MÉCANIQUE CÉLESTE.

ESSAI PHILOSOPHIQUE
SUR LA
SCIENCE DE L'ORDRE

(MÉTHODE AINSI NOMMÉE PAR SON AUTEUR)(1);

PAR A.-J. YVON VILLARCEAU.

Je me propose de montrer ici comment, en se laissant guider par une philosophie qui n'est autre que celle du bon sens, appliqué à établir un rapprochement convenable entre les conditions du problème à résoudre et les principes généraux de la Science, on est directement conduit à édifier la *Science de l'ordre;* je montrerai également qu'un simple défaut d'attention suffit pour produire la déviation qui conduit à la *Science* appelée, par Wronski, d'un nom que je veux éviter de reproduire.

Avant d'entrer en matière, je présenterai quelques mots d'explication au sujet du Mémoire qui a été inséré au Tome II des *Annales du Bureau des Longitudes*. Le but de ce Mémoire était de vérifier l'exactitude des formules de Wronski : dans ce travail d'investigation, je me suis laissé guider par l'auteur de la nouvelle méthode, tant que j'ai cru saisir son idée; et, sans rien sacrifier de l'exactitude des théories générales de la Mécanique céleste, j'ai atteint le but proposé. J'ai fait remarquer qu'il eût été facile de

(1) Note lue dans la séance de l'Académie des Sciences, du 10 avril 1882, et insérée aux *Comptes rendus*, t. XCIV, p. 1008.

reprendre la rédaction de mon travail, en vue des conclusions qui s'en dégagent; mais il a paru préférable de le publier sans y rien changer.

Ce travail offre le champ libre à la discussion, et l'on ne trouvera pas mauvais que je l'engage moi-même.

Je demande la permission d'expliquer préalablement comment je comprends l'usage du bon sens, dans le problème du mouvement des corps célestes; pour cela, j'examinerai deux manières distinctes d'aborder la question du mouvement d'un point matériel, sollicité par des forces connues F.

Le principe général de la dynamique d'un point matériel m se résume dans la relation fondamentale

$$(a) \qquad m\frac{d^2x}{dt^2} = \Sigma \, \mathrm{F} \cos(\mathrm{F}, x),$$

où x désigne l'abscisse de m, parallèle à un axe fixe des x, dont la direction est *quelconque*.

L'une des deux manières consiste à écrire deux autres relations pareilles à la formule (a), en y changeant x en y et en z : on forme ainsi trois équations différentielles du second ordre qu'il reste à intégrer. Observons d'abord que ces équations, tant que les directions des trois axes restent *indéterminées,* n'apprennent rien directement sur le mouvement du point m dans l'espace, et qu'il est nécessaire d'effectuer certaines combinaisons de ces équations, pour en dégager quelques théorèmes.

L'autre manière consiste à faire un choix *déterminé* de l'axe sur lequel on projette les vitesses et les forces ([1]). Si, par exemple, on fait successivement coïncider la direction de l'axe fixe avec les directions *momentanées* de la vitesse, du rayon de courbure et de la normale au plan osculateur, on obtient immédiatement trois théorèmes bien connus, qui établissent des

([1]) En faisant l'application de ce principe aux trois directions des axes mobiles des x_1, y_1, z_1, de l'expression générale de la composante des forces perturbatrices, obtenue relativement à une direction fixe quelconque de l'axe des x, nous aurions déduit directement, de la composante X (p. 58 du Mémoire), les expressions (119) des composantes X_1, Y_1, Z_1, qui ont été obtenues au moyen de l'analyse des coordonnées rectangulaires, suivant une habitude à laquelle on cède quelquefois trop facilement.

relations entre les composantes des forces suivant les trois directions, la vitesse, sa dérivée première et le rayon de courbure, relations éminemment simples.

Ce préambule a pour unique objet de montrer l'importance d'un choix convenable de la direction des axes de projection des forces et des vitesses.

Revenons au problème du mouvement d'un corps céleste, sollicité par une force prépondérante qui émane du Soleil, et par les forces perturbatrices, produites par l'action des planètes. Ce problème donne lieu à deux problèmes distincts, qu'il sera évidemment avantageux de traiter séparément : 1° le mouvement dans le plan *temporaire* de l'orbite, déterminé par deux rayons vecteurs consécutifs, ayant leur origine au centre du Soleil; 2° le mouvement de ce même plan.

Si l'on désigne par x_1, y_1, z_1 trois axes de projection, pris, les deux premiers, dans le plan de l'orbite, et le troisième normalement à ce plan, le mouvement dans le plan de l'orbite ne dépendra que des composantes des forces suivant les axes des x_1 et y_1 : en le supposant déterminé, les composantes suivant z_1 détermineront spécialement le mouvement du plan lui-même; comme ces dernières composantes sont normales au rayon vecteur, elles ne dépendront que des forces perturbatrices.

Il reste, en ce qui concerne le mouvement dans le plan de l'orbite, à choisir entre les diverses droites situées dans ce plan, pour assigner les directions des axes des x_1 et des y_1. Or, si l'on prend, pour la première, celle du rayon vecteur, et, pour la deuxième, une perpendiculaire à ce rayon, les composantes suivant x_1 se réduiront à l'action solaire prise en signe contraire, et aux composantes des forces perturbatrices suivant le même axe; tandis que les composantes suivant y_1 ne dépendront que des forces perturbatrices.

On remarquera qu'avec ce système d'axes l'action solaire ne figure que dans une seule des trois composantes et qu'elle y entre en vraie grandeur. Tout autre système des axes des x_1 et y_1, celui, par exemple, qui consisterait à prendre la direction de la vitesse et une normale à cette vitesse, donnerait lieu à deux composantes qui, l'une et l'autre, contiendraient les projections de l'action solaire sur les axes ainsi choisis.

En ne considérant donc que la simplicité des expressions des composantes des forces, on est conduit à choisir, pour axes de projection, la direction du rayon vecteur, celle d'une perpendiculaire à ce rayon, menée dans le plan de l'orbite, et la direction de la normale au même plan.

Cela peut faire présumer, mais ne prouve pas, que les expressions des dérivées des coordonnées, parallèles aux axes, jouiront du même degré de simplicité que les composantes des forces. Toutefois, la vérification est facile et elle prononce en faveur du système proposé, eu égard à l'extrême simplicité que présentent les résultats, lorsqu'on effectue les premières intégrations, sans rien négliger.

Je viens d'indiquer comment on arrive naturellement, pour ainsi dire, à fixer le choix des axes : Wronski a pu le faire, en se basant sur des considérations d'une autre nature; il ne lui en reste pas moins le haut mérite de l'invention. (Les *Prolégomènes du Messianisme* ont été publiés le 15 août 1842.)

Le choix des axes étant fixé, comme il vient d'être dit, il s'agit de former les équations différentielles correspondantes, suivant la théorie des mouvements relatifs : on peut y parvenir de diverses manières, entre lesquelles j'ai préféré l'emploi de la méthode que fournit l'analyse des coordonnées rectangulaires.

De quelque autre manière que l'on s'y prenne, on arrivera nécessairement aux relations suivantes [éq. (14), (15) et (16) du Mémoire précité] :

$$k = \int \mathrm{Y}_1 r\, dt, \tag{b}$$

$$r^2 \frac{d\Phi}{dt} = k, \tag{c}$$

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{f\mu - \mathrm{X}_1 r^2}{r^2} + \frac{k^2}{r^3}, \tag{d}$$

dans lesquelles X_1 et Y_1 désignent les sommes des composantes des forces perturbatrices suivant x_1 et y_1, $\frac{f\mu}{r^2}$ l'action solaire, r le rayon vecteur et Φ l'angle de r, avec une droite fixe, prise dans le plan mobile de l'orbite. (Je ne reproduis pas ici les relations qui déterminent le mouvement du plan de l'orbite, et sur lesquelles il n'y a lieu de faire aucune remarque.)

Pour effectuer une première intégration des équations (c) et (d), on transformera la seconde, en posant

$$(e) \qquad \frac{k^2}{p} = f\mu - X_1 r^2,$$

relation où p désigne une nouvelle variable, dont la signification géométrique résultera des intégrations : l'équation (d) sera ainsi remplacée par la suivante

$$(f) \qquad \frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{k^2}{pr^2} + \frac{k^2}{r^3} \text{ (1)}:$$

[on voit que la forme donnée à la relation (e) est, pour ainsi dire, dictée par la considération de l'homogénéité].

Je multiplie (f) par $2dr$, et j'intègre le second membre par parties, ce qui permet de ranger à part les termes, très peu variables, qui dépendent des différentielles de k et de p. Posant, en conséquence,

$$(g) \qquad U = 2\int \frac{1}{r}\, d\frac{k^2}{p} - 2\int \frac{k}{r^2}\, dk,$$

j'obtiens immédiatement

$$(h) \qquad \frac{dr^2}{dt^2} = 2\frac{k^2}{pr} - \frac{k^2}{r^2} - U.$$

Si l'on élimine dt entre celle-ci et l'équation (c), on a, pour équation différentielle de la trajectoire,

$$(i) \qquad \frac{1}{r^2}\frac{dr^2}{d\Phi^2} = 2\frac{r}{p} - 1 - U\frac{r^2}{k^2}.$$

Comme on n'a pas distingué, jusqu'ici, entre les mouvements *troublé* et *non troublé*, les expressions (c) et (h) suffisent pour faire voir que les

---

(1) En procédant comme on le fait ici, on évite l'introduction d'une idée préconçue, consistant dans la modification de l'expression ordinaire du demi-paramètre et celle d'une nouvelle constante-variable ϖ [éq. (80) et (81) du Mémoire].

expressions des dérivées premières de Φ et de r conserveront la même forme *dans les deux cas;* les valeurs des auxiliaires k, p, U et le rayon vecteur r acquerront seulement des valeurs spéciales à l'un et l'autre.

Le reste des calculs s'effectuerait en suivant la marche adoptée dans le Mémoire, à cela près qu'on devrait éviter l'introduction de la quantité ϖ dont il a été fait usage, et qui est liée à k et p par la relation $p\varpi = k$.

Il est actuellement essentiel de faire remarquer que l'on obtient, pour intégrales premières, les relations (c) et (h), qui sont *rigoureusement exactes,* ainsi que l'équation différentielle (i) de la trajectoire. C'est ici que la *Science de l'ordre* se distingue de l'autre science. Dans la première, on n'a besoin de recourir à la variation des constantes arbitraires, que pour effectuer les intégrations restantes ou deux intégrations du premier ordre; tandis que, dans la seconde, les géomètres ont cru plus simple d'obtenir les intégrales du mouvement non troublé, en négligeant, tout d'abord, les forces perturbatrices dans les équations différentielles du deuxième ordre, et appliquant la méthode de la variation des constantes arbitraires, pour satisfaire finalement à ces équations : de là, « l'extrême complication » des résultats, que la *Science de l'ordre* évite en n'appliquant ladite méthode, répétons-le, qu'aux équations fournies par une première intégration.

Tels sont les caractères distinctifs de la *Science de l'ordre* et de l'*ancienne Mécanique céleste*. On ne s'étonnera pas qu'une distinction de cette nature ait échappé aux géomètres : il existe des exemples de faits analogues; il suffira d'en rappeler un.

Pendant longtemps, les géomètres ont été arrêtés par la difficulté qu'ils rencontraient à tenir compte de la variation du moyen mouvement n, dans la relation qui lie le temps t à l'anomalie excentrique : on trouvait d'abord que le terme nt donnait lieu au terme tdn, terme essentiellement séculaire. Après de longues discussions, on a fini par reconnaître que le terme nt, dans ladite relation, pouvait être remplacé par $\int n\,dt$.

En attendant qu'une philosophie supérieure nous trace une voie plus directe, on préférera sans doute suivre celle qu'on vient d'indiquer, et qui permet d'édifier si facilement la *Science de l'ordre*. Quels que soient, au surplus, les perfectionnements des méthodes d'investigation que l'avenir réserve à la Science, grâce aux travaux de Wronski, la Mécanique céleste se trouve maintenant dégagée de complications, dont les astronomes-géomètres auront reconnu la véritable cause.

(EXTRAIT DU TOME II DES ANNALES DU BUREAU DES LONGITUDES.)

PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS, QUAI DES AUGUSTINS, 55.