Forme générale du reste dans l'expression d'une fonction au moyen d'autres fonctions;

PAR M. CH. LAGRANGE.

Astronome à l'Observatoire royal de Bruxelles.

« Je me suis proposé le problème suivant :

» Fx, $\varphi_1 x$, $\varphi_2 x$, $\ldots$, $\varphi_n x$ *étant des fonctions de* x, *trouver des coefficients constants* a_0, a_1, $\ldots$, a_n *et un reste* R, *fonction de* x, *qui rendent exacte la relation*

$$(1)\qquad Fx = a_0 + a_1\ \varphi_1 x + a_2\ \varphi_2 x + \ldots + a_n\ \varphi_n x + R$$

de $x = a$ *à* $x = a + H$, *après avoir, d'ailleurs, fixé les conditions que doivent remplir les fonctions proposées pour qu'une telle relation soit possible.*

» *Solution.* — I. Soient $\varphi_0 x$, $\varphi_{n+1} x$ deux nouvelles fonctions de x; posons

$$(2)\qquad y_1 = Fx,$$

$$(3)\qquad y_2 = a_0\ \varphi_0 x + a_1\ \varphi_1 x + \ldots + a_n\ \varphi_n x + a_{n+1}\ \varphi_{n+1} x,$$

a_0, a_1, $\ldots$, a_n, a_{n+1} étant des paramètres arbitraires, et déterminons ces $n+2$ paramètres par les $n+2$ conditions suivantes :

» 1° Que, pour $x = a$, on ait

$$y_1 = y_2,\quad y_1' = y_2',\quad y_1'' = y_2'',\quad \ldots,\quad y_1^n = y_2^n;$$

» 2° Que, pour $x = a + h$ $(h \leqq H)$, on ait de nouveau

$$y_1 = y_2,$$

$a_0, a_1, \ldots, a_{n+1}$ seront donnés par le système d'équations du premier degré

$$
(\mathrm{A}) \quad \left\{
\begin{array}{ll}
\mathrm{F}a & = a_0\ \varphi_0 a + a_1\ \varphi_1 a + \ldots + a_n\ \varphi_n a + a_{n+1}\ \varphi_{n+1} a, \\
\mathrm{F}'a & = a_0\ \varphi'_0 a + a_1\ \varphi'_1 a + \ldots + a_n\ \varphi'_n a + a_{n+1}\ \varphi'_{n+1} a, \\
\mathrm{F}^n a & = a_0\ \varphi^n_0 a + a_1\ \varphi^n_1 a + a_n\ \varphi^n_n a + a_{n+1}\ \varphi^n_{n+1} a, \\
\mathrm{F}(a+h) & = \left.\begin{array}{l} a_0\ \varphi_0(a+h) + a_1\ \varphi_1(a+h) + \ldots \\ \quad + a_n\ \varphi_n(a+h) + a_{n+1}\ \varphi_{n+1}(a+h) \end{array}\right\} (\alpha),
\end{array}
\right.
$$

et seront, en dernière analyse, des fonctions de a et de h. Dans ces équations, les n premières dérivées des fonctions $\mathrm{F}x$, $\varphi_0 x, \ldots, \varphi_{n+1} x$ sont supposées finies et déterminées pour $x = a$, et ces fonctions elles-mêmes finies et déterminées pour $x = a$ et $x = a + h$; elles devront être telles que les valeurs de $a_0, a_1, \ldots, a_{n+1}$ données par (A) soient finies et déterminées. La résolution du système (A) sous la forme ordinaire donne, pour le coefficient général a_μ,

$$
(4) \qquad a_\mu = \frac{\left| \varphi^0_0 a\ \varphi'_1 a\ \varphi''_2 a\ \ldots\ \varphi^{\mu-1}_{\mu-1} a\ \mathrm{F}^\mu a\ \varphi^{\mu+1}_{\mu+1} a\ \varphi^n_n a\ \varphi^{0(a+\theta_0 h)}_{n+1} \right|}{\left| \varphi^0_0 a\ \varphi'_1 a\ \varphi''_2 a\ \ldots\ \varphi^{\mu-1}_{\mu-1} a\ \varphi^\mu_\mu a\ \varphi^{\mu+1}_{\mu+1} a\ \varphi^n_n a\ \varphi^{0(a+\theta_0 h)}_{n+1} \right|}
$$

$$
(\mu = 0, 1, 2, \ldots, n+1), \quad \theta_0 = 1,
$$

les indices supérieurs, entre lesquels se font les permutations dans les déterminants, désignant des dérivées, et $0(a + \theta_0 h)$, où $\theta_0 = 1$, indiquant qu'il faut prendre la dérivée d'ordre zéro ou la fonction elle-même et y faire $x = a + \theta_0 h = a + h$ (cette notation est introduite pour établir la symétrie avec les notations ultérieures).

» II. Transportons, maintenant, dans l'expression (3) de y_2 les valeurs finies et déterminées (4) et considérons la nouvelle fonction

$$
(5) \qquad \psi x = y_1 - y_2.
$$

Les équations (A) pourront s'écrire

$$
(\mathrm{A}') \quad \psi a = 0, \quad \psi' a = 0, \quad \psi'' a = 0, \quad \ldots, \quad \psi^n a = 0, \quad \psi(a+h) = 0.
$$

Supposons, maintenant, que les fonctions $\mathrm{F}x$, $\varphi_0 x$, $\varphi_1 x, \ldots, \varphi_{n+1} x$ soient finies et continues, ainsi que leurs ν premières dérivées, de $x = a$ à $x = a + h$ ($\nu \leqq n + 1$). Il en sera de même de

$$
(5) \qquad \psi x.
$$

Dès lors, on aura, en vertu d'un lemme connu [1] et des conditions (A'),

---

[1] Bertrand, *Calcul différentiel*, § 273.

la relation

$$(6)\qquad \psi^{\nu}(a+\theta_0\theta_1\theta_2\ldots\theta_\nu h)=0\quad (\nu=0,1,2,\ldots,\nu),$$

$\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_\nu$ étant des nombres compris entre zéro et l'unité, relation qui peut aussi s'écrire

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} &\mathrm{F}^{\nu}(a+\theta_0\theta_1\ldots\theta_\nu h)\\ &\quad=a_0\varphi_0^{\nu}(a+\theta_0\theta_1\ldots\theta_\nu h)\\ &\qquad+a_1\varphi_1^{\nu}(a+\theta_0\theta_1\ldots\theta_\nu h)+\ldots\\ &\qquad+a_{n+1}\varphi_{n+1}^{\nu}(a+\theta_0\theta_1\ldots\theta_\nu h)\end{aligned}\right\}\quad (\nu=0,1,2,\ldots,\nu).$$

» III. Si, à la place de la dernière équation (α) du système (A), on substitue, maintenant, l'équation (7), on voit que

$$(4)\qquad a_\mu$$

peut se mettre sous une forme nouvelle, celle qui résulterait de la résolution du système formé des $n+1$ premières équations (A) et de l'équation (7). Il suffit évidemment, pour l'obtenir, de changer, dans (4),

$$o(a+\theta_0 h)\quad \text{en}\quad \nu(a+\theta_0\theta_1\ldots\theta_\nu h),$$

ce qui donne

$$(8)\quad a_\mu=\frac{|\varphi_0^0 a\ \varphi_1' a\ \varphi_2'' a\ \ldots\ \varphi_{\mu-1}^{\mu-1} a\ \mathrm{F}^{\mu} a\ \varphi_{\mu+1}^{\mu+1} a\ \ldots\ \varphi_n^n a\ \varphi_{n+1}^{\nu(a+\theta_0\theta_1\ldots\theta_\nu h)}|}{|\varphi_0^0 a\ \varphi_1' a\ \varphi_2'' a\ \ldots\ \varphi_{\mu-1}^{\mu-1} a\ \varphi_\mu^{\mu} a\ \varphi_{\mu+1}^{\mu+1} a\ \ldots\ \varphi_n^n a\ \varphi_{n+1}^{\nu(a+\theta_0\theta_1\ldots\theta_\nu h)}|}\quad \begin{gathered}(\mu=0,1,2,\ldots,n,n+1),\\ [\nu=0,1,2,\ldots,\nu,(\nu\leqq n+1)],\end{gathered}$$

$\nu(a+\theta_0\theta_1\ldots\theta_\nu h)$ indiquant qu'il faut prendre la dérivée $\nu^{\text{ième}}$ et y faire $x=a+\theta_0\theta_1\ldots\theta_\nu h$ au lieu de $x=a$.

» IV. Soit maintenant $\varphi_{n+1}x$ une fonction telle que, pour $x=a$, on ait

$$(9)\qquad \varphi_{n+1}a=0,\quad \varphi_{n+1}'a=0,\quad \varphi_{n+1}''a=0,\quad \ldots,\quad \varphi_{n+1}^{n}a=0$$

[il y a une infinité de telles fonctions; la plus simple serait $(x-a)^{n+1}$]. Le déterminant dénominateur de (8) se réduira alors, évidemment, à

$$|\varphi_0^0 a\ \varphi_1' a\ \varphi_2'' a\ \ldots\ \varphi_n^n a|\ \varphi_{n+1}^{\nu(a+\theta_0\theta_1\ldots\theta_\nu h)},$$

et le déterminant numérateur, pour $\mu=0,1,2,\ldots,n$, à

$$|\varphi_0^0 a\ \varphi_1' a\ \varphi_2'' a\ \ldots\ \varphi_{\mu-1}^{\mu-1} a\ \mathrm{F}_\mu^{\mu} a\ \varphi_{\mu+1}^{\mu+1} a\ \ldots\ \varphi_n^n a|\ \varphi_{n+1}^{\nu(a+\theta_0\theta_1\ldots\theta_\nu h)}.$$

On aura donc de $\mu=0$ à $\mu=n$,

$$(10)\qquad a_\mu=\frac{|\varphi_0^0 a\ \varphi_1' a\ \varphi_2'' a\ \ldots\ \varphi_{\mu-1}^{\mu-1} a\ \mathrm{F}^{\mu} a\ \varphi_{\mu+1}^{\mu+1} a\ \ldots\ \varphi_n^n a|}{|\varphi_0^0 a\ \varphi_1' a\ \varphi_2'' a\ \ldots\ \varphi_{\mu-1}^{\mu-1} a\ \varphi_\mu^{\mu} a\ \varphi_{\mu+1}^{\mu+1}\ \ldots\ \varphi_n^n a|}\,(\mu=0,1,2,\ldots,n),$$

et pour $\mu = n + 1$,

$$(11) \qquad a_{n+1} = \frac{|\varphi_0^0 a \;\; \varphi_1' a \;\; \varphi_2'' a \;\; \ldots \;\; \varphi_n^n a \;\; F^{\nu(a+\theta_0\theta_1\ldots\theta_\nu h)}|}{|\varphi_0^0 a \;\; \varphi_1' a \;\; \varphi_2'' a \;\; \ldots \;\; \varphi_n^n a \;|\; \varphi_{n+1}^{\nu(a+\theta_0\theta_1\ldots\theta_\nu h)}} \; (\nu = 0, 1, 2, \ldots, \nu).$$

En transportant (10) et (11) dans la dernière (α) des équations (A), les coefficients du développement de $F(a+h)$, donné par cette équation, seront donc tous, à l'exception du dernier a_{n+1}, indépendants de h (et de $\varphi_{n+1}x$).

» V. Si, maintenant, on pose $x = a + h$ et que l'on compare (1) à (α), on voit, en récapitulant les conditions de la question, que : 1° si Fx, $\varphi_1 x$, $\varphi_2 x$, ..., $\varphi_n x$ et la fonction arbitraire $\varphi_{n+1} x$ sont, ainsi que leurs ν premières dérivées ($\nu \leqq n+1$), finies et continues de $x = a$ à $x = a + H$, les n premières dérivées de Fx, $\varphi_1 x$, $\varphi_2 x$, ..., $\varphi_n x$ étant, d'ailleurs, finies et déterminées pour $x = a$, et $\varphi_{n+1} x$ étant nulle, ainsi que ses n premières dérivées pour $x = a$; 2° si, de plus, les expressions (10) et (11) où l'on fera $\varphi_0 x = 1$ sont finies et déterminées, la relation (1) aura lieu de $x = a$ à $x = a + H$, les $n+1$ coefficients constants a_0, a_1, ..., a_n étant donnés par (10) où $\varphi_0 x = 1$ et le reste R ayant pour expression

$$(12) \quad R = \frac{|\varphi_0^0 a \;\; \varphi_1' a \;\; \ldots \;\; \varphi_n^n a \;\; F^{\nu(a+\theta_0\theta_1\ldots\theta_\nu h)}|}{|\varphi_0^0 a \;\; \varphi_1' a \;\; \ldots \;\; \varphi_n^n a \;|\; \varphi_{n+1}^{\nu(a+\theta_0\theta_1\ldots\theta_\nu h)}} \varphi_{n+1} x \; (\nu = 0, 1, 2, \ldots, \nu) \quad (\varphi_0 x = 1).$$

Il y a alors $\nu + 1$ formes du reste.

» L'application de ces formules à la série de Taylor donne précisément les résultats connus. »

(9 juin 1884.)

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE DES COMPTES RENDUS DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.
10019 Paris. — Quai des Augustins, 55.