrm{V}_{p_s+1}$, les équations (7) prendront la forme

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} u &= a_0v_0 + a_1v_1 + \dots + a_{p_s+1}v_{p_s+1} \\ u^{(1)_1} &= a_0v_0^{(1)_1} + a_1v_1^{(1)_1} + \dots + a_{p_s+1}v_{p_s+1}^{(1)_1} \\ u^{(1)_2} &= a_0v_0^{(1)_2} + a_1v_1^{(1)_2} + \dots + a_{p_s+1}v_{p_s+1}^{(1)_2} \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \\ u^{(1)_{M_1}} &= a_0v_0^{(1)_{M_1}} + a_1v_1^{(1)_{M_1}} + \dots + a_{p_s+1}v_{p_s+1}^{(1)_{M_1}} \\ u^{(2)_1} &= a_0v_0^{(2)_1} + a_1v_1^{(2)_1} + \dots + a_{p_s+1}v_{p_s+1}^{(2)_1} \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \\ u^{(2)_{M_2}} &= a_0v_0^{(2)_{M_2}} + a_1v_1^{(2)_{M_2}} + \dots + a_{p_s+1}v_{p_s+1}^{(2)_{M_2}} \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \\ u^{(s)_{M_s}} &= a_0v_0^{(s)_{M_s}} + a_1v_1^{(s)_{M_s}} + \dots + a_{p_s+1}v_{p_s+1}^{(s)_{M_s}} \\ u^{\nu(t)\theta} &= a_0v_0^{\nu(t)\theta} + a_1v_1^{\nu(t)\theta} + \dots + a_{p_s+1}v_{p_s+1}^{\nu(t)\theta}. \end{aligned} \right.$$

Si $\mathrm{V}_{p_s+1} = \varphi_{p_s+1}(x_1x_2 \dots x_m)$ est telle que l'on ait

$$(9) \quad v_{p_s+1} = 0, \quad v_{p_s+1}^{(1)_1} = 0, \quad \dots, \quad v_{p_s+1}^{(1)_{M_1}} = 0, \quad v_{p_s+1}^{(2)_1} = 0, \quad \dots, \quad v_{p_s+1}^{(2)_{M_2}} = 0, \quad \dots, \quad v_{p_s+1}^{(s)_{M_s}} = 0,$$

(il y a une infinité de telles fonctions; la plus simple serait

$(x_1 - b_1)^{(s+1)_1}(x_2 - b_2)^{(s+1)_2} \dots (x_m - b_m)^{(s+1)_m}$ où $(s+1)_1 + (s+1)_2 + \dots + (s+1)_m = s+1$), on aura, de $\mu = 0$ à $\mu = p_s$, en désignant par p_{k_μ} le nombre de la suite $p_1, p_2, p_3, \ldots$ immédiatement inférieur à μ,

$$(10) \quad a_\mu = \frac{\left| v_0^0 v_1^{(1)_1} v_2^{(1)_2} \ldots v_{p_1}^{(1)_{M_1}} v_{p_1+1}^{(2)_1} v_{p_1+2}^{(2)_2} \ldots u^{(k_\mu+1)_{\mu - p_{k_\mu}}} \ldots v_{p_s-1}^{(s)_{M_s-1}} v_{p_s}^{(s)_{M_s}} \right|}{\left| v_0^0 v_1^{(1)_1} v_2^{(1)_2} \ldots v_{p_1}^{(1)_{M_1}} v_{p_1+1}^{(2)_1} v_{p_1+2}^{(2)_2} \ldots v_\mu^{(k_\mu+1)_{\mu - p_{k_\mu}}} \ldots v_{p_s-1}^{(s)_{M_s-1}} v_{p_s}^{(s)_{M_s}} \right|} \; (\mu = 0, 1, 2, \ldots p_s),$$

et, pour $\mu = p_s + 1$,

$$(11) \quad a_{p_s+1} = \frac{\left| v_0^0 v_1^{(1)_1} v_2^{(1)_2} \ldots v_{p_1}^{(1)_{M_1}} v_{p_1+1}^{(2)_1} \ldots v_{p_s-1}^{(s)_{M_s-1}} v_{p_s}^{(s)_{M_s}} u^{\nu(t)_\theta} \right|}{\left| v_0^0 v_1^{(1)_1} v_2^{(1)_2} \ldots v_{p_1}^{(1)_{M_1}} v_{p_1+1}^{(2)_1} \ldots v_{p_s-1}^{(s)_{M_s-1}} v_{p_s}^{(s)_{M_s}} \right| v_{p_s+1}^{\nu(t)_\theta}}.$$

De plus, considérant les fonctions $V_{n+1}, V_{n+2}, \ldots, V_{n+r}, \ldots, V_{n+(p_s-n)} = V_{p_s}$ et appelant $p_{k_{n+r}}$ le nombre de la suite $p_1, p_2, p_3, \ldots$ immédiatement inférieur à $n + r$, si l'on a

$$v_{n+r} = 0, \quad dv_{n+r} = 0, \quad d^2 v_{n+r} = 0, \quad \ldots, \quad d^{k_{n+r}} v_{n+r} = 0$$

et

$$v_{n+r}^{(k_{n+r}+1)_1} = 0, \quad v_{n+r}^{(k_{n+r}+1)_2} = 0, \quad \ldots, \quad v_{n+r}^{(k_{n+r}+1)_{n+r-p_{k_{n+r}}-1}} = 0, \quad (r = 1, 2, 3, \ldots p_s - n),$$

[ce qui arrivera en prenant, par exemple, la forme la plus simple

$$V_{n+r} = (x_1 - b_1)^{(k_{n+r}+1)_1} (x_2 - b_2)^{(k_{n+r}+1)_2} \ldots (x_m - b_m)^{(k_{n+r}+1)_m},$$

où les exposants $(k_{n+r} + 1)_1, (k_{n+r} + 1)_2, \ldots, (k_{n+r} + 1)_m$ soumis à la condition

$$(k_{n+r} + 1)_1 + (k_{n+r} + 1)_2 + \cdots + (k_{n+r} + 1)_m = k_{n+r} + 1$$

forment précisément le système $(k_{n+r} + 1)_{n+r-p_{k_{n+r}}}$ (voy. § III)], on aura par la formule (10), de $\mu = 0$ à $\mu = n$,

$$(12) \quad a_\mu = \frac{\left| v_0^0 v_1^{(1)_1} v_2^{(1)_2} \ldots v_{p_1}^{(1)_{M_1}} v_{p_1+1}^{(2)_1} \ldots u^{(k_\mu+1)_{\mu - p_{k_\mu}}} \ldots v_n^{(k_n+1)_{n-p_{k_n}}} \right|}{\left| v_0^0 v_1^{(1)_1} v_2^{(1)_2} \ldots v_{p_1}^{(1)_{M_1}} v_{p_1+1}^{(2)_1} \ldots v_\mu^{(k_\mu+1)_{\mu - p_{k_\mu}}} \ldots v_n^{(k_n+1)_{n-p_{k_n}}} \right|} \; (\mu = 0, 1, 2, \ldots n),$$

de $\mu = n + 1$ à $\mu = p_s = n + (p_s - n)$,

$$(13)\quad a_{n+r} = \frac{\left| v_0^0 v_1^{(1)_1} v_2^{(1)_2} \dots v_{p_1}^{(1)_{M_1}} v_{p_1+1}^{(2)_1} \dots v_n^{(k_n+1)_{n-p_{k_n}}} v_{n+1}^{(k_{n+1}+1)_{n+1-p_{k_{n+1}}}} \dots v_{n+r-1}^{(k_{n+r-1}+1)_{n+r-1-p_{k_{n+r-1}}}} u^{(k_{n+r}+1)_{n+r-p_{k_{n+r}}}} \right|}{\left| v_0^0 v_1^{(1)_1} v_2^{(1)_2} \dots v_{p_1}^{(1)_{M_1}} v_{p_1+1}^{(2)_1} \dots v_n^{(k_n+1)_{n-p_{k_n}}} \right| v_{n+1}^{(k_{n+1}+1)_{n+1-p_{k_{n+1}}}} \dots v_{n+r-1}^{(k_{n+r-1}+1)_{n+r-1-p_{k_{n+r-1}}}} v_{n+r}^{(k_{n+r}+1)_{n+r-p_{k_{n+r}}}}} \quad (r = 1, 2, \dots, p_s - n),$$

et enfin, pour $\mu = p_s + 1$,

$$(14)\qquad a_{p_s+1} = \frac{\left| v_0^0 v_1^{(1)_1} v_2^{(1)_2} \dots v_{p_1}^{(1)_{M_1}} v_{p_1+1}^{(2)_1} \dots v_n^{(k_n+1)_{n-p_{k_n}}} v_{n+1}^{(k_{n+1}+1)_{n+1-p_{k_{n+1}}}} \dots v_{p_s}^{(s)_{m_s}} u^{\nu(t)_\theta} \right|}{\left| v_0^0 v_1^{(1)_1} v_2^{(1)_2} \dots v_{p_1}^{(1)_{M_1}} v_{p_1+1}^{(2)_1} \dots v_n^{(k_n+1)_{n-p_{k_n}}} \right| v_{n+1}^{(k_{n+1}+1)_{n+1-p_{k_{n+1}}}} \dots v_{p_s}^{(k_{p_s}+1)_{p_s-p_{s-1}}} v_{p_s+1}^{\nu(t)_\theta}}.$$

Les valeurs précédentes étant supposées finies et déterminées et les fonctions $u^{(t)}$, $v_0^{(t)}$, $v_1^{(t)}, \dots, v_{p_s+1}^{(t)}$ étant finies et continues ainsi que leurs ν premières dérivées de $t = 0$ à $t = 1$, on voit, en récapitulant la question, que la formule (1) sera exacte de $x_1 = b_1$, $x_2 = b_2, \dots, x_m = b_m$ à $x_1 = b_1 + h_1$, $x_2 = b_2 + h_2, \dots, x_m = b_m + h_m$; les $n + 1$ coefficients $a_0, a_1, \dots, a_n$ seront donnés par (12) (où $v_0 = 1$) et ne dépendront ainsi que des fonctions proposées $F, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$; et, p_s étant le nombre de la suite $p_1, p_2, p_3, \dots$ immédiatement supérieur à n, le reste R sera donné par la formule

$$R = a_{n+1}V_{n+1} + a_{n+2}V_{n+2} + \dots + a_{p_s}V_{p_s} + a_{p_s+1}V_{p_s+1},$$

$V_{n+1}, V_{n+2}, \dots, V_{p_s}, V_{p_s+1}$ étant choisis comme il est dit ci-dessus; $a_{n+1}, a_{n+2}, \dots, a_{p_s}$ sont donnés par (13) et sont indépendants de $x_1, x_2, \dots, x_m$; a_{p_s+1} donné par (14) en est seul dépendant.

Remarque. — Si l'on fait

$$V_{p_s+1} = (x_1 - b_1)^{q_1}(x_2 - b_2)^{q_2} \dots (x_m - b_m)^{q_m}, \quad (q_1 + q_2 + \dots + q_m = s + 1) \quad \nu = s + 1$$

et

$$x_1 = \chi_1(t) = b_1 + h_1 t = l_1, \quad x_2 = \chi_2(t) = b_2 + h_2 t = l_2, \quad \dots, \quad x_m = \chi_m(t) = b_m + h_m t = l_m,$$

le terme de R qui contient le nombre déterminé mais inconnu θ, savoir : $a_{p_s+1}V_{p_s+1}$, se simplifie.

On a, en effet, alors

$$v_{p_s+1}^{(t)} = \left(h_1^{q_1} h_2^{q_2} \dots h_m^{q_m}\right) t^{s+1}$$

et

$$v_{p_s+1}^{\nu(t)\theta} = v_{p_s+1}^{(s+1)(t)\theta} = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \dots s+1 \,.\, \left(h_1^{q_1} h_2^{q_2} \dots h_m^{q_m}\right).$$

Par conséquent

$$(14') \quad a_{p_s+1} \mathrm{V}_{p_s+1} = \frac{1}{1.2.3\dots s+1} \frac{\left| v_0^0 v_1^{(1)_1} v_2^{(1)_2} \dots v_{p_1}^{(1)_{\mathrm{M}_1}} v_{p_1+1}^{(2)_1} \dots v_n^{(k_n+1)_{n-p_{k_n}}} v_{n+1}^{(k_{n+1}+1)_{n+1-p_{k_{n+1}}}} \dots v_{p_s}^{(s)_{\mathrm{M}_s}} u^{(s+1)(t)_\theta} \right|}{\left| v_0^0 v_1^{(1)_1} v_2^{(1)_2} \dots v_{p_1}^{(1)_{\mathrm{M}_1}} v_{p_1+1}^{(2)_1} \dots v_n^{(k_n+1)_{n-p_{k_n}}} \right| v_{n+1}^{(k_{n+1}+1)_{n+1-p_{k_{n+1}}}} \dots v_{p_s}^{(s)_{\mathrm{M}_s}}};$$

on aura d'ailleurs, comme cela est connu,

$$u^{(s+1)(t)\theta} = \left(\frac{d\mathrm{U}}{dl_1} h_1 + \frac{d\mathrm{U}}{dl_2} h_2 + \dots + \frac{d\mathrm{U}}{dl_m} h_m\right)^{(s+1)}, \quad (x_1 = b_1 + \theta h_1,\ x_2 = b_2 + \theta h_2,\ \dots\ x_m = b_m + \theta h_m),$$

et des formules semblables pour les fonctions V.

Cas particulier. — Si l'on pose

$$\mathrm{V}_\mu = (x_1 - b_1)^{q_1} (x_2 - b_2)^{q_2} \dots (x_m - b_m)^{q_m} f_\mu (x_1 x_2 \dots x_m), \quad (\mu = 1, 2, \dots n),$$

$q_1 q_2 \dots q_m$ étant soumis à la condition $q_1 + q_2 + \dots + q_m = k_\mu + 1$ et formant précisément le système de valeurs $(k_\mu + 1)_{\mu - p_{k_\mu}}$, on aura d'abord $v_\mu = 0$, $dv_\mu = 0$, $d^2 v_\mu = 0, \dots, d^{k_\mu} v_\mu = 0$ et ensuite $v_\mu^{(k_\mu+1)r} = 0$ pour toutes les valeurs de $r = 1, 2, \dots \mu - p_{k_\mu} - 1, \mu - p_{k_\mu}, \mu - p_{k_\mu} + 1, \dots p_{k_\mu+1} - p_{k_\mu}$, autres que $\mu - p_{k_\mu}$.

Il en résultera par les formules (12) et (13), et en se reportant aux équations fondamentales (8), de $\mu = 0$ à $\mu = p_s$,

$$(15) \quad a_\mu = \frac{\left| v_0^0 v_1^{(1)_1} v_2^{(1)_2} \dots v_{p_1}^{(1)_{\mathrm{M}_1}} v_{p_1+1}^{(2)_1} \dots v_{p_{k_\mu}}^{(k_\mu)_{\mathrm{M}_{k_\mu}}} u^{(k_\mu+1)_{\mu - p_{k_\mu}}} \right|}{v_0^0 v_1^{(1)_1} v_2^{(1)_2} \dots v_{p_1}^{(1)_{\mathrm{M}_1}} v_{p_1+1}^{(2)_1} \dots v_{p_{k_\mu}}^{(k_\mu)_{\mathrm{M}_{k_\mu}}} v_\mu^{(k_\mu+1)_{\mu - p_{k_\mu}}}} \quad (\mu = 0, 1, 2, \dots n, n+1, \dots p_s),$$

et

$$(16) \quad \ldots\ldots \quad a_{p_s+1} = \frac{\left| v_0^0 v_1^{(1)_1} v_2^{(1)_2} \ldots v_{p_1}^{(1)M_1} v_{p_1+1}^{(2)_1} \ldots v_{p_s}^{(s)M_s} u^{\nu(t)\theta} \right|}{v_0^0 v_1^{(1)_1} v_2^{(1)_2} \ldots v_{p_1}^{(1)M_1} v_{p_1+1}^{(2)_1} \ldots v_{p_s}^{(s)M_s} v_{p_s+1}^{\nu(t)\theta}},$$

ou

$$(16') \quad \ldots\ldots \quad a_{p_s+1} = \frac{\left| v_0^0 v_1^{(1)_1} v_2^{(1)_2} \ldots v_{p_s}^{(s)M_s} u^{(s+1)(t)\theta} \right|}{1 \,.\, 2 \ldots s+1 \left(h_1^{q_1} h_2^{q_2} \ldots h_m^{q_m} \right) v_0^0 v_1^{(1)_1} \ldots v_{p_s}^{(s)M_s}}.$$

On aura donc alors, en posant toujours $v_0 = 1$, la formule

$$(17) \quad U = u + \frac{u^{(1)_1}}{v_1^{(1)_1}} V_1 + \frac{u^{(1)_2}}{v_2^{(1)_2}} V_2 + \cdots + \frac{u^{(1)M_1}}{v_{p_1}^{(1)M_1}} V_{p_1} + \frac{\left| v_1^{(1)_1} v_2^{(1)_2} \ldots v_{p_1}^{(1)M_1} u^{(2)_1} \right|}{v_1^{(1)_1} v_2^{(1)_2} \ldots v_{p_1}^{(1)M_1} v_{p_1+1}^{(2)_1}} V_{p_1+1} + \frac{\left| v_1^{(1)_1} v_2^{(1)_2} \ldots v_{p_1}^{(1)M_1} u^{(2)_2} \right|}{v_1^{(1)_1} v_2^{(1)_2} \ldots v_{p_1}^{(1)M_1} v_{p_1+2}^{(2)_2}} V_{p_1+2} + \cdots$$

$$\cdots + \frac{\left| v_1^{(1)_1} v_2^{(1)_2} \ldots v_{p_1}^{(1)M_1} v_{p_1+1}^{(2)_1} \ldots v_{p_{s-1}}^{(s-1)M_{s-1}} u^{(s)M_s} \right|}{v_1^{(1)_1} v_2^{(1)_2} \ldots v_{p_1}^{(1)M_1} v_{p_1+1}^{(2)_1} \ldots v_{p_{s-1}}^{(s-1)M_{s-1}} v_{p_s}^{(s)M_s}} V_{p_s} + \frac{\left| v_1^{(1)_1} v_2^{(1)_2} \ldots v_{p_1}^{(1)M_1} v_{p_1+1}^{(2)_1} \ldots v_{p_s}^{(s)M_s} u^{(s+1)(t)\theta} \right|}{v_1^{(1)_1} v_2^{(1)_2} \ldots v_{p_1}^{(1)M_1} v_{p_1+1}^{(2)_1} \ldots v_{p_s}^{(s)\overline{M}_s} 1^{s+1|1}},$$

$$(A) \quad \ldots \quad \left\{ \begin{array}{lll}
V_1 \text{ étant une fonction qui s'annule avec le facteur } x_1 - b_1, & & \\
V_2, \text{ avec le facteur } x_2 - b_2, & & \\
\ldots\ldots\ldots & & \\
V_{p_1}, & \text{avec le facteur} & x_m - b_m, \\
V_{p_1+1}, & \text{»} & (x_1 - b_1)^2, \\
V_{p_1+2}, & \text{»} & (x_1 - b_1)(x_2 - b_2), \\
V_{p_1+3}, & \text{»} & (x_1 - b_1)(x_3 - b_3), \\
\ldots\ldots\ldots & & \\
V_{p_{s-1}+1}, \text{ avec le facteur } (x_1 - b_1)^s, & & \\
V_{p_{s-1}+2}, & \text{»} & (x_1 - b_1)^{s-1}(x_2 - b_2), \\
\ldots\ldots\ldots & & \\
V_{p_s}, \text{ avec le facteur } (x_m - b_m)^s. & &
\end{array} \right.$$

Il est évident que dans ces fonctions les facteurs indiqués ne doivent pas nécessairement être mis en évidence. Telles seraient, par exemple, les fonctions

$$V_1 = \mathrm{l}\left[\alpha(x_1 - b_1) + 1\right], \quad V_2 = \sin\beta(x_2 - b_2), \text{ etc., etc.,}$$

α et β pouvant d'ailleurs être fonctions de $x_1 x_2 \ldots x_m$.

Dans le cas particulier où les fonctions V_1, V_2, ..., V_p, sont simplement égales à ces facteurs eux-mêmes, la formule (17) reproduit l'extension connue de la formule de Taylor au cas de plusieurs variables.

Voici, pour le calcul des coefficients, les expressions réduites des coefficients des $\frac{m}{1} + \frac{m \,.\, m+1}{1 \,.\, 2} = p_2$ premiers termes suivant le terme constant u, c'est-à-dire des termes contenant des facteurs du premier et du second degré de la forme $(x_k - b_k)$, $(x_k - b_k)^2$, $(x_k - b_k)(x_{k'} - b_{k'})$:

$$\left.\begin{matrix} k \\ k' \end{matrix}\right\} = 1, 2, 3, \ldots m.$$

Le coefficient de la fonction V_{k_1} qui contient le facteur $x_k - b_k$ est

$$(18) \quad \ldots\ldots\ldots \quad a_{k_1} = \frac{\dfrac{du}{dx_k}}{\dfrac{dv_{k_1}}{dx_k}}.$$

Le coefficient de la fonction V_{k_2} qui contient le facteur $(x_k - b_k)^2$ est

$$(19) \quad \ldots\ldots\ldots \quad a_{k_2} = \frac{\dfrac{d^2u}{dx_k^2}}{\dfrac{d^2v_{k_2}}{dx_k^2}} - \frac{\dfrac{d^2v_{k_1}}{dx_k^2} \cdot \dfrac{du}{dx_k}}{\dfrac{d^2v_{k_2}}{dx_k^2} \cdot \dfrac{dv_{k_1}}{dx_k}}.$$

Le coefficient de la fonction $V_{kk'}$ qui contient le facteur $(x_k - b_k)(x_{k'} - b_{k'})$ est

$$(20) \quad \ldots\ldots \quad a_{kk'} = \frac{\dfrac{d^2u}{dx_k dx_{k'}}}{\dfrac{d^2v_{kk'}}{dx_k dx_{k'}}} - \frac{\dfrac{d^2v_{k_1}}{dx_k dx_{k'}} \cdot \dfrac{du}{dx_k}}{\dfrac{d^2v_{kk'}}{dx_k dx_{k'}} \cdot \dfrac{dv_{k_1}}{dx_k}} - \frac{\dfrac{d^2v_{k'_1}}{dx_k dx_{k'}} \cdot \dfrac{du}{dx_{k'}}}{\dfrac{d^2v_{kk'}}{dx_k dx_{k'}} \cdot \dfrac{dv_{k'_1}}{dx_{k'}}}.$$

EXPRESSION GÉNÉRALE

DES

DÉRIVÉES DES FONCTIONS DE FONCTIONS

On peut déduire facilement de la formule (17) l'expression des dérivées de U, fonction de fonctions des m variables indépendantes $x_1\ x_2\ \ldots\ x_m$, de la forme

$$U = F(\Psi_1 x_1\ \ \Psi_2 x_2 \ldots \Psi_m x_m).$$

En prenant pour $V_1 V_2 \ldots$ les facteurs (A) eux-mêmes et développant la fonction U de $x_1 x_2\ \ldots\ x_m$ par la formule (17), le coefficient de $(x_1 - b_1)^{q_1}(x_2 - b_2)^{q_2} \ldots (x_m - b_m)^{q_m}$, où $q_1 + q_2 + \ldots + q_m = s$, sera

$$(21)\ \ldots\ldots\quad \frac{\dfrac{d^s u}{db_1^{q_1} db_2^{q_2} \ldots db_m^{q_m}}}{1\,.\,2 \ldots q_1 \times 1\,.\,2 \ldots q_2 \times \cdots \times 1\,.\,2 \ldots q_m}.$$

Si l'on pose

$$\Psi_1 x_1 = y_1,\quad \Psi_2 x_2 = y_2 \ldots,\quad \Psi_m x_m = y_m,$$

d'où

$$x_1 = f_1 y_1,\quad x_2 = f_2 y_2 \ldots,\quad x_m = f_m y_m,$$

et de même

$$\Psi_1 b_1 = \beta_1,\quad \Psi_2 b_2 = \beta_2\quad \ldots,\quad \Psi_m b_m = \beta_m,$$
$$b_1 = f_1 \beta_1\quad b_2 = f_2 \beta_2 \ldots,\quad b_m = f_m \beta_m,$$

et que l'on considère U comme fonction de $y_1 y_2\ \ldots\ y_m$, le coefficient de

$$(x_1 - b_1)^{q_1}(x_2 - b_2)^{q_2} \ldots (x_m - b_m)^{q_m} = (f_1 y_1 - f_1\beta_1)^{q_1}(f_2 y_2 - f_2\beta_2)^{q_2} \ldots (f_m y_m - f_m \beta_m)^{q_m}$$

sera, par la loi (15) (17), égal à

$$(22) \quad \ldots\ldots\quad \frac{\left| v_1^{(1)_1} v_2^{(1)_2} \ldots v_{p_1}^{(1)_{M_1}} v_{p_1+1}^{(2)_1} \ldots v_{p_{s-1}}^{(s-1)_{M_{s-1}}} u_y^{(s)_q} \right|}{v_1^{(1)_1} v_2^{(1)_2} \ldots v_{p_1}^{(1)_{M_1}} v_{p_1+1}^{(2)_1} \ldots v_{p_{s-1}}^{(s-1)_{M_{s-1}}} v_{p_{s_q}}^{(s)_q}},$$

en posant

$$\begin{aligned}
U_y &= F(y_1 y_2 \cdots y_m)\\
V_1 &= f_1 y_1 - f_1\beta_1\\
V_2 &= f_2 y_2 - f_2\beta_2\\
&\ldots\ldots\ldots\\
V_{p_1+1} &= (f_1 y_1 - f_1\beta_1)^2\\
V_{p_1+2} &= (f_1 y_1 - f_1\beta_1)(f_2 y_2 - f_2\beta_2)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
V_{p_{s_q}} &= (f_1 y_1 - f_1\beta_1)^{q_1}(f_2 y_2 - f_2\beta_2)^{q_2} \ldots (f_m y_m - f_m\beta_m)^{q_m},
\end{aligned}$$

les minuscules $v_1 v_2 \ldots$ indiquant qu'il faut remplacer $y_1 y_2 \ldots$ par $\beta_1\beta_2 \ldots$ et $(s)_q$ désignant l'opération $\frac{d^s}{dy_1^{q_1} dy_2^{q_2} \ldots dy_m^{q_m}}$ pour les valeurs données de $q_1 q_2 \ldots q_m$.

D'ailleurs, on peut remarquer que pour les indices généraux $(s)_q$ et p_{s_q} on a

$$v_{p_{s_q}}^{(s)_q} = 1 \,.\, 2 \ldots q_1 (f'_1\beta_1)^{q_1} \,.\, 1 \,.\, 2 \ldots q_2 (f'_2\beta_2)^{q_2} \ldots 1 \,.\, 2 \ldots q_m (f'_m\beta_m)^{q_m}.$$

En posant donc : $Q_{p_{s-1}}$ = le produit des p_{s-1} facteurs de la forme $(1^{q_1|1} 1^{q_2|1} \ldots 1^{q_m|1})$ correspondant aux p_{s-1} différents systèmes de valeurs de q_1, q_2, ... q_m désignés par

$$(1)_1 (1)_2 \ldots (1)_{m_1} (2)_1 (2)_2 \ldots (s-1)_1 (s-1)_2 \ldots (s-1)_{M_{s-1}},$$

et remarquant que la somme des exposants $q_1 q_2 \ldots q_m$ pour tous ces systèmes de valeurs est égale à

$$M_1 + 2M_2 + 3M_3 + \cdots + (s-1)M_{s-1} = M'_{s-1},$$

on voit que le dénominateur de (22) devient

$$Q_{p_{s-1}} \,.\, (1^{q_1|1} 1^{q_2|1} \ldots 1^{q_m|1}) \,.\, (f'_1\beta_1 f'_2\beta_2 \ldots f'_m\beta_m)^{\frac{M'_{s-1}}{m}} (f'_1\beta_1)^{q_1} (f'_2\beta_2)^{q_2} \ldots (f'_m\beta_m)^{q_m}.$$

L'égalité (*) des deux expressions (21) et (22) donne alors

$$\frac{d^s u}{db_1^{q_1}\, db_2^{q_2} \dots db_m^{q_m}} = \frac{\left| v_1^{(1)_1} v_2^{(1)_2} \dots v_{p_1}^{(1)_{M_1}} v_{p_1+1}^{(2)_1} \dots v_{p_{s-1}}^{(s-1)_{M_{s-1}}} u_y^{(s)_q} \right|}{Q_{p_{s-1}} \cdot (f'_1\beta_1)^{\frac{M'_{s-1}}{m}+q_1} (f'_2\beta_2)^{\frac{M'_{s-1}}{m}+q_2} \dots (f'_m\beta_m)^{\frac{M'_{s-1}}{m}+q_m}}.$$

Comme d'ailleurs les valeurs b_m et β_m de x_m, y_m, liées par la relation $f_m\beta_m = b_m$, sont arbitraires, on peut les remplacer par les variables x_m, y_m elles-mêmes. De plus, dans les opérations indiquées au numérateur de (22), les constantes $f_1\beta_1$, $f_2\beta_2$, ... disparaissent d'elles-mêmes et l'on peut remplacer $f_1y_1 - f_1\beta_1$, $f_2y_2 - f_2\beta_2$, ... par f_1y_1, f_2y_2, ... Il vient donc

$$(23) \quad \dots\dots\dots\dots \frac{d^s F(\Psi_1 x_1 \Psi_2 x_2 \dots \Psi_m x_m)}{dx_1^{q_1}\, dx_2^{q_2} \dots dx_m^{q_m}}$$

$$= \frac{\left| \frac{df_1y_1}{dy_1}\, \frac{df_2y_2}{dy_2} \dots \frac{df_my_m}{dy_m} \cdot \frac{d^2(f_1y_1)^2}{dy_1^2}\, \frac{d^2 f_1y_1 f_2y_2}{dy_1 dy_2} \dots \frac{d^2(f_my_m)^2}{dy_m^2} \cdot \frac{d^3(f_1y_1)^3}{dy_1^3} \dots \frac{d^{s-1}(f_my_m)^{s-1}}{dy_m^{s-1}} \cdot \frac{d^s F(y_1y_2\dots y_m)}{dy_1^{q_1} dy_2^{q_2} \dots dy_m^{q_m}} \right|}{Q_{p_{s-1}} \cdot \left(\frac{df_1y_1}{dy_1}\right)^{\frac{M'_{s-1}}{m}+q_1} \left(\frac{df_2y_2}{dy_2}\right)^{\frac{M'_{s-1}}{m}+q_2} \dots \left(\frac{df_my_m}{dy_m}\right)^{\frac{M'_{s-1}}{m}+q_m}}.$$

Dans le cas particulier d'une seule variable x, cette formule devient

$$(24) \quad \dots\dots \frac{d^s F\Psi x}{dx^s} = \frac{\left| \frac{d(fy)}{dy} \cdot \frac{d^2(fy)^2}{dy^2} \cdot \frac{d^3(fy)^3}{dy^3} \dots \frac{d^{s-1}(fy)^{s-1}}{dy^{s-1}} \cdot \frac{d^s Fy}{dy^s} \right|}{1^{1|1} \cdot 1^{2|1} \cdot 1^{3|1} \dots 1^{s-1|1} \left(\frac{dfy}{dy}\right)^{\frac{s.s+1}{2}}},$$

où l'on a $\Psi x = y$ et $x = fy$.

Cette dernière formule (24) est une vérification de la formule générale (23), car Wronski y était déjà arrivé par un procédé différent de celui qu'on vient de suivre. (*Philosophie de la technie,* 2e section, pp. 31, 53, 55, 110. La série des opérations indiquées dans le premier membre de la formule de Wronski revient, par un changement de variable, à l'opération $\frac{d^s}{dx^s}$) (**).

(*) Car les deux expressions de U, obtenues comme il a été dit ci-dessus à l'aide de (17), sont égales, et en égalant leurs différentes dérivées pour $x_1 = b_1$, $x_2 = b_2$, ..., $x_m = b_m$, on obtient des égalités séparées entre les coefficients des fonctions égales $(x_1 - b_1)^{q_1} (x_2 - b_2)^{q_2} \cdots (x_m - b_m)^{q_m}$ et $(f_1y_1 - f_1\beta_1)^{q_1} (f_2y_2 - f_2\beta_2)^{q_2} \dots (f_my_m - f_m\beta_m)^{q_m}$ contenues dans ces expressions. Cf. Rapport de M. le professeur Mansion, *Bull. de l'Acad.*, 3e série, t. VIII, p. 321.

(**) Wronski a en outre donné pour le même objet une autre formule, plus commode dans certains cas (*loc. cit.*, p. 67).

Comme exemple d'application de ces formules, je me propose de calculer la dérivée d'ordre s de la fonction $e^{-\frac{1}{x^2}}$.

On aura ici

$$y = \Psi x = -x^{-2}, \quad x = fy = (-y)^{-\frac{1}{2}}$$

et pour des indices généraux ρ et ν,

$$\frac{d^\nu (fy)^\rho}{dy^\nu} = \left(\frac{\rho}{2}\right)^{\nu|1} x^{\rho+2\nu}.$$

On aura aussi

$$\frac{d^\nu \mathrm{F}y}{dy^\nu} = e^{-\frac{1}{x^2}}.$$

En transportant ces valeurs dans (24) dont le déterminant numérateur a d'abord été ordonné par rapport aux dérivées successives de Fy, on trouve aisément l'expression :

$$(25)\quad \frac{d^s e^{-\frac{1}{x^2}}}{dx^s} = \frac{2^s}{x^{3s} e^{\frac{1}{x^2}}} \left[1 - \frac{\left| \left(\frac{1}{2}\right)^{1|1} \left(\frac{2}{2}\right)^{2|1} \cdots \left(\frac{s-2}{2}\right)^{s-2|1} \left(\frac{s-1}{2}\right)^{s|1} \right|}{1^{1|1}\, 1^{2|1} \cdots 1^{s-2|1}\, 1^{s-1|1} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{s.s-1}{2}}} x^2 + \frac{\left| \left(\frac{1}{2}\right)^{1|1} \left(\frac{2}{2}\right)^{2|1} \cdots \left(\frac{s-2}{2}\right)^{s-1|1} \left(\frac{s-1}{2}\right)^{s|1} \right|}{1^{1|1}\, 1^{2|1} \cdots 1^{s-2|1}\, 1^{s-1|1} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{s.s-1}{2}}} x^4 - \cdots \right.$$

$$\left. \cdots \pm \frac{\left| \left(\frac{1}{2}\right)^{2|1} \left(\frac{2}{2}\right)^{3|1} \cdots \left(\frac{s-2}{2}\right)^{s-1|1} \left(\frac{s-1}{2}\right)^{s|1} \right|}{1^{1|1}\, 1^{2|1} \cdots 1^{s-2|1}\, 1^{s-1|1} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{s.s-1}{2}}} x^{2(s-1)} \right] \quad s \begin{cases} \text{impair.} \\ \text{pair.} \end{cases}$$

Vérification. — Pour $s = 1, 2, 3, \ldots$ par exemple, cette formule donnerait

$$\frac{de^{-\frac{1}{x^2}}}{dx} = \frac{2^1}{x^3 e^{\frac{1}{x^2}}} = 2e^{-\frac{1}{x^2}} x^{-3},$$

$$\frac{d^2 e^{-\frac{1}{x^2}}}{dx^2} = \frac{2^2}{x^6 e^{\frac{1}{x^2}}} \left(1 - \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{2}} x^2\right) = e^{-\frac{1}{x^2}}(4x^{-6} - 6x^{-4}),$$

$$\frac{d^3 e^{-\frac{1}{x^2}}}{dx^3} = \frac{2^3}{x^9 e^{\frac{1}{x^2}}} \left(1 - \frac{(\frac{1}{2})(\frac{2}{2}\cdot\frac{2}{2}+1.\frac{2}{2}+2) - (\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+1.\frac{1}{2}+2)(\frac{2}{2})}{1.2(\frac{1}{2})^3} x^2 + \frac{(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+1)(\frac{2}{2}\cdot\frac{2}{2}+1.\frac{2}{2}+2) - (\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+1.\frac{1}{2}+2)(\frac{2}{2}\cdot\frac{2}{2}+1)}{1.2(\frac{1}{2})^3} x^4\right)$$

$$= e^{-\frac{1}{x^2}}(8x^{-9} - 36x^{-7} + 24x^{-5}),$$

etc ; ce qui est en effet exact.

NOTE.

J'avais cru d'abord pouvoir déterminer les coefficients de la loi (1) en appliquant un procédé analogue à celui qui est suivi pour l'extension du théorème de Taylor au cas de plusieurs variables. Mais ces coefficients ne se présentent pas alors sous la forme de constantes. Si, en effet, t étant une variable auxiliaire, on pose (en ne prenant pour abréger que deux variables)

$$p = x + ht, \quad g = y + lt,$$

$F(pq)$, $\varphi_1(pq)$, etc., deviennent $F(xy)$, $\varphi_1(xy)$, etc., pour $t = 0$, et $F(x + h, y + l)$, $\varphi_1(x + h, y + l)$, etc., pour $t = 1$; considérant alors $F(pq)$, $\varphi_1(pq)$,... comme des fonctions de t, on peut développer la première de ces fonctions par la loi suprême à une variable t sous la forme

$$F(pq) = a_0 + a_1\varphi_1(pq) + \ldots\ldots, \text{etc.},$$

d'où l'on déduit pour $t = 1$

$$F(x + h, y + l) = a_0 + a_1\varphi_1(x + h, y + l) + \ldots, \text{etc.}$$

Mais $a_0\ a_1$ ..., qui sont formés à l'aide des dérivées de $F(pq)$, $\varphi_1(pq)$, ... par rapport à t, contiennent les quantités h, l, et ne sont donc pas indépendantes des variables $x + h$, $y + l$.

Le véritable principe de la loi suprême à plusieurs variables est différent; c'est celui que j'ai déjà employé dans la démonstration de la loi suprême à une variable.