

OBSERVATOIRE ROYAL DE BRUXELLES.

---

EXPOSITION CRITIQUE  
DE  
**LA MÉTHODE DE WRONSKI**

POUR LA  
RÉSOLUTION DES PROBLÈMES DE MÉCANIQUE CÉLESTE;

PAR

CH. LAGRANGE,

ASTRONOME ADJOINT A L'OBSERVATOIRE ROYAL DE BRUXELLES.

---

Par l'intelligence, l'Éternel a affermi  
les Cieux. (Prov. III, 19.)

---

PREMIÈRE PARTIE.

---

BRUXELLES,

F. HAYEZ, IMPRIMEUR DE L'ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE,

RUE DE LOUVAIN, 108.

---

1882

Opis nr 47427

OBSERVATOIRE ROYAL DE BRUXELLES

EXPOSITION CRITIQUE

LA MÉTHODE DE WRONSKI

RÉSOLUTION DES PROBLÈMES DE MÉCANIQUE CRISTINE

PAR



BRUXELLES

F. HAYEK, IMPRIMERIE DE L'ACADEMIE ROYALE DE BELGIQUE

RUE DE SOLVAY, 102

1882

## AVANT-PROPOS.

---

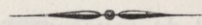
L'exposition de la méthode de Wronski pour la solution des problèmes de mécanique céleste se trouve disséminée par fragments, dans plusieurs ouvrages de ce géomètre, notamment dans les *Prologomènes du messianisme* et dans la *Réforme des Mathématiques* (1847). Une technologie spéciale, l'emploi constant des considérations philosophiques, un grand nombre de lacunes qui laissent au lecteur le soin d'effectuer des calculs parfois très compliqués, et par-dessus tout la non-énonciation du principe qui est la clef de tout le système, sont autant de causes qui, jusqu'ici, ont maintenu dans l'obscurité une méthode très digne en elle-même d'être connue.

M. Yvon Villarceau est le premier qui ait attiré l'attention sur la *Mécanique céleste* de Wronski (\*); mais, comme il le dit lui-même, il a dû se borner à vérifier l'exactitude des formules en partant de la méthode actuelle de la *variation des constantes arbitraires*. Il est incontestablement désavantageux d'appliquer des formules sans connaître exactement la méthode suivie pour les établir; la connaissance de cette méthode peut conduire dans certains

(\*) *Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris*, 1881, t. XCII, n° 14, p. 815. *Note sur les méthodes de Wronski*. Le mémoire, dont cette note est le résumé, n'a pas encore paru.

cas à des simplifications ou à des formules nouvelles, dont la légitimité ne peut être établie que par la méthode elle-même.

Le travail actuel contient le résultat d'une étude sur l'enchaînement des idées de Wronski, enchaînement auquel nous espérons avoir donné une forme parfaitement claire et compréhensible. La *première partie*, qui forme le présent mémoire, renferme les relations dynamiques du problème; la *seconde partie* contiendra l'exposé des méthodes analytiques proposées par Wronski pour effectuer les intégrations que contient la première. Ces méthodes, par leur nouveauté et leur généralité, ne seront pas, croyons-nous, la partie la moins intéressante de cet essai.



## EXPOSITION CRITIQUE

DE

# LA MÉTHODE DE WRONSKI

POUR LA RÉOLUTION DES PROBLÈMES DE MÉCANIQUE CÉLESTE.

---

### PREMIÈRE PARTIE.

#### RELATIONS DYNAMIQUES.

---

§ 1. Dans la méthode de Wronski, comme dans la méthode actuelle de la *variation des constantes arbitraires*, on se propose de trouver, en fonction du temps, les paramètres d'une conique variable sur laquelle peut être considéré comme se mouvant en chaque instant, l'astre dont on étudie le mouvement, et l'équation de la trajectoire réelle s'obtient en remplaçant, dans l'équation de la conique, les paramètres constants par leurs fonctions du temps.

Telle que nous la présentons ici, elle diffère de la méthode actuelle, principalement :

1° Par une plus grande généralité, c'est-à-dire que ses formules, vraies pour une trajectoire quelconque, constituent des relations concernant la dynamique générale d'un point matériel, et comprennent donc la mécanique céleste comme cas particulier ;

2° Par l'introduction de nouveaux paramètres variables, notamment de la vitesse moyenne,  $w$ , entre les vitesses extrêmes sur la conique variable ; du

paramètre  $p$  de cette conique, et, surtout, de la masse centrale sous l'action de laquelle elle est décrite;

3° Par un choix nouveau de coordonnées, — et principalement par la considération d'une ligne fixe dans le plan de l'orbite variable.

§ 2. Nous rappellerons d'abord, sous forme de lemme, un théorème concernant le mouvement conique, qui sert de base à tout le développement des calculs, et qui nous servira ensuite à développer le principe que nous considérons comme la clef du système.

LEMME.

Si  $+G$  est la force accélératrice, due à la gravitation, qui agit sur une masse  $m'$  dans son mouvement relatif autour d'une autre masse  $m$ , c'est-à-dire si l'on a  $G = -\frac{m+m'}{r^2}$ ,  $r$  étant la distance de  $m$  à  $m'$ , on a aussi la relation

$$(1). \dots \dots \dots Gdt = -w.d\varphi$$

où

$dt$  est l'élément du temps  $t$ ;

$d\varphi$  l'angle infiniment petit décrit par le rayon vecteur durant le temps  $dt$ , et

$w$  la moyenne entre les vitesses extrêmes de  $m'$  à l'aphélie et au périhélie (ces mots recevant ici une extension qui s'entend d'elle-même) (\*).

(Nous donnons à  $G$  le signe négatif parce que cette force est dirigée de  $m'$  vers  $m$ , c'est-à-dire en sens inverse du rayon vecteur de la trajectoire de  $m'$  autour de  $m$ ).

(\*) La relation (1) qui se déduit très-facilement des formules du mouvement conique a une signification philosophique remarquable. Elle exprime que la force accélératrice  $G$  est en chaque instant proportionnelle à la vitesse angulaire du rayon vecteur de l'orbite. Si l'on appelle  $(v_2)$  la vitesse de  $m'$  normale à ce rayon, on aura  $(v_2) = r \frac{d\varphi}{dt}$ , et par conséquent,  $-G = \frac{w(v_2)}{r} = \frac{w}{(v_2)} \cdot \frac{(v_2)^2}{r}$ . Or,  $\frac{(v_2)^2}{r}$  est l'expression de la force centrifuge, et le facteur  $\frac{w}{(v_2)}$ , où  $w$  est constant, varie périodiquement de  $\frac{w}{z}$  à  $\frac{w}{u}$ ,  $z$  et  $u$  étant les vitesses extrêmes au périhélie et à l'aphélie. Ainsi, la rela-

## PRINCIPE GÉNÉRAL (A).

§ 3. Soit, dans le cas le plus général de la dynamique,  $m'$  un point matériel décrivant une trajectoire sous l'action de forces motrices quelconques. Soit  $O$  un point donné de l'espace dont la distance à  $m'$  soit  $Om' = r$  et auquel nous rapporterons, comme à un pôle, le mouvement de  $m'$ .

Au temps  $t$ ,  $m'$  a une vitesse  $v$  dans la direction  $m'T$  de la tangente à la trajectoire.

Appelons *plan de l'orbite* le plan variable  $Om'T$  du rayon vecteur et de la tangente, et décomposons les forces accélératrices qui agissent sur  $m'$ , en trois composantes rectangulaires, savoir :

Dans le *plan de l'orbite* :

1°  $F$ , suivant le rayon vecteur dans le sens  $Om'$  ;

2°  $T$ , suivant la perpendiculaire au rayon vecteur dans le sens de la projection de  $v$  sur cette perpendiculaire ;

3°  $P$ , normale au *plan de l'orbite*.

Soit, en outre,  $\varphi$  l'angle que fait, au temps  $t$ , le rayon vecteur  $r$  avec une ligne fixe du plan de l'orbite, et supposons maintenant que l'on se donne arbitrairement une fonction  $f(r, \varphi, F, t)$  de  $r, \varphi, F, t$  et que  $w$  soit cette fonction. On pourra se représenter  $w$  de la manière suivante :

Soit  $w_1$  sa valeur au temps  $t$ , pour lequel on a aussi

$$r = r_1, \quad \varphi = \varphi_1, \quad F = F_1,$$

et supposons que dans l'équation

$$f(r, \varphi, F, t) = w$$

on fasse  $w = w_1 = \text{constante}$ . Il en résultera pour  $F$  une fonction parti-

tion (1) exprime une périodicité du mouvement de  $m'$  sur son rayon vecteur, c'est en quelque sorte un *modérateur d'équilibre dynamique*. Il est d'ailleurs facile de reconnaître que la seule loi d'action en raison inverse du carré de la distance satisfait à la condition (1), car le principe des aires donne  $r^2 \frac{d\varphi}{dt} = k$  (constante) et par conséquent, d'après (1), —  $G = \frac{wk}{r^2}$ . Wronski, dans les *Prolégomènes du messianisme*, page 255, donne la loi (1) comme le résultat d'une déduction purement philosophique, et il y voit le principe général de toute la dynamique. Voyez dans la note I, à la fin de ce mémoire, ce qu'il faut penser de cette idée.

culière que nous représenterons par  $H$ , et qui satisfera à l'équation

$$f(r, \varphi, H, t) = w_1.$$

Cette nouvelle équation représentera une trajectoire toute différente de la trajectoire considérée.

Au temps  $t_1$  on aura, dans ces deux équations,

$$r = r_1, \quad \varphi = \varphi_1, \quad t = t_1, \quad w = w_1, \quad F = F_1, \quad H = H_1$$

et, par conséquent,

$$F_1 = H_1.$$

Cette dernière égalité permettra de déterminer la relation qui lie les paramètres de la fonction  $H$  aux valeurs variables de la fonction  $F$ . On voit donc que la fonction  $w$  est, au temps  $t_1$ , le paramètre constant  $w_1$  de la trajectoire  $f(r, \varphi, t, H) = w_1$ , dans laquelle les paramètres de la loi  $H$  sont déterminés par la relation  $H_1 = F_1$ .

§ 4. *Application.* L'application suivante rendra ce principe parfaitement clair.

Soit

$$f(r, \varphi, F, t) = w = -F \frac{dt}{d\varphi}.$$

Il faudra déterminer quelle est la fonction  $H$  qui satisfait à l'équation  $w = -H \frac{dt}{d\varphi}$ , où  $w$  est supposé constant. Or, on a vu, par le lemme précédent, que cette relation n'existe que dans une section conique où  $w$  est la vitesse moyenne entre les extrêmes, et où l'on a  $-H = \frac{kw}{r^2}$ ,  $k$  étant la constante du principe des aires, ou bien encore  $-H = \frac{M}{r^2}$ , si l'on suppose au foyer une masse  $M = kw$ .

L'égalité  $H_1 = F_1$  deviendra  $\frac{M}{r_1^2} = -F_1$ , d'où l'on déduit, pour le paramètre  $M$ , l'expression

$$M = -F_1 r_1^2.$$



Par conséquent, la fonction  $w = -F \frac{dt}{d\varphi}$ , pour une trajectoire quelconque, représente en chaque instant la vitesse moyenne sur une trajectoire conique, tracée dans le *plan de l'orbite*, et au foyer O de laquelle serait placée une *masse fictive* —  $Fr^2$ .

Cette conique sera d'ailleurs supposée décrite sous l'influence de la vitesse réelle  $v$  au temps  $t$  et de l'angle  $\varpi$  de la tangente et du rayon vecteur au même temps.

Il en résulte que, si l'on parvient à calculer en fonction des trois forces générales F, T, P, pour un temps quelconque, la position du *plan de l'orbite*, la vitesse réelle, la direction du mouvement et le rayon vecteur, on aura immédiatement, d'après le principe précédent, en fonction des forces F, T, P, la détermination de tous les paramètres de la conique variable sur laquelle la masse  $m'$  peut être censée se mouvoir.

Les formules seront vraies dans le cas d'une trajectoire quelconque, mais, s'il s'agit d'une trajectoire différant peu de la forme conique, la conique variable représentera d'une manière approchée, en un temps donné, la trajectoire réelle.

## REMARQUE.

§ 5. Le principe général que nous venons d'exposer permettrait également de déterminer complètement les paramètres variables d'une trajectoire donnée quelconque à force centrale, sur laquelle, en chaque instant, le point  $m'$  pourrait être censé se mouvoir. Supposons, par exemple, que  $af(r)$  soit l'expression de cette force centrale,  $a$  étant un paramètre. Quand  $a$  est constant, la trajectoire est d'une espèce particulière que nous supposons connue. Si  $F_1$  est la valeur de la composante radiale au temps  $t$ , on aura pour le paramètre  $a$ , la valeur

$$a = -\frac{F_1}{f(r_1)}$$

$r_1$  étant le rayon vecteur au même temps, et  $m'$  pourra être censé se mouvoir

sur la trajectoire que lui ferait décrire la force centrale  $\frac{-F_1}{f(r_1)} f(r)$ ,  $r$  étant le rayon vecteur de cette dernière trajectoire. Il suffit, sans doute, que la vitesse tangentielle soit commune aux deux trajectoires, pour que  $m'$  puisse être considéré comme se mouvant à la fois sur chacune d'elles. Mais, la valeur particulière que nous venons d'attribuer au paramètre  $a$ , possède l'avantage de rendre les forces centrales toujours égales dans les deux trajectoires, ce qui assure l'identité des trois premiers termes des développements de leurs rayons vecteurs en fonction du temps. C'est ce que nous expliquerons plus en détail au sujet des trajectoires coniques (\*).

Tel est le principe général qui nous a permis de comprendre la méthode de Wronski et dont nous allons maintenant développer les conséquences dans le cas où la trajectoire à force centrale est une conique, c'est-à-dire satisfait à la relation  $Hdt = -wd\varphi$ ,  $w$  étant une constante et  $H$  la force radiale accélératrice.

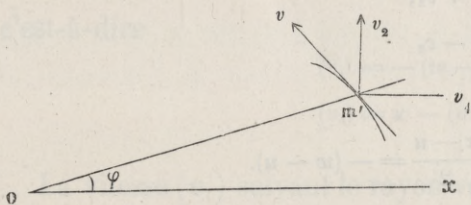
Comme cette relation, facile à déduire du mouvement conique, n'est pas celle qu'on prend ordinairement pour point de départ, nous allons brièvement faire voir comment, en la substituant à l'expression newtonienne  $G$  de la force  $H$ , on arrive plus rapidement encore à l'établissement de la trajectoire, et cela à l'aide d'intégrations d'une extrême simplicité.

(\*) On se demandera peut-être pourquoi nous n'avons pas simplement donné la relation  $H = F$  comme une condition nouvelle et *arbitraire*, à laquelle devrait satisfaire la trajectoire variable. C'est afin de rester fidèle à l'esprit de la méthode de Wronski, qui consiste à partir d'une relation générale donnée entre la force  $F$  radiale et les coordonnées  $r, \varphi, t$ , et à déterminer ensuite les variations des paramètres variables qui entrent dans cette relation, en fonction des trois composantes  $F, T, P$ .

CALCUL DE LA TRAJECTOIRE SATISFAISANT A LA RELATION  $Hdt = -w d\varphi$ ,  
 QUAND  $w$  EST CONSTANT.

§ 6. *Détermination de la vitesse.* Il est clair que la trajectoire sera tout entière dans le plan de la vitesse et du rayon vecteur à un moment donné, puisqu'on suppose ici nulles les forces perpendiculaires à ce plan.

FIG. 1.



Soient (fig. 1)  $Ox$  une ligne de ce plan passant par le pôle  $O$  et prise pour origine de l'angle  $\varphi$ ;  
 $v_1$  et  $v_2$  les vitesses de  $m'$ , parallèle et perpendiculaire à cette ligne.

On aura :

On aura :

$$\frac{dv_1}{dt} = H \cos \varphi, \quad \frac{dv_2}{dt} = H \sin \varphi$$

et, puisque  $H = -w \frac{d\varphi}{dt}$ ,

$$\frac{dv_1}{dt} = -w \cos \varphi \cdot \frac{d\varphi}{dt}, \quad \frac{dv_2}{dt} = -w \sin \varphi \cdot \frac{d\varphi}{dt}$$

D'où, en intégrant,

$$(1') \dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} v_1 = -w \sin \varphi + c_1, \\ v_2 = +w \cos \varphi + c_2, \end{array} \right.$$

$c_1$  et  $c_2$  étant deux constantes.

La vitesse totale  $v$ , suivant la tangente, aura donc pour expression,

$$v = \sqrt{w^2 + c_1^2 + c_2^2 - 2w(c_1 \sin \varphi - c_2 \cos \varphi)}$$

et l'on voit que cette vitesse sera maximum et minimum sur deux directions

diamétralement opposées, correspondant aux angles  $\varphi_1, \varphi_1 + \pi$  donnés par la relation  $\text{tg } \varphi_1 = -\frac{c_1}{c_2}$ . Si, maintenant, l'on fait passer la ligne origine  $Ox$  par le point du minimum de vitesse, et qu'on appelle  $z$  et  $u$  les valeurs absolues du maximum et du minimum de  $v$ , on aura d'abord  $\text{tg } \varphi_1 = 0$ , ce qui donne  $c_1 = 0$ ; faisant ensuite  $\varphi = 0, \varphi = \pi$  dans les équations (1'), on obtiendra, pour déterminer  $c_2$  et  $w$ , les relations :

$$\begin{cases} u = w + c_2, \\ z = w - c_2 \end{cases}$$

d'où,

$$w = \frac{u + z}{2}, \quad c_2 = -\frac{z - u}{2} = -(w - u).$$

Ainsi  $w$  est la vitesse moyenne entre les vitesses extrêmes de  $m'$  sur sa trajectoire.

En transportant ces valeurs dans l'expression de  $v$  ci-dessus, elle devient

$$(2) \quad v = \sqrt{w^2 + (w - u)^2 - 2w(w - u) \cos \varphi} = \sqrt{u^2 + 2w(w - u)(1 - \cos \varphi)}$$

valeur de la vitesse réelle  $v$  en fonction de l'angle  $\varphi$ , de la vitesse minimum  $u$  et de la vitesse moyenne  $w$ .

En fonction de  $\varphi$  et des vitesses maximum et minimum,  $z$  et  $u$ , on aurait la formule :

$$v = \sqrt{\left(\frac{u + z}{2}\right)^2 + \left(\frac{z - u}{2}\right)^2 - \frac{(z + u)(z - u)}{2} \cos \varphi} = \sqrt{\frac{u^2 + z^2}{2} - \frac{z^2 - u^2}{2} \cos \varphi}$$

d'où

$$(3) \quad v = \sqrt{u^2 \cos^2 \frac{\varphi}{2} + z^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}$$

VITESSES PARALLÈLE ( $v_1$ ) ET PERPENDICULAIRE ( $v_2$ ) AU RAYON VECTEUR.

§ 7. On aura, par la décomposition des vitesses  $v_1$  et  $v_2$ ,

$$\begin{aligned} (v_1) &= v_1 \cos \varphi + v_2 \sin \varphi = -w \sin \varphi \cos \varphi + w \cos \varphi \sin \varphi - (w - u) \sin \varphi, \\ (v_2) &= -v_1 \sin \varphi + v_2 \cos \varphi = +w \sin^2 \varphi + w \cos^2 \varphi - (w - u) \cos \varphi \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\left. \begin{aligned} (v_1) &= -(w - u) \sin \varphi \\ (v_2) &= w - (w - u) \cos \varphi \end{aligned} \right\} (4).$$

La vitesse ( $v_1$ ) suivant le rayon vecteur étant négative quand  $\varphi$  varie de 0 à  $\pi$ , positive de  $\pi$  à  $2\pi$ , le rayon vecteur est respectivement maximum et minimum pour les valeurs de la vitesse minimum et maximum.

ÉQUATION DE LA TRAJECTOIRE.

§ 8. En désignant par  $r$  le rayon vecteur correspondant à l'angle  $\varphi$ , on aura pendant le temps  $dt$ ,

$$\begin{cases} dr = (v_1) dt, \\ rd\varphi = (v_2) dt \end{cases}$$

d'où, à l'aide des équations (4) :

$$\frac{dr}{r} = \frac{-(w - u) \sin \varphi d\varphi}{w - (w - u) \cos \varphi} = -\frac{d[w - (w - u) \cos \varphi]}{w - (w - u) \cos \varphi}$$

et, en intégrant,  $l \cdot r = -l \cdot [w - (w - u) \cos \varphi] + \text{constante}$ ; d'où

$$(4') \quad \dots \dots \dots r = \frac{q}{w - (w - u) \cos \varphi},$$

en désignant par  $q$  la constante d'intégration.

L'équation (4'), qui donne  $r$  en fonction de  $w, u, \varphi$ , montre que la trajectoire décrite est une conique.  $r$  est maximum et minimum pour  $\varphi = 0$  et  $\varphi = \pi$ .

Soient  $n$  et  $m$  ces valeurs extrêmes. On aura

$$\begin{aligned} \text{pour } \varphi = 0, \quad nu &= q, \\ \text{pour } \varphi = \pi, \quad m(2w - u) &= q. \end{aligned}$$

On en déduit

$$\frac{n}{m} = \frac{2w - u}{u}, \quad \frac{n - m}{n + m} = \frac{w - u}{w}$$

et, comme  $n + m = 2a$ , grand axe de la conique, et que  $n - m = 2c$ , double de l'excentricité linéaire, on aura, pour la valeur de l'excentricité numérique,

$$e = \frac{c}{a} = \frac{w - u}{w}.$$

En posant, de plus,  $p = \frac{q}{w} = \frac{nu}{w} = \frac{mz}{w}$ , et transportant ces valeurs dans l'équation (4'), on obtiendra l'équation de la trajectoire, sous la forme connue

$$(5). \quad \dots \dots \dots r = \frac{p}{1 - e \cos \varphi} (*).$$

Le paramètre  $p$  en fonction de  $a, e, n$  et  $m$  prend les formes :

$$p = n(1 - e) = m(1 + e),$$

d'où

$$p = \sqrt{nm(1 - e^2)}$$

$$p = \frac{nm}{a}$$

et

$$p = a(1 - e^2).$$

L'introduction de la quantité  $e$  permet aussi de transformer les expres-

(\*) Le signe — au dénominateur provient de ce que nous avons pris pour origine des angles  $\varphi$ , la demi-ligne qui répond au rayon vecteur maximum. Si l'on parlait du rayon minimum, on aurait  $r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi}$ . Nous avons conservé les conventions de Wronski pour faciliter la vérification de ses formules. Il fonde le choix de l'aphélie pour origine des anomalies, sur deux raisons, l'une, algorithmique, qui nous a paru ne présenter aucun avantage réel (*Prolog. du messianisme*, p. 267), l'autre, philosophique, basée sur le principe de la moindre action : la vitesse imprimée à l'origine est moindre quand l'origine du mouvement est l'aphélie.

sions (4) des vitesses radiale et normale au rayon vecteur. Elles donnent

$$(6). \dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} (v_1) = - we \sin \varphi, \\ (v_2) = w (1 - e \cos \varphi). \end{array} \right.$$

Quant à la vitesse totale  $v$ , elle devient

$$(7). \dots \dots \dots v = w \sqrt{1 + e^2 - 2e \cos \varphi}.$$

VÉRIFICATION DE LA LOI DES AIRES ET VALEUR DE SA CONSTANTE  
EN FONCTION DE  $p$  ET  $w$ .

§ 9. Prenons, comme au § 8,  $rd\varphi = (v_2)dt$ . A l'aide des équations (6) cette valeur devient

$$rd\varphi = w (1 - e \cos \varphi) dt.$$

Mais (5) donne

$$1 - e \cos \varphi = \frac{p}{r}, \quad (v_1) = w \frac{p}{r}$$

donc

$$r^2 d\varphi = pw \cdot dt$$

et, en intégrant,  $\int r^2 d\varphi = pw \cdot t + \text{constante}$ .

Mais  $\int r^2 d\varphi$  est le double du secteur  $s$  décrit par le rayon vecteur. On peut, évidemment, supposer toujours la constante nulle en faisant le secteur décrit nul pour  $t = 0$ , et l'on a

$$(8) \dots \dots \dots s = \frac{pw}{2} \cdot t,$$

qui exprime que les aires sont proportionnelles aux temps.

## LOI D'ACTION DE LA FORCE CENTRALE H.

§ 10. On a l'équation fondamentale

$$H = -w \frac{d\varphi}{dt}$$

et nous venons de trouver

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{pw}{r^2}.$$

On a donc

$$(9) \dots \dots \dots H = -\frac{pw^2}{r^2}.$$

C'est la loi de Newton, quand  $pw^2$  est constant. Le signe — indique que la force est dirigée vers le point O. Lorsque l'on considère la force centrale H comme due à l'attraction réciproque de  $m'$  et d'une masse  $m$  placée en O, on a, par le lemme énoncé plus haut, dans le mouvement relatif,  $H = G = -\frac{m+m'}{r^2} = -\frac{M}{r^2}$ , en posant  $M = m + m'$ . On a donc, dans ce cas, qui est celui de la nature,  $pw^2 = m + m' = M$ , ce qui donne pour le paramètre  $p$ , l'expression

$$p = \frac{M}{w^2} \text{ ou, réciproquement, } (10) w = \sqrt{\frac{M}{p}}.$$

§ 11. Les §§ précédents suffisent pour démontrer que la loi  $Hdt = -wd\varphi$ , substituée à la loi newtonienne, donne, avec une extrême simplicité analytique, l'équation de la trajectoire et toutes les propriétés du mouvement, et qu'elle est en fait équivalente à cette loi, quand il s'agit du simple mouvement conique. Mais, quand il s'agit du problème général de la mécanique céleste, ses avantages ne se bornent pas seulement à une simplification analytique. Elle établit alors, comme nous l'avons déjà fait comprendre, une relation directe entre la *force*, quelle qu'elle soit, qui agit suivant le rayon vecteur,



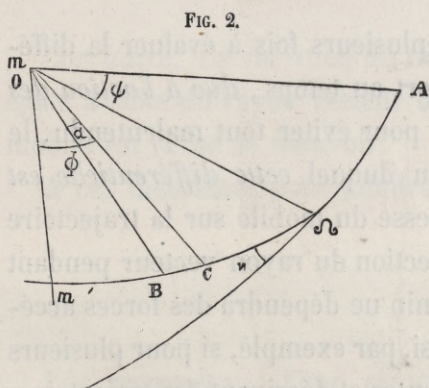
et certains éléments fondamentaux de l'orbite variable, tandis que des relations de cet ordre ne pourraient être obtenues dans la méthode actuelle des constantes arbitraires, qu'après de longs calculs, et d'une manière tout à fait indirecte.

Nous bornerons ici cette exposition de la marche suivie par Wronski pour établir les formules du mouvement conique. (Voir l'indication de cette marche dans les *Prolégomènes du messianisme*, de la page 255 à la page 272.) Toutes les formules relatives à ce mouvement, qu'il a déduites de celles qui précèdent, sont exactes; nous l'avons rigoureusement vérifié, et elles pourront facilement être retrouvées par tout lecteur familier avec les propriétés des courbes du second degré.

§ 12. Il nous sera facile, maintenant, grâce à notre principe général, de passer du cas de  $w$  constant dans la relation  $Fdt = -wd\varphi$ , au cas de  $w$  variable sous l'influence des forces quelconques  $F$ ,  $T$ ,  $P$ . Mais, comme le *plan de l'orbite* et les *lignes-origines* dans le plan de l'orbite, deviendront généralement variables, il convient de s'entendre auparavant sur la manière dont seront définies les coordonnées de la conique idéale sur laquelle  $m'$  sera censé se mouvoir en chaque instant.

Par le pôle arbitraire  $O$  (fig. 2) ou, ce qui revient exactement au même, par le centre  $m$  de la masse fictive placée au foyer  $O$  de la conique idéale, faisons passer un plan fixe, et dans ce plan, par ce même centre, une ligne fixe,  $mA$ . Le plan variable de l'orbite de  $m'$  coupe le plan fixe suivant la ligne des nœuds  $m\Omega$ , en considérant ici le côté du nœud ascendant, et la position de cette ligne des nœuds est définie par l'angle  $Am\Omega = \psi$ , longitude du nœud ascendant. Le plan  $m\Omega m'$  de l'orbite fait

avec le plan fixe un angle  $\eta$ , qui est son inclinaison, et quand  $\psi$  et  $\eta$  sont connus, la position du plan de l'orbite est entièrement déterminée.



Soit maintenant, dans le plan de l'orbite, une ligne fixe  $mC$ , pour servir d'origine aux angles mesurés dans ce plan. La position de cette ligne sera déterminée par l'angle  $\chi = Cm\Omega + \psi$ .

Enfin, si  $\Phi$  et  $\alpha$  sont les angles que font avec cette ligne fixe, le rayon vecteur  $mm' = r$ , et le demi-grand axe  $mB$  pris du côté de l'aphélie, on aura la relation

$$(11) \quad \dots \dots \dots \varphi = \Phi - \alpha,$$

en appelant, comme ci-dessus,  $\varphi$ , l'angle du rayon vecteur avec le demi-grand axe du côté de l'aphélie.

$\psi$  et  $\eta$  déterminent le plan de l'orbite;

$\chi$  et  $\alpha$ , la position du grand axe dans ce plan.

En y joignant ce grand axe lui-même,  $2a$ , et l'excentricité  $e$ , on aura toutes les données nécessaires pour fixer les dimensions de l'orbite et son orientation dans l'espace.

§ 13. Abordons maintenant le problème général que nous nous sommes posé.

#### PRINCIPE (B).

Dans les calculs qui suivent nous aurons plusieurs fois à évaluer la différentielle première du rayon vecteur par rapport au temps, *due à l'action des forces accélératrices*; il importe de rappeler, pour éviter tout malentendu, le principe de dynamique très connu en vertu duquel *cette différentielle est toujours nulle*. En effet si, au temps  $t$ , la vitesse du mobile sur la trajectoire est égale à  $v$ , le chemin parcouru dans la direction du rayon vecteur pendant le temps  $dt$ , sera  $dr = v \cos \varpi \cdot dt$ , et ce chemin ne dépendra des forces accélératrices que par la vitesse  $v$  et l'angle  $\varpi$ . Ainsi, par exemple, si pour plusieurs mobiles  $m_1, m_2 \dots$  mus par des forces différentes et décrivant des trajectoires différentes, on a en un même moment, ou en des moments différents,

$$v_1 = v_2 = \dots = v, \quad \varpi_1 = \varpi_2 \dots = \varpi,$$

$v_1, v_2, \dots, \varpi_1, \varpi_2, \dots$  étant les vitesses réelles et les angles de leurs directions et de leurs rayons vecteurs, il y aura aussi égalité entre les variations  $dr_1, dr_2, \dots$  de leurs rayons vecteurs pendant le temps  $dt$ . Les différentielles d'ordres supérieurs seront seules différentes en général. De ce principe, nous tirons les remarques suivantes.

### I.

Si  $m_1, m_2, \dots$  décrivent des coniques autour d'une masse  $M$ , avec des vitesses  $v$  et des angles  $\varpi$  égaux, quels que soient d'ailleurs leurs rayons vecteurs, les variations  $dr_1, dr_2, \dots$  de ces rayons vecteurs aux temps correspondants seront indépendantes de la masse  $M$ , ou des forces attractives  $\frac{M}{r_1^2}, \frac{M}{r_2^2}, \dots$

### II.

Si un mobile  $m'$  décrit une trajectoire sous l'action de certaines forces, et qu'à un moment donné, on lui applique une nouvelle force motrice finie, — si l'on veut, une *force perturbatrice*, — la variation du rayon vecteur pendant l'élément de temps n'en sera pas altérée, et, par conséquent, la variation due à l'influence de la force perturbatrice sera nulle.

*Corollaire.* La variation du rayon vecteur d'une trajectoire quelconque est égale à celle du rayon vecteur de la conique idéale variable sur laquelle le mobile est censé se mouvoir.

A ces théorèmes nous joindrons encore le suivant :

### III.

Les paramètres d'une conique sont complètement déterminés par la vitesse  $v$ , l'angle  $\varpi$ , le rayon vecteur  $r$  et la masse attractive  $M$ . Dans la conique variable, nous avons vu que cette masse attractive, qui n'est alors que fictive, est égale à  $-Fr^2$ ,  $F$  étant la composante radiale des forces accé-

lératrices. Il en résulte que, si  $-Fr^2$  ne changeait pas, les paramètres de la conique resteraient constants (\*). Les variations de  $v$ ,  $\omega$ ,  $r$  dues à la force  $F$ , pendant le temps  $dt$ , sont celles que subissent ces variables dans la conique même, puisque l'action centrale est égale à  $-\frac{(-Fr^2)}{r^2} = F$  et, par conséquent, les variations correspondantes des paramètres de cette conique sont nulles. Les variations réelles de ces paramètres se réduisent donc à celles qui proviennent des variations de la masse fictive  $M$ , c'est-à-dire de  $Fr^2$ . Par conséquent, *la force  $F$  n'agit sur les paramètres de la conique qu'en faisant varier la masse fictive  $M$ , et, si l'on cherche les variations de ces paramètres, il faut y considérer comme nulles les variations de  $r$ ,  $\omega$  et  $v$  en tant qu'elles proviennent de  $F$ .*

§ 14. Ceci posé, venons à l'établissement des formules du mouvement dans la trajectoire, sous l'influence des trois composantes quelconques  $F$ ,  $T$ ,  $P$ , et occupons-nous d'abord des deux premières  $F$ ,  $T$ , qui agissent dans le plan variable de l'orbite.

Cherchons en premier lieu les expressions des deux paramètres variables  $p$  et  $w$ , qui sont les facteurs principaux dans l'expression de la masse centrale fictive  $M$  et dans le principe des aires.

Nous avons trouvé pour  $w = \text{constante}$ , dans le mouvement conique,

$$(10) \dots \dots \dots pw^2 = M.$$

Nous aurons donc ici (principe général A), quand  $p$  et  $w$  seront variables,

$$(12) \dots \dots \dots pw^2 = -Fr^2.$$

Quant à l'expression générale de la constante du principe des aires,  $pw$  (éq. 8), il est clair que la force centrale  $F$  n'exerce aucune action sur sa variation. Mais il en est tout autrement de la force  $T$ , qui fait varier directement la vitesse ( $v_2$ ) =  $w(1 - e \cos \varphi) = \frac{wp}{r}$  (éq. 5 et 6), perpendiculaire au rayon vecteur  $r$ .

(\*) Il n'est évidemment pas question ici des forces  $T$  et  $P$ .

La variation  $\delta(v_2)$  de  $(v_2)$  pendant le temps  $dt$ , ne sera plus seulement due à la variation de  $r$  dans l'orbite, mais aussi aux variations des paramètres  $w$  et  $p$  pendant ce même temps. On aura donc, en représentant par  $d(v_2)$  la variation de  $(v_2)$  sur l'orbite conique, pour la variation totale de cette vitesse,

$$(v_2) = w \frac{R}{r}$$

$$\delta(v_2) = \delta \frac{wp}{r} + wp \delta \frac{1}{r}$$

$$\delta(v_2) = d(v_2) + Tdt = \frac{\delta \cdot wp}{r} + wp \delta \frac{1}{r}.$$

Mais, comme nous l'avons déjà démontré (principe B), la variation de  $r$  provenant des forces accélératrices est nulle, ou, si l'on veut, un infiniment petit du second ordre; par conséquent  $\delta r = dr$ , variation de  $r$  dans l'orbite conique. On en déduit :  $d(v_2) = wp \delta \frac{1}{r}$  et, par conséquent,  $Tdt = \frac{d \cdot wp}{r}$ ; d'où, en intégrant,

$$(13) \dots \dots \dots wp = (wp)_{(t)} + \int_{(t)}' T r dt,$$

$(wp)_{(t)}$  étant la valeur de  $wp$  au temps  $(t)$ .

Cette équation, en prouvant que, pour  $T = 0$ ,  $wp$  est constant, vérifie le principe des aires pour le cas d'une force centrale  $F$  quelconque.

La combinaison des équations (12) et (13) donne alors, pour la détermination des deux variables fondamentales  $w$  et  $p$ , les expressions :

$$(14) \dots \dots \dots w = \frac{-Fr^2}{(wp)_{(t)} + \int_{(t)}' T r dt},$$

$$(15) \dots \dots \dots p = \frac{[(wp)_{(t)} + \int_{(t)}' T r dt]^2}{-Fr^2}.$$

Quant à la vitesse perpendiculaire au rayon vecteur, on aura, au temps  $t$ , par le principe des aires,

$$pw = (v_2) r.$$

D'où :

$$(16) \dots \dots \dots (v_2) = \frac{(wp)_{(t)} + \int_{(t)}' T r dt}{r}.$$

On en déduit également  $(v_2)dt = dr \operatorname{tg} \varpi$ ,  $\varpi$  étant l'angle de la tangente et du rayon vecteur; d'où :

$$(17) \dots \dots \dots \operatorname{tg} \varpi = \frac{(wp)_{(t)} + \int_{(t)}^t T r dt}{r} \cdot \frac{dt}{dr}$$

et, pour la vitesse réelle  $v$ , sur la vraie trajectoire,

$$(18) \dots \dots \dots v = \frac{(v_2)}{\sin \varpi} = \frac{(wp)_{(t)} + \int_{(t)}^t T r dt}{r \sin \varpi},$$

$\sin \varpi$  étant donné par l'équation (17).

Ainsi, si l'on connaissait le rayon vecteur  $r$  et la force  $T$  en fonction du temps, les équations (17) et (18) donneraient l'angle  $\varpi$  et la vitesse  $v$ , c'est-à-dire les deux éléments qui, joints à ce rayon  $r$  et à la masse fictive —  $F r^2$ , déterminent complètement, pour le temps  $t$ , les dimensions et l'orientation de la conique variable.

L'angle de position  $\Phi$ , compté à partir de la ligne fixe du plan de l'orbite, et qui détermine donc, à chaque instant, la position absolue du rayon vecteur dans ce plan, se déduit également sans peine des lois fondamentales

$$(1) \dots \dots \dots - F dt = w d\varphi,$$

$$(12) \dots \dots \dots - F r^2 = p w^2;$$

en remarquant que, dans (1),  $d\varphi$  est le déplacement angulaire absolu du rayon vecteur et que, par conséquent,

$$d\varphi = d\Phi.$$

On trouve aisément l'expression

$$(19) \dots \dots \dots \Phi = (\Phi)_{(t)} + \int_{(t)}^t \frac{p w}{r^2} \cdot dt,$$

(65, Rodrigues)

où  $(\Phi)_{(t)}$  est l'angle du rayon vecteur et de la ligne fixe de l'orbite au

temps  $(t)$ . Dans cette expression,  $pw$  peut être remplacé par l'expression (13); ce qui donnera

$$(20) \dots \dots \Phi = (\Phi)_{(t)} + (pw)_{(t)} \int_{(i)} \frac{dt}{r^2} + \int_{(i)} \frac{dt}{r^2} \int_{(i)} \text{Trdt.}$$

§ 15. Actuellement, puisque l'on possède les expressions de la vitesse réelle  $v$ , de l'angle  $\varpi$  et de la masse attirante fictive —  $Fr^2$  placée en  $m$ , en fonction des forces accélératrices et du rayon vecteur  $r$ , on en déduira très facilement, par les formules du mouvement conique, les expressions du demi-grand axe  $a$ , de l'excentricité  $e$  et de la longitude  $\alpha$  de l'aphélie de la conique variable.

*Grand axe 2a.* Les équations du mouvement conique donnent facilement la relation :

$$(21) \dots \dots a = \frac{rpw^2}{2pw^2 - rv^2};$$

$pw^2$  et  $v$  sont donnés par (12) et (18).

En fonction de  $F, r, v$ , on aura donc

$$(21') \dots \dots a = \frac{Fr^2}{2Fr + v^2}.$$

On peut aussi donner à  $a$  une autre forme; des équations (13) et (18), on déduit

$$v^2 = \frac{p^2 w^2}{r^2 \sin^2 \varpi};$$

d'où

$$(22) \dots \dots a = \frac{r}{2 - \frac{p}{r \sin^2 \varpi}}$$

(N. J. 1526)

Cette dernière équation donnera le demi-grand axe quand, le paramètre  $p$  étant connu par l'équation (15), on aura aussi  $r$  et  $\varpi$ . En remplaçant d'ailleurs

dans l'équation (21),  $pw^2$  et  $v$  par leurs valeurs générales (12) et (18), on obtiendrait finalement l'expression générale

$$(22') \quad \dots \dots \dots a = \frac{Fr^2}{2Fr + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{\left[(wp)_{(t)} + \int_{(t)}^t Trdt\right]^2}{r^2}}.$$

*Excentricité e.* La relation  $p = a(1 - e^2)$  donne immédiatement  
(23)  $e = \sqrt{1 - \frac{p}{a}}$ , où tout est connu en vertu de (15) et de (22').

On obtiendrait  $e$  en fonction de  $p$ ,  $r$  et  $\varpi$  par la transformation suivante :

$$1 - e^2 = \frac{2pr \sin^2 \varpi - p^2}{r^2 \sin^2 \varpi} = 2 \frac{p}{r} - \left(\frac{p}{r}\right)^2 \frac{1}{\sin^2 \varpi}.$$

D'où

$$(24) \quad \dots \dots \dots e^2 = 1 - 2 \frac{p}{r} + \left(\frac{p}{r}\right)^2 \frac{1}{\sin^2 \varpi}.$$

*Longitude  $\alpha$  de l'aphélie.* L'angle  $\Phi - \alpha$  que fait le rayon vecteur avec la ligne des apsides, est donné dans le mouvement conique par l'expression

$$(25) \quad \dots \dots \dots \operatorname{tg}(\Phi - \alpha) = \frac{\frac{p}{r}}{\operatorname{tg} \varpi \left(\frac{p}{r} - 1\right)}$$

et, en y remplaçant  $p$  par (15) et  $\operatorname{tg} \varpi$  par (17),

$$(25') \quad \dots \dots \dots \operatorname{tg}(\Phi - \alpha) = \frac{\left[(wp)_{(t)} + \int_{(t)}^t Trdt\right] r \frac{dr}{dt}}{\left[(wp)_{(t)} + \int_{(t)}^t Trdt\right]^2 + Fr^2}.$$

§ 16. Les équations précédentes contenant des intégrales qui supposent connue la valeur de  $r$ , en fonction du temps, il faut encore connaître cette fonction ou, si l'on veut, l'équation de la trajectoire.

Or, il est clair que  $r$  est, au temps  $t$ , le rayon vecteur d'une conique dont les éléments sont donnés par les équations précédentes, et qui correspond à l'angle  $\Phi$ , également donné par l'une de ces équations.



On a donc, pour l'équation de la trajectoire dans son plan,

$$(26) \dots \dots \dots r [1 - e \cos (\Phi - \alpha)] = p,$$

et cette équation, en y remplaçant  $e$ ,  $\Phi$ ,  $\alpha$ ,  $p$  par les fonctions calculées (23), (19), (25), (15) des composantes  $F$ ,  $T$ , de  $r$  et de  $t$ , représentera implicitement toutes les trajectoires que peut décrire dans un plan un point matériel.

Nous indiquerons plus loin la manière de se servir de ces relations pour en dégager les inconnues dans le cas de la mécanique céleste (\*).

§ 17. Avant de passer à l'étude des effets de la composante  $P$ , normale au plan de l'orbite variable, il nous reste à exposer d'autres relations, existant entre les paramètres variables, et qui peuvent également servir à les déterminer en fonction les uns des autres.

*Excentricité e.* Reprenons l'expression (24) et faisons y varier les variables, en remarquant que, d'après le principe (B) et le théorème III,  $dr$  est nulle, et qu'il faut également regarder comme nulles les variations de  $v$  et  $\varpi$  qui dépendent de  $F$  (\*\*).

On obtient ainsi :

$$(27) \dots \dots \dots 2ede = -2d\left(\frac{p}{r}\right) + \frac{2}{\sin^2 \varpi} \cdot \left(\frac{p}{r}\right) d\left(\frac{p}{r}\right) - 2\left(\frac{p}{r}\right)^2 \frac{\cos \varpi}{\sin^3 \varpi} d\varpi.$$

(\*) L'angle  $\Phi$  est donné par son expression (19) en fonction de  $r$  et de  $t$ , mais d'une manière implicite. Les équations (19) et (26) constituent donc deux relations entre  $r$ ,  $\Phi$  et  $t$ , mais ne résolvent pas mieux, en réalité, le problème des trois corps que les méthodes déjà connues. La prétention de Wronski (*Réformé des mathématiques*, p. CLII) de donner la solution absolue du problème des trois corps est donc mal fondée. Si l'on transporte, dans l'équation conique, les expressions des paramètres variables trouvées par la méthode actuelle des constantes arbitraires, on arrive à une équation de la trajectoire réelle, aussi bien que dans la méthode de Wronski.

(\*\*) Notre théorème III montre l'inexactitude partielle de l'expression dont Wronski se sert, pp. CXLVIII et CXLIX, quand il dit que la composante radiale n'exerce aucune influence sur les variations de  $e$  et  $\alpha$ . Il faut remarquer, en outre, que la composante radiale dont il parle, n'est pas notre composante  $F$ , mais seulement ce qu'on entend aujourd'hui par la composante perturbatrice suivant le rayon vecteur. Il se place, dès l'abord, dans le cas de la mécanique céleste.

où l'on a, en vertu des principes rappelés,

$$d \cdot \frac{p}{r} = \frac{dp}{r} \quad \text{et} \quad d\varpi = \frac{T \cos \varpi}{v} \cdot dt,$$

$T \cos \varpi$  étant la composante de  $T$  perpendiculaire à la tangente, et qui agit donc pour faire tourner cette tangente de l'angle  $d\varpi$  pendant  $dt$ . (Voyez plus loin pour la démonstration très élémentaire de cette expression le § 33.)

On a, d'ailleurs,

$$Trdt = d(pw) \quad (\text{éq. 15}) \quad \text{et} \quad rv \sin \varpi = pw.$$

D'où :

$$d\varpi = \frac{d(pw)}{pw} \sin \varpi \cos \varpi.$$

Par conséquent, (27) deviendra

$$\begin{aligned} ede &= -\frac{dp}{r} + \frac{1}{\sin^2 \varpi} \cdot \frac{p}{r} \cdot \frac{dp}{r} - \left(\frac{p}{r}\right)^2 \frac{\cos \varpi}{\sin^3 \varpi} \cdot \frac{d(pw)}{pw} \sin \varpi \cos \varpi \\ &= -\frac{p}{r} \cdot \frac{dp}{p} + \frac{p^2}{r^2} \cdot \frac{1}{\sin^2 \varpi} \cdot \frac{dp}{p} - \left(\frac{p}{r}\right)^2 \cot^2 \varpi \frac{d(pw)}{pw}. \\ (28) \quad \dots \quad ede &= \frac{p}{r} \frac{1}{\sin^2 \varpi} \left(\frac{p}{r} - \sin^2 \varpi\right) \frac{dp}{p} - \left(\frac{p}{r}\right)^2 \cot^2 \varpi \frac{d(pw)}{pw}. \end{aligned}$$

(voir 161 liv)

Or, on a, par le mouvement conique,

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \varpi &= \frac{rd\varphi}{dr} = -\frac{1 - e \cos \varphi}{e \sin \varphi}, \\ r(1 - e \cos \varphi) &= p \end{aligned} \right\}$$

D'où :

$$\operatorname{tg} \varpi = -\frac{p}{re \sin \varphi}, \quad \left(\frac{p}{r}\right)^2 \cot^2 \varpi = e^2 \sin^2 \varphi, \quad \sin^2 \varpi = \frac{\left(\frac{p}{r}\right)^2}{e^2 \sin^2 \varphi + \left(\frac{p}{r}\right)^2},$$

$$\left(\frac{p}{r}\right) \frac{1}{\sin^2 \varpi} \left(\frac{p}{r} - \sin^2 \varpi\right) = e^2 \sin^2 \varphi + \left(\frac{p}{r}\right)^2 - \frac{p}{r} = e^2 \sin^2 \varphi + \frac{p}{r} \left(\frac{p}{r} - 1\right) = e^2 \sin^2 \varphi - \frac{p}{r} e \cos \varphi.$$

Ainsi, (28) devient

$$ede = \left( e^2 \sin^2 \varphi - \frac{p}{r} e \cos \varphi \right) \frac{dp}{p} - e^2 \sin^2 \varphi \frac{d(pw)}{pw},$$

$$de = \left( e \sin^2 \varphi - \frac{p}{r} \cos \varphi \right) \frac{dp}{p} - e \sin^2 \varphi \frac{d(pw)}{pw}$$

et, en intégrant, de  $(t)$  à  $t$  et appelant  $(e)_{(t)}$  la valeur de  $e$  pour  $t$ ,

$$e = (e)_{(t)} + \int_{(t)}^t \left( e \sin^2 \varphi - \frac{p}{r} \cos \varphi \right) \frac{dp}{p} - e \sin^2 \varphi \frac{d(pw)}{pw}$$

ou, comme

$$\frac{d(pw)}{pw} = \frac{dp}{p} + \frac{dw}{w}, \text{ et } \varphi = \Phi - \alpha,$$

$$(29) \dots \dots e = (e)_{(t)} - \int_{(t)}^t \frac{p}{r} \cos(\Phi - \alpha) \frac{dp}{p} + e \sin^2(\Phi - \alpha) \frac{dw}{w}.$$

(marché 163 201)

§ 18. *Longitude  $\alpha$  de l'aphélie.* On a la relation

$$\frac{p}{r} = 1 - e \cos(\Phi - \alpha).$$

Nous rappellerons ici, comme au sujet de l'excentricité, le principe (B) et le théorème III. Nous remarquerons, en outre, que si l'on fait varier toutes les quantités de l'équation précédente, on peut faire abstraction de la partie de ces variations qui auraient lieu dans l'orbite supposée invariable, attendu que ces parties des variations donnent, dans les deux membres de l'équation, des valeurs égales.

Comme ces variations dans l'orbite proviennent de la variation de l'angle  $\Phi$ , cela revient à considérer cet angle  $\Phi$  comme constant.

En vertu de ces principes, nous aurons  $d\Phi = 0$ ,  $dr = 0$  et, par conséquent,

$$\frac{dp}{r} + e \sin(\Phi - \alpha) d\alpha + \cos(\Phi - \alpha) de = 0.$$

et, puisque

Journal (82) Jan 11

$$\cos(\Phi - \alpha) = \frac{1 - \frac{p}{r}}{e}$$

$$\frac{dp}{r} + e \sin(\Phi - \alpha) d\alpha = \frac{\frac{p}{r} - 1}{e} de.$$

D'où :

$$d\alpha = \frac{1}{e \sin(\Phi - \alpha)} \left\{ \frac{\frac{p}{r} - 1}{e} de - \frac{dp}{r} \right\}$$

(logi 167 km)

et, à cause de l'équation (29), employant pour simplifier  $\varphi = \Phi - \alpha$ ,

$$d\alpha = \frac{1}{e \sin(\Phi - \alpha)} \left\{ -\frac{\frac{p}{r} - 1}{e} \cdot \frac{p}{r} \cos \varphi \frac{dp}{p} - \frac{\frac{p}{r} - 1}{e} e \sin^2 \varphi \frac{dw}{w} - \frac{p}{r} \frac{dp}{p} \right\} \quad (32)$$

$$= \frac{\frac{p}{r}}{e \sin(\Phi - \alpha)} \left\{ \left[ \left(1 - \frac{p}{r}\right) \frac{\cos \varphi}{e} - 1 \right] \frac{dp}{p} - \frac{\frac{p}{r} - 1}{\frac{p}{r}} \sin^2 \varphi \cdot \frac{dw}{w} \right\}$$

Or,

$$1 - \frac{p}{r} = e \cos \varphi;$$

donc

$$d\alpha = \frac{\frac{p}{r}}{e \sin(\Phi - \alpha)} \left\{ -\sin^2 \varphi \frac{dp}{p} + \frac{e \cos \varphi \sin^2 \varphi}{\frac{p}{r}} \cdot \frac{dw}{w} \right\}$$

ou, comme

$$\frac{dw}{w} = \frac{d(pw)}{pw} = \frac{dp}{p},$$

$$d\alpha = \frac{\frac{p}{r}}{e \sin(\Phi - \alpha)} \left\{ -\sin^2 \varphi \left( 1 + \frac{e \cos \varphi}{\frac{p}{r}} \right) + \frac{e \cos \varphi \sin^2 \varphi}{\frac{p}{r}} \frac{d(pw)}{pw} \right\}$$

(168 km)

Tenant compte enfin de la relation  $\frac{p}{r} + e \cos \varphi = 1$ , remplaçant  $\varphi$  par  $\Phi - \alpha$ , simplifiant et intégrant, il viendra

$$(50) \dots \alpha = (\alpha)_{(t)} + \int_{(t)}^e \sin(\Phi - \alpha) \left\{ \cos(\Phi - \alpha) \frac{d(pw)}{pw} - \frac{1}{e} \cdot \frac{dp}{p} \right\}$$

(Wronski 171 (W))

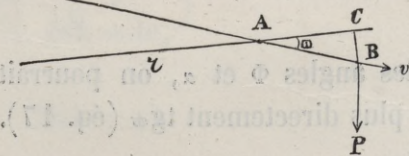
Les équations (29) et (30) donneront respectivement  $e$  en fonction de  $\alpha$ , et  $\alpha$  en fonction de  $e$ , quand on aura déjà les expressions des paramètres fondamentaux  $p$  et  $w$  (car  $\Phi$  est également fonction de  $p$  et  $w$  par l'équation (19)).

Afin de ne pas compliquer cette exposition, nous renverrons à la note II quelques considérations sur une formule exponentielle, présentée par Wronski pour représenter la trajectoire dans son plan et que nous ne croyons pas exacte.

§ 19. Les formules précédentes contenant toutes les conséquences de l'influence des forces  $F$  et  $T$  situées dans le plan de l'orbite, il ne nous reste plus qu'à évaluer celle de la force  $P$  normale à ce plan. Cette dernière force agit, à chaque instant, pour faire varier l'orientation du plan de l'orbite. Nous allons, d'abord, déterminer l'angle  $d\rho$  dont elle fait tourner ce plan autour du rayon vecteur  $r$  pendant le temps  $dt$ , et de la valeur de  $d\rho$  nous déduirons ensuite, trigonométriquement, les variations  $d\eta$ ,  $d\psi$ , des angles qui fixent la position de ce plan. (Voyez § 12.)

Soient  $Av$  (fig. 3) la direction de la vitesse réelle  $v$ ,  $r$  le rayon vecteur,  $\omega$

FIG. 3.



l'angle de  $v$  et  $r$ .  $AB$  étant l'élément  $vdt$  décrit pendant le temps  $dt$  et  $BC$ , une perpendiculaire à la direction du rayon vecteur, on aura  $CB = vdt \sin \omega$ .

La force  $P$  fera au bout du temps  $dt$  décrire à  $B$  un angle  $d\rho$  autour de  $C$  dans le plan  $(CB, P)$ , et cet angle sera celui dont le plan  $(r, v)$  a tourné dans le même temps autour de  $r$ . Or, pendant le temps  $dt$ , le point d'application  $B$  de  $P$  a subi par rapport à  $A$  un déplacement relatif  $P(dt)^2$  (c'est-à-dire

$dv/dt = Pdt \cdot dt$ ; en effet, le point A et le point B sont animés tous les deux au temps  $t$  de la même vitesse acquise  $v'$  sous l'influence de P). On a donc

$$P(dt)^2 = d\rho \cdot CB = d\rho \cdot vdt \sin \omega,$$

d'où

$$(51) \dots \dots \dots d\rho = \frac{Pdt}{v \sin \omega}.$$

Si, maintenant,  $e$ ,  $p$ , et  $\alpha$  sont les paramètres de la conique variable au temps  $t$ , on aura, en posant  $\Phi - \alpha = \varphi$ ,

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{rd\varphi}{dr} = \frac{-p}{re \sin(\Phi - \alpha)} \text{ par l'équation } r = \frac{p}{1 - e \cos(\Phi - \alpha)}.$$

D'où l'on déduit

$$\frac{1}{\sin \omega} = \frac{\sqrt{1 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2}}{r \frac{d\varphi}{dr}} = \frac{\sqrt{\frac{p^2}{r^2} + e^2 \sin^2 \varphi}}{\frac{p^2}{r^2}} = \frac{\sqrt{1 + e^2 - 2e \cos(\Phi - \alpha)}}{1 - e \cos(\Phi - \alpha)}$$

et, par conséquent,

$$(52) \dots \dots \dots d\rho = \frac{Pdt}{v} \cdot \frac{\sqrt{1 + e^2 - 2e \cos(\Phi - \alpha)}}{1 - e \cos(\Phi - \alpha)} (*).$$

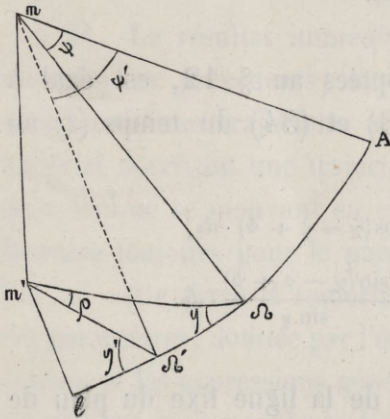
*Conf. Poley 129*  
*(Wronski 184)*  
*P.C. L.H.*

Au lieu d'introduire l'excentricité  $e$ , et les angles  $\Phi$  et  $\alpha$ , on pourrait également se servir de la formule qui donne plus directement  $\operatorname{tg} \omega$  (éq. 17).

(\*) Wronski a écrit  $d\rho = \frac{Pdt}{v}$ . Le facteur par lequel il faut multiplier cette expression inexacte est celui que M. Y. Villarceau a également donné dans les *Comptes rendus* de l'Académie des sciences de Paris, dans sa Note citée sur les méthodes de Wronski.

§ 20. L'expression de  $d\rho$  étant obtenue, il est facile d'en déduire les

FIG. 4.



expressions de  $\eta$  et  $\psi$ . Reportons-nous (fig. 4) à la figure du § 12 et supposons que le plan de l'orbite ait tourné, autour du rayon vecteur  $mm'$ , d'un angle  $\rho$ . L'intersection de ce plan avec le plan fixe deviendra  $mO'$ ,  $\eta$  deviendra  $\eta'$  et  $\psi$ ,  $\psi'$ .

Abaissons l'arc de grand cercle  $m'l$  perpendiculaire à  $AO'O'$ . Nous aurons.

$$\text{tg } m'l = \sin l_{O'} \cdot \text{tg } \eta',$$

d'où

$$\cos l_{O'} \text{tg } \eta' d.l_{O'} + \frac{\sin l_{O'}}{\cos^2 \eta'} d\eta' = 0.$$

On a aussi dans le triangle  $O'O'm'$  :

$$\frac{\sin O'O'}{\sin \rho} = \frac{\sin m'O'}{\sin \eta'}.$$

Pour  $\eta = \eta'$ ,  $O'O' = -d \cdot l_{O'}$ ,  $\rho = d\rho$ , ces relations deviennent :

$$\cos l_{O'} \cdot \text{tg } \eta \cdot d \cdot l_{O'} + \frac{\sin l_{O'}}{\cos^2 \eta} d\eta = 0,$$

$$d\eta = -\cot l_{O'} \sin \eta \cos \eta d \cdot l_{O'}, \quad -d \cdot l_{O'} = \frac{\sin m'O'}{\sin \eta} \cdot d\rho.$$

et, par suite,

$$d\eta = \cot l_{O'} \sin m'O' \cos \eta \cdot d\rho.$$

Mais

$$\text{tg } l_{O'} = \text{tg } m'O' \cdot \cos \eta,$$

donc

$$(53) \dots \dots \dots d\eta = \frac{\sin m'O' \cdot \cos \eta}{\text{tg } m'O' \cdot \cos \eta} d\rho = \cos m'O' \cdot d\rho.$$

On aura, par les mêmes formules,

$$(34) \dots \dots \dots d\psi = \Omega\Omega' = \frac{\sin m'\Omega}{\sin \eta} \cdot d\rho.$$

L'angle  $m'\Omega$ , d'après les conventions adoptées au § 12, est égal à  $\chi - \psi + \Phi$ . On aura donc, en intégrant (33) et (34) du temps  $(t)$  au temps  $t$ ,

$$\left\{ \begin{array}{l} (35) \dots \dots \dots \eta = (\eta)_{(t)} + \int_{(t)}^t \cos(\chi - \psi + \Phi) \cdot d\rho, \\ (36) \dots \dots \dots \psi = (\psi)_{(t)} + \int_{(t)}^t \frac{\sin(\chi - \psi + \Phi)}{\sin \eta} \cdot d\rho. \end{array} \right.$$

Quant à l'angle  $\chi$ , qui détermine la position de la ligne fixe du plan de l'orbite, on aura pour le déterminer, la relation :

$$\chi - \psi + \Phi = m'\Omega.$$

Dans la rotation, l'angle  $\Phi$  reste constant; donc

$$d\chi = d\psi + d \cdot m'\Omega.$$

Or,

$$\sin m'l = \sin m'\Omega \cdot \sin \eta.$$

D'où :

$$\begin{aligned} d \cdot m'\Omega &= -\operatorname{tg} m'\Omega \cot \eta \cdot d\eta, \\ &= -\operatorname{tg} m'\Omega \cot \eta \cos m'\Omega \cdot d\rho, \\ &= -\sin m'\Omega \cot \eta \cdot d\rho. \end{aligned}$$

Donc

$$d\chi = \sin m'\Omega \cdot \left( \frac{1}{\sin \eta} - \cot \eta \right) d\rho = \frac{1 - \cos \eta}{\sin \eta} \sin m'\Omega \cdot d\rho = \sin m'\Omega \operatorname{tg} \frac{\eta}{2} \cdot d\rho$$

et, en intégrant,

$$(37) \dots \dots \dots \chi = (\chi)_{(t)} + \int_{(t)}^t \sin(\chi - \psi + \Phi) \operatorname{tg} \frac{\eta}{2} d\rho.$$

Dans toutes ces expressions (35), (36), (37) (\*),  $d\rho$  a la valeur (31) ou (32).

(\*) Données sans démonstration par Wronski, p. 291 des *Prolégomènes du messianisme*.



## EMPLOI DES FORMULES GÉNÉRALES.

§ 21. Le résultat immédiat des relations dynamiques établies dans les paragraphes précédents, consiste dans la détermination des paramètres variables d'une trajectoire arbitraire à force centrale, sur laquelle un point matériel décrivant une trajectoire donnée quelconque, pourrait être considéré comme se mouvant en chaque instant. En effet, le principe général (A) fournira toujours pour le paramètre de cette force  $H$  elle-même, une valeur (ou, si cette force  $H$  renfermait plusieurs paramètres, une condition entre ces paramètres) donnée par l'équation générale  $H = F$ . La force  $H$  étant ainsi connue et les expressions générales (17) et (18) de  $v$  et  $\varpi$  subsistant toujours, on n'aurait qu'à exprimer les paramètres  $k, l, m \dots$  de la courbe variable choisie, en fonction de  $v, \varpi, H$  et  $r$ , ce qui sera donné immédiatement par la nature connue de cette courbe.

C'est ce principe général que nous avons appliqué plus haut, en choisissant pour trajectoire variable une conique, les intégrales contenues dans les expressions des paramètres variables étant calculées au moyen des coordonnées de la trajectoire réelle.

Dans la question présente, l'emploi le plus intéressant de ces relations dynamiques consiste à déterminer d'une manière de plus en plus approchée la trajectoire d'un point matériel, quand on connaît déjà cette trajectoire par une première approximation. Il suffit pour cela de prendre pour trajectoire variable la courbe même donnée par cette première approximation, et d'en calculer les paramètres variables par la méthode générale exposée plus haut pour une trajectoire variable quelconque. La trajectoire variable ainsi choisie fournira pour toute époque déterminée  $t$ , une représentation géométrique plus exacte de la trajectoire réelle.

D'après cette règle, quand il s'agit des mouvements célestes, dont la première approximation est une conique, la trajectoire variable conique s'impose donc d'elle-même. On exprimera d'une manière approchée, en fonction du temps, les forces  $F, T, P$  et le rayon vecteur et l'on pourra alors effectuer les intégrations contenues dans les formules. La seule intégrale,  $\int_{(t)}' T r dt$ , four-

nira immédiatement les variables  $w, p, a, e, \varpi, v$  (\*);  $\int_{(t)}^{\varpi} \frac{pw}{r^2} dt$  donnera à son tour  $\Phi$ , d'où  $\alpha$ , et en introduisant ces valeurs dans l'équation

$$(26) \dots \dots \dots r = \frac{p}{1 - e \cos(\Phi - \alpha)},$$

où l'on donnera aux quantités  $p, e$  et  $\alpha$  leurs valeurs au temps déterminé  $t$ , cette équation sera celle d'une conique qui représentera la trajectoire réelle d'une manière plus exacte que la conique de la première approximation.

Les données approchées de la trajectoire fourniront de même immédiatement à l'aide de P, les trois intégrales contenues dans  $\eta, \psi, \chi$ , et, par conséquent, les valeurs de ces variables.

La seconde approximation de la trajectoire étant ainsi connue, on s'en servira de la même manière pour en déterminer une troisième, et ainsi de suite, cinq intégrales suffisant dans tous les cas.

Si les forces F, T, P émanent d'autres points, décrivant également des trajectoires, il sera nécessaire de connaître aussi pour la détermination de ces forces, les trajectoires approchées de ces autres points. Les formules serviront à trouver ainsi, avec une exactitude de plus en plus grande, les trajectoires décrites par des points en nombre quelconque soumis à leurs actions mutuelles, que ces trajectoires soient de même nature ou de natures différentes, et quelles que soient d'ailleurs leurs situations respectives.

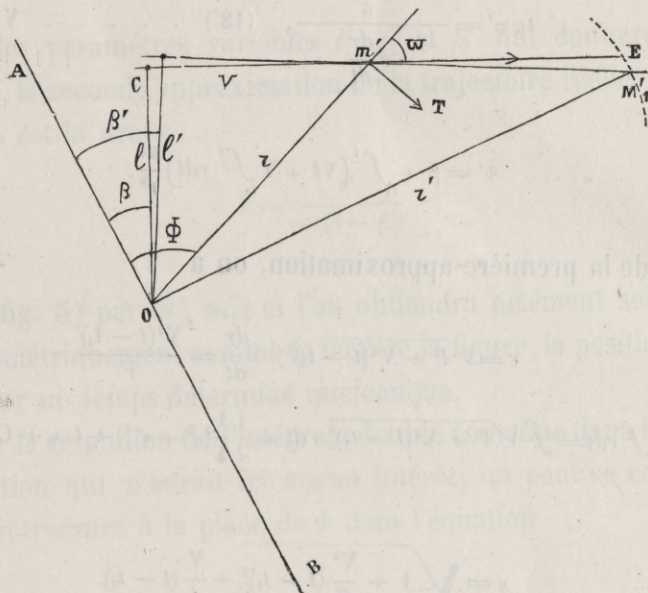
§ 22. Pour donner un exemple de l'application de nos formules à une trajectoire différente d'une conique, supposons (fig. 5) une masse  $m'$  se mouvant sous l'action d'une vitesse initiale V et sollicitée par une force constante T, très faible, perpendiculaire au rayon vecteur  $r$  émanant d'un centre O, et située dans le plan de V et de  $r$  (plan de l'orbite) (\*\*).

(\*) La formule (21')  $a = \frac{Fr^2}{2Fr + v^2}$  donne déjà une valeur approchée du grand axe sans aucune intégration, si l'on se contente de la valeur déjà connue de  $v$ .

(\*\*) Ce cas rappelle celui d'un pôle d'aimant se mouvant sous l'action d'un courant vertical très faible, o.

La première approximation de la trajectoire sera donnée par la ligne droite même, CE, que décrirait  $m'$ , si T n'existait pas. Soit AOB une ligne fixe, origine des angles  $\Phi$  du rayon vecteur dans le plan de l'orbite; OC =  $l$  une perpendiculaire à CE,  $\beta$  l'angle  $\widehat{AOC}$  et  $\varpi$  l'angle de  $r$  et de V.

FIG. 5.



L'équation de la ligne droite CE sera, en supposant  $m'$  en C pour  $t = t_1$ ,

$$r = \sqrt{l^2 + V^2(t - t_1)^2},$$

$$r \sin(\Phi - \beta) = V(t - t_1) \text{ ou } r = \frac{l}{\cos(\Phi - \beta)}$$

les paramètres étant  $l, \beta, V, t_1$ .

En fonction de  $\Phi, r, \varpi, V, t$  on trouve facilement

$$l = r \sin \varpi,$$

$$t - t_1 = + \frac{r \cos \varpi}{V},$$

$$\text{tg}(\Phi - \beta) = + \cot \varpi,$$

équations qui serviront à déterminer  $l, t, \beta$  quand on connaîtra  $V, \varpi, r, \Phi$  en fonction de  $t$ .

Or, les relations générales (17), (18), (19) donnent dans le cas actuel, pour les valeurs  $\varpi', V', \Phi'$  relatives à la nouvelle approximation de la trajectoire :

$$(17') \dots \dots \dots \operatorname{tg} \varpi' = \frac{Vl + T \int_{t_1}^t r dt}{r \frac{dr}{dt}}, \quad (18') \dots \dots \dots V' = \frac{Vl + T \int_{t_1}^t r dt}{r \sin \varpi}$$

et

$$(19') \dots \dots \dots \Phi' = \beta + \int_{t_1}^t (Vl + T \int_{t_1}^t r dt) \frac{dt}{r^2}.$$

A l'aide de la première approximation, on a

$$r = \sqrt{l^2 + V^2(t - t_1)^2}, \quad \frac{dr}{dt} = \frac{V^2(t - t_1)}{r},$$

$$\int r dt = \int \sqrt{l^2 + V^2(t - t_1)^2} \cdot dt = \left\{ \frac{1}{4}(\eta^2 - \eta^{-2}) + l \cdot \eta + C \right\} \frac{l^2}{2V},$$

en posant

$$\eta = \sqrt{1 + \frac{V^2}{l^2}(t - t_1)^2} + \frac{V}{l}(t - t_1).$$

Pour  $t = t_1, \eta = 1$ . Donc

$$\int_{t_1}^t r dt = \left\{ \frac{1}{4}(\eta^2 - \eta^{-2}) + l \cdot \eta \right\} \frac{l^2}{2V}.$$

On en déduira pour les nouvelles valeurs  $\varpi'$  et  $V'$ ,

$$\operatorname{tg} \varpi' = \frac{Vl + T \frac{l^2}{2V} \left[ \frac{\eta^2 - \eta^{-2}}{4} + l \cdot \eta \right]}{V^2(t - t_1)},$$

$$V' = \frac{Vl + T \frac{l^2}{2V} \left[ \frac{\eta^2 - \eta^{-2}}{4} + l \cdot \eta \right]}{\sin \varpi \sqrt{l^2 + V^2(t - t_1)^2}}.$$

A l'aide de ces valeurs et des équations

$$\begin{aligned} l' &= r \sin \varpi' \\ t - t_1 &= \frac{r \cos \varpi'}{V'}, \\ \operatorname{tg}(\Phi' - \beta') &= \cot \varpi', \end{aligned}$$

on calculera les paramètres variables  $l'$ ,  $t_1$  et  $\beta'$  qui donneront pour un temps  $t$  donné, la seconde approximation de la trajectoire réelle. Cette seconde approximation est la droite

$$r = \frac{l'}{\cos(\Phi - \beta')}$$

représentée (fig. 5) par  $m'$ ,  $m'_1$ ; et l'on obtiendra aisément soit analytiquement, soit géométriquement comme le montre la figure, la position plus exacte  $m'_1$  de  $m'$ , pour un temps déterminé quelconque.

Pour éviter la résolution de l'intégrale double contenue dans la valeur (19') de  $\Phi'$ , résolution qui n'aurait ici aucun intérêt, on peut se contenter, pour obtenir  $\beta'$ , d'introduire à la place de  $\Phi$  dans l'équation

$$\operatorname{tg}(\Phi - \beta') = \cot \varpi',$$

sa valeur donnée par la première approximation.

Ce qui précède suffit pour montrer l'extension que peuvent prendre nos formules et la généralité de leur application.

#### CAS PARTICULIER DE LA MÉCANIQUE CÉLESTE.

§ 23. Pour rendre les formules précédentes applicables au cas de la mécanique céleste, et retrouver les formules de Wronski, il faut choisir pour le point origine ou pôle du mouvement, la masse centrale  $m$  du système; T et P

seront les résultantes des composantes des *forces perturbatrices*, par exemple des attractions de masses étrangères  $m''$ ,  $m'''$ , ..., perpendiculaires au rayon vecteur de l'orbite de  $m'$  dans le plan de cette orbite, et perpendiculaires à ce plan, dans le mouvement relatif de  $m'$  par rapport à  $m$ . Quant à  $F$ , elle deviendra

$$-\frac{m+m'}{r^2} + R = -\frac{M}{r^2} + R \text{ (en posant } M = m + m'),$$

$R$  étant la résultante des composantes radiales des forces perturbatrices (par exemple, la somme des attractions de  $m'$ ,  $m'''$  ... suivant le rayon vecteur) dans le mouvement relatif; il suffira donc de remplacer  $F$  par  $-\frac{M}{r^2} + R$ , pour obtenir les formules de la mécanique céleste.

Nous allons réunir ces formules dans le tableau suivant :

$$(13) \quad wp = (wp)_{(t)} + \int_{(t)}^t T r dt,$$

$$(19) \quad \Phi = (\Phi)_{(t)} + \int_{(t)}^t \frac{pw}{r^2} dt.$$

$$(14) \quad w = \frac{M - Rr^2}{(wp)_{(t)} + \int_{(t)}^t T r dt}.$$

$$(15) \quad p = \frac{\left[ (wp)_{(t)} + \int_{(t)}^t T r dt \right]^2}{M - Rr^2}.$$

$$(17) \quad \operatorname{tg} \varpi = \frac{(wp)_{(t)} + \int_{(t)}^t T r dt}{r} \frac{dt}{dr}.$$

$$(18) \quad v = \frac{(wp)_{(t)} + \int_{(t)}^t T r dt}{r \sin \varpi}.$$

$$(16) \quad (v_2) = \frac{(wp)_{(t)} + \int_{(t)}^t T r dt}{r}.$$

$$(22) \quad a = \frac{r}{2 - \frac{p}{r \sin^2 \varpi}} \quad \text{ou}$$

$$(21) \quad a = \frac{r p w^2}{2 p w^2 - r v^2}, \quad (21') \quad a = \frac{M - Rr^2}{\frac{2M}{r} - 2Rr - v^2}.$$

$$(25) \quad e = \sqrt{1 - \frac{p}{a^2}},$$

$$(29) \quad e = (e)_{(t)} - \int_{(t)}^t \left\{ \frac{p}{r} \cos(\Phi - \alpha) \frac{dp}{p} + e \sin^2(\Phi - \alpha) \frac{dw}{w} \right\}.$$

$$(25) \operatorname{tg}(\Phi - \alpha) = \frac{\frac{p}{r}}{\operatorname{tg} \varpi \left( \frac{p}{r} - 1 \right)} \quad (30) \alpha = (\alpha)_{(t)} + \int_{(t)}^t \sin(\Phi - \alpha) \left\{ \cos(\Phi - \alpha) \frac{d \cdot (pw)}{pw} - \frac{1}{e} \cdot \frac{dp}{p} \right\}.$$

$$(26) r = \frac{p}{1 - e \cos(\Phi - \alpha)}.$$

$$(33) \eta = (\eta)_{(t)} + \int_{(t)}^t \cos(\chi - \psi + \Phi) d\rho, \quad (32) d\rho = \frac{P dt}{v \sin \varpi}.$$

$$(36) \psi = (\psi)_{(t)} + \int_{(t)}^t \frac{\sin(\chi - \psi + \Phi)}{\sin \eta} d\rho.$$

$$(37) \chi = (\chi)_{(t)} + \int_{(t)}^t \sin(\chi - \psi + \Phi) \operatorname{tg} \frac{\eta}{2} d\rho.$$

Ce qui a été dit sur l'usage de ces formules dans le cas général s'applique identiquement et sans difficulté au cas actuel.

§ 24. Dans l'établissement des formules précédentes, nous avons considéré comme fixe le plan auquel, par les coordonnées  $\psi$ ,  $\eta$ , est rapporté le plan variable de l'orbite. Il peut cependant se présenter des cas où c'est à un plan variable lui-même que ce plan de l'orbite est rapporté; c'est ce qui arrive, par exemple, dans la théorie du mouvement de la lune, où l'on prend pour plan origine l'écliptique, c'est-à-dire le plan variable de l'orbite terrestre. Il faut donc connaître les coordonnées angulaires du plan variable et de la ligne fixe de l'orbite par rapport au plan fixe, ou plan invariable du système tout entier, — coordonnées que nous désignerons par

H,  $\Psi$ , X, —

en fonction de coordonnées de cette orbite variable par rapport au *plan origine variable* lui-même, ou plan *intermédiaire*, coordonnées désignées par

$\eta$ ,  $\psi$ ,  $\chi$ , —

et des coordonnées du *plan intermédiaire* par rapport au plan fixe, coordonnées désignées par

$$(\eta) (\psi) (\chi).$$

Dans la figure ci-après (fig. 6) :

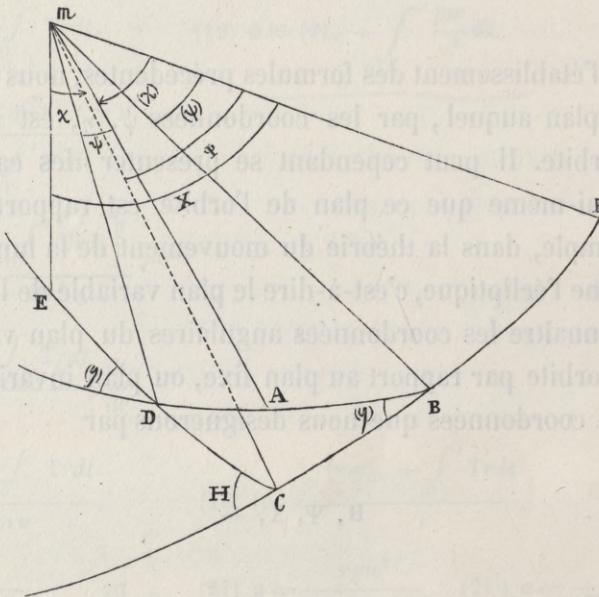
$mFB$  est le plan fixe,  
 $mF$  sa ligne fixe;

$mBA$  le plan intermédiaire,  
 $mA$  sa ligne fixe;  
 $mCD$  le plan de l'orbite,  
 $mE$  sa ligne fixe.

Il s'agit d'obtenir :

$H, \Psi, X$  en fonction de  $\eta, \psi, \chi$  et de  $(\eta), (\psi), (\chi)$ .

FIG. 6.



On aura, d'abord, dans le triangle DCB,

$$\cos H = \cos \eta \cos (\eta) - \sin \eta \sin (\eta) \cos DB$$



et, comme

$$(58) \quad \left\{ \begin{array}{l} DB = (\chi) - (\psi) + \psi, \\ \cos H = \cos \eta \cos (\eta) - \sin \eta \sin (\eta) \cos [(\chi) - (\psi) + \psi], \\ \sin H = \sqrt{1 - \cos^2 H}, \end{array} \right.$$

le signe + pour le nœud ascendant.

Pour

$$\Psi = CF,$$

on a

$$\cos \Psi = \cos BF \cos BC - \sin BF \sin BC,$$

$$\sin \Psi = \sin BF \cos BC + \cos BF \sin BC$$

où

$$BF = (\psi),$$

$$\frac{\sin BC}{\sin \eta} = \frac{\sin DB}{\sin H} = \frac{\sin [(\chi) - (\psi) + \psi]}{\sin H}$$

dans le triangle DBC.

Dans ce même triangle, on a

$$\cos BC \sin H = \cos [(\chi) - (\psi) + \psi] \sin \eta \cos (\eta) + \sin (\eta) \cos \eta.$$

Par conséquent

$$\cos \Psi = \frac{\cos (\psi)}{\sin H} \left\{ \cos [(\chi) - (\psi) + \psi] \sin \eta \cos (\eta) + \sin (\eta) \cos \eta \right\}$$

$$- \frac{\sin \eta}{\sin H} \sin [(\chi) - (\psi) + \psi] \sin (\psi).$$

$$\sin \Psi = \frac{\sin (\psi)}{\sin H} \left\{ \cos [(\chi) - (\psi) + \psi] \sin \eta \cos (\eta) + \sin (\eta) \cos \eta \right\}$$

$$+ \frac{\cos (\psi)}{\sin H} \sin [(\chi) - (\psi) + \psi] \sin \eta.$$

ou bien

$$(59) \quad \left\{ \begin{array}{l} \cos \Psi = \frac{\sin \eta}{\sin H} \left\{ \cos (\psi) \left\{ \cos [(\chi) - (\psi) + \psi] \cos (\eta) + \sin (\eta) \cot \eta \right\} - \sin (\psi) \sin [(\chi) - (\psi) + \psi] \right\}, \\ \sin \Psi = \frac{\sin \eta}{\sin H} \left\{ \sin (\psi) \left\{ \cos [(\chi) - (\psi) + \psi] \cos (\eta) + \sin (\eta) \cot \eta \right\} + \cos (\psi) \sin [(\chi) - (\psi) + \psi] \right\}. \end{array} \right.$$

Enfin, on aura pour

$$X = CF + EC$$

$$(40) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sin X = \sin \Psi \cos(X - \Psi) + \cos \Psi \sin(X - \Psi), \\ \cos X = \cos \Psi \cos(X - \Psi) - \sin \Psi \sin(X - \Psi), \end{array} \right.$$

expressions dans lesquelles

$$\begin{aligned} \sin(X - \Psi) &= \sin(\chi - \psi) \cos DC + \cos(\chi - \psi) \sin DC, \\ \cos(X - \Psi) &= \cos(\chi - \psi) \cos DC - \sin(\chi - \psi) \sin DC. \end{aligned}$$

Mais, dans le triangle DCB, on a

$$\begin{aligned} \sin DC &= \frac{\sin(\eta) \sin[(\chi) - (\psi) + \psi]}{\sin H}, \\ \cos DC &= \frac{\cos[(\chi) - (\psi) + \psi] \sin(\eta) \cos \eta + \sin \eta \cos(\eta)}{\sin H}. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \sin(X - \Psi) &= \frac{\sin(\eta)}{\sin H} \left\{ \sin(\chi - \psi) \left\{ \sin \eta \cot(\eta) + \cos[(\chi) - (\psi) + \psi] \cos \eta \right\} + \cos(\chi - \psi) \sin[(\chi) - (\psi) + \psi] \right\}, \\ \cos(X - \Psi) &= \frac{\sin(\eta)}{\sin H} \left\{ \cos(\chi - \psi) \left\{ \sin \eta \cot(\eta) + \cos[(\chi) - (\psi) + \psi] \cos \eta \right\} - \sin(\chi - \psi) \sin[(\chi) - (\psi) + \psi] \right\}. \end{aligned}$$

On obtiendra ensuite  $\sin X$  et  $\cos X$  par substitution dans les expressions données plus haut (\*).

§ 25. Si l'on connaît, par exemple dans la théorie de la lune, les coordonnées  $(\psi)$ ,  $(\eta)$ ,  $(\chi)$  de l'écliptique par rapport au plan fixe et les coordonnées  $\psi$ ,  $\eta$ ,  $\chi$  de l'orbite lunaire par rapport à l'écliptique, les équations précédentes feront connaître les coordonnées  $\Psi$ ,  $H$ ,  $X$  de l'orbite lunaire par rapport au plan fixe.  $(\psi)$ ,  $(\eta)$ ,  $(\chi)$  sont données par des équations semblables aux équations (35), (36), (37) en fonction immédiate de la composante  $P'$  normale au plan de l'écliptique.

(\*) Tous ces calculs vérifient les formules (38), (39), (40) données sans démonstration par Wronski. (*Réforme*, etc., p. LVI.)

$\psi, \eta, \chi$  étant fonctions de  $(\psi), (\eta), (\chi), \Psi, H, X$ , on obtiendra les variations de  $\psi, \eta, \chi$  qui dépendent des variations  $(\psi), (\eta), (\chi)$  du plan de l'écliptique, en faisant varier seulement  $(\psi), (\eta), (\chi)$  dans les relations (38), (39), (40). On trouverait ainsi pour ces variations :

$$\begin{aligned} \delta\psi &= f_1 \{ \delta(\psi) \delta(\eta) \delta(\chi) \Psi H X \} \\ \delta\eta &= f_2 \{ \delta(\psi) \delta(\eta) \delta(\chi) \Psi H X \} \\ \delta\chi &= f_3 \{ \delta(\psi) \delta(\eta) \delta(\chi) \Psi H X \}, \end{aligned}$$

$f_1, f_2, f_3$  étant les trois fonctions résultant de la résolution des équations variées. Il ne faut pas oublier que, dans ces équations,  $\Psi, H, X$  varient avec le temps, et ont des valeurs différentes pour chaque temps donné. L'intégration des variations  $\delta\psi, \delta\eta, \delta\chi$ , de  $(t)$  à  $t$ , donnera les quantités  $\psi', \eta', \chi'$  dont  $\psi, \eta, \chi$  ont varié pendant le temps  $t - (t)$  par l'influence des variations de  $(\psi), (\eta), (\chi)$ . D'ailleurs, les quantités  $\psi, \eta, \chi$ , (35), (36), (37) obtenues précédemment sont, à une constante près, celles dont les coordonnées de l'orbite lunaire ont varié en supposant  $(\psi), (\eta), (\chi)$  constants. Il en résulte que les valeurs des coordonnées du plan de l'orbite lunaire par rapport à l'écliptique, seront égales à

$$\begin{aligned} \psi + \psi', \\ \eta + \eta', \\ \chi + \chi'. \end{aligned}$$

On voit, cependant, que les calculs nécessaires à la détermination précédente seraient très compliqués et qu'ils exigeraient la considération des quantités auxiliaires  $(\psi), (\eta), (\chi), \Psi, H, X$ .

§ 26. On peut éviter l'introduction de ces quantités, et résoudre le problème d'une manière beaucoup plus élégante, en calculant directement, pour l'écliptique, ses coordonnées par rapport au plan de l'orbite lunaire, pris pour terme de comparaison. Supposons que la terre soit prise pour point origine. L'écliptique sera le plan variable de l'orbite décrite par le soleil

autour de la terre. L'angle infiniment petit  $d\rho'$ , dont l'écliptique tourne autour du rayon vecteur du soleil dans le temps  $dt$ , sera donné par la formule

$$(41) \dots \dots \dots d\rho' = \frac{P' dt}{v' \sin \varpi'}$$

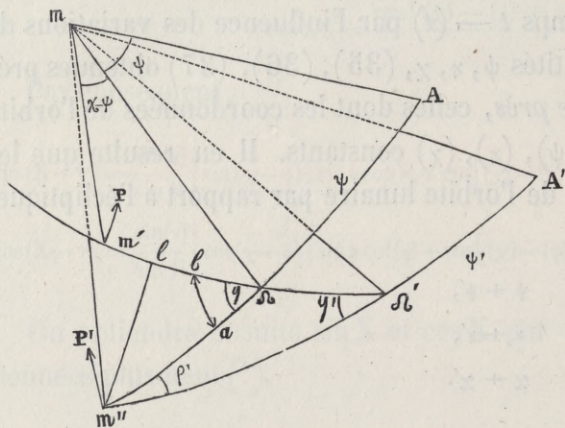
$P'$  étant la composante normale à l'écliptique des forces accélératrices qui sollicitent le soleil,  $v'$  sa vitesse réelle et  $\varpi'$  l'angle de son rayon vecteur et de la tangente à l'orbite qu'il décrit. Soient (fig. 7)

$m'\Omega$ , l'orbite lunaire;

$m''\Omega$ , l'orbite solaire.

Nous supposons les forces  $P$  et  $P'$  normales à leurs plans et dirigées dans le sens de l'arc  $ab$  qui mesure

FIG. 7.



l'inclinaison mutuelle  $\eta$ . Si, par l'action de  $P'$ , l'écliptique se déplace de l'angle  $\rho'$ ,  $\eta$  deviendra  $\eta'$ ,  $\psi = \Omega A$  deviendra  $\psi' = \Omega' A'$  en ayant toujours

$$m'A = \phi, \quad m''A' = \phi',$$

$\Phi'$  étant l'angle dont le soleil  $m''$  s'est déplacé à partir de la ligne fixe  $mA$ , ou  $mA'$ .

Enfin,  $\chi = m'\Omega + \Omega A$  devient  $\chi' = m'\Omega' + \Omega' A'$ .

Calculons  $d\eta'$ ,  $d\psi'$ ,  $d\chi'$  pour  $\eta' = \eta$ ,  $\psi' = \psi$ ,  $\chi' = \chi$ .

1. On a, en abaissant  $m''l$  perpendiculaire sur  $m'\Omega$ ,

$$\text{tg } m''l = \sin l\Omega' \text{tg } \gamma' \text{ et } \frac{\sin \Omega\Omega'}{\sin \rho'} = \frac{\sin m'\Omega}{\sin \eta'}$$

d'où l'on déduit, comme à la page 31,

$$d\eta = - \cot l\Omega \sin \eta \cos \eta d \cdot l\Omega'$$

et, à cause de

$$d \cdot \delta\delta\delta' = + d \cdot l\delta',$$

$$d\eta = - \cot l\delta \sin m''\delta \cos \eta \cdot d\rho',$$

d'où encore (p. 31),

$$(42) \dots \dots \dots d\eta = - \cos m''\delta d\rho' = - \cos(\Phi' - \psi) d\rho'.$$

2. Pour calculer  $d\psi$ , on a les relations

$$\Phi' = m''\delta + \psi = m''\delta' + \psi',$$

d'où

$$d\psi' = - d \cdot m''\delta'.$$

Or,

$$\frac{\sin m''\delta'}{\sin \eta} = \frac{\sin m''\delta}{\sin \eta'};$$

d'où

$$\cos m''\delta' d \cdot m''\delta' = - \frac{\sin \eta \sin(\Phi' - \psi)}{\sin^2 \eta'} \cos \eta' \cdot d\eta'.$$

Pour

$$\eta' = \eta, \quad d\eta' = d\eta$$

et l'on a :

$$\cos(\Phi' - \psi) d \cdot m''\delta = \frac{\sin(\Phi' - \psi)}{\operatorname{tg} \eta} \cos(\Phi' - \psi) d\rho'$$

ou

$$d \cdot m''\delta = \frac{\sin(\Phi' - \psi)}{\operatorname{tg} \eta} \cdot d\rho'.$$

Donc :

$$(45) \dots \dots \dots d\psi = - \frac{\sin(\Phi' - \psi)}{\operatorname{tg} \eta} \cdot d\rho'.$$

3. Enfin, pour  $d\chi$ , on a

$$\chi' = m'\delta' + \psi' = (\chi - \psi) + \delta\delta\delta' + \psi',$$

$$d\chi' = d \cdot \delta\delta\delta' + d\psi'.$$

Or,

$$\frac{\sin \delta\delta\delta'}{\sin \rho} = \frac{\sin(\Phi' - \psi)}{\sin \eta'}$$

d'où

$$\frac{d \cdot \delta \delta \delta'}{d\rho} = \frac{\sin(\Phi' - \psi)}{\sin \eta}$$

Donc

$$\begin{aligned} d\chi &= \frac{\sin(\Phi' - \psi)}{\sin \eta} d\rho - \frac{\sin(\Phi' - \psi)}{\operatorname{tg} \eta} d\rho' \\ &= \sin(\Phi' - \psi) \frac{1 - \cos \eta}{\sin \eta} \cdot d\rho', \end{aligned}$$

et enfin

$$(44) \quad \dots \dots \dots d\chi = + \sin(\Phi' - \psi) \operatorname{tg} \frac{\eta}{2} \cdot d\rho'.$$

En intégrant maintenant, de  $(t)$  à  $t$ , les expressions (42), (43), (44), on obtiendra les quantités  $\eta'$ ,  $\psi'$ ,  $\chi'$  dont les coordonnées  $\eta$ ,  $\psi$ ,  $\chi$  ont varié par le fait des variations de position de l'écliptique. Ainsi  $\eta + \eta'$ ,  $\psi + \psi'$ ,  $\chi + \chi'$  seront, au temps  $t$ , les coordonnées de l'orbite lunaire par rapport à l'écliptique. Ces coordonnées seront, en appelant  $(\eta_1)_{(t)}$ ,  $(\psi_1)_{(t)}$ ,  $(\chi_1)_{(t)}$  leurs valeurs au temps  $(t)$  :

$$(45) \quad \left\{ \begin{aligned} \eta_1 &= (\eta_1)_{(t)} + \int_{(t)}^t \cos(\chi - \psi + \Phi) d\rho - \int_{(t)}^t \cos(\Phi' - \psi) d\rho', \\ \psi_1 &= (\psi_1)_{(t)} + \int_{(t)}^t \frac{\sin(\chi - \psi + \Phi)}{\sin \eta} d\rho - \int_{(t)}^t \frac{\sin(\Phi' - \psi)}{\operatorname{tg} \eta} d\rho', \\ \chi_1 &= (\chi_1)_{(t)} + \int_{(t)}^t \sin(\chi - \psi + \Phi) \operatorname{tg} \frac{\eta}{2} d\rho + \int_{(t)}^t \sin(\Phi' - \psi) \operatorname{tg} \frac{\eta}{2} d\rho' (*). \end{aligned} \right.$$

Il suffira donc, ici comme précédemment, de connaître d'une façon approchée les coordonnées  $\eta$ ,  $\psi$ ,  $\chi$  de l'orbite lunaire par rapport à l'écliptique fixe, l'angle  $\Phi'$  et la variation absolue  $d\rho'$ , qui seront fournis par les formules connues, pour obtenir, par des substitutions successives, les valeurs de plus en plus exactes de  $\eta$ ,  $\psi$ ,  $\chi$ , en fonction du temps.

§ 27. Nous possédons maintenant toutes les formules nécessaires pour déterminer par les méthodes algorithmiques connues, à l'aide d'approxima-

(\*) Données sans démonstration par Wronski. (*Réforme*, etc., p. CLXXXI.)

tions successives, toutes les circonstances du mouvement d'un globe, chaque fois que sa trajectoire réelle sera déjà connue d'une manière approchée.

Ce qui frappe dès l'abord dans ces formules, c'est leur absolue généralité. Que les trois forces  $R$ ,  $T$ ,  $P$  soient les composantes de l'attraction de globes extérieurs, ou dépendent seulement de la forme des masses attirantes, ou soient dues à la résistance d'un milieu, ou à une force répulsive de surface, ou aux déformations des globes, etc., ces formules donnent l'expression, sous forme d'intégrations finies, des paramètres variables de la conique, paramètres qui, substitués dans l'équation (26) de la trajectoire, donneront de celle-ci une représentation de plus en plus rigoureuse.

§ 28. Comme M. Y. Villarceau l'a rappelé dans sa note sur les méthodes de Wronski, ce géomètre opposait sa méthode, qu'il nomme *méthode de l'ordre*, à la méthode actuelle où l'on considère les forces exercées par les globes extérieurs comme des *forces perturbatrices*, méthode qu'il appelait *méthode du désordre*.

Si, d'un côté, l'on considère le mouvement conique d'un globe comme le mouvement *qu'il devrait posséder*, il est clair que toutes les forces qui transforment ce mouvement méritent le nom de *forces perturbatrices*. Si, d'un autre côté, l'on regarde l'ensemble de toutes les forces motrices, comme assurant l'équilibre du système en l'assujettissant à des conditions périodiques, il n'y a aucune raison pour donner aux unes le nom de *perturbatrices* et aux autres celui de *conservatrices*.

Toute la question serait néanmoins de savoir si l'ensemble de toutes ces forces concourt réellement à maintenir les conditions périodiques actuelles du système, ce qui est loin d'être prouvé, surtout en tenant compte des déformations des globes, qui doivent être comprises aussi dans les formules générales de Wronski. Il faut avouer, cependant, que le nom de *forces perturbatrices* est plus commode pour le langage qu'il n'est heureux au point de vue philosophique.

§ 29. Wronski a donné dans la *Réforme des mathématiques* les expressions des paramètres variables dans la méthode du *désordre*, c'est-à-dire en



considérant les trois composantes générales  $R$ ,  $T$ ,  $P$  comme des *forces perturbatrices*. Nous les reproduisons ici pour deux raisons :

1° D'abord, parce que la comparaison de cette méthode avec la précédente fera toucher du doigt l'esprit de cette dernière;

2° Pour épargner à ceux qui voudraient les vérifier dans l'ouvrage et d'après la méthode de l'auteur, des calculs très embarrassants et la substitution de quelques raisonnements.

### § 30. Procédons à cette exposition.

$m'$  décrivant une conique autour de  $m$  sous la seule action réciproque de ces deux masses, on peut supposer, au temps  $t$ , les forces perturbatrices  $R$ ,  $T$ ,  $P$  appliquées à  $m'$ , chercher les variations qui résultent de ces forces seules, pendant le temps  $dt$ , dans le rayon vecteur  $r$ , la vitesse  $v$ , l'angle  $\omega$  du rayon vecteur et de la tangente, l'angle dont le plan variable de l'orbite tourne autour du rayon vecteur, et ensuite en déduire, comme précédemment, par les propriétés des coniques, les variations des constantes de la trajectoire. C'est proprement le point de vue dans lequel les forces  $R$ ,  $T$ ,  $P$  sont *perturbatrices* du mouvement conique primitivement établi.

Des trois forces  $R$ ,  $T$ ,  $P$ , les deux premières seules, agissant dans le plan de l'orbite, exercent une influence directe sur la position de cette orbite dans son plan et sur ses dimensions, c'est-à-dire sur les trois paramètres

$$\alpha, a \text{ et } e.$$

Occupons-nous d'abord de leurs variations, et, pour cela, remarquons qu'ils sont fonction de trois autres quantités qui déterminent également d'une manière complète la trajectoire conique (puisque, en effet, la masse centrale  $m + m'$  est ici donnée), savoir :

le rayon vecteur  $r$  correspondant à l'angle donné  $\phi$ ,

la vitesse totale  $v$

et l'angle  $\omega$  de la vitesse et du rayon vecteur.

Or, les variations de ces trois dernières quantités sont des fonctions immé-



diates des forces  $R, T$  qui étant, en effet, appliquées à la masse  $m'$ , ont pour effet direct de faire varier sa vitesse, sa distance à  $m$  et sa direction. Il faut donc :

1° A l'aide des relations connues entre  $\alpha, a, e$  et  $r, v, \varpi$  dans le mouvement conique, exprimer les variations  $\partial\alpha, \partial a, \partial e$  de  $\alpha, a, e$  correspondantes à des variations arbitraires  $\partial r, \partial v, \partial \varpi$  de  $r, v, \varpi$ ;

2° Chercher les différentielles  $dr, dv, d\varpi$  de  $r, v, \varpi$  produites par l'action de  $R, T$  pendant le temps  $dt$ ;

3° Poser ensuite  $\partial r = dr, \partial v = dv, \partial \varpi = d\varpi$  et remplacer dans les expressions de  $\partial\alpha, \partial a, \partial e$ . Ces variations seront alors les différentielles  $d\alpha, da, de$  produites pendant le temps  $dt$  par  $R$  et  $T$  et l'on n'aura plus qu'à intégrer pour obtenir  $\alpha, a, e$  en fonction de  $t$ .

§ 31. Les relations qui lient  $\alpha, a, e$  à  $r, v, \varpi$  ont été données précédemment. Ce sont les relations

$$\left\{ \begin{array}{l} (5) \quad . \quad . \quad . \quad r = \frac{p}{1 - e \cos \varphi}. \\ (6) \quad . \quad . \quad . \quad (v_2) = w(1 - e \cos \varphi). \\ (7) \quad . \quad . \quad . \quad v = w\sqrt{1 + e^2 - 2e \cos \varphi} \end{array} \right.$$

auxquelles il faut joindre les relations également établies ou connues :

$$\left\{ \begin{array}{l} (11) \quad . \quad . \quad . \quad \varphi = \Phi - \alpha. \\ (10) \quad . \quad . \quad . \quad w^2 = \frac{M}{p}, \quad p = a(1 - e^2). \\ (6) \quad . \quad . \quad . \quad (v_1) = we \sin \varphi, \quad (v_1) = \frac{dr}{dt}, \quad (v_2) = \frac{rd\varphi}{dt}. \\ (46) \quad . \quad . \quad . \quad \text{tg } \varpi = \frac{rd\varphi}{dr}. \end{array} \right.$$

On tire de (10),

$$w^2 = \frac{M}{a(1 - e^2)};$$

de (6) et (46),

$$(v_2) = \operatorname{tg} \varpi \frac{dr}{dt} = -we \sin \varphi \operatorname{tg} \varpi,$$

et les équations (5), (6), (7) deviennent, par substitution,

$$\left\{ \begin{array}{l} (47) \quad . \quad . \quad . \quad r(1 - e \cos \varphi) = a(1 - e^2), \\ (48) \quad . \quad . \quad . \quad e(\cos \varphi - \sin \varphi \operatorname{tg} \varpi) = 1, \\ (49) \quad . \quad . \quad . \quad v^2 a(1 - e^2) = M(1 + e^2 - 2e \cos \varphi), \end{array} \right.$$

où n'entrent plus, outre l'angle  $\varphi = \Phi - \alpha$ , que les quantités  $a, e, \alpha, r, v, \varpi$ . (La quantité  $\alpha$  est comprise dans cet angle  $\varphi$  que nous avons conservé pour simplifier l'écriture.)

*Remarque au sujet de la quantité  $\Phi$ .* L'angle  $\Phi$  qui fixe la position du rayon vecteur  $r$ , varie pendant le temps  $dt$ , et à cette variation  $\delta\Phi$  de  $\Phi$  répondent des variations  $(\delta r)$ ,  $(\delta v)$ ,  $(\delta \varpi)$  de  $r, v, \varpi$ .

Il en résulte que les variations totales et réelles de  $r, v, \varpi$  sont égales à

$$(\delta r) + \delta r, \quad (\delta v) + \delta v, \quad (\delta \varpi) + \delta \varpi,$$

en représentant par  $\delta r, \delta v, \delta \varpi$  les variations dues à des forces étrangères.

Si maintenant, l'on déduit des équations précitées les variations de  $a, e, \alpha$ , on les obtiendra sous la forme

$$\begin{aligned} \delta a &= A [(\delta r) + \delta r] + A' [(\delta v) + \delta v] + A'' [(\delta \varpi) + \delta \varpi], \\ \delta e &= B [(\delta r) + \delta r] + B' [(\delta v) + \delta v] + B'' [(\delta \varpi) + \delta \varpi], \\ \delta \alpha &= C [(\delta r) + \delta r] + C' [(\delta v) + \delta v] + C'' [(\delta \varpi) + \delta \varpi], \end{aligned}$$

$A, A', A'', B, B', B'', C, C', C''$ , étant des coefficients fonctions de  $a, e, \alpha, r, v, \varpi, \Phi$ . Or, en supposant nulle l'influence des forces étrangères, on aurait eu :

$$\begin{aligned} 0 &= A(\delta r) + A'(\delta v) + A''(\delta \varpi), \\ 0 &= B(\delta r) + B'(\delta v) + B''(\delta \varpi), \\ 0 &= C(\delta r) + C'(\delta v) + C''(\delta \varpi). \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\delta a = A\delta r + A'\delta v + A''\delta\sigma,$$

$$\delta e = B\delta r + B'\delta v + B''\delta\sigma,$$

$$\delta\alpha = C\delta r + C'\delta v + C''\delta\sigma.$$

Il faut donc dans les équations (47), (48), (49) considérer  $(\delta r)$ ,  $(\delta v)$ ,  $(\delta\sigma)$  comme nuls, ou, en d'autres termes,  $\Phi$  comme constant. Cette condition donne, en vertu de la relation  $\varphi = \Phi - \alpha$ ,

$$d\varphi = -d\alpha.$$

§ 32. Ceci étant bien établi, procédons d'après cette règle à la variation des équations (47), (48), (49). La variation de ces équations telles qu'elles sont données, fournit entre  $\delta a$ ,  $\delta e$ ,  $\delta\sigma$  trois équations du premier degré dont la résolution, et surtout la simplification ultérieure, donnent lieu à des calculs extrêmement compliqués. On procède plus simplement de la manière suivante. On tire de l'équation (47) :

$$e \cos \varphi = 1 - \frac{a(1 - e^2)}{r}.$$

En transportant cette valeur dans l'équation (49), elle devient :

$$v^2 a(1 - e^2) = M \left( 1 + e^2 - 2 + \frac{2a(1 - e^2)}{r} \right) = M(1 - e^2) \left( \frac{2a}{r} - 1 \right)$$

ou bien,

$$\frac{2a}{r} - 1 = \frac{av^2}{M}.$$

D'où, en variant,

$$\frac{2\delta a}{r} - \frac{2a\delta r}{r^2} = \frac{v^2\delta a + 2va\delta v}{M},$$

$$\delta a \left( \frac{2}{r} - \frac{v^2}{M} \right) = \frac{2a}{r^2} \delta r + \frac{2va}{M} \delta v$$

et, comme

$$\frac{2}{r} - \frac{v^2}{M} = \frac{1}{a},$$

(50) . . . . .  $\delta a = \frac{2a^2}{r^2} \delta r + \frac{2a^2v}{M} \delta v.$

(119, Refai)

Pour obtenir  $\partial x$  et  $\partial c$ , varions maintenant les équations (47) et (48). Nous obtiendrons, pour (48) d'abord :

$$\frac{\partial e}{e} + e \left( -\sin \varphi \partial \varphi - \cos \varphi \operatorname{tg} \varpi \partial \varphi - \frac{\sin \varphi}{\cos^2 \varpi} \partial \varpi \right) = 0$$

ou

$$\frac{\partial e}{e} = e \cos \varphi (\operatorname{tg} \varphi + \operatorname{tg} \varpi) \partial \varphi + \frac{e \sin \varphi}{\cos^2 \varpi} \partial \varpi,$$

où l'on a :

$$\left\{ \begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi + \operatorname{tg} \varpi &= \operatorname{tg} \varphi - \frac{1 - e \cos \varphi}{e \sin \varphi} = \frac{e - \cos \varphi}{e \sin \varphi \cos \varphi} \\ \text{et } \frac{1}{\cos^2 \varpi} &= 1 + \operatorname{tg}^2 \varpi = 1 + \frac{1 + e^2 \cos^2 \varphi - 2e \cos \varphi}{e^2 \sin^2 \varphi} = \frac{e^2 + 1 - 2e \cos \varphi}{e^2 \sin^2 \varphi} \end{aligned} \right.$$

et, par conséquent,

$$(51) \dots \dots \dots \frac{\partial e}{e} = \frac{e - \cos \varphi}{\sin \varphi} \partial \varphi + \frac{1 + e^2 - 2e \cos \varphi}{e \sin \varphi} \partial \varpi.$$

La variation de (47) donnera

$$\partial r = \frac{r}{a} \partial a - \frac{2re}{1 - e^2} \partial e + \frac{r^2 \cos \varphi}{a(1 - e^2)} \partial e - \frac{r^2 e \sin \varphi}{a(1 - e^2)} \partial \varphi.$$

D'où, à l'aide de l'équation (50),

$$\partial r = \frac{2a}{r} \partial r + \frac{2avr}{M} \partial v - \frac{2re}{1 - e^2} \partial e + \frac{r^2 \cos \varphi}{a(1 - e^2)} \partial e - \frac{r^2 e \sin \varphi}{a(1 - e^2)} \partial \varphi,$$

$$(52) \dots \dots (r^2 \cos \varphi - 2rae) \partial e - r^2 e \sin \varphi \partial \varphi = (1 - e^2) a \left( 1 - \frac{2a}{r} \right) \partial r - \frac{2a^2(1 - e^2)vr}{M} \partial v.$$

Multiplions l'équation (51) par  $er^2 \sin \varphi$ , l'équation (52) par  $\frac{\cos \varphi - e}{\sin \varphi}$  et ajoutons-les membre à membre, afin d'éliminer  $\partial \varphi$ . Nous obtiendrons :

$$\left[ r^2 \sin \varphi + \frac{(r^2 \cos \varphi - 2rae)(\cos \varphi - e)}{\sin \varphi} \right] \partial e = \left\{ \begin{aligned} &(1 - e^2) a \left( 1 - \frac{2a}{r} \right) \frac{\cos \varphi - e}{\sin \varphi} \cdot \partial r \\ &- \frac{2a^2(1 - e^2)v}{Mr} \cdot \frac{\cos \varphi - e}{\sin \varphi} \cdot \partial v \\ &+ (1 + e^2 - 2e \cos \varphi) r^2 \cdot \partial \varpi. \end{aligned} \right.$$

Le coefficient de  $\partial r$  sera

$$\begin{aligned} & \frac{e - \cos \varphi}{r} \cdot \frac{a(1 - e^2) \left( \frac{2a}{r} - 1 \right)}{r - re \cos \varphi - 2ae \cos \varphi + 2ae^2} \\ &= \frac{e - \cos \varphi}{r} \cdot \frac{a(1 - e^2) \left( \frac{2a}{r} - 1 \right)}{r(1 - e \cos \varphi) - 2ae (\cos \varphi - e)} \\ &= \frac{e - \cos \varphi}{r} \cdot \frac{a(1 - e^2) \left( \frac{2a}{r} - 1 \right)}{a(1 - e^2) - 2ae \left( \frac{1}{e} - \frac{a(1 - e^2)}{re} - e \right)} \\ &= \frac{e - \cos \varphi}{r} \cdot \frac{a(1 - e^2) \left( \frac{2a}{r} - 1 \right)}{a(1 - e^2) - 2a \left( 1 - e^2 - \frac{a(1 - e^2)}{r} \right)} \\ &= \frac{e - \cos \varphi}{r} \cdot \frac{a(1 - e^2) \left( \frac{2a}{r} - 1 \right)}{a(1 - e^2) \left( 1 - 2 + \frac{2a}{r} \right)} \\ &= \frac{e - \cos \varphi}{r} \cdot \end{aligned}$$

On obtiendra semblablement pour le coefficient de  $\partial v$ ,

$$\frac{2(e - \cos \varphi)}{Mr} \cdot \frac{a^2(1 - e^2)vr}{a(1 - e^2) \left( \frac{2a}{r} - 1 \right)} = 2(e - \cos \varphi) \frac{av}{M \left( \frac{2a}{r} - 1 \right)}$$

Mais, on a

$$\frac{2a}{r} - 1 = \frac{av^2}{M};$$

donc, ce coefficient se réduit à

$$\frac{2(e - \cos \varphi)}{v}$$

Enfin, le coefficient de  $\partial \omega$  sera

$$\frac{(1 + e^2 - re \cos \varphi)r^2 \sin \varphi}{ra(1 - e^2) \left( \frac{2a}{r} - 1 \right)} = \frac{r \sin \varphi}{a} \cdot \frac{1 + e^2 - 2e \cos \varphi}{(1 - e^2) \left( \frac{2a}{r} - 1 \right)}$$

et, à l'aide de (49),

$$= \frac{r \sin \varphi}{a} \cdot \frac{v^2 a(1 - e^2)}{M(1 - e^2) \frac{av^2}{M}} = \frac{r \sin \varphi}{a}$$

On a donc, pour  $\delta e$ , l'expression très simple :

$$(55) \quad \delta e = \frac{e - \cos \varphi}{r} \cdot \delta r + \frac{2(e - \cos \varphi)}{v} \cdot \delta v + \frac{r \sin \varphi}{a} \cdot \delta \alpha.$$

(119 m)

Quant à  $\delta \varphi$ , l'équation (51) donnera

$$\delta \varphi = \frac{\sin \varphi}{re} \delta r + \frac{2 \sin \varphi}{ve} \delta v + \frac{r \sin^2 \varphi}{ae(e - \cos \varphi)} \delta \alpha - \frac{1 + e^2 - 2e \cos \varphi}{e(e - \cos \varphi)} \delta \alpha.$$

Le coefficient de  $\delta \alpha$  se simplifie de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \frac{r \sin^2 \varphi}{ae(e - \cos \varphi)} - \frac{1 + e^2 - 2e \cos \varphi}{e(e - \cos \varphi)} &= \frac{r \sin^2 \varphi - a - ae^2 + 2ae \cos \varphi}{ae(e - \cos \varphi)} \\ &= \frac{r - a - r \cos^2 \varphi - ae^2 + 2ae \cos \varphi}{ae(e - \cos \varphi)} \end{aligned}$$

et, en remarquant que, d'après l'équation (47),  $r - a = re \cos \varphi - ae^2$ ,

$$\begin{aligned} &= \frac{re \cos \varphi - 2ae^2 - r \cos^2 \varphi + 2ae \cos \varphi}{ae(e - \cos \varphi)} \\ &= \frac{(r \cos \varphi - 2ae)(e - \cos \varphi)}{ae(e - \cos \varphi)} = \frac{r \cos \varphi - 2ae}{ae} \end{aligned}$$

de telle sorte que la variation  $\delta \alpha = - \delta \varphi$  prend la forme définitive :

$$(54) \quad \delta \alpha = - \frac{\sin \varphi}{re} \delta r - \frac{2 \sin \varphi}{ve} \delta v + \frac{2ae - r \cos \varphi}{ae} \delta \alpha.$$

(119 m)

Nous retrouvons ainsi dans les expressions (50), (53), (54) les variations de  $a$ ,  $e$ ,  $\alpha$  telles que Wronski les donne sans démonstration sous le numéro (119) (p. cxxxv de la *Réforme des mathématiques*).

§ 33. Il ne nous reste plus maintenant qu'à remplacer dans ces expressions,  $\delta r$ ,  $\delta v$ ,  $\delta \alpha$  par leurs valeurs en fonction de R et T.

*Variation de r.* Le théorème II nous donne immédiatement

$$(55) \quad \delta r = dr = 0.$$

Variation de  $v$ . Si  $\varpi$  est l'angle de la vitesse totale  $v$  et du rayon vecteur  $r$  au temps  $t$ , la résultante des nouvelles forces suivant la tangente sera

$$R \cos \varpi + T \sin \varpi,$$

et la variation correspondante de  $v$  sera :

$$(56) \dots \dots \delta v = dv = (R \cos \varpi + T \sin \varpi) dt.$$

Variation de  $\varpi$ . La décomposition de  $R$  et  $T$  suivant la perpendiculaire à la tangente, donne une résultante

$$R \sin \varpi - T \cos \varpi$$

qui, pendant le temps  $dt$ , agit à l'extrémité du bras de levier infiniment petit  $v dt$  pour faire tourner la tangente autour de son point de contact et diminuer l'angle  $\varpi$  de  $-d\varpi$ . L'élément de vitesse

$$(R \sin \varpi - T \cos \varpi) dt$$

gagné pendant  $dt$ , dans la direction de cette résultante, égale le chemin parcouru, en mouvement relatif, par son point d'application  $-v dt \cdot d\varpi$ , divisé par le temps  $dt$ . On a donc

$$(R \sin \varpi - T \cos \varpi) dt = - \frac{v dt \cdot d\varpi}{dt},$$

d'où :

$$(57) \dots \dots \delta \varpi = d\varpi = - \frac{1}{v} (R \sin \varpi - T \cos \varpi) dt.$$

§ 34. La substitution de (55), (56), (57) dans (50), (53), (54) donne alors, en effectuant immédiatement l'intégration de  $da = \delta a$ ,  $d\alpha = \delta \alpha$ ,  $de = \delta e$ , et en appelant

$$(a)_{(t)} \quad (e)_{(t)} \quad (\alpha)_{(t)}$$

les valeurs de  $a, e, \alpha$  pour une époque  $(t)$ ,

$$(58) \left\{ \begin{aligned} a &= (a)_{(t)} + \int_{(i)}^t \frac{2a^2 v}{M} (R \cos \varpi + T \sin \varpi) dt, \\ e &= (e)_{(t)} + \int_{(i)}^t \left[ \frac{2(e - \cos \varphi)}{v} (R \cos \varpi + T \sin \varpi) - \frac{r \sin \varphi}{va} (R \sin \varpi - T \cos \varpi) \right] dt, \\ \alpha &= (\alpha)_{(t)} - \int_{(i)}^t \left[ \frac{2 \sin \varphi}{ve} (R \cos \varpi + T \sin \varpi) + \frac{2ae - r \cos \varphi}{2ae} (R \sin \varpi - T \cos \varpi) \right] dt, \end{aligned} \right.$$

$\varphi$  étant égal à  $\Phi - \alpha$ .

Quant à la quantité  $\Phi$  elle-même, où à l'angle que fait avec la ligne fixe du plan de l'orbite le rayon vecteur  $r$ , elle est égale au même angle pris dans la *conique variable* à partir de la même ligne fixe. Si  $p$  et  $w$  sont les paramètres variables de cette conique, on aura

$$d\Phi = \frac{pw}{r^2} \cdot dt.$$

Si donc  $(\Phi)_{(t)}$  est la valeur de  $\Phi$  au temps  $(t)$ , on aura

$$(59) \dots \dots \dots \Phi = (\Phi)_{(t)} + \int_{(i)}^t \frac{pw}{r^2} dt,$$

ou encore, en fonction de  $a, e$  et  $M = m + m'$ ,

$$(60) \dots \dots \dots \Phi = (\Phi)_{(t)} + \sqrt{M} \int_{(i)}^t \frac{\sqrt{a(1 - e^2)}}{r^2} \cdot dt,$$

puisque, dans cette seconde méthode,

$$(10) \dots \dots w = \sqrt{\frac{M}{p}}, \quad p = a(1 - e^2) \quad \text{et} \quad pw = \sqrt{Mp} = \sqrt{Ma(1 - e^2)}.$$

§ 35. Les équations (47), (48), (49), (58), (59) renferment la solution du problème par cette seconde méthode, du moins en ce qui concerne le



mouvement de  $m'$  dans le plan de l'orbite. Le mouvement de ce plan est produit par la troisième force normale  $P$ , et les formules relatives à ce mouvement sont les mêmes que dans la première méthode; ce qui devait être, puisque, dans cette première méthode, on est également amené à considérer la force  $P$  seule, après avoir d'abord déterminé l'influence des forces  $R$  et  $T$ , et que cette force n'exerce aucune influence *directe* sur les éléments de l'orbite même. Il n'y a donc pas lieu de les exposer de nouveau ici.

Dans cette seconde méthode, comme dans la première, les forces  $R$ ,  $T$ ,  $P$  seront calculées en fonction du temps d'une manière approximative, quand on connaîtra par une première approximation la forme des trajectoires décrites par les centres attirants; il en sera de même de la vitesse  $v$ , des angles  $\Phi$  et  $\varpi$  et du rayon vecteur  $r$ . On introduira ces valeurs dans les intégrales et l'on obtiendra, en les résolvant, des valeurs approchées de  $a$ ,  $e$ ,  $\alpha$  en fonction du temps  $t$ . A l'aide de ces valeurs, on en obtiendra de nouvelles plus exactes de  $v$ ,  $\varpi$ ,  $\Phi$ ,  $r$ ,  $R$ ,  $T$ ,  $P$ ..., dont on opérera de nouveau la substitution dans les intégrales, et ainsi de suite. Tel est du moins le procédé connu, qui, dès à présent, peut faire comprendre la *praticabilité* des formules.

§ 36. On voit maintenant, d'une façon parfaitement claire, en quoi consiste la différence de la *méthode de l'ordre* de Wronski et de la *méthode du désordre*, où les forces  $R$ ,  $T$ ,  $P$  sont regardées comme des *forces perturbatrices*. C'est que la conique variable est décrite, dans la seconde, sous l'influence des éléments

$$v, \varpi, r, M,$$

et dans la première, au contraire, sous l'influence des éléments,

$$v, \varpi, r, -Fr^2;$$

c'est-à-dire que la masse constante  $M$  est remplacée, dans la méthode de Wronski, par une masse fictive variable  $-Fr^2$ . Ainsi, par exemple, pour la terre, dans la méthode des perturbations, l'ellipse variable sur laquelle elle est supposée se mouvoir, est toujours décrite sous l'influence attractive de la

masse du soleil; dans la méthode de Wronski, au contraire, l'ellipse variable de la terre est décrite sous l'influence d'une masse fictive, —  $Fr^2$ , placée au centre du soleil,  $F$  étant la résultante, suivant le rayon vecteur  $r = \odot\delta$ , de toutes les forces qui agissent sur la terre, attractions du soleil et des planètes, etc.

Mais, quoique les orbites variables ne soient pas les mêmes dans les deux cas, les coordonnées qu'elles fournissent pour la terre en chaque instant sont identiques, parce que ces coordonnées sont en chaque instant celles qui leur sont communes. Ces deux ellipses ont continuellement un plan commun (plan variable de l'orbite), une tangente commune, une vitesse  $v$ , un angle  $\varpi$ , un rayon vecteur commun, et ces quantités communes sont également celles de l'orbite réelle de la terre au même instant.

Nous comprenons ainsi cette déclaration de Wronski, reproduite déjà par M. Villarceau, au sujet de la théorie lunaire : « Tout ce que nous pouvons » dire ici concernant la fausse théorie de la science actuelle, c'est que l'orbite » de la lune, qui y résulte des prétendues perturbations causées par le soleil, » n'est nullement identique avec l'orbite variable que découvre la vraie » théorie, par l'influence téléologique du soleil. » Nous comprenons aussi, comme l'a déjà remarqué M. Villarceau, que la concordance entre les deux systèmes, annoncée par Wronski, ne doit s'entendre absolument que des résultats définitifs, c'est-à-dire de l'expression des coordonnées en fonction du temps. Les formules et l'esprit des méthodes sont entièrement différents, et, quant à la simplicité des calculs, indépendamment du nombre des intégrations qui est de cinq dans la méthode de Wronski, et de 7 (58 (trois équations), 59, 35, 36, 37) dans la deuxième méthode, il suffit de comparer des deux parts les expressions à intégrer, pour être convaincu de l'avantage de la première.

La généralité et la variété des applications sont aussi tout en sa faveur. Ce point a été développé plus haut. La seconde méthode ne s'applique qu'à la circonstance particulière où la trajectoire réelle est à peu près une conique.

§ 37. Enfin, la comparaison de ces deux coniques variables et de la trajectoire réelle, nous conduit de plus à une conséquence très importante,

contenue déjà dans le principe A; c'est que la conique de Wronski coïncide mieux avec cette trajectoire réelle.

En effet, si l'on représente par  $r, r', r''$  les rayons vecteurs de la trajectoire réelle, de la conique de Wronski et de la conique actuelle, on aura, d'abord, en chaque instant,

$$r = r' = r'',$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr'}{dt} = \frac{dr''}{dt}.$$

Mais cherchons les expressions des dérivées secondes

$$\frac{d^2r'}{dt^2}, \quad \frac{d^2r''}{dt^2}.$$

Si  $M$  est la somme des masses attirante et attirée, et  $F$  la résultante de toutes les forces suivant le rayon vecteur, on aura respectivement, dans les deux coniques,

$$\frac{d^2r'}{dt^2} = \frac{(Fr'^2)}{r'^2} + r' \left( \frac{d\Phi'}{dt} \right)^2 = F + r' \left( \frac{d\Phi'}{dt} \right)^2,$$

$$\frac{d^2r''}{dt^2} = -\frac{M}{r''^2} + r'' \left( \frac{d\Phi''}{dt} \right)^2.$$

Or, on a

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d\Phi'}{dt} = \frac{d\Phi''}{dt} = \frac{(v_2)}{r} = \frac{v \sin \varpi}{r},$$

$\Phi, \Phi', \Phi''$  étant les angles de position du rayon vecteur dans les trois trajectoires; et dans la trajectoire réelle, on a

$$\frac{d^2r}{dt^2} = F + r \left( \frac{d\Phi}{dt} \right)^2.$$

Donc,

$$\frac{d^2r'}{dt^2} = \frac{d^2r}{dt^2} \quad \text{et} \quad \frac{d^2r''}{dt^2} = \frac{d^2r}{dt^2} - F - \frac{M}{r^2} = \frac{d^2r}{dt^2} - R.$$

Par conséquent, si l'on développe les rayons vecteurs en fonction du

temps, les trois premiers termes du développement seront communs à la conique de Wronski et à la vraie trajectoire, tandis qu'il n'y en a que deux de communs dans la méthode actuelle.

On peut douter que Wronski ait aperçu cet avantage de sa méthode, puisqu'il dit (p. CLIV de la *Réforme des mathématiques*), que l'influence des forces R et T, nulle dans  $\frac{dr}{dt}$ , se manifeste dans la dérivée  $\frac{d^2r}{dt^2}$  et dans les dérivées des ordres suivants.

Quant aux coefficients différentiels de  $\Phi$ ,  $\Phi'$ ,  $\Phi''$ , on trouvera facilement

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi}{dt} &= \frac{d\Phi'}{dt} = \frac{d\Phi''}{dt} \\ \frac{d^2\Phi'}{dt^2} &= \frac{d^2\Phi''}{dt^2} = \frac{d^2\Phi}{dt^2} - T, \\ \left\{ \begin{aligned} \frac{d^3\Phi'}{dt^3} &= \frac{d^3\Phi}{dt^3} - \frac{dT}{dt} + 2 \frac{dr}{dt} \cdot T, \\ \frac{d^3\Phi''}{dt^3} &= \frac{d^3\Phi}{dt^3} - \frac{dT}{dt} + 2 \frac{dr}{dt} \cdot T + 2 \cdot \frac{d\Phi}{dt} \cdot R, \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

par où l'on voit que les deux premiers termes des développements de  $\Phi$ ,  $\Phi'$ ,  $\Phi''$  en fonction du temps sont communs aux trois trajectoires, le troisième identique seulement dans les deux coniques; mais que dans le quatrième terme de  $\Phi''$ , reparaît l'influence de la force perturbatrice R, spéciale à la conique de la seconde méthode.

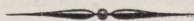
§ 38. Nous terminons ici l'exposé de la nouvelle conception de Wronski. Cette première partie contient l'établissement des formules fondamentales, nécessaires et suffisantes pour les problèmes de la mécanique céleste. Dans chaque cas, il conviendra de remplacer dans ces formules les trois forces R, T, P par leurs expressions relatives à ce cas; et il est très important de remarquer que, grâce aux méthodes algorithmiques générales d'intégration, il ne sera pas toujours nécessaire de développer ces *fonctions perturbatrices* en séries, on pourra les introduire tout entières dans les formules générales, qui deviendront ainsi applicables à des cas quelconques d'inclinaison, d'excentricité, etc., des orbites. Il y a cependant des cas où cette introduction des expres-

sions générales de  $R$ ,  $T$ ,  $P$  serait *inutile*, et, dans ces cas, leur développement en séries sera avantageux.

En appliquant les méthodes algorithmiques de Wronski pour le développement des fonctions à l'aide d'autres fonctions génératrices données, nous avons retrouvé (\*) les expressions données par lui de  $R$ ,  $T$ ,  $P$  (\*\*) dans le cas d'une planète sphérique troublée par d'autres planètes également sphériques, ce qui fournit la deuxième approximation des mouvements planétaires. On peut donc, dès à présent, avec la correction indiquée, employer ces formules. Mais, comme ce n'est là, en définitive, qu'un cas particulier de formules générales, et comme surtout il fallait faire usage de procédés analytiques non encore démontrés, nous avons réservé ce développement pour la seconde partie de ce travail, qui comprendra, outre la démonstration de la *loi suprême* (*Technie*, première partie), l'étude des nouveaux procédés algorithmiques du grand géomètre.

(\*) Avec une très légère modification, indiquée par Wronski lui-même, p. cxxxI.

(\*\*) *Réforme des mathématiques*, p. LXV.





## NOTE I.

La loi (1)  $Gdt = -w d\varphi$  lie la force accélératrice  $G$  au mouvement angulaire  $\frac{d\varphi}{dt}$  et à la quantité  $w$ , qui, dans le mouvement conique, est une constante égale à la moyenne des vitesses linéaires extrêmes. D'après Wronski, cette loi ne serait pas seulement, comme nous l'avons compris, une loi particulière au mouvement conique, et qui ne subsiste pour une loi  $G$  différente de la gravitation, qu'à la condition de  $w$  variable, mais, d'une manière absolument générale, la loi fondamentale de la dynamique.

Sans nous arrêter longtemps aux considérations philosophiques par lesquelles il cherche à établir cette loi, nous dirons qu'elle exprime l'équilibre permanent entre la force accélératrice centrale  $G$ , quelle qu'elle soit, et la *force inerte de séparation* qui provient de l'inertie de la matière, et qui constitue une résistance au *changement de direction*. Cette seconde force,  $S$ , est donc toujours dirigée dans un sens diamétralement opposé à celui de la force  $G$  qui tend à produire ce changement de direction. Son action élémentaire  $Sdt$  doit être proportionnelle à la variation de direction de la perpendiculaire à  $G$ , et cette variation est évidemment l'angle  $d\varphi$  dont la direction même de  $G$  a varié pendant le temps  $dt$ .  $w$  étant le facteur de proportionnalité, on a donc, d'après Wronski,  $Sdt = w d\varphi$ , et l'équilibre permanent entre les valeurs absolues de  $G$  et  $S$ , équilibre sans lequel, d'après lui, le mouvement *libre* sur la trajectoire serait impossible, exige que l'on ait toujours la relation fondamentale  $G = -S$  ou (1)  $Gdt = w d\varphi$  (\*).

Serait, dans ces idées, la véritable *force centrifuge*. Dans le cercle, la constante  $w$  est la vitesse totale  $v$ , et l'on a

$$G = -\frac{v d\varphi}{dt} = -\frac{v^2}{r},$$

puisque,  $r$  étant le rayon, on a

$$v = r \frac{d\varphi}{dt},$$

relation connue.

Comme nous l'avons montré, en admettant les idées actuelles de la dynamique, la relation (1) où  $w$  est constant, n'est possible que si  $G$  est la loi de Newton. Il en résulte que l'admission de la loi (1) comme loi fondamentale et générale à laquelle doivent satis-

(\*) *Épître à S. M. l'Empereur de Russie*, pp. 28-33. Metz, in-4°; 1831.

faire tous les mouvements centraux, est le renversement de toute la mécanique moderne. Wronski n'a pas reculé devant cette conséquence; — nous nous contenterons de soumettre au lecteur les remarques suivantes :

## I.

$Gdt = -wd\varphi$ , dit Wronski, est la loi fondamentale de la dynamique; il admet pourtant l'exactitude de la loi actuelle  $G = \frac{dv}{dt}$ , mais comme cas particulier de la première. Et voici comment il en opère la déduction : il cherche ce que devient l'expression de la force accélératrice  $G = -w \frac{d\varphi}{dt}$  qui détermine le mouvement conique, dans le cas où la conique décrite se réduit à une ligne droite, comme, par exemple, serait le mouvement d'une comète dans une ellipse dont le paramètre  $p$  serait nul, ou l'excentricité égale à l'unité. Comme la vitesse extrême  $u$  est alors nulle, l'expression générale

$$\sqrt{u^2 + 2w(w-u)(1-\cos\varphi)}$$

de la vitesse  $v$ , devient

$$v = \sqrt{2w^2(1-\cos\varphi)}$$

et, en différenciant  $v^2$ ,

$$v dv = w^2 \sin\varphi \cdot d\varphi.$$

Mais,  $v$  n'est ici autre chose que la vitesse  $v_1 = -w \sin\varphi$ , parallèle à l'axe de la conique. On a donc

$$-w \sin\varphi \cdot dv = w^2 \sin\varphi \cdot d\varphi$$

et, par conséquent,

$$dv = -w d\varphi.$$

Mais

$$Gdt = -wd\varphi.$$

Donc

$$Gdt = dv,$$

ou enfin,

$$G = \frac{dv}{dt}.$$

« Et » dit l'auteur (page 438 des *Prolégomènes*), « c'est là notoirement la loi fondamentale de toute la dynamique. Ainsi, cette loi fondamentale n'est rien autre qu'un cas particulier de notre loi suprême (1) de la mécanique céleste; et il se trouve avéré que cette loi primitive, comme nous l'avons annoncé en la faisant connaître, est généralement la loi suprême de toute la mécanique. »

Or, ce raisonnement est un cercle vicieux, puisque les expressions des vitesses  $v_1$  et  $v_2$ ,



dont la composition fournit la vitesse  $v$  (comme il le dit à la page 257), ne sont autres que les intégrales de  $\frac{dv_1}{dt} dt$  et  $\frac{dv_2}{dt} dt$  qui expriment les composantes (multipliées par  $dt$ ) de la force accélératrice  $\mathbf{G}$ , suivant les deux directions rectangulaires. On se sert donc, pour démontrer la relation  $\mathbf{G} = \frac{dv}{dt}$ , de cette relation elle-même.

II.

Si  $\mathbf{G}dt = -w d\varphi$  est la loi générale de la dynamique, comment cette loi, quand on y considère  $\mathbf{G}$  comme une inconnue, assigne-t-elle pour expression de  $\mathbf{G}$  une fonction déterminée, la loi de Newton?

III.

L'auteur donne pour la courbe générale de l'orbite que parcourrait un astre conduit par une force centrale  $\mathbf{G}$  quelconque, une équation de la forme

$$(A) \quad . . . . r \cos \varphi (C + \int G \sin \varphi \cdot dt) - r \sin \varphi (C' + \int G \cos \varphi dt) = C'',$$

$C, C', C''$  étant trois constantes (\*).

Dans cette équation, dit-il, le rapport de  $d\varphi$  à  $dt$  est absolument indéterminé, de telle sorte que, pour une même force centrale  $\mathbf{G}$ , elle pourra représenter un nombre indéfini de trajectoires. Si l'on y assigne à  $\frac{d\varphi}{dt}$  le rapport  $\frac{G}{w}$  donné par (1), on retombe sur l'équation des sections coniques, — ce qui est, en effet, exact. Si l'on y donnait à  $\frac{d\varphi}{dt}$  la valeur qui résulte de la loi des aires de Képler, savoir  $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{k}{r^2}$ ,  $k$  étant une constante, on trouverait toutes les trajectoires à forces centrales, dans lesquelles cette loi se vérifie, etc.

Il ne faut cependant pas regarder de bien près l'équation (A) pour reconnaître qu'elle n'est autre chose que le principe des aires lui-même.

$C + \int G \sin \varphi \cdot dt$ ,  $C' + \int G \cos \varphi \cdot dt$  sont les vitesses  $v_1, v_2$  parallèles à deux axes rectangulaires;  $r \cos \varphi, r \sin \varphi$  les bras de levier correspondants, et, par conséquent,

$$v_1 r \cos \varphi - v_2 r \sin \varphi = C''$$

ou

$$(v_2)r = C', \quad r^2 \frac{d\varphi}{dt} = C'',$$

en appelant ( $v_2$ ) la vitesse perpendiculaire au rayon vecteur; et ce résultat est absolument indépendant de la loi qui lie  $d\varphi$  à  $dt$ .

(\*) *Épître à S. M. l'Empereur de Russie*, p. 59.

Ainsi l'auteur, par une inconcevable méprise, admet le principe des aires et ensuite une loi fondamentale,  $Gdt = -w d\varphi$ , dont l'existence générale n'est possible que si ce principe des aires n'est pas généralement vrai.

D'ailleurs, quelle que soit la relation (A) dont on admet la généralité, si  $Gdt = -w d\varphi$  est la loi fondamentale de la dynamique, *il n'y a pas à choisir* le rapport  $\frac{d\varphi}{dt}$ , il est toujours, quel que soit  $G$ , donné par cette loi même, et par conséquent, d'après les conditions que s'impose Wronski lui-même, sa loi fondamentale (1) n'est possible que dans les sections coniques, ou pour une force  $G$  agissant en raison inverse du carré des distances.

#### IV.

Dès qu'on admet pour exacte la loi  $G = \frac{dv}{dt}$ , la généralité du principe des aires s'en déduit, comme cela est connu. Il y a donc contradiction à accepter la loi et à repousser ce principe.

Comme, dans l'esprit de Wronski,  $G = \frac{dv}{dt}$  est un cas particulier de (1)  $Gdt = -w d\varphi$ , il s'ensuivrait que l'on pourrait déduire d'un cas particulier, une conséquence non contenue dans le cas général.

#### V.

Il résulte de ce qui précède que l'affirmation de Wronski, suivant laquelle *le principe des aires ne serait vrai que dans le cas de la loi Newtonienne*, non-seulement est en opposition avec les résultats les mieux établis de la science depuis Newton, mais, ce qui est bien plus grave, en flagrante contradiction avec les principes de Wronski lui-même.

Il faut donc considérer comme mal fondées toutes les déductions par lesquelles il calcule en partant de la loi (1) dans l'*Épître à S. M. l'Empereur de Russie*, pages 41-49, les courbes décrites sous différentes lois d'action  $G$  en raison d'une puissance de la distance (\*).

#### VI.

On peut, il est vrai, considérer  $G = -w \frac{d^2\varphi}{dt^2}$  comme une condition à laquelle serait soumise la force  $G$  dans tous les problèmes, mais alors,  $w$  doit être considérée, ainsi que nous l'avons fait dans le cours de ce travail, que la force totale soit centrale ou non, comme

(\*) Il trouve, par exemple, pour  $G$  en raison inverse du cube de la distance, et en raison directe de la distance, respectivement une ellipse dont le centre est le centre des forces, et une trajectoire dont les anomalies,  $\varphi$ , ne sauraient dépasser certaines limites; — tandis que la première de ces trajectoires est une spirale et la seconde une ellipse, dont le centre est le centre des forces, ainsi que Newton le démontre déjà par des considérations purement géométriques. (*Principia*, lib. I, pr. X.)

une variable, et cette variable doit se plier, et à la relation  $G = -w \frac{d^2 p}{dt^2}$ , et aux lois générales de la dynamique, telles que le principe des aires.

Nous avons avoir hésité d'abord à reconnaître cette grave erreur, dont les conséquences se retrouveront peut-être malheureusement dans plusieurs autres travaux capitaux de l'auteur (\*). Nous ne croyons pas, cependant, qu'on puisse nier la justesse des réflexions précédentes. Si elles sont exactes, comme nous en avons la conviction, elles auront l'avantage de mettre en garde les adeptes enthousiastes du *Messianisme* contre les affirmations absolues de l'illustre savant. La lecture des ouvrages de Wronski nous fait vivre avec un génie extraordinaire, qui s'est attaqué à presque toutes les connaissances humaines; mais l'impétuosité même de ce génie doit nous mettre en garde contre lui; travaillons donc à étudier les *clartés*, et consolons-nous des *obscurités* en nous rappelant que nul, quelque grand qu'il soit, n'échappe au précepte d'Horace : *Non omnia possumus omnes*.

(\*) Voyez à ce sujet : *Science nautique des marées*, in-4°. Paris, 1835. ¶

## NOTE II.

Si l'on prend l'équation conique

$$(26) \dots \dots \dots o = r[1 - e \cos(\Phi - \alpha)] - p,$$

cette équation, en y faisant varier convenablement toutes les quantités, pourra représenter la trajectoire réelle.

On obtiendra ainsi l'équation différentielle

$$o = dr[1 - e \cos(\Phi - \alpha)] + r[e \sin(\Phi - \alpha)(d\Phi - d\alpha) - \cos(\Phi - \alpha)de] - dp$$

( $d\Phi$ ,  $d\alpha$ ,  $de$ ,  $dp$  étant les différentielles obtenues par les lois données de la variation des paramètres), ou bien

$$(B) \dots \dots o = p \frac{dr}{r} + r[e \sin(\Phi - \alpha)d\Phi - \cos(\Phi - \alpha)de] - dp - re \sin(\Phi - \alpha)d\alpha,$$

et, en divisant par  $p$ ,

$$-\frac{dr}{r} = \frac{e \sin(\Phi - \alpha)d\Phi - \cos(\Phi - \alpha)de}{1 - e \cos(\Phi - \alpha)} - \frac{dp}{p} - \frac{r}{p} e \sin(\Phi - \alpha)d\alpha = L,$$

en dénotant par  $L$  la valeur du second membre.

Si maintenant l'on pose

$$L - \frac{e \sin(\Phi - [\alpha])d\Phi - \cos(\Phi - [\alpha])de}{1 - e \cos(\Phi - [\alpha])} = -d\xi,$$

en appelant  $[\alpha]$  une valeur constante de  $\alpha$ , on aura

$$o = \frac{dr}{r} - d\xi + \frac{e \sin(\Phi - [\alpha])d\Phi - \cos(\Phi - [\alpha])de}{1 - e \cos(\Phi - [\alpha])}$$

et, en intégrant,

$$r = \frac{C\varepsilon^{\Xi}}{1 - e \cos(\Phi - [\alpha])},$$

C étant une constante d'intégration et  $\varepsilon$  la base des logarithmes népériens.

Si l'on suppose  $\Xi = 0$ , C deviendra le paramètre  $[p]$  d'un mouvement conique ayant  $[\alpha]$  pour longitude de l'aphélie. On a donc

$$(C). \dots \dots \dots r = \frac{[p] \varepsilon^{\Xi}}{1 - e \cos(\Phi - [\alpha])}.$$

Cette équation a la même forme que l'équation (180) de Wronski (*Réforme des mathématiques*, page CLII), mais elle en diffère en réalité par la valeur de la fonction  $\Xi$ . En effet, Wronski considère  $\Xi$  comme indépendante de  $\alpha$ , du moins d'une manière immédiate, et cela parce que, après avoir remplacé la différentielle  $d\alpha$  en fonction de  $dp$  et  $dw$  dans l'équation variée (B), il regarde l'intégration des fonctions en  $\alpha$  comme comprise dans l'intégration des fonctions en  $p$  et  $w$ . Voici comment il s'exprime :

« Ainsi ayant éliminé dans l'équation différentielle générale (l'équation (B)), la différentielle  $d\alpha$  de l'aphélie en la remplaçant par des fonctions différentielles équivalentes, formées par d'autres variables, nous pouvons maintenant prendre l'intégrale générale de cette équation, en considérant comme constante la quantité  $\alpha$ , parce que, de la manière dont cette élimination de  $d\alpha$  vient d'être faite, en enlevant cette différentielle avec tout ce qu'elle tenait de l'équation primitive (l'équation  $0 = r[1 - e \cos(\Phi - \alpha)] - p$ ), il sera tenu compte de la variation de cette quantité dans tout son ensemble, et cela par l'intégration des fonctions différentielles qui se trouvent ainsi équivalentes à cet ensemble de la quantité  $\alpha$ . »

Mais ce raisonnement n'est pas rigoureux, puisque ce n'est pas seulement  $d\alpha$ , mais aussi  $\alpha$ , qu'il faudrait remplacer en fonction de ces autres variables, pour que l'intégration des fonctions différentielles de ces autres variables tînt compte de la variation complète de  $\alpha$ . On peut mettre ceci nettement en évidence par la comparaison des deux expressions du rayon vecteur données par les équations (26) et (C).

On a

$$(26). \dots \dots \dots r = \frac{p}{1 - e \cos(\Phi - \alpha)}$$

et

$$(C). \dots \dots \dots r = \frac{[p] \varepsilon^{\Xi}}{1 - e \cos(\Phi - [\alpha])}.$$

Ces deux équations représentent également la trajectoire plane réelle, quand on y remplace les paramètres variables par leurs expressions en fonction des forces accélératrices.

On en déduit

$$\varepsilon \Xi = \frac{p}{[p]} \cdot \frac{1 - e \cos(\Phi - [\alpha])}{1 - e \cos(\Phi - \alpha)}$$

D'où

$$d\varepsilon = \frac{dp}{p} + \frac{r}{p} e \sin(\Phi - \alpha) d\alpha - \frac{e \sin(\Phi - \alpha) d\Phi - \cos(\Phi - \alpha) de}{1 - e \cos(\Phi - \alpha)} \\ + \frac{e \sin(\Phi - [\alpha]) d\Phi - \cos(\Phi - [\alpha]) de}{1 - e \cos(\Phi - [\alpha])},$$

ou

$$d\varepsilon = -L + \frac{e \sin(\Phi - [\alpha]) d\Phi - \cos(\Phi - [\alpha]) de}{1 - e \cos(\Phi - [\alpha])}$$

qui est l'expression que nous avons trouvée plus haut, tandis que Wronski donne à  $d\varepsilon$  seulement la valeur

$$\frac{dp}{p} + \frac{r}{p} e \sin(\Phi - \alpha) d\alpha.$$

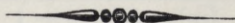
Il importe de remarquer, d'ailleurs, que les formes

$$r = \frac{[p] \varepsilon \Xi}{1 - e \cos(\Phi - [\alpha])}, \quad \text{ou} \quad r = \frac{[p] \varepsilon \Xi'}{1 - [e] \cos(\Phi - [\alpha])}$$

ou toute autre du même genre, où  $\Xi$ ,  $\Xi'$ , ... peuvent toujours être aisément exprimées, n'ont aucune *valeur théorique spéciale*; elles peuvent seulement avoir une *valeur pratique* dans les cas où la détermination des intégrales  $\Xi$  ou  $\Xi'$  présenterait des facilités particulières. C'est ainsi que le rayon vecteur réel serait lié au rayon vecteur  $[r]$  d'une conique constante par la relation

$$r = [r] \varepsilon \Xi'.$$

L'unique avantage de cette forme est de ramener immédiatement  $r$  à  $[r]$  quand la fonction perturbatrice  $\Xi'$  est nulle.



On en déduit

$$\frac{y}{[y]} = \frac{1 - \cos(\alpha - \beta)}{1 - \cos(\alpha + \beta)}$$

D'où

$$\frac{y}{[y]} = \frac{1 - \cos(\alpha - \beta)}{1 - \cos(\alpha + \beta)}$$

$$\frac{y \sin(\alpha - \beta)}{1 - \cos(\alpha - \beta)} = \frac{y \sin(\alpha + \beta)}{1 - \cos(\alpha + \beta)}$$

ou

$$\frac{y \sin(\alpha - \beta)}{1 - \cos(\alpha - \beta)} = \frac{y \sin(\alpha + \beta)}{1 - \cos(\alpha + \beta)}$$

qui est l'expression que nous avons trouvée plus haut, tandis que  $y$  restait égale à sa véritable valeur.

$$\frac{y}{[y]} = \frac{1}{\sin(\alpha - \beta)}$$

Il importe de remarquer, d'ailleurs, que les formules

$$\frac{y}{[y]} = \frac{1}{\sin(\alpha - \beta)}$$

ou toute autre du même genre, on  $\alpha, \beta, \dots$  peuvent toujours être considérées comme des angles réels, elles peuvent également être considérées comme des angles imaginaires dans le cas où la détermination des intégrales  $\alpha$  ou  $\beta$  présuppose des fonctions imaginaires, est ainsi que le rayon vecteur réel écrit de son rayon vecteur  $[y]$  d'une manière constante par la relation

$$y = [y] \sin(\alpha - \beta)$$

à moins, au moins, de se servir de la notation  $\alpha + \beta$  dans la fonction perturbatrice, est celle

1912

1912

1912

1912

1912

1912

1912

1912

1912

1912

1912





