# INSTITUT DE FRANCE.

## ACADÉMIE DES SCIENCES.

Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. XCII, séance du 4 avril 1881.

*Mécanique Céleste*

## *Note sur les méthodes de Wronski;*

**Par M. Yvon VILLARCEAU** (¹).

« Dans la *Réforme des Mathématiques* (t. I, p. 163), Wronski distingue deux systèmes de Mécanique céleste, qu'il appelle *science du désordre* et *science de l'ordre*. Le premier est celui des analystes qui se sont occupés avant lui de la Mécanique céleste; l'autre est celui qu'il propose de substituer à l'*ancien*, c'est-à-dire au système qui continue d'avoir cours dans la science.

» Ce géomètre a jugé utile de développer les deux *systèmes,* qu'il caractérise par les équations différentielles auxquelles ils donnent lieu : le nouveau système est représenté par les équations (197), et l'ancien par les équations (198). Il nous informe qu'il a fait l'application de l'un et de l'autre à la théorie de la Lune. Voici comment il s'exprime (p. 166, dernière ligne) :

(¹) Lue au Bureau des Longitudes, dans sa séance du 23 mars 1881. Le Bureau a décidé, dans la même séance, que cette Note et le Mémoire à l'appui seront insérés dans ses *Annales*.

« Nous avons ainsi employé les deux systèmes pour offrir, d'une part, une immédiate vérification des résultats, par leur *concordance* dans ces deux systèmes, et, de l'autre part, une preuve de l'extrême simplicité de la nouvelle et véritable Mécanique céleste, par sa comparaison avec les inextricables complications de la fausse Mécanique céleste que l'on a poursuivie jusqu'à ce jour. »

» Un peu plus loin, il ajoute :

« Tout ce que nous pouvons dire ici concernant la fausse théorie de la Science actuelle, c'est que l'orbite de la Lune, qui y résulte des prétendues perturbations causées par le Soleil, n'est nullement identique avec l'orbite variable que découvre la vraie théorie par l'influence téléologique du Soleil. »

» Deux faits ressortent de ces citations, l'un établissant l'accord des résultats définitifs des deux systèmes, l'autre faisant ressortir une grande différence dans les moyens d'obtenir ces résultats. Il est clair que l'expression de *concordance*, dont se sert Wronski, s'applique exclusivement aux expressions des coordonnées de la Lune en fonction du temps. L'ancien et le nouveau système seraient donc *également exacts*, et les résultats ne différeraient que par la forme, circonstance qui néanmoins mérite toute l'attention des astronomes; puisque certaine méthode, se rapportant à l'ancien système, exigerait le calcul de deux mille termes, au moins, pour obtenir les trois coordonnées de la Lune à un instant donné. Nous devons exprimer ici le regret que le travail de Wronski, sur la théorie lunaire, soit resté à l'état de manuscrit, et de ne pouvoir opposer, à ce chiffre de deux mille termes, un autre chiffre de beaucoup inférieur et qui conduirait à des résultats bien plus pratiques. Toutefois, Wronski nous informe encore qu'il a fait, en cette circonstance, l'application de ses méthodes d'intégration : or, les exemples qu'il a donnés, d'autres applications des mêmes méthodes, peuvent faire présumer des solutions avantageuses.

» Le second point que nous avons à examiner est celui qui concerne la grande différence des orbites dans les deux systèmes, différence qui semblerait tout d'abord inconciliable avec la *concordance* des résultats définitifs. Comme les géomètres de l'ancien système, Wronski fait usage de la méthode de variation des constantes arbitraires ou des éléments de l'orbite, mais il en fait un usage différent. Dans un système de trois équations différentielles du second ordre, on n'a, pour déterminer les variations des six constantes arbitraires, que trois conditions à remplir : celles de satisfaire aux trois équations différentielles du second ordre. Le problème reste donc indéterminé. Les géomètres ont depuis longtemps levé l'indétermination, en s'imposant la condition suivante : ils veulent que, par un choix convenable des constantes arbitraires, non seulement les expressions des coordonnées aient la même forme dans les deux cas de mouvement troublé et de mouvement non troublé, mais qu'il en soit de même à l'égard des dérivées premières des coordonnées ou des composantes des vitesses parallèles aux axes fixes. Ainsi se trouvent déterminées, pour les géomètres, les variations différentielles des six constantes arbitraires. C'est là, assurément, une solution très correcte et très élégante; mais ne pourrait-on pas satisfaire aux mêmes conditions et d'une manière beaucoup plus simple, en choisissant convenablement les constantes? Tel est le but que s'est proposé Wronski, bien qu'il n'ait pas énoncé lesdites conditions. La préférence devra, ce nous semble, être accordée à celui des systèmes qui se prêtera le mieux aux intégrations à effectuer et qui exigera le moins de travail pour parvenir à un même degré de précision.

» Les méthodes de Wronski sont-elles exactes? On pourrait en douter, puisqu'elles n'ont donné lieu à aucune application de la part des astronomes ou des analystes. Il n'est pas nécessaire de rappeler les éloges donnés à ce géomètre par les commissaires de l'Académie des Sciences, lorsqu'ils ont eu à juger la haute valeur de la *loi suprême* des Mathématiques, pour justifier l'intérêt que peuvent présenter les travaux ultérieurs du même auteur.

» Nous ne pouvons croire à l'indifférence des astronomes à l'égard des progrès de la Mécanique céleste, et nous nous expliquons fort bien, les ayant éprouvées nous-mêmes, les grandes difficultés qui s'offrent au lecteur le moins défavorablement prévenu contre les idées de Wronski.

» Après avoir, à plusieurs reprises, entrepris et abandonné l'étude des méthodes de Wronski, relatives à la Mécanique céleste, nous avons fini, cependant, par nous rendre compte de ce qui peut avoir un véritable intérêt, pour les astronomes-géomètres, dans les travaux publiés par Wronski sur cette matière. L'objet de la présente Note est d'exposer sommairement le résultat de nos recherches.

» Les deux méthodes, *ancienne* et *nouvelle,* ont cela de commun : l'auteur, au lieu de considérer les projections des forces perturbatrices sur des axes arbitraires et de directions fixes, s'attache à effectuer les projections sur trois axes mobiles, dont l'un coïncide avec le rayon vecteur, le deuxième situé dans le plan de l'orbite et perpendiculaire au précédent, le troisième perpendiculaire aux deux autres.

» L'objet principal du développement de l'*ancienne* méthode est uniquement d'introduire, dans les équations différentielles du mouvement, les trois projections ou composantes des forces perturbatrices que nous venons d'indiquer. Nous n'essayerons pas de faire comprendre comment procède Wronski pour dégager les valeurs des différentielles des éléments de l'orbite : nous avons dû renoncer nous-même à le comprendre. Comme il importait surtout de vérifier l'exactitude des résultats, nous avons appliqué directement la méthode de la variation des constantes arbitraires.

» Voici ce que nous sommes parvenu à élucider à l'égard de l'*ancienne* méthode. Nous avons trouvé, en tenant un compte exact de la différence des notations, que les expressions différentielles du demi-grand axe, de l'excentricité et de la longitude du périhélie ([1]) déduites par Wronski s'accordent exactement avec les expressions en usage. Il n'est pas question de la longitude moyenne de l'époque, attendu que la longitude vraie, qu'elle sert à déterminer, est exprimée par une intégrale basée sur le principe des aires, que Wronski range avec les autres intégrales à traiter suivant ses méthodes.

» Quant aux éléments qui servent à déterminer la situation du plan variable de l'orbite, nous en trouvons, sous la marque (70) des *Prolégomènes du Messianisme*, des expressions différentielles où figure la moyenne arithmétique des vitesses de l'astre au périhélie et à l'aphélie. Au sujet de ces équations, Wronski fait cependant cette remarque (p. 137) : les expressions (70) « sont rigoureusement exactes, pourvu que, lorsqu'il s'agit de cette » exactitude rigoureuse, on y substitue la vitesse vraie $v$ à la place de la vi- » tesse moyenne $w$... ». Or je me suis assuré que les formules de Wronski, même corrigées suivant ses indications, sont inexactes. Suivant nous, il faudrait, pour en corriger l'erreur, multiplier les éléments différentiels de Wronski par le facteur

$$\frac{\sqrt{1 + 2e\cos\varphi + e^2}}{1 + e\cos\varphi},$$

où $\varphi$ désigne l'anomalie vraie et $e$ l'excentricité. Ce facteur diffère très peu de l'unité, dans le cas des faibles excentricités, et il affecte la composante des forces perturbatrices suivant la normale au plan de l'orbite, en sorte que l'erreur commise, dans le cas de la théorie lunaire, peut se réduire à fort peu de chose; mais il y a là une erreur théorique dont l'origine

---

([1]) Les formules de Wronski contiennent la longitude de l'aphélie, au lieu de celle du périhélie.

nous paraît être dans la trop facile tendance de Wronski à s'appuyer sur des considérations philosophiques quand cela n'est nullement nécessaire. Ces considérations peuvent être fort utiles pour asseoir solidement les bases d'une science qui n'est pas si absolument rationnelle qu'on aime à se le figurer ; mais elles ne peuvent offrir ultérieurement d'autres avantages, que de guider quelquefois dans la recherche d'une solution difficile, et sous la condition de ne tolérer aucune dérogation aux principes admis. Comment donc Wronski a-t-il pu commettre l'erreur que nous signalons ? Voici comment procède notre auteur. On lit (p. 291 des *Prolégomènes du Messianisme*) :

« D'abord, pour établir le *Canon astronomique*, il suffit de considérer l'angle indéfiniment petit $d\rho$ de la rotation qu'éprouve constamment, dans le temps indéfiniment petit $dx$ (au lieu de $dt$), le plan de l'orbite sur le rayon vecteur $r$, par suite de l'influence principale de la susdite force perturbatrice, dont l'action est perpendiculaire à ce plan.... Or cet angle de rotation est... (suit la valeur de $d\rho$), et c'est là le principe ou la loi qui régit le Canon astronomique dont il s'agit. »

» On remarquera que Wronski ne démontre pas sa prétendue loi : il se borne à donner la formule qui la représente. C'est là le point de départ de l'erreur que nous signalons et que l'on corrigerait par l'application du facteur indiqué plus haut. Mais, nous le répétons, cette erreur ne doit avoir qu'une faible influence dans la théorie de la Lune. Ajoutons que les formules qui règlent la situation de l'orbite dans l'ancien et le nouveau système sont identiques.

» Passons actuellement à l'examen de la *nouvelle* méthode. Ici, comme dans l'autre, Wronski fait usage des composantes des forces perturbatrices suivant les trois axes mobiles. Pour établir les équations différentielles des trois éléments du mouvement, dans le plan de l'orbite, qu'il suffit de considérer, nous ne pouvons, par le motif déjà énoncé, exposer les démonstrations de Wronski ; nous nous bornerons à indiquer les deux points qui nous semblent caractériser la *nouvelle* méthode. Le premier est le résultat d'une simple remarque : l'action solaire, dirigée suivant le rayon vecteur, s'ajoute algébriquement avec la composante des forces perturbatrices suivant ce rayon ; au lieu de rejeter cette composante, pour la ranger avec la seconde dans les termes de l'ordre des perturbations, Wronski la maintient jointe à l'action solaire. Le second point est relatif à la considération de la moyenne arithmétique $w$ des vitesses aux deux extrémités du grand axe de l'orbite. Le produit de cette vitesse $w$ et du demi-paramètre $p$ est égal à la constante des aires. Telles sont : $p$ et $w$, les constantes variables que l'auteur de la nouvelle méthode substitue au demi-grand axe et à la constante des aires. Cela est évidemment permis.

» Partant donc de ces deux données, nous avons formé l'expression de la dérivée seconde du rayon vecteur par rapport au temps, et nous en avons déduit l'expression rigoureusement exacte de la dérivée première, puis l'équation différentielle, également exacte, de l'orbite, en coordonnées polaires. Admettant pour solution l'équation ordinaire de cette orbite, sous la condition d'y considérer les constantes comme variables, nous en avons déduit une équation de condition entre les variations du demi-paramètre $p$, de l'excentricité $e$ et de la longitude $\varpi$ du périhélie.

» Cette condition étant supposée satisfaite, nous vérifions que le rayon vecteur et la longitude, ainsi que leurs dérivées premières, conservent la même forme, en fonction des éléments, que dans le mouvement elliptique.

» Une seconde équation entre les constantes est fournie par leur relation avec l'excentricité. Ces deux équations de condition permettent d'exprimer les différentielles de l'excentricité et de la longitude du périhélie, en fonction des différentielles de $p$ et $w$; celles-ci s'expriment d'ailleurs au moyen des composantes des forces perturbatrices suivant les axes situés dans le plan de l'orbite, en sorte qu'il ne reste plus rien d'arbitraire : les différentielles des trois constantes $p$, $e$, $\varpi$ se trouvent ainsi entièrement déterminées.

» Nous avons comparé nos résultats avec ceux de Wronski, et constaté leur parfaite conformité. Comme dans l'autre méthode, notre géomètre évite d'introduire la variation de la longitude moyenne de l'époque. Enfin, les éléments qui fixent la position du plan de l'orbite se déterminent par les mêmes formules que dans l'*ancienne* méthode.

» Il suffit d'un simple coup d'œil pour constater la simplicité remarquable des expressions différentielles que fournit la nouvelle méthode, comparée aux anciennes.

» Ici se bornent nos investigations. Elles établissent que, sauf une minime erreur, facile à corriger, les formules de Wronski sont parfaitement exactes. Nous serions heureux que cette constatation pût déterminer quelque astronome-géomètre à poursuivre l'application des méthodes de Wronski à la théorie de la Lune. On y trouverait sans doute la solution des difficultés qui ont empêché les tentatives de Delaunay et de ses prédécesseurs d'aboutir à un résultat complet, sous le double point de vue théorique et pratique.

» A ceux qui voudraient entreprendre un pareil travail, nous donnerions le conseil de consulter, s'il est possible, les manuscrits laissés par Wronski. A en juger par les travaux qu'il a publiés, on peut être certain de trouver là une mine précieuse de développements analytiques, très correctement exécutés. On profiterait ainsi de l'expérience acquise par l'auteur de la nouvelle méthode, et l'on se trouverait en présence de calculs faciles à vérifier et à compléter, si l'auteur n'a pas entièrement achevé son travail. »

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE DES COMPTES RENDUS DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.
6896 Paris. — Quai des Augustins, 55.