40/2009

Raport Badawczy
Research Report

RB/50/2009

Ograniczanie ryzyka kosztów obsługi długu publicznego przy wykorzystaniu rozwiązania minimaksowego gry strategicznej

L. Klukowski

Instytut Badań Systemowych
Polska Akademia Nauk

Systems Research Institute
Polish Academy of Sciences

POLSKA AKADEMIA NAUK

Instytut Badań Systemowych

ul. Newelska 6

01-447 Warszawa

tel.: (+48) (22) 3810100

fax: (+48) (22) 3810105

Kierownik Pracowni zgłaszający pracę:
Prof. dr hab. inż. Zbigniew Nahorski

Warszawa 2009

OGRANICZANIE RYZYKA KOSZTÓW OBSŁUGI DŁUGU PUBLICZNEGO PRZY WYKORZYSTANIU ROZWIĄZANIA MINIMAKSOWEGO GRY STRATEGICZNEJ

Leszek Klukowski

IBS PAN, Newelska 6, 01-447 Warszawa,

e-mail: Leszek.Klukowski@ibspan.waw.pl

1. Wprowadzenie

Wiele decyzji finansowych opiera się na długoterminowych prognozach stóp procentowych. W przypadku sprzedaży instrumentów dłużnych Skarbu Państwa, horyzont prognoz osiąga 20 – 30 lat. Prognozy z takim horyzontem mają często postać wariantową, przy czym nie zawsze dysponujemy prawdopodobieństwami wystąpienia poszczególnych wariantów. Sytuacja taka stwarza dla emitenta instrumentów dłużnych, określającego optymalną strukturę tych instrumentów, dodatkowe ryzyko wzrostu kosztów obsługi, związane z możliwością nietrafnego wyboru wariantu. Jedną z metod minimalizacji tego rodzaju ryzyka jest sformułowanie problemu wyboru wariantu prognozy w postaci dwuosobowej gry strategicznej, ze skończoną liczbą strategii (wariantów) i zastosowanie rozwiązania minimaksowego. Rozwiązanie takie jest określone przez punkt siodłowy macierzy gry (jeśli istnieje) lub strategię zrandomizowaną, tj. rozkład prawdopodobieństwa na zbiorze strategii (jeśli nie istnieje punkt siodłowy).

Rozwiązanie optymalne gry pozwala ukształtować strukturę portfela emitowanych instrumentów dłużnych w taki sposób, aby uodpornić go na możliwość wystąpienia niekorzystnych dla emitenta wariantów ścieżek stóp procentowych. Rozwiązanie otrzymane w ten sposób minimalizuje maksymalną stratę wynikającą z przyjęcia błędnego wariantu prognozy. Minimalizacja maksymalnej straty znajduje zastosowanie w przypadku nieznajomości rozkładu prawdopodobieństwa określonego na zbiorze wariantów. Pozwala ona wyznaczyć najbezpieczniejszą strategię emitenta, tj. taką, która chroni przed skutkami wystąpienia najbardziej niekorzystnych sytuacji. Istotną cechą takiego ujęcia problemu jest pełna formalizacja problemu decyzyjnego, bez konieczności wykorzystania arbitralnych parametrów czy funkcji. Poszerza ono spektrum metod określania odpornych portfeli instrumentów finansowych (zob. np. Majewska 2007). Poziom złożoności sformułowanego w tej pracy problemu – formalnej oraz obliczeniowej – umożliwia jego zastosowanie w rutynowej działalności decydenta (emitenta długu). Należy podkreślić, że mimo prostoty gier dwuosobowych, ich zastosowanie wymaga racjonalności przy określaniu poszczególnych elementów, zwłaszcza funkcji straty. Wdrożenie proponowanej koncepcji ma szczególne znaczenie w warunkach zmienności sytuacji ekonomicznej oraz zagrożenia kryzysem w obszarze finansów publicznych.

Rozważany problem można również sformułować w postaci gry z naturą, która wymaga dodatkowo określenia warunkowych rozkładów prawdopodobieństwa stanów natury. W przypadku prognoz długoterminowych, realistyczne określenie takich rozkładów natrafia na istotne trudności.

Rozważanemu problemowi można nadać bardziej ogólną postać – optymalizacji decyzji finansowych, o określonych własnościach. Skoncentrowano się jednak na temacie z zakresu finansów publicznych ze względu na jego znaczenie ekonomiczne, wynikające z poziomu długu publicznego i kosztów obsługi (poziom - ponad 500 mld zł, koszty – przekraczające 30 mld zł, w roku 2009 r.).

Praca składa się z 5 części; druga i trzecia prezentują sformułowanie problemu i koncepcję rozwiązania, czwarta – zastosowanie, ostatnia – podsumowanie i wnioski.

2. Sformułowanie problemu

Zwięzłe sformułowanie problemu minimalizacji kosztów obsługi długu publicznego, w warunkach wielowariantowych prognoz stóp, można wyrazić w następujący sposób. Zminimalizować koszty obsługi długu (odsetek i dyskonta) wraz z ryzykiem wynikającym z istnienia wielu wariantów rynkowych stóp procentowych, przy uwzględnieniu możliwości braku rozkładu prawdopodobieństwa na zbiorze wariantów.

Problem ten zostanie sformalizowany poniżej przy wykorzystaniu gry dwuosobowej ze skończoną liczbą strategii, z zastosowaniem: • rozwiązania minimaksowego – w przypadku braku rozkładu prawdopodobieństwa na zbiorze wariantów lub • rozwiązania minimalizującego wartość oczekiwaną funkcji straty – w przypadku posiadania tego rozkładu.

Elementami gry dwuosobowej są: • gracze – emitent oraz inwestorzy traktowani łącznie, • zbiór strategii (wariantów prognoz), • funkcja wypłat (straty) – określająca skutki wykorzystania błędnego wariantu przez emitenta (nieoptymalne, nadmierne koszty obsługi długu).

Funkcja wypłat ma postać macierzy $\mathbf{W} = [\omega_{ij}]$ $(i, j=1, \ldots u;\ u \geq 2)$, w której każdy element ω_{ij} wyraża stratę (przyrost kosztów obsługi długu), wynikającą z wykorzystania przez decydenta i-tego wariantu prognozy, podczas gdy zrealizuje się wariant j-ty.

3. Postać zadań optymalizacyjnych

Poniżej zostaną sformułowane zadania minimalizujące ryzyko wynikające z wielowariantowości prognoz, w przypadku wymienionych powyżej kryteriów: minimaksowego i minimalizującego przeciętną stratę.

3.1. Zadanie oparte na kryterium minimaksowym

Zastosowanie kryterium minimaksowego polega na wyznaczeniu rozwiązania optymalnego w dwuosobowej grze strategicznej ze skończoną liczbą strategii (por. Greń (1972), rozdz.1).

W celu sformułowania koncepcji funkcji wypłat w grze przyjmijmy następujące oznaczenia:

x_s^* - optymalny portfel emitowanych instrumentów dłużnych, odpowiadający s-temu ($1 \leq s \leq u$) wariantowi prognozy rocznych stóp procentowych $r_{s1}, \ldots, r_{sh}$, z wyprzedzeniem h ($h \geq 1$), otrzymany na podstawie podanego poniżej zadania optymalizacyjnego (1) – (2);

$\Phi_s(\cdot)$ - funkcja celu zadania minimalizacji kosztów obsługi długu, odpowiadająca s-temu wariantowi prognozy, $\Phi_s(x_s^*)$ – wartość funkcji wyrażająca średnioroczne koszty obsługi optymalnego portfela x_s^*;

x_r^*, $\Phi_r(\cdot)$, $\Phi_r(x_r^*)$ $(r \neq s)$ – odpowiednio: optymalny portfel, funkcja celu oraz średnioroczne koszty odpowiadające r-temu wariantowi prognozy stóp.

Optymalne portfele x_s^* $(s=1, ..., u)$, odpowiadające poszczególnym wariantom prognoz, otrzymuje się na podstawie zadania optymalizacyjnego o postaci:

$$\min_x \left[\sum_{i=1}^{\kappa}(M - d_s^{(i)}(x_i))\, x_i\, \Psi_s^{(i)}(x_i)\right] \tag{1}$$

przy warunku określającym poziom potrzeb pożyczkowych:

$$\sum_{i=1}^{\kappa} x_i(M - d_s^{(i)}(x_i)) \geq a\,, \tag{2}$$

gdzie:

x_i $(i=1, ..., \kappa)$ - sprzedaż i-tego instrumentu dłużnego (liczba nominałów) - zmienna decyzyjna,

$d_s^{(i)}(x_i)$ – dyskonto i-tego instrumentu dłużnego, odpowiadające sprzedaży x_i oraz s-temu wariantowi prognozy stóp procentowych,

$\Psi_s^{(i)}(x_i)$ – rentowność (składana stopa zwrotu) i-tego instrumentu dłużnego, odpowiadająca sprzedaży x_i oraz s-temu wariantowi prognozy stóp procentowych,

M – nominał instrumentu dłużnego (bon skarbowy - 10000 zł, obligacja - 1000 zł),

a – poziom potrzeb pożyczkowych budżetu.

Zauważmy, że jeśli emitent dokona optymalizacji sprzedaży instrumentów dłużnych wg r-tego wariantu prognozy, a zrealizuje się wariant s-ty ($r \neq s$), to poniesie on średnioroczne koszty obsługi równe $\Phi_s(x_r^*)$. Przy założeniu, że portfele x_r^* (r=1, ..., u) generują identyczne wpływy budżetowe dla każdego wariantu prognozy stóp, tj. są spełnione warunki:

$$K_p(x_r^*) = K_q(x_s^*) \qquad (p \neq q),$$

gdzie:

$$K_r(x_s^*) = \sum_{i=1}^{K} x_{is}^*(M - d_r^{(i)}(x_{is}^*)),$$

(x_{is}^* - i-ta składowa wektora x_s^*),

koszty $\Phi_s(x_r^*)$ są nie mniejsze niż optymalne koszty $\Phi_s(x_s^*)$. Konsekwencją przyjęcia błędnego wariantu prognozy jest możliwość wzrostu kosztów obsługi. Zasadne jest zatem przyjęcie funkcji wypłat w grze w postaci różnicy:

$$\omega_{sr} = \Phi_s(x_s^*) - \Phi_s(x_r^*) \qquad (s \neq r). \qquad (3)$$

W przypadku trafnego wyboru ścieżki przez emitenta (trafnej prognozy), wartość wypłaty jest równa zeru, w przeciwnym przypadku - niedodatnia (zwykle ujemna). Strata emitenta jest wygraną drugiego gracza, tj. inwestorów (zob. np. Greń (1972), pkt. 1.1). Każdą z wartości ω_{sr} można interpretować jako miarę wrażliwości decyzji na błąd w wyborze wariantu prognozy.

Należy zaznaczyć, że założenie o równości wpływów budżetowych ze sprzedaży poszczególnych portfeli $x_1^*, ..., x_n^*$ (zob. warunek (2)) może nie być spełnione. Koszty obsługi długu odpowiadające różnym wpływom budżetowym są nieporównywalne, ponieważ niektóre portfele generują wówczas niedobór środków, a inne nadmiar. Konieczna jest wówczas odpowiednia modyfikacja wyrażenia (3). Można jej dokonać na różne sposoby; w niniejszej pracy proponuje się wyznaczenie, dla każdego wariantu prognozy, optymalnego portfela zapewniającego równość wpływów budżetowych, przez dodanie odpowiedniego warunku ograniczającego do zadania (1) - (2).

Formalizując tę koncepcję otrzymujemy macierz wypłat $\widetilde{\mathbf{W}}$ z elementami:

$$\widetilde{\omega}_{sr} = \Phi_s(x_s^*) - \Phi_s(\widetilde{x}_r^*), \tag{4}$$

gdzie:

$\widetilde{x}_r^*$ - rozwiązanie optymalne zdefiniowane w następujący sposób:

$$\widetilde{x}_r^* = \begin{cases} x_r^* & w\ przypadku\ K_s(x_r^*) = K_s(x_s^*); \\ x_r^{(\min)} & w\ przypadku\ K_s(x_r^*) < K_s(x_s^*); \\ x_r^{(\max)} & w\ przypadku\ K_s(x_r^*) > K_s(x_s^*), \end{cases} \tag{5}$$

przy czym:

$x_r^{(\min)}$ - rozwiązanie optymalne zadania (1) - (2) wraz z dodatkowym warunkiem ograniczającym $x \geq x_r^*$, dla funkcji celu odpowiadającej s-temu wariantowi prognozy ścieżki stóp procentowych;

$x_r^{(\max)}$ - rozwiązanie optymalne zadania (1) - (2) wraz z dodatkowym warunkiem ograniczającym $x \leq x_r^*$, dla funkcji celu odpowiadającej s-temu wariantowi prognozy ścieżki stóp procentowych.

Różnica $\widetilde{\omega}_{sr}$ wyraża przyrost funkcji celu, wynikający z zastąpienia optymalnego (dla s-tego wariantu stóp) rozwiązania x_s^* - rozwiązaniem $\widetilde{x}_r^*$, uwzględniającym, w przypadku $K_s(x_r^*) \neq K_s(x_s^*)$, dodatkowy warunek $x \geq x_s^*$ lub $x \leq x_s^*$. Dodanie do zadania (1) – (2) ograniczenia

$x \geq x_r^*$ skutkuje otrzymaniem portfela optymalnego o składowych nie mniejszych od rozwiązania odpowiadającego r-temu wariantowi prognozy. Innymi słowy dokonuje się optymalnego zwiększenia portfela x_r^*, w celu spełnienia warunku określającego potrzeby pożyczkowe. Analogicznie, warunek $x \leq x_r^*$ prowadzi do optymalnego zmniejszenia wektora x_r^*. Jest intuicyjne, że warianty prognoz stóp wykazujące znaczące różnice, np. wzrostowy i spadkowy, indukują duże wartości bezwzględne funkcji wypłat. Obliczenie macierzy gry zdefiniowanej zależnością (5) jest bardziej pracochłonne w porównaniu z macierzą (3), ponieważ może wymagać wielokrotnego rozwiązania zadania (1) - (2) z dodatkowym warunkiem ograniczającym.

Rozwiązanie minimaksowe określonej powyżej gry, z macierzą wypłat W (lub $\widetilde{\mathbf{W}}$), polega na wyznaczeniu optymalnej strategii (wariantu prognozy) I gracza (emitenta). Może ono mieć postać strategii czystej lub zrandomizowanej. Strategia czysta oznacza wybór jednego z wariantów prognozy, strategia zrandomizowana - określenie rozkładu prawdopodobieństwa na zbiorze wariantów. Wyznaczenie strategii czystej jest możliwe w przypadku, gdy macierz strat W ($\widetilde{\mathbf{W}}$) ma punkt siodłowy v ($\widetilde{v}$), określony jedną z zależności:

$$\nu = \max_s(\min_r(\omega_{sr})) = \min_r(\max_s(\omega_{sr})), \qquad (6a)$$

$$\tilde{\nu} = \max_s(\min_r(\tilde{\omega}_{sr})) = \min_r(\max_s(\tilde{\omega}_{sr})). \qquad (6b)$$

Liczba ν ($\tilde{\nu}$) jest najmniejsza w danym wierszu macierzy **W** i jednocześnie największa w danej kolumnie. Indeks s^* odpowiadający wartości ν ($\tilde{\nu}$), tzn. numer wiersza macierzy **W** zawierającego ten element, określa wariant prognozy stanowiący optymalne rozwiązanie gry. Rozwiązaniem sformułowanego powyżej problemu optymalizacyjnego jest optymalny portfel długu x_s^*, odpowiadający s^*-temu wariantowi prognozy. Rozwiązanie takie zapewnia najmniejszą stratę w przypadku wystąpienia najbardziej niekorzystnej dla zarządzającego długiem ścieżki stóp procentowych - stanowi najostrożniejszą jego strategię.

Rozwiązanie zrandomizowane wyznacza się w przypadku, gdy macierz **W** nie ma punktu siodłowego, co wymaga odpowiedniego rozszerzenia gry (por. Greń (1972) rozdz. I). Jest ono określone przez funkcję prawdopodobieństwa zadaną na zbiorze strategii; prawdopodobieństwo odpowiadające r-tej strategii będzie oznaczane symbolem ξ_r (r=1, ..., u), $\sum_r \xi_r = 1$. Optymalna strategia zrandomizowana w grze rozszerzonej polega na wyborze jednego z wariantów prognozy w sposób losowy. Prawdopodobieństwa $\xi_1, ..., \xi_u$ wyboru poszczególnych wariantów wyznacza się na podstawie rozwiązania zadania programowania liniowego o postaci:

$$\min[1/v] = \min[p_1 + \ldots + p_u], \tag{7}$$

$$\mathbf{W}^T \mathrm{p} \geq \mathbf{1}, \tag{8}$$

$$\mathrm{p} \geq \mathbf{0}, \tag{9}$$

gdzie:

$p_i = \xi_i / v$, przy czym: $v = 1/(p_1 + \ldots + p_u)$; zależność ta służy do określenia prawdopodobieństw $\xi_i = v\, p_i$;

p - wektor (kolumnowy), którego elementami są wartości $p_1, \ldots, p_u$,

$\mathbf{W}^T$ - macierz **W** transponowana,

1 - wektor jednostkowy (o składowych równych 1).

Wybór optymalnej strategii może być dokonany przy wykorzystaniu generatora liczb losowych w taki sposób, aby prawdopodobieństwo wylosowania *i*-tej strategii (wariantu ścieżki) było równe ξ_i (i=1, ..., u). W przypadku funkcji wyplat $\tilde{\mathbf{W}}$ należy dokonać odpowiedniej modyfikacji zadania (7) – (9).

Należy zwrócić uwagę, że zdefiniowane powyżej elementy funkcji wypłat w_{rs} można też wykorzystać do celów analitycznych, jako mierniki wrażliwości rozwiązania optymalnego, odpowiadającego ustalonej (s-tej) ścieżce, na dowolne odstępstwa od jej przebiegu. Należy w tym celu przyjąć odpowiednią postać r-tej ścieżki, tj. wykazującą określone różnice w stosunku do ścieżki s-tej; w szczególności może ona mieć postać zmian „szokowych".

3.2. Zadanie minimalizujące przeciętną stratę

Rozwiązanie problemu wyboru wariantu prognozy, przedstawione w pkt. 3.1, pozwala określić postępowanie najostrożniejsze, w sytuacji, gdy nie są znane prawdopodobieństwa wystąpienia poszczególnych wariantów. Jeśli prawdopodobieństwa te można wyznaczyć, a zarządzający długiem dąży do minimalizacji przeciętnej straty (tzn. jej wartości oczekiwanej), problem decyzyjny ulega uproszczeniu - najlepszą decyzją jest wówczas przyjęcie rozwiązania minimalizującego koszty obsługi, odpowiadającego wariantowi, dla którego wartość oczekiwana funkcji straty jest najmniejsza. Wartość oczekiwana ϑ_i $(i=1, ..., u)$ funkcji straty ma postać:

$$\vartheta_i = -(q_1 w_{i1} + ... + q_u w_{iu}), \qquad i=1, ..., u, \qquad (10)$$

gdzie:

q_i - prawdopodobieństwo wystąpienia i-tego wariantu prognozy, w_{rs} elementy macierzy **W**.

Rozwiązaniem minimalizującym wartość oczekiwaną funkcji straty jest rozwiązanie optymalne zadania minimalizującego koszty obsługi, odpowiadającego ścieżce stóp procentowych o indeksie s^{**}, dla którego:

$$\vartheta_{s^{**}} = \min\{\vartheta_1, \ldots, \vartheta_u\}. \qquad (11)$$

Stosowanie tego kryterium do wyboru wariantu prognozy jest celowe w przypadku wielokrotnego podejmowania decyzji optymalizującej strukturę emitowanego długu. Porównanie decyzji wynikającej z minimalizacji wartości oczekiwanej straty oraz straty minimaksowej stanowi dla zarządzającego długiem dodatkową informację analityczną. Należy dodać, że stosowanie zrandomizowanej strategii minimaksowej, w przypadku niektórych rodzajów rozkładów prawdopodobieństwa, może generować znaczną zmienność struktury emisji w czasie.

4. Przykład zastosowania

Przedstawione powyżej koncepcje zastosowano m.in. do problemu sprzedaży instrumentów skarbowych, w okresie półrocznym (dane z 2000 r.); omówiono go dokładnie w pracy Klukowski, Kuba 2001.

4.1. Zastosowanie kryterium minimaksowego

Wyznaczenie rozwiązania minimaksowego wymaga określenia:

1) instrumentów dłużnych wchodzących w skład portfela – uwzględniono pięć instrumentów: bony skarbowe 52-tyg. oraz obligacje stałoprocentowe: dwu-, pięcio-, i dziesięcioletnie oraz zmiennoprocentowe: dziesięcioletnie;

2) zbioru wariantowych prognoz stóp procentowych oraz macierzy strat – przyjęto 7 wariantów prognoz (zob. tablica 1), sformułowanych na podstawie prognoz makroekonomicznych z rozważanego okresu.

Należy zaznaczyć, że wpływy budżetowe, odpowiadające poszczególnym ścieżkom, wykazują niewielkie różnice; zastosowano wzór (3), a nie (4), ponieważ wymaga znacznie mniejszego nakładu obliczeń, zapewniając dostateczną – z praktycznego punktu widzenia - precyzję wyników. Zastosowanie wzoru (4) omówiono w pracy Klukowski 2003, rozdz. 8.

Tablica 1. Warianty prognozy ścieżek rocznych stóp procentowych oraz prawdopodobieństwa ich realizacji w latach 2000-2010.

Rok	Wariant						
	I	II	III	IV	V	VI	VII
2000	17,50	17,50	17,50	17,50	17,50	17,50	17,50

2001	13,00	16,69	17,62	16,00	15,37	13,00	15,37
2002	11,70	15,88	16,93	13,70	13,79	10,72	14,53
2003	10,70	15,08	16,17	11,70	12,37	9,73	13,40
2004	9,75	14,27	15,40	10,25	11,29	8,79	12,01
2005	9,25	13,46	14,51	9,75	10,85	8,30	10,85
2006	8,60	12,65	13,67	9,10	10,63	7,66	9,92
2007	8,15	11,85	12,77	8,40	10,49	7,22	9,50
2008	7,25	11,04	11,99	7,50	9,84	6,33	9,14
2009	7,00	10,23	11,04	7,25	9,10	6,09	9,10
2010	7,00	9,42	10,03	7,25	8,21	6,10	8,89
Prawdop. realiz.	0,20	0,05	0,025	0,500	0,100	0,025	0,100

Macierz strat **W**, wyznaczona wg wzoru (3), przyjęła postać:

$$\mathbf{W} = 10^3 \begin{bmatrix} 0 & -12324 & -13853 & -8582 & -1106 & -1273 & -11285 \\ -19157 & 0 & -780 & -7855 & 0 & -33699 & 0 \\ -26277 & 0 & 0 & -10133 & 0 & -43612 & 0 \\ 0 & -1342 & -2262 & 0 & 0 & -342 & -235 \\ -3852 & -1485 & -2506 & -3601 & -19745 & -10511 & -260 \\ -6403 & -1226 & -215 & -3591 & 0 & -14866 & 0 \end{bmatrix}.$$

Rozwiązanie gry odpowiadającej powyższej macierzy **W** ma postać zrandomizowaną, ponieważ nie ma ona punktu siodłowego;

prawdopodobieństwa ξ_i są równe: $\xi_1 = \xi_2 = \xi_5 = \xi_6 = \xi_7 = 0$, $\xi_3 = 0{,}0422$, $\xi_4 = 0{,}9578$ (rozkład dwupunktowy). Prawdopodobieństwo ξ_3 odpowiada najbardziej pesymistycznej ścieżce stóp, natomiast ξ_4 - ścieżce opartej na prognozie z impulsem inflacyjnym. W wyniku losowania (dokonanego przy wykorzystaniu generatora liczb losowych) otrzymano – jako decyzję - strategię odpowiadającą ścieżce 4, implikującej rozwiązanie optymalne o postaci: $x_1^* = 4\,125\,000$, $x_2^* = 7\,326\,375$, $x_3^* = 1\,942720$, $x_4^* = 450\,000$, $x_5^* = 1\,089\,685$ (wartość zmiennej oznacza liczbę nominałów). Przyjęcie takiego rozwiązania stanowi optymalne zabezpieczenie przed wystąpieniem najmniej korzystnej - dla zarządzającego długiem - ścieżki stóp procentowych, spośród przyjętego zbioru ścieżek.

4.2. Zadanie oparte na kryterium minimalizacji wartości oczekiwanej funkcji straty

Koncepcję minimalizacji wartości oczekiwanej funkcji straty zastosowano dla zbioru wariantów prognoz i macierzy strat przyjętych w poprzednim punkcie oraz prawdopodobieństw wariantów podanych w tablicy 1. Wartości oczekiwanej straty ϑ_i (i=1, ..., 7) dla tego problemu są równe: 7 520 608; 8 620 760; 11 412 323; 155 751; 2 991 373, 13 193 075, 3 562 563. Najmniejsza wartość oczekiwanej straty odpowiada ścieżce o indeksie 4, a zatem optymalne rozwiązanie zadania dla kryterium minimalnej wartości oczekiwanej funkcji straty ma postać identyczną, jak w przypadku kryterium *minimaksowego*.

Zauważmy, że wartość oczekiwanej straty dla tego wariantu jest o rząd lub dwa rzędy wielkości mniejsza od pozostałych, zaś prawdopodobieństwo otrzymane dla tego wariantu w rozwiązaniu *minimaksowym* przekracza 95%. Oznacza to, że przyjęcie rozwiązania optymalnego, odpowiadającego czwartej ścieżce stóp procentowych, w rozważanym zbiorze, wiąże się z niskim poziomem ryzyka, wynikającego z możliwości błędnego wyboru ścieżki.

5. Zakończenie

Przedstawione powyżej koncepcje zastosowania dwuosobowej gry strategicznej do ograniczania ryzyka kosztów obsługi długu publicznego, wynikającego z wielowariantowości prognoz, stanowią składnik optymalizacyjnej metodologii zarządzania długiem publicznym, omówionej szerzej w pracach: Klukowski 2003, 2005 oraz Klukowski, Kuba 2001a, b, 2002a, b. Znajdują one zastosowanie zwłaszcza w okresach zagrożenia kryzysem ekonomicznym, skutkującym napięciami w finansach publicznych. Znaczenie tego problemu jest obecnie potęgowane przez wysoki – rosnący permanentnie poziom kosztów obsługi długu. Koncepcje te mogą być stosowane w warunkach rutynowej pracy podmiotu zarządzającego długiem, ze względu na prostotę oraz niewielkie wymagania obliczeniowe (wystarczający jest dowolny współczesny komputer PC oraz arkusz Excel). Czynniki te (niski poziom złożoności matematycznej i obliczeniowej) powinny przyczynić się do przełamania oporu uniemożliwiającego wdrożenie w praktyce metod optymalizacji zarządzania długiem publicznym.

Literatura

1. Greń J. (1972) *Gry statystyczne i ich zastosowania*. PWE, Warszawa.

2. Klukowski L. (2003) *Optymalizacja decyzji w zarządzaniu instrumentami dłużnymi Skarbu Państwa*. Wyższa Szkoła Informatyki Stosowanej i Zarządzania, Seria: MONOGRAFIE, Warszawa.

3. Klukowski L. (2005) *Kompleksowa optymalizacja zarządzania zadłużeniem Skarbu Państwa*. W.: Studziński J., Drelichowski L., Hryniewicz O. (red.) Zastosowania Informatyki w Nauce, Technice i Zarządzaniu. IBS PAN, Badania Systemowe, Tom 41, Red. Nauk. J. Gutenbaum, Warszawa.

4. Klukowski L., Kuba E. (2001a) *Optymalizacja zarządzania długiem Skarbu Państwa. Minimalizacja kosztów obsługi instrumentów dłużnych emitowanych na rynku krajowym*. NBP Materiały i Studia, zeszyt 119.

5. Klukowski L., Kuba E. (2001b) *Minimization of public debt servicing costs based on nonlinear mathematical programming approach.* Control and Cybernetics, vol. 30, no 1. IBS PAN.

6. Klukowski L., Kuba E. (2002a) *Optymalizacja zarządzania długiem Skarbu Państwa w horyzoncie trzyletnim.* W: Kacprzyk J., Węglarz J. (red.) *Badania Operacyjne i Systemowe wobec wyzwań XXI wieku. Modelowanie i optymalizacja, metody i zastosowania.* Akademicka Oficyna Wydawn. EXIT, Warszawa.

7. Klukowski L., Kuba E. (2002b) *Stochastyczna optymalizacja strategii zarządzania skarbowymi instrumentami dłużnymi.* NBP Materiały i Studia, zeszyt 152 (tekst w portalu NBP).

8. Majewska J. (2007) *Odporna optymalizacja portfela inwestycyjnego na przykladzie polskiego rynku kapitalowego.* W: Trzaskalik T. *Modelowanie preferencji a ryzyko.* AE im. K. Adamieckiego, Katowice.