Brandes
Schaper
Mahlo
Berliner
Nagel

311-315

311-315

THEORIE DER POLAREN IN BEZUG AUF DREIECKE IN SYNTHETISCHER BEHANDLUNG

INAUGURAL-DISSERTATION
DER HOHEN PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT
DER UNIVERSITÄT BERN
ZUR ERLANGUNG DER DOKTORWÜRDE

VORGELEGT VON

HENOCH BERLINER
AUS WARSCHAU

DRUCK VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG 1912

Von der philosophischen Fakultät auf Antrag des Herrn Prof. Dr. G. Huber angenommen.

Bern, den 21. Dezember 1911.

Der Dekan:

Prof. Dr. K. Marti.

MEINER LIEBEN FRAU

IRMA GEB. MENDELSSOHN

GEWIDMET

Die vorliegende Theorie der Polaren habe ich hier in den Monaten Dezember 1910 und Januar 1911 entwickelt und habe dieselbe im Wintersemester 1910/11 und ihre Fortbildung, nämlich ihre Anwendung auf die Theorie der unikursalen Kurven, im Sommersemester 1911 im mathematischen Seminar von Herrn Prof. Dr. Huber vorgetragen.

Ich erfülle eine angenehme Pflicht, indem ich hiermit dem hochverehrten Herrn Prof. Dr. G. Huber für das mir während meiner hiesigen Studienzeit erwiesene Wohlwollen und Entgegenkommen meinen besten Dank ausspreche.

Gleichzeitig danke ich verbindlichst den hochverehrten Herren Prof. Dr. J. H. Graf und Prof. Dr. N. Reichesberg für ihr freundliches Entgegenkommen.

Auch sei mir gestattet die Gelegenheit zu benutzen, um an dieser Stelle dem hochverehrten Herrn Geheimen Hofrate Prof. Dr. M. Pasch für sein warmes Interesse an meinem Studium und stetiges Wohlwollen während meiner Gießener Studienzeit meinen innigsten Dank zu sagen.

Bern, den 23. November 1911.

H. Berliner.

INHALTSVERZEICHNIS.

		Seite
Erster Abschnitt.	Pol und Polare in bezug auf Dreiecke	1
Zweiter Abschnitt.	Definition von Pol und Polare in bezug auf Dreiecke durch Involutionen	9
Dritter Abschnitt.	Rechtwinklige Strahleninvolutionen im Dreieck	20
Vierter Abschnitt.	Über die elliptische Involution	38
Fünfter Abschnitt.	Erzeugung der Kegelschnitte durch Pole und Polaren in bezug auf ein Dreieck	43
Sechster Abschnitt.	Erzeugung der Kegelschnittbüschel und Kegelschnittscharen durch Pole und Polaren in bezug auf ein Dreieck	65
Anhang		90
Nachtrag		92

Erster Abschnitt.

Pol und Polare in bezug auf Dreiecke.

1. Satz 1: Ist in der Ebene eines Dreiecks ABC von den Seiten $a \equiv BC$, $b \equiv CA$ und $c \equiv AB$ ein Punkt P gegeben, der auf keiner Seite liegt, und legt man durch ihn die drei Ecktransversalen $AP \equiv a'$, $BP \equiv b'$ und $CP \equiv c'$ (Fig. 1) und konstruiert zu diesen die vierten harmonischen Strahlen a'', b'' und c'' in bezug auf die Seiten, so liegen die Schnittpunkte dieser drei letzten Ecktransversalen mit den gegenüberliegenden Seiten, also $aa'' \equiv A'$, $bb'' \equiv B'$ und $cc'' \equiv C'$ in einer Geraden p, die durch keine Ecke geht. Geht man umgekehrt von einer Geraden p aus, die keine Ecke enthält, so gelangt man in dualer Weise zu einem Punkte P, der auf keiner Seite liegt. Es wird so jedem auf keiner Seite liegenden Punkt P eine durch keine Ecke gehende Gerade p eindeutig zugeordnet; und umgekehrt. Die Gerade p heißt die Polare des Punktes P, und dieser heißt der Pol von p in bezug auf das Dreieck ABC.

Sind ferner A'', B'' und C'' die Schnittpunkte der drei ersten Ecktransversalen mit den gegenüberliegenden Seiten, also $A'' \equiv aa'$, $B'' \equiv bb'$ und $C'' \equiv cc'$, so liegen A', B'', C'' in einer Geraden p', B', C'', A'' in einer Geraden p'' und C', A'', B'' in einer Geraden p'''.

Endlich laufen die drei Ecktransversalen a', b'', c'' in einen Punkt P' und ebenso b', c'', a'' in einen Punkt P'' und c', a'', b'' in einen Punkt P''' zusammen.

Ebenso wie der Punkt P und die Gerade p liegt keiner der Punkte P', P'', P''' auf einer Seite und keine der Geraden p', p'', p''' geht durch eine Ecke.

Den vorstehenden Satz pflegt man mit Hilfe der bekannten Sätze von Menelaus und Ceva zu beweisen. Da aber letztere nur auf metrischen Eigenschaften beruhen, so will ich hier einen rein geometrischen Beweis dieses Satzes geben.

Beweis. Nach Voraussetzung gehen die folgenden Geraden durch je einen Punkt und es liegen die folgenden Punkte auf je einer Geraden:

$$
(\mathrm{I}) \left\{ \begin{array}{ll}
1.\ \text{durch } A\ (b, c;\ a', a''), & 2.\ \text{durch } B\ (c, a;\ b', b''), \\
3.\ \text{durch } C\ (a, b;\ c', c''), & 4.\ \text{durch } A'\ (a, a''), \\
5.\ \text{durch } B'\ (b, b''), & 6.\ \text{durch } C'\ (c, c''), \\
7.\ \text{auf } a\ (C, B;\ A'', A'), & 8.\ \text{auf } b\ (A, C;\ B'', B'), \\
9.\ \text{auf } c\ (B, A;\ C'', C'), & 10.\ \text{auf } a'\ (A, A'', P), \\
11.\ \text{auf } b'\ (B, B'', P), & 12.\ \text{auf } c'\ (C, C'', P),
\end{array} \right.
$$

wobei 1.—3. und ebenso 7.—9. harmonische Würfe sind, da 7. der Schnitt der Seite a mit 1., 8. der von b mit 2. und endlich 9. der von c mit 3. ist.

Betrachten wir die Dreiecke ABC und $A''B''C''$, von denen das zweite, nach (I) 7.—9., dem ersten eingeschrieben ist, so sehen wir nach (I) 10.—12., daß die drei Verbindungslinien AA'', BB'', CC'' in P konvergieren; folglich sind, nach dem Satze von Desargues über perspektive Dreiecke, die Dreiecke ABC und $A''B''C''$ perspektiv und die drei Schnittpunkte entsprechender Seiten $(BC, B''C'')$, $(CA, C''A'')$ und $(AB, A''B'')$ müssen in einer Geraden, sie sei p, liegen.

Betrachten wir ferner das vollständige Viereck $PABC$, so sehen wir nach (I) 7.—12., daß seine Diagonalpunkte A'', B'', C'' sind; es sind somit je zwei Ecken wie B und C, C und A, A und B durch den Diagonalpunkt, welcher auf der durch diese beiden Ecken gehenden Seite liegt, und die Verbindungslinie der beiden übrigen Diagonalpunkte, also durch A'' und $B''C''$ resp. B'' und $C''A''$ resp. C'' und $A''B''$ harmonisch getrennt; folglich muß, da nach (I) 7.—9. B von C durch A'' und A', C von A durch B'' und B', A von B durch C'' und C' harmonisch getrennt ist, der Schnittpunkt $(BC, B''C'')$ mit

A', $(CA,\ C''A'')$ mit B' und $(AB,\ A''B'')$ mit C' identisch sein, welche Punkte auf der Geraden p liegen.

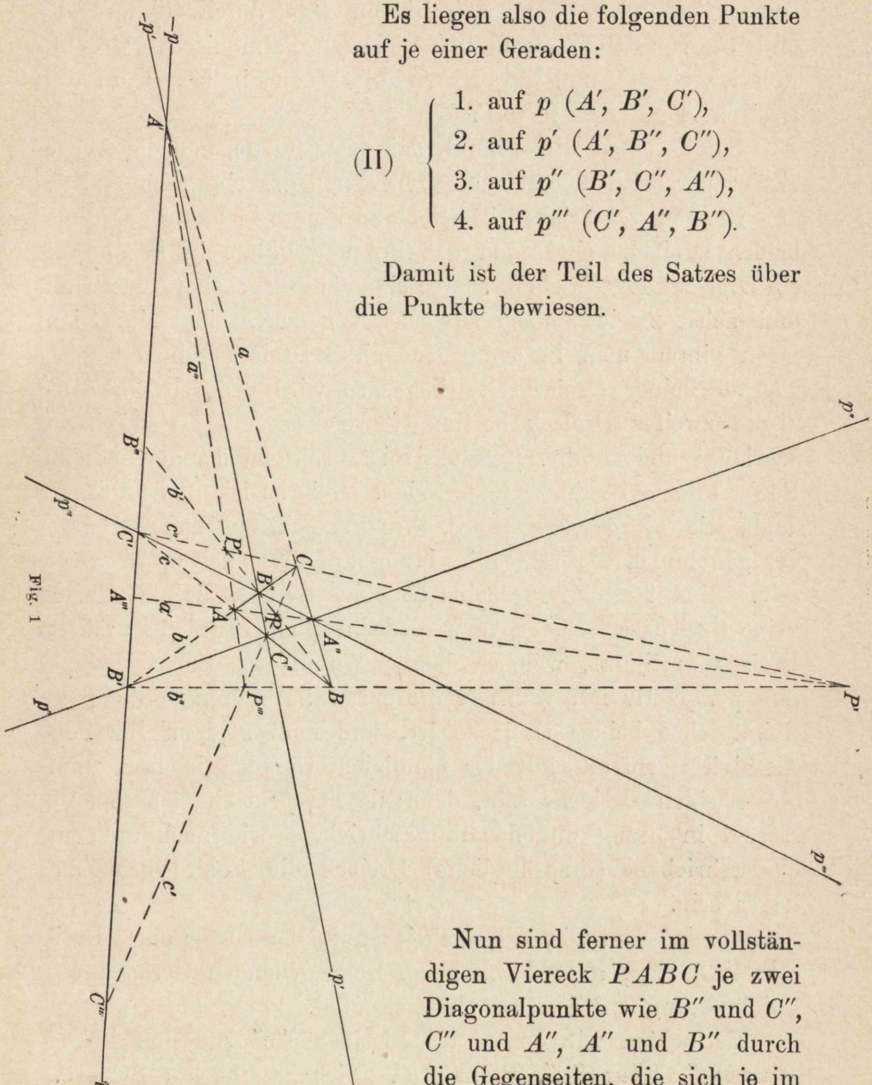

Fig. 1

Es liegen also die folgenden Punkte auf je einer Geraden:

$$
\text{(II)} \left\{
\begin{array}{l}
1.\ \text{auf } p\ (A',\ B',\ C'),\\
2.\ \text{auf } p'\ (A',\ B'',\ C''),\\
3.\ \text{auf } p''\ (B',\ C'',\ A''),\\
4.\ \text{auf } p'''\ (C',\ A'',\ B'').
\end{array}
\right.
$$

Damit ist der Teil des Satzes über die Punkte bewiesen.

Nun sind ferner im vollständigen Viereck $PABC$ je zwei Diagonalpunkte wie B'' und C'', C'' und A'', A'' und B'' durch die Gegenseiten, die sich je im dritten Diagonalpunkte schneiden, also durch $PA \equiv PA''$ und BC resp. $PB \equiv PB''$ und CA resp. $PC \equiv PC''$ und AB harmonisch getrennt; es wird aber, wie wir eben gesehen haben, $B''C''$ von BC in A', $C''A''$ von CA in B' und $A''B''$ von AB in C' getroffen, also ist A' von PA'' durch B'' und C'', B' von PB'' durch C'' und A'' und C' von PC'' durch A'' und B'' harmonisch getrennt. Folglich sind P und p Pol und Polare auch in bezug auf das Dreieck $A''B''C'' \equiv p'''p'p''$.

Somit haben wir erkannt, daß das Zentrum und die Achse zweier perspektiver Dreiecke, von denen das eine dem andern ein- oder umgeschrieben ist, Pol und Polare in bezug auf diese beiden Dreiecke sind, und daß Pol und Polare in bezug auf ein Dreieck ABC nichts anderes sind als Perspektivitätszentrum und -achse zweier solcher Dreiecke, von denen eines ABC ist. Denn nimmt man in der Ebene eines Dreiecks einen Punkt, der auf keiner Dreieckseite liegt, so wird dadurch ein einziges zweites Dreieck bestimmt, welches dem ersten eingeschrieben und zu ihm perspektiv ist, während der genommene Punkt Perspektivitätszentrum beider Dreiecke ist, und muß alsdann, wie wir gesehen haben, ihre Perspektivitätsachse Polare des genommenen Punktes in bezug auf diese beiden Dreiecke sein. Nimmt man ferner eine beliebige Gerade, die aber durch keine Dreiecksecke geht, so wird dadurch ein einziges zweites Dreieck bestimmt, welches dem ersten umgeschrieben und zu ihm perspektiv ist, während die ausgewählte Gerade Perspektivitätsachse beider Dreiecke ist, und muß alsdann ihr Perspektivitätszentrum Pol der nämlichen Geraden in bezug auf diese beiden Dreiecke sein, denn die Perspektivitätsachse muß sowohl in bezug auf das umgeschriebene wie auch auf das eingeschriebene (ursprüngliche) Dreieck die Polare des Zentrums sein.

Somit sehen wir, daß auch jeder, in der Ebene eines Dreiecks liegenden, aber durch keine Ecke gehenden Geraden ein Pol in bezug auf dies Dreieck zukommt.

Betrachten wir nun das Dreiseit $a''b''c''$ von den Ecken $P' \equiv b''c''$, $P'' \equiv c''a''$, $P''' \equiv a''b''$. Dies ist, nach (I) 1.—6., (II) 1., dem Dreieck ABC umgeschrieben und zu ihm perspektiv, ihre Perspektivitätsachse ist die Gerade p; folglich muß, da P und p Pol und Polare in bezug auf ABC sind, P

das Perspektivitätszentrum der Dreiecke ABC und $P'P''P''' \equiv c''a''b''$ und Pol von p auch in bezug auf $P'P''P'''$ sein. Es liegen also die folgenden Punkte auf je einer Geraden:

$$\text{(III)} \left| \begin{array}{ll} 1.\ \text{auf } a''\ (A, A'; P'', P'''), & 2.\ \text{auf } b''\ (B, B'; P''', P'), \\ 3.\ \text{auf } c''\ (C, C'; P', P''), & 4.\ \text{auf } a'\ (A, A''; P, P'), \\ 5.\ \text{auf } b'\ (B, B''; P, P''), & 6.\ \text{auf } c'\ (C, C''; P, P'''). \end{array} \right.$$

1.—3. sind harmonische Würfe, da

$$A \equiv (P'P, P''P'''),\ B \equiv (P''P, P'''P') \text{ und } C \equiv (P'''P, P'P'')$$

und P und p Pol und Polare auch in bezug auf $P'P''P'''$ sind. Dasselbe gilt, wie wir nachher sehen werden, auch von 4.—6. Nach (III) konvergieren die drei Ecktransversalen a', b'', c'' in P', b', c'', a'' in P'' und c', a'', b'' in P'''.

Da ferner der Punkt P auf keiner Dreieckseite liegt und die Ecktransversalen a', a'' usw. durch b, c usw. harmonisch getrennt sind, so kann keine der Ecktransversalen a', b', c', a'', b'', c'' mit einer Seite, und also auch keiner der Punkte A', B', C', A'', B'', C'' mit einer Ecke zusammenfallen; somit kann keine der Geraden p, p', p'', p''' durch eine Ecke gehen und keiner der Punkte P', P'', P''' auf einer Seite liegen.

Somit ist der Satz 1 in allen seinen Teilen bewiesen.

2. Liegt P innerhalb des Dreiecks ABC, so liegen, da dann PA, PB und PC gänzlich innerhalb der vollkommenen Dreieckwinkel α, β, γ verlaufen, A'', B'', C'' sämtlich auf den Dreieckseiten selbst, dagegen A', B', C', da sie von A'' resp. B'' resp. C'' durch die Ecken harmonisch getrennt sind, sämtlich auf den Verlängerungen der Dreieckseiten; also liegt die Polare p des Punktes P in diesem Falle gänzlich außerhalb des Dreiecks ABC. Liegt dagegen P außerhalb des Dreiecks ABC, also entweder innerhalb eines Dreieckscheitelwinkels oder innerhalb eines Dreieckwinkels selbst, aber jenseits der gegenüberliegenden Seite, so verläuft eine Ecktransversale von P gänzlich innerhalb des den Punkt P enthaltenden vollkommenen Dreieckwinkels, wogegen die beiden anderen Ecktransversalen von P gänzlich innerhalb der vollkommenen Dreiecknebenwinkel, also gänzlich außerhalb des Dreiecks verlaufen. Folglich liegt dann einer der Punkte A'', B'', C'' auf einer Dreieckseite selbst und die beiden übrigen auf den Verlängerungen der Dreieckseiten; somit müssen zwei der drei Punkte A', B', C' auf den Dreieckseiten selbst, der dritte aber auf der Verlängerung liegen. Es schneidet demnach die Polare p von P in diesem Falle das Dreieck ABC, und zwar werden diejenigen zwei Seiten des Dreiecks von p geschnitten, die den den Punkt P enthaltenden vollkommenen Dreieckwinkel bilden.

Die Polare eines auf keiner Dreieckseite liegenden Punktes kann somit in keinem Falle durch den letzteren gehen.

Wie wir gesehen haben, konvergieren a', b'', c'' in P', also ist P', nach (III) 4., 2., 3., das Perspektivitätszentrum der Dreiecke ABC und $PP'''P'' \equiv c'a''b'$ sowie von ABC und $p'''p''p \equiv A''B'C'$, von welchen das eine dem zweiten ein- oder umgeschrieben ist ((III) 1., 5., 6.; (I) 7.—9.), und p' die Perspektivitätsachse derselben Dreiecke, denn

$$A' \equiv (BC, P'''P'') \equiv (BC, B'C')$$

nach (I) 7., (III) 1., (II) 1.,

$$B'' \equiv (CA, P''P) \equiv (CA, C'A'')$$

nach (I) 8., (III) 5., (II) 4.,

$$C'' \equiv (AB, PP''') \equiv (AB, A''B')$$

nach (I) 9., (III) 6., (II) 3. und A', B'', C'' liegen auf p' (II) 2. Folglich sind P' und p' Pol und Polare in bezug auf die Dreiecke ABC, $PP'''P'' \equiv c'a''b'$ und $p'''p''p \equiv A''B'C'$; ganz analog kann man zeigen, daß P'' und p'' in bezug auf ABC, $P'''PP' \equiv c'a'b''$, $p'p'''p \equiv A'B''C'$ und P''', p''' in bezug auf ABC, $P''P'P \equiv c''a'b'$, $pp''p' \equiv A'B'C''$ Pol und Polare sind.

Es verhalten sich also P' zu p', P'' zu p'' und P''' zu p''' ebenso wie P zu p.

3. Die Punkte $PP'P''P'''$ bilden ein vollständiges Viereck, dessen Diagonalpunkte A, B, C sind (III), und die Geraden p, p', p'', p''' bilden ein vollständiges Vierseit, dessen Diagonalen a, b, c sind ((II), (I) 7.—9.). Also ist $ABC \equiv cab$ das

Diagonaldreieck sowohl für das Viereck $PP'P''P'''$ wie für das Vierseit $pp'p''p'''$. Demnach sind auch umgekehrt je vier Punkte bzw. vier Geraden, welche ein das Grunddreieck ABC zum Diagonaldreieck habendes vollständiges Viereck bzw. Vierseit bilden, in bezug auf ABC zusammengehörige Punkte bzw. Geraden.

Im vollständigen Viereck $PP'P''P'''$ müssen je zwei Ecken wie etwa P und P' durch den Diagonalpunkt, welcher auf der durch sie gehenden Seite liegt, und die Verbindungslinie der beiden übrigen Diagonalpunkte, also durch A und $(BC, PP') \equiv A''$ harmonisch getrennt sein, somit sind in (III) 4.—6. harmonische Würfe.

Dual bilden die folgenden Strahlenbüschel harmonische Würfe.

$$(\mathrm{IV})\begin{cases} 1.\ A''(a,a';p'',p'''),\ \ 2.\ B''(b,b';p''',p'),\ \ 3.\ C''(c,c';p',p''), \\ 4.\ A'(a,a'';p,p'),\ \ 5.\ B'(b,b'';p,p''),\ \ 6.\ C'(c,c'';p,p'''). \end{cases}$$

1.—3. folgen daraus, daß im Viereck $PABC$ je zwei Gegenseiten des Vierecks durch die zwei Seiten seines Diagonaldreiecks, die sich sämtlich in einem und demselben Diagonalpunkte schneiden, harmonisch getrennt sind. 4.—6. folgen daraus, daß im Vierseit $pp'p''p'''$ je zwei Seiten durch die ihren Schnittpunkt enthaltenden Diagonale und den Schnittpunkt der beiden anderen Diagonalen harmonisch getrennt sind.

Die Gerade $PP'A$ wird vom Schnittpunkte $pp'a$ durch B und C oder, was auf dasselbe hinauskommt, durch b und c, ebenso $PP''B$ von $pp''b$ durch C und A oder c und a und $PP'''C$ von $pp'''c$ durch A und B oder a und b harmonisch getrennt.

Ist also in der Ebene eines Dreiecks $ABC \equiv cab$ ein beliebiger, aber auf keiner Seite liegender Punkt P oder eine beliebige, aber durch keine Ecke gehende Gerade p gegeben, so ist dadurch das ganze System von den zehn Punkten und zehn Geraden, nämlich A', B', C', A'', B'', C'', P, P', P'', P''' und a', b', c', a'', b'', c'', p, p', p'', p''' eindeutig bestimmt.

Jeder der vier Punkte P, P', P'', P''' und jede der vier Geraden p, p', p'', p''' hängt von den übrigen in gleicher Weise ab, und wenn man anstatt von P oder p von P^i oder p^i ($i = {}', {}'', {}'''$) ausgeht, so gelangt man immer zu denselben vier Punkten und vier Geraden, nur in anderer Anordnung.

Keiner dieser vier Punkte liegt, wie wir schon wissen, auf einer Seite und keine dieser vier Geraden geht durch eine Ecke; keine drei dieser vier Punkte liegen auf einer Geraden und keine drei der vier Geraden gehen durch einen Punkt, da die Ecktransversalen a', b', c' und die Punkte A', B', C' sämtlich voneinander verschieden sein müssen; endlich liegt keiner dieser vier Punkte auf einer dieser vier Geraden, denn ginge etwa p'' oder p''' durch P, so müßte p'' oder p''' mit etwa a' zusammenfallen und somit durch eine Ecke gehen, was aber unmöglich ist, ebenso kann p' nicht durch P gehen und kein Pol kann auf seiner Polaren liegen (Nr. 2).

Solche vier Punkte sind z. B. die Mittelpunkte des eingeschriebenen Kreises und der drei Ankreise des Dreiecks ABC.

Zweiter Abschnitt.

Definition von Pol und Polare in bezug auf Dreiecke durch Involutionen.

4. Untersuchen wir nun, welche Gebilde hier am Dreieck diejenigen Eigenschaften besitzen, die bei den Kegelschnitten zur Definition von Pol und Polare dienen.

Bei den Kegelschnitten gibt es vier Eigenschaften, vermittelst derer Pol und Polare definiert zu werden pflegen, nämlich:

1. auf jeder durch einen Punkt P gehenden Sekante liegt der vierte, von diesem Punkte durch die beiden Kurvenpunkte harmonisch getrennte Punkt auf der Polare p von P;

2. die zwei Diagonalpunkte des vollständigen Vierecks, das der Kurve eingeschrieben und dessen dritter Diagonalpunkt P ist, liegen auf der Polare p von P;

3. der Schnittpunkt der Tangenten, deren Berührungspunkte mit P in einer Geraden liegen, liegt auf der Polare p von P;

4. die Berührungspunkte der Tangenten, die von P an die Kurve gezogen werden, liegen auf der Polare p von P.

Duales gilt für den Pol.

Nun sehen wir, daß am Dreieck auf jeder durch den Punkt P gehenden Transversale der vierte, von P durch die beiden Dreieckseiten b, c resp. c, a resp. a, b harmonisch getrennte Punkt, auf der Ecktransversale a'' resp. b'' resp. c'' liegt, denn a'' geht durch den Schnittpunkt $bc \equiv A$ und wird von $PA \equiv a'$ durch b und c harmonisch getrennt, ebenso b'' und c''.

Ist ferner ein vollständiges Viereck zwei Dreieckseiten eingeschrieben, d. h. liegen auf den beiden Dreieckseiten b und c

resp. c und a resp. a und b je zwei Ecken dieses Vierecks und bilden somit diese beiden Dreieckseiten ein Paar Gegenseiten des Vierecks, und ist außerdem der Punkt P ein Diagonalpunkt dieses Vierecks, so liegen die beiden übrigen Diagonalpunkte auf a'' resp. b'' resp. c''. Denn einer dieser beiden letzten Diagonalpunkte ist der Schnittpunkt von b, c resp. c, a resp. a, b, also die Ecke A resp. B resp. C; der andere ist von P durch die Gegenseiten b, c resp. c, a resp. a, b harmonisch getrennt, somit muß auch dieser Diagonalpunkt auf a'' resp. b'' resp. c'' liegen. Und wenn anstelle der Tangenten, die von einem Punkte an die Kurve gezogen werden, hier am Dreieck die Verbindungslinien des Punktes mit den Ecken treten sollen, so werden den Tangenten in 3. hier am Dreieck die Dreieckseiten entsprechen und ihr Schnittpunkt ist also eine Ecke. Ebenso werden den Berührungspunkten in 4. hier die Dreiecksecken entsprechen.

Wir sehen also, daß die vier erwähnten Kegelschnittspolareigenschaften in bezug auf den Punkt P hier am Dreieck die drei Ecktransversalen a'', b'', c'' besitzen; ebenso besitzen die drei Punkte A'', B'', C'' die vier dualen Kegelschnittspolareigenschaften in bezug auf die Gerade p.

Der Punkt P und die Gerade p aber besitzen keine dieser Kegelschnittspolareigenschaften. Nur drei Punkte auf p, nämlich $pa'' \equiv pa \equiv A'$, $pb'' \equiv pb \equiv B'$ und $pc'' \equiv pc \equiv C'$ sind von P durch je zwei Dreieckseiten harmonisch getrennt. Ebenso sind nur drei Strahlen durch P, nämlich $PA'' \equiv PA \equiv a'$, $PB'' \equiv PB \equiv b'$ und $PC'' \equiv PC \equiv c'$ von p durch je zwei Dreiecksecken harmonisch getrennt.

Wie kann nun p als Polare von P und P als Pol von p, also als einander zugehörig, angesehen werden, wenn nur drei Elemente des einen Trägers zum andern Träger in irgendeiner Beziehung stehen?

5. Ich will mich deshalb nach einer andern Definition von Pol und Polaren in bezug auf Dreiecke umsehen, die eine Verallgemeinerung einer Eigenschaft des Pols und seiner Polare in bezug auf Kegelschnitte sein soll.

In der Ebene eines Kegelschnitts hat bekanntlich die Involution konjugierter Punkte auf der Polare zu der Involution konjugierter Strahlen um ihren Pol involutorische Lage, ferner sind die Doppelelemente dieser Involutionen die Schnittpunkte der Polare mit dem Kegelschnitt bzw. die durch den Pol gehenden Tangenten des Kegelschnitts.

Wir können nun von dem Begriff der konjugierten Elemente, der erst auf der Definition von Pol und Polare beruht, absehen und nur das eine beibehalten, daß auf jeder Geraden und um jeden Punkt in der Ebene eines Kegelschnitts eine natürliche Involution entsteht, nämlich diejenige, die zu Doppelelementen, welche auch zusammenfallend oder imaginär sein können, die beiden auf dieser Geraden liegenden Kurvenpunkte bzw. die beiden durch diesen Punkt gehenden Kurventangenten hat.

Nun können wir Pol und Polare dadurch definieren, daß wir denjenigen Punkt und die Gerade als einander zugehörig ansehen und sie mit Pol und Polare bezeichnen, bei welchen die natürliche Involution um den Punkt zu der auf der Geraden perspektiv ist und bei welchen diejenigen Paare in beiden Involutionen, die vom Kegelschnitt direkt herrühren und sich dual gegenüberstehen, ineinander und zwar involutorisch liegen. Daß dadurch jedem Punkte eine Gerade und umgekehrt eindeutig zugeordnet ist, leuchtet sofort ein, denn ihre Involutionen sind perspektiv, somit sind ihre Doppelelemente inzident, also muß die Polare durch die Berührungspunkte der beiden aus ihrem Pol an den Kegelschnitt gelegten Tangenten gehen.

Nun will ich zeigen, daß auch in der Ebene eines Dreiecks auf jeder Geraden und um jeden Punkt eine natürliche Involution entsteht, und daß auch in bezug auf ein Dreieck Pol und Polare dadurch definiert werden können, daß wir denjenigen Punkt und die Gerade als Pol und seine Polare bezeichnen, bei welchen diese beiden natürlichen Involutionen in der Weise perspektiv sind, daß diejenigen Paare in diesen beiden Involutionen, die vom Dreieck direkt herrühren und sich dual gegenüberstehen, ineinander und zwar involutorisch liegen.

Zu diesem Zwecke gehe ich vom folgenden Satze aus.

Hilfssatz: Bestimmt man zu drei voneinander verschiedenen Elementen A', B' und C' eines Elementargebildes drei weitere Elemente A''', B''' und C''' desselben Gebildes in der Weise, daß A''' von A' durch B' und C', B''' von B' durch C' und A', C''' von C' durch A' und B' harmonisch getrennt sind, so verhalten sich die abgeleiteten Elemente A''', B''', C''' zu den ursprünglichen A', B', C' reziprok, d. h. es ist auch A' von A''' durch B''' und C''' usw. harmonisch getrennt; ferner sind A', A'''; B', B'''; C', C''' drei Paare einer Involution, und zwar einer elliptischen.*

Dieser Satz wird mit Hilfe der Doppelverhältnisse bewiesen, ich will hier einen zweiten Beweis mit Hilfe der bisherigen Resultate geben, der zugleich zu dem von uns aufgestellten Ziele führen wird.

Es genügt den Satz für den Fall zu beweisen, daß das Elementargebilde eine gerade Punktreihe ist; alle anderen Fälle lassen sich durch Projizieren und Schneiden auf diesen einzigen zurückführen.

Beweis. Ist eine Gerade p und die auf ihr liegenden Punkte A', B', C', A''', B''', C''', welche die Bedingungen des Hilfssatzes erfüllen, gegeben und konstruiert man in einer durch p gehenden Ebene ein Dreieck $ABC \equiv cab$ (Fig. 1), dessen Seiten a, b, c die Gerade p in den Punkten A', B', C' schneiden sollen, und bestimmt alsdann die Geraden a', b', c', a'', b'', c'' des der Geraden p in bezug auf ABC zugehörigen Systems, so wird p von a', b', c' in den Punkten A''', B''', C''' geschnitten. Denn nach (I) 1. sind b, c; a', a'' vier harmonische Strahlen und nach Konstruktion und (IV) 4. liegt B' auf b, C' auf c und A' auf a'', folglich muß A''', das nach Voraussetzung von A' durch B' und C' harmonisch getrennt ist, auf a' liegen; ebenso muß B''' auf b' und C''' auf c' liegen. (III) 4.—6. gehen nun über in

$$(\mathrm{V}) \left\{ \begin{array}{l} 1.\ a'(A, A'', A''', P, P'),\quad 2.\ b'(B, B'', B''', P, P''), \\ \qquad\qquad 3.\ c'(C, C'', C''', P, P'''), \end{array} \right.$$

wobei

$$\text{(VI)} \quad \begin{cases} 1.\ p(A''', A'; B', C'), \quad 2.\ p(B''', B'; C', A'), \\ 3.\ p(C''', C'; A', B') \end{cases}$$

harmonische Würfe sind.

Nun folgt aus (V), daß A', A''', B''', C'''; B', B''', C''', A'''; C', C''', A''', B''' die Projektionen von A', A'', B, C; B', B'', C, A; C', C'', A, B auf p und aus dem Projektionszentrum P sind, somit sind auch, nach (I) 7.—9., A', A'''; B''', C''' usw. harmonische Würfe, und die Punkte A''', B''', C''' verhalten sich zu den Punkten A', B', C' reziprok.

Da ferner die drei Punktepaare A', A'''; B', B'''; C', C''', wie wir gesehen haben, nichts anderes als die drei Paare Schnittpunkte $p(a, a'; b, b'; c, c')$ und die drei Geradenpaare a, a'; b, b'; c, c' die drei Paare Gegenseiten des vollständigen Vierecks $PABC$ sind, so müssen A', A'''; B', B'''; C', C''' drei Punktepaare einer Involution sein.

Um nun noch den Charakter dieser Involution zu erfahren, wählen wir das Dreieck ABC, welches keinen weiteren Bedingungen unterworfen ist, als daß es in einer durch p gehenden Ebene liegen muß und p seine Seiten in den Punkten A', B', C' schneiden muß, speziell so, daß alle drei Ecken A, B, C auf der einen Seite der Geraden p liegen sollen, so daß p gänzlich außerhalb des Dreiecks ABC liegen und nur die Verlängerungen der Dreieckseiten schneiden soll. Alsdann muß $P \equiv (a'b'c')$, als Pol von p in bezug auf ABC innerhalb dieses Dreiecks liegen. Folglich muß die Involution auf p, von welcher A', A'''; B', B'''; C', C''' drei Punktepaare sind, elliptisch sein nach dem Kriterium (Steiner, Vorlesungen über synthetische Geometrie II, § 18, Nr. 52), daß, wenn eine der Ecken eines vollständigen Vierecks vom Dreiecke der anderen eingeschlossen wird und auf jeder Seite der das Viereck schneidenden Geraden eine gerade Zahl von Vierecksecken liegt, die Involution, die von diesem Viereck auf der Geraden herrührt, elliptisch ist.

Somit ist dieser Hilfssatz in allen seinen Teilen bewiesen.

Zugleich haben wir nach (V) folgenden Satz gewonnen.

Satz 2: Bestimmt man auf einer Geraden p, die durch keine Ecke des Dreiecks $ABC \equiv cab$ geht, zu den drei Schnittpunkten $pa \equiv A'$, $pb \equiv B'$ und $pc \equiv C'$ drei weitere Punkte A''', B''' und C''' auf p so, daß A''' von A' durch B' und C', B''' von B' durch C' und A', C''' von C' durch A' und B' harmonisch getrennt sein sollen, und verbindet A''' mit A, B''' mit B und C''' mit C, so laufen die drei Ecktransversalen AA''', BB''' ,CC''' durch den Pol P der Geraden p in bezug auf das Dreieck ABC.

Dual: Bestimmt man zu den drei Ecktransversalen eines Punktes P, der in der Ebene eines Dreiecks $ABC \equiv cab$, aber auf keiner Seite liegt, also zu $PA \equiv a'$, $PB \equiv b'$, $PC \equiv c'$ drei weitere Strahlen a''', b''', c''' durch P so, daß a''', a'; b', c' usw. vier harmonische Strahlen sein sollen, so liegen die drei Schnittpunkte aa''', bb''', cc''' auf der Polare p des Punktes P in bezug auf das Dreieck ABC.

Der duale Satz folgt einfach daraus, daß A', wie wir gesehen haben, von A''' durch B''' und C''' harmonisch getrennt ist und a', b', c' durch A''', B''', C''' gehen, also muß a''', das von a' durch b', c' harmonisch getrennt ist, durch A' gehen, es ist aber $A' \equiv pa$, folglich muß $aa''' \equiv A'$ sein; ganz analog kann man zeigen, daß $bb''' \equiv B'$ und $cc''' \equiv C'$ sein muß; die letzten drei Punkte liegen aber auf p, womit der Satz bewiesen ist.

Den Formeln (V) und (VI) stehen nun dual gegenüber:

$$\text{(VII)} \quad \begin{cases} 1.\ A'(a, a'', a''', p, p'), \quad 2.\ B'(b, b'', b''', p, p''), \\ \qquad 3.\ C'(c, c'', c''', p, p'''), \end{cases}$$

wobei

$$\text{(VIII)} \quad \begin{cases} 1.\ P(a''', a'; b', c'), \quad 2.\ P(b''', b'; c', a'), \\ \qquad 3.\ P(c''', c'; a', b') \end{cases}$$

harmonische Würfe sind.

Wir sehen also, daß in der Ebene eines Dreiecks ABC um jeden auf keiner Seite liegenden Punkt und auf jeder durch keine Ecke gehenden Geraden eine natürliche Involution entsteht, nämlich diejenige, von welcher die drei durch den Punkt gehenden Ecktransversalen a', b', c' und die drei aus ihnen abgeleiteten a''', b''', c''', also a', a'''; b', b'''; c', c''' drei Strahlenpaare sind, bzw. diejenige, von welcher die drei Schnittpunkte A', B', C' der Geraden mit den Dreieckseiten und die drei aus ihnen abgeleiteten A''', B''', C''', also A', A'''; B', B'''; C', C''' drei Punktepaare sind.

Diese Involutionen sind, wie wir wissen, stets elliptisch. Wir können nun als Pol und die zugehörige Polare in bezug auf das Dreieck ABC denjenigen Punkt und die Gerade bezeichnen, deren natürliche Involutionen, die vom Dreieck ABC herrühren, in der Weise perspektiv sind, daß die drei Punktepaare A', A'''; B', B'''; C', C''', die auf der Geraden direkt vom Dreieck herrühren, auf den drei Strahlenpaaren a''', a'; b''', b'; c''', c' des Punktes, die wieder direkt vom Dreieck herrühren und den mit ihnen inzidenten Punktepaaren dual gegenüberstehen, liegen; und zwar soll A' auf a''', B' auf b''' und C' auf c''' liegen, weil die Elemente dieser Paare nur involutorische, nicht aber perspektive Lage haben sollen.

Daß dadurch zu einem auf keiner Seite liegenden Punkte nicht mehr als eine Gerade und umgekehrt zugeordnet sein kann, ist ohne weiteres klar. Denn die Gerade muß durch $A' \equiv (aa''')$, $B' \equiv (bb''')$ und $C' \equiv (cc''')$ gehen und dual muß der Punkt auf $a' \equiv AA'''$, $b' \equiv BB'''$ und $c' \equiv CC'''$ liegen. Daß aber auch dadurch zu jedem auf keiner Seite liegenden Punkte stets eine Gerade und umgekehrt zugeordnet ist, folgt aus Satz 2; woraus man auch sieht, daß die so definierten Pole und Polaren mit den vorher im Satze 1 definierten P und p identisch sind, denn die Schnittpunkte aa''', bb''', cc''' liegen auf p und die Verbindungslinien AA''', BB''', CC''' gehen durch P.

6. Der so definierte Pol und seine Polare sind aber mit den vorigen P und p nur solange identisch, als der Punkt P auf keiner Seite liegt und somit auch p durch keine Ecke geht. Diese Identität hört aber auf, wie wir sofort sehen werden, wenn der Punkt P auf einer Seite liegt oder die Gerade p durch eine Ecke geht.

Liegt der Punkt P auf einer Dreieckseite, ohne mit einer Ecke zusammenzufallen, so fallen die vier Geraden p, p', p'', p''' mit dieser Seite, einer der drei Punkte P', P'', P''' mit P und die anderen zwei dieser drei Punkte mit demjenigen Punkte zusammen, der von P durch die beiden auf derselben Dreieckseite liegenden Ecken harmonisch getrennt ist.

Denn liegt P etwa auf a, so fallen dann A'' mit P, B'' und B' mit C und C'' und C' mit B, also ist $a \equiv p \equiv p' \equiv p'' \equiv p'''$; ferner muß, nach (III) 4.—6. und weil P mit A'', B'' mit C und C'' mit B zusammenfällt, P' mit P, P'' und P''' mit A' zusammenfallen.

Fällt endlich P mit einer Ecke zusammen, so fallen mit dieser Ecke auch P', P'', P''' zusammen, die Geraden p, p', p'', p''' gehen dann sämtlich durch dieselbe Ecke, bleiben aber unbestimmt.

Denn fällt P etwa mit A zusammen, so fallen mit A auch P', B'', B', C'', C', somit auch P'' und P''' zusammen, und p, p', p'', p''' müssen also durch A gehen, ohne jedoch bestimmt zu bleiben, da $a' \equiv AP$ und damit auch A'' und A' unbestimmt ist.

Dual: Geht p durch eine Ecke, ohne mit einer Seite zusammenzufallen, so fallen P, P', P'', P''' mit dieser Ecke, eine der drei Geraden p', p'', p''' mit p und die anderen zwei dieser drei Geraden mit derjenigen Geraden zusammen, die von p durch die beiden in dieser Ecke sich schneidenden Dreieckseiten harmonisch getrennt ist.

Fällt endlich p mit einer Seite zusammen, so fallen mit ihr auch p', p'', p''' zusammen und P, P', P'', P''' liegen dann auf derselben Seite, ohne jedoch bestimmt zu sein.

Wir sehen also, daß zu jedem Seitenpunkt P mit Ausnahme der Ecken ein einziges p gehört, nämlich diese Seite selbst, während zu demselben p unendlich viele P gehören werden, nämlich alle Punkte, die auf dieser Seite liegen, und dual gehört zu jedem p, welches durch eine Ecke geht, ohne mit einer Seite zusammenzufallen, ein einziger Punkt P, nämlich diese Ecke selbst, während zu demselben P unendlich viele p gehören werden, nämlich alle durch diese Ecke gehenden Geraden.

Nun sind aber, wenn ein Punkt auf einer Dreieckseite liegt, durch diesen Punkt und die Dreiecksecken keine drei Strahlen mehr, sondern nur zwei bestimmt, nämlich die diesen Punkt enthaltende Seite und die Verbindungslinie dieses Punktes mit der Gegenecke; die Involution, die vom Dreieck um diesen Punkt herrührt, muß diejenige sein, die diese zwei Strahlen zu Doppelstrahlen hat; diese natürliche Involution ist also hyperbolisch.

(Man könnte diesen Fall auch so auffassen, daß von den vorigen drei Strahlen jetzt zwei zusammengefallen sind, und die vorige elliptische Involution wird also jetzt zu einer parabolischen; diese Auffassung wird aber zu keiner eindeutigen Zuordnung von Pol und Polare führen.)

Dual: Wenn eine Gerade durch eine Dreiecksecke geht, so sind durch diese Gerade und das Dreieck nur zwei Punkte bestimmt, nämlich diese Ecke und der Schnittpunkt der Geraden mit der Gegenseite; die auf dieser Geraden vom Dreieck herrührende natürliche Involution muß diejenige sein, die diese zwei Punkte zu Doppelpunkte hat, die also hyperbolisch ist.

Die Polare eines auf einer Dreieckseite liegenden Punktes muß nach unserer zweiten Definition durch eine Dreiecksecke gehen, da sonst ihre natürliche Involution elliptisch wäre und gewiß nicht zu der hyperbolischen Involution um ihren Pol perspektiv sein könnte; und zwar muß diese Polare durch diejenige Ecke gehen, welche der den Punkt enthaltenden Dreieckseite gegenüberliegt, da die beiden Involutionen auf der Polare und um den Pol perspektiv sein, und also die Doppelpunkte der ersten Involution auf den Doppelstrahlen der zweiten liegen müssen; dabei darf aber die Polare nicht durch den Pol gehen, also nicht die Verbindungslinie des Punktes mit der Gegenecke sein, weil dann wieder keine perspektive Lage sein würde.

Nach der Definition von Pol und Polare durch Involutionen kann als Polare eines Punktes, der auf einer Dreieckseite liegt, aber mit keiner Ecke zusammenfällt, jede durch die Gegenecke gehende Gerade, mit Ausnahme derjenigen Geraden, die diesen Punkt mit der Gegenecke verbindet, angesehen werden.

Wenn aber der Punkt mit einer Ecke zusammenfällt, so kann jede durch eine der beiden übrigen Ecken gehende Gerade, mit Ausnahme der beiden in dieser Ecke sich schneidenden Dreieckseiten, als seine Polare angesehen werden.

Dual: Geht eine Gerade durch eine Ecke, ohne mit einer Seite zusammenzufallen, so kann jeder auf der Gegenseite liegende Punkt, mit Ausnahme des Schnittpunktes der Geraden mit der Gegenseite, als ihr Pol angesehen werden.

Fällt aber die Gerade mit einer Seite zusammen, so kann jeder auf einer der beiden übrigen Dreieckseiten liegende Punkt, mit Ausnahme der beiden auf dieser Seite liegenden Dreiecksecken, als ihr Pol angesehen werden.

Um auch in diesen Fällen eine eindeutige Zuordnung von Pol und Polare herzustellen, können wir in dem Falle, wo ein Punkt auf einer Seite liegt, ohne mit einer Ecke zusammenzufallen, oder wo eine Gerade durch eine Ecke geht, ohne mit einer Seite zusammenzufallen, die Bedingung auferlegen, daß dann der Pol und seine Polare durch die beiden mit dem Pol auf einer Seite liegenden Ecken, oder was auf dasselbe herauskommt, durch die beiden mit der Polare in einer Ecke sich schneidenden Dreieckseiten harmonisch getrennt sein sollen, weil auch im allgemeinen Falle die Spuren der durch den Pol gehenden und von den Dreieckseiten verschiedenen Ecktransversalen von den Spuren der Polare auf den Dreieckseiten durch die Dreiecksecken harmonisch getrennt sind.

Wenn also ein Punkt P auf der Seite a, b oder c liegt, ohne mit einer Ecke zusammenzufallen, so ist seine Polare die Ecktransversale $a'' \equiv AA'$ resp. $b'' \equiv BB'$ resp. $c'' \equiv CC'$.

Damit ist jedem Punkt, der nur mit keiner Ecke zusammenfällt, eine Polare eindeutig zugeordnet, und dual.

Für die Ecken als Pole bleibt also je nur die Gegenseite als Polare übrig.

Denn, wie wir gesehen haben, darf die Polare niemals durch den Pol gehen.

Somit haben wir eine eindeutige Zuordnung von Pol und Polare für alle Punkte und Geraden in der Ebene des Dreiecks.

Dritter Abschnitt.

Rechtwinklige Strahleninvolutionen im Dreieck.

7. Es drängt sich nun die Frage auf:

Gibt es in der Ebene eines Dreiecks Punkte und wie viele, für welche die Strahleninvolutionen, die um sie vom Dreieck herrühren, rechtwinklig sind?

Allererst erkennt man, daß ein solcher Punkt P, dessen natürliche Strahleninvolution rechtwinklig sein soll, auf keiner Dreieckseite liegen kann, da eine rechtwinklige Involution elliptisch ist. Ferner muß in diesem Falle die durch P gehende Ecktransversale a' die Winkelhalbierende desjenigen Winkels α' sein, der von den beiden anderen durch P gehenden Ecktransversalen b' und c' gebildet wird und innerhalb dessen a' verläuft; ebenso müssen b' und c' die Winkelhalbierenden der analogen Winkel β' und γ' sein.

Denn nach (VIII) sind a', a'''; b', c' usw. vier harmonische Strahlen und, wenn die Involution um P rechtwinklig sein soll müssen a' zu a''', b' zu b''' und c' zu c''' normal sein, weil nach der Definition der natürlichen Involution

$$P(a', a'''; b', b'''; c', c''')$$

drei Strahlenpaare dieser Involution sind; folglich müssen a', b', c' die Winkelhalbierenden der Winkel α', β', γ' sein, da, wenn von vier harmonischen Strahlen zwei zugeordnete zueinander normal sind, die Winkel der beiden anderen zugeordneten Strahlen von den ersten halbiert werden.

Es wird also der Winkel, der von b' und c' gebildet wird und innerhalb dessen a' nicht liegt, einerseits gleich $\beta' : 2$, andererseits gleich $\gamma' : 2$, er ist aber auch gleich $\pi - \alpha'$; folglich muß $\beta' = \gamma' = 2(\pi - \alpha')$; ganz analog kann man zeigen, daß $\gamma' = \alpha' = 2(\pi - \beta')$ sein muß; folglich muß $\alpha' = \beta' = \gamma' = 2(\pi - \alpha')$, daraus $\alpha' = \beta' = \gamma' = \frac{2}{3}\pi$.

Nun muß $\sphericalangle BPC = \alpha' = \frac{2}{3}\pi$ oder $= \pi - \alpha' = \frac{1}{3}\pi$ sein, je nachdem P innerhalb des vollkommenen Dreieckswinkels α oder in seinem vollkommenen Nebenwinkel liegt, da je nachdem $a' \equiv PA$ die Seite BC selbst oder nur ihre Verlängerung trifft. Ebenso muß $\sphericalangle CPA = \beta' = \frac{2}{3}\pi$ oder $= \pi - \beta' = \frac{1}{3}\pi$ und $\sphericalangle APB = \gamma' = \frac{2}{3}\pi$ oder $= \pi - \gamma' = \frac{1}{3}\pi$ sein unter denselben Bedingungen; und zwar müssen entweder alle drei Winkel BPC, CPA, APB gleich $\frac{2}{3}\pi$ oder zwei dieser drei Winkel gleich $\frac{1}{3}\pi$ und der dritte gleich $\frac{2}{3}\pi$ sein, je nachdem P innerhalb oder außerhalb des Dreiecks liegt.

Folglich müssen, wenn die natürliche Involution um P rechtwinklig sein soll, in P solche drei Kreise sich schneiden, von denen jeder eine Dreieckseite als Sehne und die Winkel $\frac{2}{3}\pi$ und $\frac{1}{3}\pi$ als Peripheriewinkel über ihr faßt. (Wenn ein Kreisbogen, der auf einer Seite der Sehne liegt, den Winkel $\frac{2}{3}\pi$ als Peripheriewinkel faßt, so faßt der Kreisbogen auf der anderen Seite der Sehne den Winkel $\frac{1}{3}\pi$.)

Ist umgekehrt P ein Schnittpunkt solcher drei Kreise und liegt er auf keiner Dreieckseite, so ist die natürliche Involution um P rechtwinklig.

Denn alsdann bilden $PB \equiv b'$ und $PC \equiv c'$ miteinander Winkel, die gleich $\frac{2}{3}\pi$ und $\frac{1}{3}\pi$ sind; dasselbe gilt von $PC \equiv c'$ und $PA \equiv a'$, folglich muß die Gerade a', die von b' verschieden ist, die Winkelhalbierende des von b' und c' gebildeten Winkels $\frac{2}{3}\pi$ sein; ebenso muß b' bzw. c' die Winkelhalbierende des Winkels $\frac{2}{3}\pi$ sein, der von c' und a' bzw. a' und b' gebildet wird. Es muß also dann die Gerade a''', die von a' durch b' und c' harmonisch getrennt ist, die Winkelhalbierende des von b' und c' gebildeten Winkels $\frac{1}{3}\pi$ und somit zu a' normal sein; ebenso muß dann b''' zu b' und c''' zu c' normal sein. Folglich muß dann die natürliche Involution um P, von welcher a', a'''; b', b'''; c', c''' drei Strahlenpaare sind, rechtwinklig sein.

Somit ist die gestellte Frage auf die folgende zurückgeführt: Gibt es in der Ebene eines Dreiecks auf keiner Seite desselben liegende Punkte und wie viele, in welchen sich solche drei Kreise schneiden sollen, die je eine Dreieckseite als Sehne und die Winkel $\frac{2}{3}\pi$ und $\frac{1}{3}\pi$ als Peripheriewinkel über ihr fassen?

8. Nun gibt es stets zwei und nur zwei solche Kreise $\varkappa_{120}$ und $\varkappa_{60}$, die eine bestimmte Dreieckseite als Sehne und die Winkel $\frac{2}{3}\pi$ und $\frac{1}{3}\pi$ als Peripheriewinkel über ihr fassen; bei dem einen $\varkappa_{120}$ liegt der den Winkel $\frac{2}{3}\pi$ fassende Kreisbogen auf derjenigen Seite der Dreieckseite, auf welcher die Gegenecke des Dreiecks sich befindet, bei dem zweiten $\varkappa_{60}$ liegt derselbe Kreisbogen auf der entgegengesetzten Seite derselben Dreieckseite.

Die drei Kreise $\varkappa_{120}$, die über den drei Dreieckseiten stehen, sind stets voneinander verschieden, dagegen die drei Kreise $\varkappa_{60}$ dann und nur dann, wenn das Dreieck nicht gleichseitig ist; ist aber das Dreieck gleichseitig, so fallen die drei Kreise $\varkappa_{60}$ mit dem umgeschriebenen Kreise zusammen.

Wir schicken nun folgendes voraus:

Der von einer Dreiecksecke verschiedene Schnittpunkt zweier gleichartiger Kreisbögen, d. h. daß entweder beide $\frac{2}{3}\pi$ oder beide $\frac{1}{3}\pi$ fassen, von zwei gleichartigen Kreisen $\varkappa_{120}$ oder $\varkappa_{60}$ über zwei Dreieckseiten kann nur innerhalb desjenigen vollkommenen Dreieckwinkel liegen, welcher von diesen beiden Dreieckseiten gebildet wird, und zwar kann dann der Schnittpunkt der $\frac{2}{3}\pi$ fassenden Bogen von den beiden Kreisen $\varkappa_{120}$ oder der $\frac{1}{3}\pi$ fassenden Bogen von den beiden Kreisen $\varkappa_{60}$ nur innerhalb des Dreieckwinkels selbst und der Schnittpunkt der $\frac{1}{3}\pi$ fassenden Bogen von den beiden Kreisen $\varkappa_{120}$ oder der $\frac{2}{3}\pi$ fassenden Bogen von den beiden Kreisen $\varkappa_{60}$ nur innerhalb des Dreieckscheitelwinkels liegen. Ebenso kann der von einer Ecke verschiedene Schnittpunkt zweier ungleichartiger Kreisbogen von zwei ungleichartigen Kreisen $\varkappa_{120}$ und $\varkappa_{60}$ über zwei Dreieckseiten nur innerhalb desselben vollkommenen Dreieckwinkel liegen. Dagegen kann der von einer Ecke verschiedene Schnittpunkt zweier gleichartiger Bogen von zwei ungleichartigen Kreisen $\varkappa_{120}$ und $\varkappa_{60}$ oder zweier ungleichartigen Bogen von zwei gleichartigen Kreisen $\varkappa_{120}$ oder $\varkappa_{60}$ über zwei Dreieckseiten nur innerhalb desjenigen vollkommenen Dreiecksnebenwinkel liegen, welcher von diesen beiden Dreieckseiten gebildet wird.

Betrachten wir nun zwei Paare solcher Kreise, etwa $\varkappa_{120}$ und $\varkappa_{60}$ über b und $\varkappa_{120}$ und $\varkappa_{60}$ über c (Fig. 2).

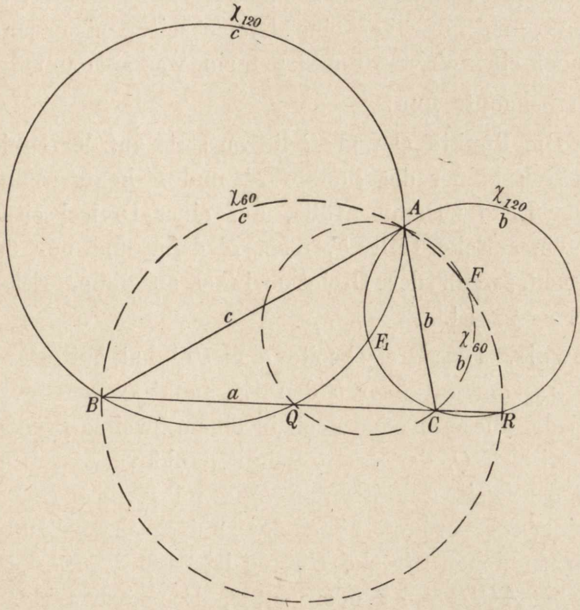

Fig. 2.

Da diese vier Kreise den Eckpunkt A gemein haben, so müssen je zwei von ihnen sich noch in einem zweiten Punkte schneiden, und da in den Ecken B und C je ein Paar dieser Kreise sich schneidet, so sind noch neue vier Schnittpunkte vorhanden, nämlich:

1. der Schnittpunkt F_1 der beiden gleichartigen Kreise $\varkappa_{120}$ über b und c;

2. der Schnittpunkt F der beiden gleichartigen Kreise $\varkappa_{60}$ über b und c, und wenn speziell das Dreieck gleichseitig ist und $\varkappa_{60}$ über b mit $\varkappa_{60}$ über c zusammenfällt, so kann jeder Punkt dieses Kreises als ein Schnittpunkt F angesehen werden;

3. der Schnittpunkt Q der beiden ungleichartigen Kreise $\varkappa_{120}$ über b und $\varkappa_{60}$ über c;

4. der Schnittpunkt R der beiden ungleichartigen Kreise $\varkappa_{60}$ über b und $\varkappa_{120}$ über c.

Die Punkte F_1 und F und ebenso Q und R sind stets voneinander verschieden, denn sonst hätte mindestens ein Paar Kreise $\varkappa_{120}$ und $\varkappa_{60}$ über eine Dreieckseite außer den beiden Ecken noch einen dritten Punkt gemein, was aber unmöglich ist.

Ich behaupte nun:

Die Punkte Q und R liegen stets auf der Dreieckseite $a \equiv BC$; keiner der Punkte F_1 und F kann, wenn er mit keiner Ecke zusammenfällt, auf einer Dreieckseite liegen; mit einer Ecke fällt F_1 resp. F dann und nur dann zusammen, wenn der Dreieckswinkel an dieser Ecke $= \frac{2}{3}\pi$ resp. $= \frac{1}{3}\pi$ ist.

Beweis. Die Dreieckseite $a \equiv BC$ hat mit den beiden Kreisen $\varkappa_{120}$ und $\varkappa_{60}$ über b den Eckpunkt C gemein, folglich muß a jeden dieser Kreise noch in einem zweiten Punkt schneiden, es sei also $Q,$ der zweite Schnittpunkt von a mit $\varkappa_{120}$ über b und $R,$ der zweite Schnittpunkt von a mit $\varkappa_{60}$ über b. Liegt nun $Q,$ auf einer der Verlängerungen der Dreieckseite BC, also außerhalb der endlichen Strecke BC, so ist dann $\sphericalangle AQ,C = AQ,B$, also ist $\sphericalangle AQ,B = \frac{1}{3}\pi$ oder $= \frac{2}{3}\pi$, je nachdem $AQ,C = \frac{1}{3}\pi$ oder $= \frac{2}{3}\pi$ ist; folglich muß $Q,$ auch ein Peripheriepunkt einer der beiden Kreise $\varkappa_{120}$ und $\varkappa_{60}$ über c sein, und zwar muß $Q,$, weil $\sphericalangle AQ,B = AQ,C$ ist, auf einem solchen Bogen eines Kreises über c liegen, welcher mit dem den Punkt $Q,$ enthaltenden Bogen des Kreises $\varkappa_{120}$ über b gleichartig ist. Es ist also $Q,$ ein Schnittpunkt zweier gleichartiger Kreisbogen, und da er auf einer der Verlängerungen der Seite BC, also innerhalb eines der beiden Dreiecksnebenwinkel von α liegt, so müssen diese Kreisbogen, nach dem Vorausgeschickten, zweien ungleichartigen Kreisen, also $\varkappa_{120}$ über b und $\varkappa_{60}$ über c angehören. Somit muß $Q, \equiv Q$ sein.

Liegt ferner $Q,$ auf der Dreieckseite BC selbst, also zwischen B und C, so ist $\sphericalangle AQ,C = \pi - AQ,B$, also ist $\sphericalangle AQ,B = \frac{1}{3}\pi$

oder $= \frac{2}{3}\pi$, je nachdem $A Q_{,} C = \frac{2}{3}\pi$ oder $= \frac{1}{3}\pi$ ist; folglich muß $Q_{,}$ auch ein Peripheriepunkt einer der beiden Kreise $\varkappa_{120}$ und $\varkappa_{60}$ über c sein, und zwar muß $Q_{,}$ in diesem Falle, weil $\sphericalangle A Q_{,} B = \pi - A Q_{,} C$ ist, auf einem solchen Bogen eines Kreises über c liegen, welcher mit dem den Punkt $Q_{,}$ enthaltenden Bogen des Kreises $\varkappa_{120}$ über b ungleichartig ist. Da jetzt aber $Q_{,}$ innerhalb der endlichen Strecke BC, also innerhalb des Dreieckwinkels α liegt und die beiden $Q_{,}$ enthaltenden Bogen ungleichartig sind, so muß $Q_{,}$ wieder der Schnittpunkt der beiden ungleichartigen Kreise $\varkappa_{120}$ über b und $\varkappa_{60}$ über c sein; somit muß auch in diesem Falle $Q_{,} \equiv Q$ sein.

Fällt ferner $Q_{,}$ mit der Ecke C zusammen, so tangiert dann die Seite BC in C den Kreis $\varkappa_{120}$ über b; alsdann muß $\sphericalangle B Q_{,} A \equiv BCA \equiv \gamma$, als Abschnittswinkel, gleich $\frac{1}{3}\pi$ sein, und $Q_{,} \equiv C$ muß also auch auf $\varkappa_{60}$ über c liegen; somit ist wieder $Q_{,} \equiv Q$. In diesem Falle fällt mit C außer Q noch F zusammen, denn $\varkappa_{60}$ über b geht durch C.

Fällt endlich $Q_{,}$ mit der Ecke B zusammen, so muß ohne weiteres $Q_{,} \equiv Q$ sein, da $\varkappa_{60}$ über c durch B geht; in diesem Falle muß $\sphericalangle AQC \equiv ABC \equiv \beta = \frac{2}{3}\pi$ sein, und mit B fällt außer Q noch F_1 zusammen, da $\varkappa_{120}$ über c durch B geht.

Wir sehen also, daß in allen möglichen Fällen $Q_{,} \equiv Q$ sein muß; ganz analog kann man zeigen, daß $R_{,} \equiv R$ ist. Es liegen somit, wie behauptet wurde, stets Q und R auf der Seite a.

Zugleich sahen wir, daß, wenn einer der Punkte Q und R mit einer Ecke zusammenfällt, so muß dahin auch einer der Punkte F_1 und F fallen. Wenn aber einer der Punkte Q und R mit keiner Ecke zusammenfällt, so kann mit diesem Punkte weder F_1 noch F zusammenfallen. Denn $\varkappa_{60}$ über c geht durch Q und $\varkappa_{120}$ über c geht durch F_1 und diese beiden Kreise können keinen weiteren, als die Eckpunkte A und B, gemeinsamen Punkt haben; ebenso kann man zeigen, daß Q mit F und R mit F_1 oder F in diesem Falle nicht zusammenfallen kann.

Keiner der Punkte F_1 und F kann somit, ohne mit einer Ecke zusammenzufallen, auf einer Dreieckseite liegen.

Denn die Seite a hat mit dem Kreise $\varkappa_{120}$ über b die beiden Punkte C und Q und mit $\varkappa_{60}$ über b die beiden Punkte C und R, die Seite b hat mit den Kreisen $\varkappa_{120}$ und $\varkappa_{60}$ über b die beiden Eckpunkte A und C und die Seite c hat mit $\varkappa_{120}$ und $\varkappa_{60}$ die beiden Eckpunkte A und B gemein, somit kann kein weiterer irgend zweien dieser Kreise gemeinsamer Punkt auf einer Dreieckseite liegen.

Mit einer Dreiecksecke fällt F_1 resp. F dann und nur dann zusammen, wenn der Dreieckswinkel an dieser Ecke gleich $\frac{2}{3}\pi$ resp. $\frac{1}{3}\pi$ ist. Daß dies für die Ecken B und C richtig ist, ist ohne weiteres klar; es gilt aber auch für die Ecke A. Denn soll F_1 mit A zusammenfallen, so müssen sich dann die Kreise $\varkappa_{120}$ über b und c in A berühren; ihre gemeinschaftliche Tangente in A, die, wie wir zeigen werden, zwischen AB und AC, also innerhalb des Dreieckwinkels α verlaufen muß, bildet mit den Seiten AC und AB zwei Winkel, welche als Abschnittswinkel je gleich $\frac{1}{3}\pi$ sind; folglich muß der Dreieckswinkel α, als Summe dieser beiden Abschnittswinkel, gleich $\frac{2}{3}\pi$ sein. Ist umgekehrt der Dreieckswinkel α an A gleich $\frac{2}{3}\pi$, so tangiert dann die Winkelhalbierende von α die beiden Kreise $\varkappa_{120}$ über b und c im Eckpunkte A, folglich muß dann F_1 mit A zusammenfallen. Es bleibt noch übrig zu beweisen, daß die gemeinschaftliche Tangente der beiden Kreise $\varkappa_{120}$ über b und c in A, wenn sich diese Kreise berühren, innerhalb des Dreieckwinkels α liegen muß. Dies soll folgendermaßen geschehen. Nehmen wir an: diese gemeinschaftliche Tangente liege nicht zwischen AB und AC, sondern innerhalb des vollkommenen Nebenwinkels von α, alsdann müßten diese beiden Kreise auf einer Seite ihrer gemeinschaftlichen Tangente liegen und somit sich von innen berühren. Nun muß der Mittelpunkt von $\varkappa_{120}$ über b, welcher mit der Ecke B auf verschiedenen Seiten von b sich befinden müssen, entweder innerhalb des der Dreieckseite AC selbst anliegenden Nebenwinkels von α oder innerhalb des Scheitelwinkels von α liegen; ebenso muß der Mittelpunkt von $\varkappa_{120}$ über c entweder innerhalb des der Dreieckseite AB selbst anliegenden Nebenwinkels von α oder innerhalb des Scheitelwinkels von α liegen. Die Mittelpunkte dieser beiden Kreise können also nicht in einem und demselben Nebenwinkel von α liegen. Somit müßten diese beiden Mittelpunkte, weil diese Kreise sich von innen berühren sollen, und also der gemeinsame Berührungspunkt A auf der Zentrale nicht zwischen den Mittelpunkten liegen kann, innerhalb des Scheitelwinkels von α liegen und so lägen auf einer Seite der gemeinschaftlichen Tangente die Mittelpunkte dieser beiden Kreise, während auf der andern Seite dieser Tangente die Kreispunkte B und C sich befinden, was unmöglich ist.

Man kann dasselbe noch einfacher beweisen: Soll die gemeinschaftliche Tangente nicht zwischen AB und AC liegen, so würden die letzten mit ihr zwei Winkel bilden, die einerseits als Abschnittswinkel je gleich $\frac{2}{3}\pi$ sein müßten, und andrerseits beide zusammen mit dem Dreieckswinkel α zur Summe π haben müßten, was sich widerspricht.

Ganz ähnlich kann man den Beweis für den Punkt F führen. Somit ist die Behauptung gänzlich bewiesen.

Aus dieser Behauptung folgt, daß von den Punkten F_1 und F höchstens einer mit einer Dreiecksecke zusammenfallen kann, denn wenn ein Dreieckswinkel gleich $\frac{2}{3}\pi$ oder $\frac{1}{3}\pi$ ist, so muß jeder der beiden übrigen Winkel kleiner als $\frac{1}{3}\pi$ resp. $\frac{2}{3}\pi$ sein.

Ferner ergibt sich: Wenn einer von den Punkten Q und R weder mit F_1 noch mit F zusammenfällt, so kann durch diesen Punkt keiner der Kreise $\varkappa_{120}$ und $\varkappa_{60}$ über die Dreieckseite a gehen, denn alsdann muß dieser Punkt, wie wir gesehen haben, auf der Seite a liegen, ohne jedoch mit einer Ecke zusammenzufallen und die Kreise $\varkappa_{120}$ und $\varkappa_{60}$ über a haben schon mit a die beiden Eckpunkte B und C gemein.

9. Wir sehen also, daß Punkte, in denen drei Kreise von der verlangten Art sich schneiden sollen, keine anderen als F_1 und F sein können.

Man kann aber auch zeigen, daß in F_1 und F sich wirklich drei Kreise von der verlangten Art schneiden.

Denn fällt F_1 mit keiner Dreiecksecke zusammen, so kann er dann, wie wir sahen, auch auf keiner Seite liegen und es ist der von Null und π verschiedene Winkel

$$BF_1C = BF_1A + AF_1C \quad \text{oder} \quad = \pm(|BF_1A| - |AF_1C|)$$

oder endlich $= 2\pi - (CF_1A + AF_1B)$, je nachdem F_1A innerhalb des Winkels BF_1C oder innerhalb eines seiner Nebenwinkel oder endlich innerhalb seines Scheitelwinkels liegt, also je nachdem $\sphericalangle BF_1A = AF_1C = \frac{1}{3}\pi$ oder einer der beiden Winkel BF_1A und AF_1C gleich $\frac{2}{3}\pi$ und der andere gleich $\frac{1}{3}\pi$ oder endlich $\sphericalangle BF_1A = AF_1C = \frac{2}{3}\pi$ ist; somit ist stets $\sphericalangle BF_1C = \frac{2}{3}\pi$ oder gleich $\frac{1}{3}\pi$, folglich muß F_1 auf einem der Kreise $\varkappa_{120}$ und $\varkappa_{60}$ über a liegen. Dieser Kreis muß aber $\varkappa_{120}$ über a sein, denn wäre er $\varkappa_{60}$ über a, so wäre F_1 auch ein Schnittpunkt zweier ungleichartiger Kreise, nämlich $\varkappa_{60}$ über a und etwa $\varkappa_{120}$ über b und müßte somit, ebenso wie die Punkte Q und R, auf der Seite c liegen, was aber, wie wir sahen, unmöglich ist.

Fällt ferner F_1 mit der Ecke A zusammen, so muß dann der Dreieckswinkel α an A gleich $\frac{2}{3}\pi$ sein, und es liegt somit $F_1 \equiv A$ auch auf dem Kreise $\varkappa_{120}$ über a. Fällt endlich F_1 mit einer der Ecken B und C zusammen, so liegt doch dann F_1 ohne weiteres auch auf $\varkappa_{120}$ über a.

Ganz analog kann man zeigen, daß auch $\varkappa_{60}$ über a stets durch F gehen muß; und wenn das Dreieck gleichseitig ist, so fallen alle drei Kreise $\varkappa_{60}$ über a, b und c mit dem umgeschriebenen Kreise zusammen, und jeder Punkt dieses letzten Kreises kann somit als ein Schnittpunkt F der drei ersten Kreise angesehen werden.

Es schneiden sich also stets die drei gleichartigen Kreise $\varkappa_{120}$ über a, b und c in F_1 und die drei gleichartigen Kreise $\varkappa_{60}$ über a, b und c in F.

10. Zugleich erkennt man,

daß F weder innerhalb des Dreiecks noch innerhalb eines der Dreieckscheitelwinkel und F_1 nicht innerhalb eines Dreieckwinkels, aber jenseits der Gegenseite liegen kann.

Denn soll F innerhalb des Dreiecks liegen, so müßte dann einerseits etwa

$$\sphericalangle BFC = 2\pi - (CFA + AFB),$$

also

$$\sphericalangle BFC = CFA = AFB = \tfrac{2}{3}\pi,$$

andrerseits aber müßte, weil F Schnittpunkt der gleichartigen Kreise $\varkappa_{60}$ ist und innerhalb aller Dreieckswinkel selbst liegt, F auf dem $\frac{1}{3}\pi$ fassenden Bogen dieser Kreise liegen, und somit $\sphericalangle BFC = CFA = AFB = \frac{1}{3}\pi$ sein, was sich widerspricht. Soll ferner F innerhalb eines Dreieckscheitelwinkels etwa von α liegen, so müßte dann einerseits

$$\sphericalangle BFC = BFA + AFC, \quad \text{also} \quad BFA = AFC = \tfrac{1}{3}\pi,$$

andrerseits müßte aber F auf dem $\frac{2}{3}\pi$ fassenden Bogen der Kreise $\varkappa_{60}$ über b und c, und somit $\sphericalangle BFA = AFC = \frac{2}{3}\pi$ sein, was sich widerspricht. Ebenso, wenn F_1 in einem Dreieckswinkel selbst etwa innerhalb α, aber jenseits der Gegenseite a liegen soll, müßte einerseits

$$\sphericalangle BF_1C = BF_1A + AF_1C, \quad \text{also} \quad BF_1A = AF_1C = \tfrac{1}{3}\pi,$$

andrerseits aber müßte F_1 auf dem $\frac{2}{3}\pi$ fassenden Bogen der Kreise $\varkappa_{120}$ über b und c liegen, und somit $\sphericalangle BF_1A = AF_1C = \frac{2}{3}\pi$ sein, was sich weiter widerspricht.

Der Punkt F_1 liegt dann und nur dann innerhalb des Dreiecks, wenn die Dreieckswinkel sämtlich kleiner als $\frac{2}{3}\pi$ sind, ist aber ein Dreieckswinkel größer als $\frac{2}{3}\pi$, so liegt dann F_1 innerhalb seines Scheitelwinkels; der Punkt F liegt, wenn ein Dreieckswinkel größer oder gleich $\frac{2}{3}\pi$ ist, innerhalb dieses Winkels selbst, aber jenseits der Gegenseite.

Denn sind sämtliche Dreieckswinkel kleiner als $\frac{2}{3}\pi$, so bildet die Winkelhalbierende von α mit den Dreieckseiten AB und AC Winkel, die kleiner als $\frac{1}{3}\pi$ sind; folglich muß diese Winkelhalbierende mit jedem der $\frac{2}{3}\pi$ fassenden Bogen der beiden Kreise $\varkappa_{120}$ über b und c außer A noch einen zweiten Punkt gemein haben, und somit gehört eine Strecke auf dieser Winkelhalbierenden dem Innern dieser Bogen an, also greifen diese beiden Bogen ineinander ein. Nun sind auch die Winkel β und γ kleiner als $\frac{2}{3}\pi$ und die Ecke B resp. C liegt mit dem $\frac{2}{3}\pi$ fassenden Bogen des Kreises $\varkappa_{120}$ über b resp. c auf einer

Seite der Dreieckseite AC resp. AB, also muß B resp. C ein außerhalb $\varkappa_{120}$ über b resp. c gelegener Punkt sein, und diese beiden Bogen müssen somit, ehe sie noch B resp. C erreicht hatten, sich schon zum zweiten Male geschnitten haben. Dieser zweite Schnittpunkt, der F_1 ist, muß also in diesem Falle, als Schnittpunkt der $\frac{2}{3}\pi$ fassenden Bogen der beiden Kreise $\varkappa_{120}$ über b und c, innerhalb des Winkels α und zwar innerhalb des Dreiecks liegen, weil F_1 nicht jenseits der Gegenseite a liegen kann.

Ist aber ein Dreieckswinkel etwa α größer oder gleich $\frac{2}{3}\pi$, so kann man in ähnlicher Weise zeigen, daß sich im ersten Falle die $\frac{1}{3}\pi$ fassenden Bogen der beiden Kreise $\varkappa_{120}$ über b und c und in beiden Fällen die $\frac{2}{3}\pi$ fassenden Bogen der beiden Kreise $\varkappa_{60}$ über b und c schneiden; folglich muß im ersten Falle F_1 innerhalb des Scheitelwinkels von α und in beiden Fällen F jenseits der Seite a liegen.

11. Der Punkt F_1 kann nicht, wenn er mit keiner Ecke zusammenfällt, auf dem umgeschriebenen Kreise liegen; der Punkt F liegt, ohne mit einer Ecke zusammenzufallen, dann und nur dann auf diesem Kreise, wenn das Dreieck gleichseitig ist, wobei alle Peripheriepunkte dieses Kreises als F aufzufassen sind; F_1 und F beide zugleich können niemals auf diesem Kreise liegen.

Denn der umgeschriebene Kreis hat mit jedem der Kreise $\varkappa_{120}$ und $\varkappa_{60}$ zwei Ecken gemein, soll nun F_1 oder F mit einem von einer Ecke verschiedenen Peripheriepunkte des ersten Kreises zusammenfallen, so müssen alle drei Kreise $\varkappa_{120}$ resp. $\varkappa_{60}$ mit dem umgeschriebenen Kreise zusammenfallen, der erste Fall kann aber niemals und der zweite, solange das Dreieck nicht gleichseitig ist, eintreten. Wenn ferner F_1 mit einer Ecke zusammenfällt, so muß dann der Winkel an dieser Ecke gleich $\frac{2}{3}\pi$ sein; das Dreieck kann also nicht mehr gleichseitig sein und die übrigen Winkel sind je kleiner als $\frac{1}{3}\pi$, somit kann nicht F zugleich mit F_1 auf dem Umkreise liegen.

Ist das Dreieck gleichseitig, so fällt F_1 mit demjenigen Punkte zusammen, in welchem die Mittelpunkte M und M_0

des Um- und Inkreises, der Schwerpunkt S und der Höhenpunkt H vereinigt liegen, sonst kann F_1 mit keinem dieser Punkte zusammenfallen; F fällt mit M dann und nur dann zusammen, wenn das Dreieck gleichschenklig und der Winkel an seiner Spitze gleich $\frac{2}{3}\pi$ ist; mit den übrigen Punkten fällt F niemals zusammen. Weder F_1 noch F fällt mit einem der Mittelpunkte M_0' und M_0'' und M_0''' der drei Ankreise zusammen.

Beweis. Ist das Dreieck gleichseitig, so bilden die drei Winkelhalbierenden miteinander Winkel, die je gleich $\frac{2}{3}\pi$ sind, und der innerhalb des Dreiecks gelegene Punkt M_0, in welchem auch M, S und H vereinigt liegen, muß also mit F_1 zusammenfallen. Soll umgekehrt M mit F_1 zusammenfallen, so wird dann M, welcher von allen drei Ecken gleiche Entfernung hat und nicht innerhalb eines Dreieckscheitelwinkels liegen kann, innerhalb des Dreiecks liegen müssen (Nr. **10**) und die drei gleichschenkligen Dreiecke AMB, BMC und CMA werden einander kongruent sein, weil sämtliche Schenkel dieser Dreiecke einander gleich sind und die Winkel an ihren Spitzen sämtlich gleich $\frac{2}{3}\pi$ sind, also muß $AB = BC = CA$ sein. Soll F_1 mit dem stets innerhalb des Dreiecks liegenden Punkte M_0 zusammenfallen, so werden die Dreiecke AM_0B und AM_0C und ebenso BM_0A und BM_0C kongruent sein, und es muß wieder $AB = BC = CA$ sein. Soll ferner F_1 mit dem innerhalb des Dreiecks liegenden Punkte S zusammenfallen, so werden die drei Dreiecke ASB, BSC und CSA gleichschenklig sein, weil CS, AS, BS Winkelhalbierende und zugleich Mittellinie im Dreieck ASB bzw. BSC bzw. CSA ist; diese drei gleichschenkligen Dreiecke müssen nun auch einander kongruent sein, weil jeder Schenkel zweien dieser drei Dreiecke gemeinschaftlich ist und die Winkel an den Spitzen dieser Dreiecke sämtlich gleich $\frac{2}{3}\pi$ sind, also muß wieder $AB = BC = CA$ sein. Soll endlich, wenn das Dreieck spitzwinklig ist, F_1 mit dem dann innerhalb des Dreiecks liegenden Punkte H zusammenfallen, so werden dann die Dreiecke AHB, BHC und CHA gleichschenklig sein, weil CH, AH, BH Winkelhalbierende und zugleich Höhe im Dreieck AHB bzw. BHC bzw. CHA ist; daraus folgt ebenso wie im vorigen Falle, daß $AB = BC = CA$ sein muß. Ist aber das Dreieck rechtwinklig, so kann F_1 mit H nicht zusammenfallen, weil H in der Ecke des rechten Winkels zu liegen kommt. Ist endlich das Dreieck stumpfwinklig und etwa $\alpha > \frac{\pi}{2}$, so liegt dann H im Scheitelwinkel von α und es ist $\sphericalangle BHC = \pi - \alpha$, denn im einfachen Viereck, welches die zwei Dreieckseiten b, c und die zwei zugehörigen Dreieckshöhen BH, CH zu seinen Seiten hat, sind zwei Winkel rechte, der dritte an A gleich α, also muß der vierte an H gleich $\pi - \alpha$ sein; F_1 kann also auch in diesem Falle nicht mit H zusammenfallen, da sonst müßte dann

$$\frac{2}{3}\pi = \sphericalangle BF_1C \equiv BHC = \pi - \alpha < \frac{\pi}{2}$$

sein. Ist das Dreieck gleichschenklig etwa $AB = AC$ und ist der Winkel α an seiner Spitze A gleich $\frac{2}{3}\pi$, so muß M, der dann von AB und AC gleich weit entfernt ist, auf der Winkelhalbierenden von α liegen; die Dreiecke AMB und AMC müssen dann gleichseitig sein, $\sphericalangle AMB = AMC = \frac{1}{3}\pi$; der Punkt M, welcher nicht innerhalb eines Scheitelwinkels liegen kann, muß also dann jenseits der Seite a liegen und mit F zusammenfallen. Soll umgekehrt F mit M zusammenfallen, so kann M nicht innerhalb des Dreiecks liegen; liegt nun M etwa jenseits der Seite a, so müssen die Dreiecke AMB und AMC gleichseitig sein, es ist also dann $AB = AM = AC$ und

$$\sphericalangle CAB = CAM + MAB = \tfrac{2}{3}\pi.$$

Da ferner M_0 und S stets innerhalb des Dreiecks liegen und H nicht innerhalb eines Dreieckwinkels, aber jenseits der Gegenseite liegen kann, so fällt F niemals mit einem dieser Punkte zusammen. Endlich kann mit einem der Punkte M_0', M_0'' und M_0''' weder der Punkt F_1, da er nicht innerhalb eines Dreieckwinkels, aber jenseits der Gegenseite liegen kann, noch F zusammenfallen. Denn fiele F mit etwa M_0' zusammen, so müßten die Dreiecke $AM_0'B$ und $AM_0'C$ kongruent, und also $M_0'B = M_0'C$ sein; daraus wird aber weiter folgen $2\frac{\pi}{6} = \pi - \beta = \pi - \gamma$, somit $\beta = \gamma = \frac{2}{3}\pi$, was unmöglich ist.

12. Die Verbindungslinie F_1F geht, wenn die Dreieckswinkel von $\frac{1}{3}\pi$ und $\frac{2}{3}\pi$ verschieden sind, wenn also weder F_1 noch F mit einer Ecke zusammenfällt, dann und nur dann durch eine Ecke, wenn das Dreieck gleichschenklig ist, und zwar ist dann F_1F die Höhe zu seiner Basis und die Punkte F_1 und F liegen symmetrisch in bezug auf die letzte.

Beweis. Geht die Verbindungslinie F_1F etwa durch die Ecke A (Fig. 3 und 4), so ist $\sphericalangle F_1AB$ entweder $= FAB$

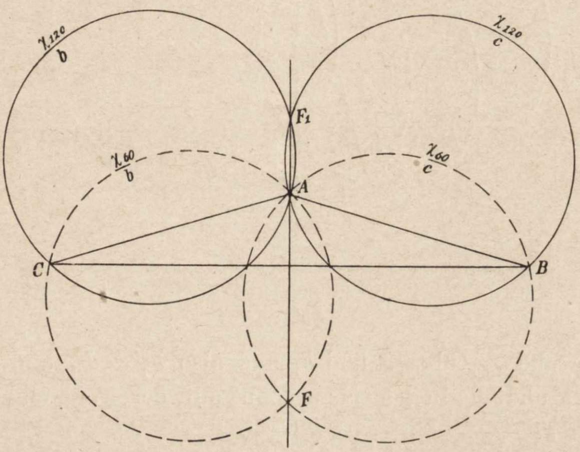

Fig. 3.

oder $= \pi - FAB$, in beiden Fällen muß also, da die Kreise $\varkappa_{120}$ und $\varkappa_{60}$ über AB von gleichem Radius sind, die Sehne $F_1B = FB$ sein; aus demselben Grunde muß auch $F_1C = FC$ sein, somit sind die beiden Dreiecke F_1BF und F_1CF gleichschenklig und es muß BC die Mittelsenkrechte zu F_1F sein. $F_1F \equiv F_1A$ ist also Höhe und zugleich Winkelhalbierende im Dreieck BF_1C, somit muß dieses Dreieck gleichschenklig sein und BC zur Basis haben; folglich muß auch das Grunddreieck BAC gleichschenklig sein und BC zur Basis haben, da F_1A Höhe und zugleich Mittellinie in diesem Dreieck sein muß. Ist umgekehrt das Dreieck gleichschenklig mit der Basis BC und sind F_1' und F' die zweiten Schnittpunkte der Winkelhalbierenden von α mit den Kreisen $\varkappa_{120}$ und $\varkappa_{60}$ über AB, so müssen die Dreiecke $AF_1'B$ und $AF_1'C$ und ebenso $AF'B$ und $AF'C$ kongruent, und also $\sphericalangle AF_1'C = AF_1'B$ und $AF'C = AF'B$ sein; es müssen somit, weil F_1' und F' innerhalb des vollkommenen Dreieckswinkels α liegen, F_1' und F' Schnittpunkte zweier gleichartiger Bogen der gleichartigen Kreise $\varkappa_{120}$ über

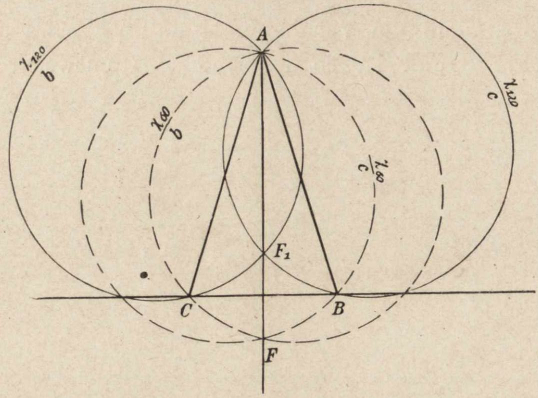

Fig. 4.

b und c und $\varkappa_{60}$ über b und c, und also $F_1' \equiv F_1$ und $F' \equiv F$ sein; F_1 und F liegen also dann auf der Winkelhalbierenden von α.

13. Die Punkte F_1 und F liegen, wenn das Dreieck nicht gleichschenklig ist oder wenn das Dreieck gleichseitig ist und als F ein Peripheriepunkt des Umkreises genommen wird, mit den Dreiecksecken A, B, C und dem Dreieckshöhenpunkt H auf einer gleichseitigen Hyperbel, und zwar sind F_1 und F die Endpunkte einer Durchmessersehne. Die Verbindungslinie F_1F geht also, wenn F_1 nicht mit H zusammenfällt, wenn also das Dreieck nicht gleichseitig ist, dann und nur dann durch H, wenn das Dreieck gleichschenklig ist und dann F_1F stets zu einer seiner Höhen hat.

Beweis. Die Strahlen F_1A, F_1B, F_1C bilden miteinander drei Paar vollkommene Winkel, die sämtlich $\frac{1}{3}\pi$ und $\frac{2}{3}\pi$ sind, dasselbe gilt von den drei Strahlen FA, FB, FC; folglich sind die projektiven Strahlenbüschel

$$F_1(A, B, C, \ldots) \quad \text{und} \quad F(A, B, C, \ldots)$$

gleich. Diese gleichen Strahlenbüschel sind nur projektiv, nicht aber perspektiv, da keiner der drei Eckpunkte A, B, C weder auf der Verbindungslinie der beiden anderen, noch auf dem den beiden Büscheln gemeinschaftlichen Strahle F_1F liegt, wenn das Dreieck nicht gleichschenklig ist. Nun erzeugen zwei gleiche Strahlenbüschel in schiefer Lage einen Kreis oder eine gleichseitige Hyperbel, von welcher die Mittelpunkte der Strahlenbüschel Endpunkte einer ihrer Durchmessersehnen sind, je nachdem diese gleichen Strahlenbüschel gleichlaufend oder entgegengesetztlaufend sind, also müssen die gleichen Strahlenbüschel $F_1(A, B, C, \ldots)$ und $F(A, B, C, \ldots)$ entgegengesetztlaufend sein und eine gleichseitige Hyperbel erzeugen, von welcher F_1 und F die Endpunkte einer Durchmessersehne sind, da F_1 und F beide zugleich niemals auf dem Umkreise liegen können (Nr. **10**). Diese gleichseitige Hyperbel muß, weil sie dem Dreieck ABC umgeschrieben ist, durch den Höhenpunkt H dieses Dreiecks gehen.

14. Wie wir sahen, sind F_1 und F die einzigen Punkte, in welchen sich drei Kreise von der verlangten Art schneiden. Soll noch die vom Dreieck um F_1 oder F herrührende natürliche Involution rechtwinklig sein, so darf F_1 oder F mit keiner Ecke zusammenfallen; ist diese Bedingung erfüllt, so ist die Involution um diesen Punkt rechtwinklig. Da diese beiden Punkte für uns nur dann von Interesse sind, wenn die Involutionen um sie rechtwinklig sind, so soll einer dieser beiden Punkte von nun an nur dann mit F_1 resp. F bezeichnet werden, wenn er mit keiner Ecke zusammenfällt.

Fassen wir alle Ergebnisse zusammen, so erhalten wir den folgenden Satz.

Satz 3: In der Ebene eines Dreiecks ABC gibt es im allgemeinen, d. h. wenn sämtliche Dreieckswinkel von $\frac{1}{3}\pi$ und $\frac{2}{3}\pi$ verschieden sind, zwei und nur zwei Punkte F_1 und F, für welche die vom Dreieck um sie herrührenden Involutionen rechtwinklig sind; ist aber ein Dreieckswinkel $= \frac{2}{3}\pi$ oder ein und nur ein Dreieckswinkel $= \frac{1}{3}\pi$, so gibt es nur einen solchen Punkt, und zwar ist er im ersten Fall F, im zweiten F_1; ist endlich das Dreieck gleichseitig, so gibt es unendlich viele solcher Punkte, und zwar sind sie: der Mittelpunkt des Umkreises, der F_1 ist, und alle Peripheriepunkte desselben Kreises, mit Ausnahme der Dreiecksecken, die als F aufzufassen sind.

In F_1 schneiden sich drei Kreise, von denen jeder eine Dreieckseite als Sehne und den Winkel $\frac{2}{3}\pi$ als Peripheriewinkel über ihr faßt, und zwar soll nicht der $\frac{2}{3}\pi$ fassende Bogen dieses Kreises von der Gegenecke durch diese Dreieckseite getrennt sein; in F schneiden sich wieder drei Kreise von derselben Art, nur tritt hier $\sphericalangle \frac{1}{3}\pi$ an Stelle von $\frac{2}{3}\pi$. Weder F_1 noch F kann auf einer Dreieckseite liegen; F_1 liegt dann innerhalb des Dreiecks, wenn sämtliche Dreieckswinkel $< \frac{2}{3}\pi$ sind, sonst liegt er innerhalb des größten Dreieckscheitelwinkels, F dagegen kann nur innerhalb eines Dreieckwinkels selbst, aber jenseits der Gegenseite liegen, und wenn ein Winkel $\geqq \frac{2}{3}\pi$ ist, liegt F jenseits der größten Dreieckseite. F_1 und F liegen somit stets innerhalb eines und desselben vollkommenen Dreieckwinkels.

F_1 kann niemals und F dann nicht, wenn das Dreieck nicht gleichseitig ist, auf dem Umkreise liegen. Der Mittelpunkt M des Umkreises fällt dann und nur dann mit F_1 resp. F zusammen, wenn das Dreieck gleichseitig resp. gleichschenklig und der Winkel an seiner Spitze gleich $\frac{2}{3}\pi$ ist. Der Mittelpunkt M_0 des Inkreises, der Schwerpunkt S oder der Höhenpunkt H fällt mit F niemals, mit F_1 aber dann und nur dann zusammen, wenn das Dreieck gleichseitig ist. Keiner der Mittelpunkte M_0', M_0'', M_0''' der drei Ankreise kann mit F_1 oder F zusammenfallen.

F_1 und F liegen dann und nur dann zusammen mit einer Dreiecksecke in einer Geraden, wenn das Dreieck nur gleichschenklig, nicht aber gleichseitig ist, und zwar ist dann diese Gerade die Höhe zu der Basis dieses gleichschenkligen Dreiecks und die Punkte F_1 und F liegen symmetrisch in bezug auf diese Basis; sonst liegen F_1 und F auf einer gleichseitigen Hyperbel, die dem Dreieck umgeschrieben ist und durch H geht, und zwar sind F_1 und F die Endpunkte einer Durchmessersehne.

F_1 und F sind die einzigen Punkte, aus denen die natürlichen Involutionen auf den ihnen in bezug auf das Dreieck zugehörigen Polaren durch rechtwinklige Strahleninvolutionen projiziert werden.

Die Punkte F_1 und F besitzen ferner die Eigenschaft, daß das Verhältnis der Entfernungen einer Dreiecksecke von einem derselben und seiner in bezug auf das Dreieck zugehörigen Polaren zueinander konstant ist für alle drei Ecken.

Die drei Polaren f_1, f und h der Punkte F_1, F und H in bezug auf das Dreieck laufen in einen Punkt zusammen.

Das Vorletzte folgt aus dem weiteren Satze 24 und das Letzte aus den Sätzen 5 und 9, da F_1 und F auf einer dem Dreieck umgeschriebenen gleichseitigen Hyperbel liegen.

Mit Hilfe dieses Satzes kann die folgende Frage beantwortet werden: Wie muß ein Dreieck beschaffen sein, damit die auf der unendlich fernen Geraden von diesem Dreieck herrührende natürliche Involution mit der Involution I_∞, deren Doppelpunkte die absoluten Punkte der Ebene sind, identisch sein soll?

Die Antwort lautet: Diese Forderung ist dann und nur dann erfüllt, wenn das Dreieck gleichseitig ist.

Denn bekanntlich ist eine Strahleninvolution dann und nur dann zu I_∞ perspektiv, wenn diese Strahleninvolution rechtwinklig ist. Ferner ist der Schwerpunkt S eines Dreiecks der Pol der unendlich fernen Geraden s_∞ in bezug auf dieses Dreieck, da auf jeder Dreieckseite ihre Mitte vom unendlich fernen Punkte durch die beiden Ecken harmonisch getrennt ist. Folglich ist die auf s_∞ vom Dreieck herrührende Involution dann und nur dann mit I_∞ identisch, wenn die um ihren Pol S vom Dreieck herrührende Involution rechtwinklig ist, also wenn F_1 mit S zusammenfällt.

Vierter Abschnitt.

Über die elliptische Involution.

15. Die Betrachtung (Nr. 7), die zur Ermittelung der Punkte F_1 und F diente, kann auch zur Lösung der folgenden schon an und für sich interessanten Frage benutzt werden.

Nach dem Hilfssatz (Nr. 5) sind, wenn A''', A'; B', C' und B''', B'; C', A' und C''', C'; A', B' harmonische Würfe sind, A', A'''; B', B'''; C' C''' drei Paare einer elliptischen Involution; es entsteht nun die Frage:

Gibt es auch umgekehrt in jeder elliptischen Involution drei solche Paare X', X'''; Y', Y'''; Z', Z''', wobei X''', X'; Y', Z' und Y''', Y'; Z', X' und Z''', Z'; X', Y' harmonische Würfe sein sollen, und wie viele gibt es solcher Paaretripel?

Es genügt wieder die Frage für den Fall zu beantworten, wo der Träger der elliptischen Involution eine Gerade ist.

Projizieren wir die elliptische Punktinvolution auf der Geraden aus einem derjenigen Punkte, aus denen diese Punktinvolution durch eine rechtwinklige Strahleninvolution projiziert wird, so müssen ebenso viele Paaretripel von der verlangten Art in der so entstandenen rechtwinkligen Strahleninvolution vorhanden sein, wie viel es deren in der Punktinvolution gibt, da diese Involutionen perspektiv sind.

Soll nun x''', x'; y', z' ein harmonischer Wurf sein, wobei x', x'''; y', y'''; z', z''' drei Strahlenpaare dieser rechtwinkligen Strahleninvolution sein sollen, so muß x', der zu x''' normal ist, die Winkelhalbierende eines derjenigen Winkel sein, die von y' und z' gebildet werden; ebenso müssen y' und z' die Winkelhalbierende eines derjenigen Winkel sein, die von z' und x' bzw. x' und y' gebildet werden, wenn auch y''', y'; z', x' und z''', z'; x', y' harmonische Würfe sein sollen. Folglich müssen, wie wir oben (Nr. 7) sahen, x', y' und z' zu je zwei Winkel miteinander bilden, die gleich $\frac{1}{3}\pi$ und $\frac{2}{3}\pi$ sind.

Bilden umgekehrt je zwei der drei Strahlen x', y' und z' miteinander Winkel, die gleich $\frac{1}{3}\pi$ und $\frac{2}{3}\pi$ sind, so halbiert jeder dieser drei Strahlen einen der Winkel, die von den beiden anderen gebildet werden; sind nun x''', y''' und z''' diejenigen drei Strahlen, die in der rechtwinkligen Strahleninvolution x', y' und z' zugeordnet sind, so müssen x''', x'; y', z' und y''', y'; z', x' und z''', z'; x', y' harmonische Würfe sein.

Wir sehen also, daß wir von den drei Strahlen x', y', z' einen, etwa x', beliebig wählen dürfen; ist aber x' fest gewählt, so sind y' und z' eindeutig mitbestimmt, es sind dies nämlich die Strahlen, die mit x' die Winkel $\frac{1}{3}\pi$ und $\frac{2}{3}\pi$ resp. $\frac{2}{3}\pi$ und $\frac{1}{3}\pi$ in einem und demselben Drehsinne bilden; wären wir anstatt von x' von y' oder z' ausgegangen, so kämen wir auch dann auf dieselben drei Strahlen x', y', z' zurück, da sie voneinander in gleicher Weise abhängen.

Die Schnittpunkte eines solchen Paaretripels in der rechtwinkligen Strahleninvolution mit dem Träger der Punktinvolution bilden ein solches Paaretripel in der letzteren.

Es gibt also in jeder elliptischen Involution $\frac{1}{3} \cdot \frac{n}{2}$ Paaretripel von der verlangten Art, wo mit n die unendlich große Anzahl der Punkte einer Geraden bezeichnet wird, denn zu jedem Paare der Involution, deren Anzahl $\frac{n}{2}$ ist, gehört ein und nur ein solches Paaretripel und von welchem der drei Paare eines Tripels man ausgehen mag, kommt man immer auf dasselbe Tripel zurück.

Somit ist die Frage gelöst und haben zugleich ein Mittel gewonnen, das Paaretripel zu konstruieren, wenn ein Paar beliebig gegeben ist, was eine Aufgabe vierten Grades ist.

Wie wir sahen, müssen zwei solche Paaretripel identisch sein, wenn sie nur ein Paar gemein haben; es müssen also die Paare von zwei voneinander verschiedenen Tripeln sämtlich voneinander verschieden sein. Somit können wir, wie in einer Involution je zwei Punkte zu einem Paare gepaart sind, die Paare einer elliptischen Involution ihrerseits wieder zu je drei zu einem Tripel gruppieren, und zwar werden diese Paaretripel von der oben verlangten Art sein.

16. Wir sind jetzt imstande die folgende Frage zu beantworten. Wenn eine elliptische Punktinvolution auf einer Geraden p und eine zu ihr perspektive Strahleninvolution um einen Punkt P gegeben sind, gibt es dann Dreiecke und wie viele, in bezug auf welche die Träger P und p dieser Involutionen Pol und Polare und die gegebenen Involutionen selbst die natürlichen vom Dreieck auf diesen Träger herrührenden sein sollen?

Nun wissen wir, daß es in jeder elliptischen Involution $\frac{n}{6}$ Paaretripel von der oben besprochenen Beschaffenheit gibt. Ferner sind nach Satz 2 ein Punkt P und eine Gerade p dann und nur dann Pol und Polare in bezug auf ein Dreieck, wenn die Dreieckseiten durch drei Punkte und die durch P gehenden den Seiten entsprechenden Ecktransversalen durch die andern drei den ersten konjugierten Punkten eines solchen Paaretripels von p gehen, und zwar können die Dreieckseiten sowohl durch die ersten drei und die Ecktransversalen durch die andern drei wie auch umgekehrt gehen, da nach dem Hilfssatz die drei abgeleiteten Punkte eines Paaretripels zu den ursprünglichen reziprok sind.

Wenn nun ein Paaretripel A', A'''; B', B'''; C', C''' der Punktinvolution auf p fest gewählt worden ist, so gibt es $2 \cdot n$ Dreiecke, deren Seiten durch drei Punkte dieses Paaretripels gehen und deren Ecken auf den drei Verbindungslinien von P mit den andern drei den ersten konjugierten Punkten des Tripels liegen, also so, daß entweder a durch A', b durch B', c durch C' geht und A auf PA''', B auf PB''', C auf PC'''

liegt oder umgekehrt a durch A''', b durch B''', c durch C''' geht und A auf PA', B auf PB', C auf PC' liegt. (Zwei dieser Dreiecke reduzieren sich auf dem Punkte P und zwei liegen in der Geraden p.) Dies leuchtet folgendermaßen ein: Zu jeder durch A' gehenden Geraden a gehört ein einziges Eckenpaar $B \equiv aPB'''$ und $C \equiv aPC'''$, und somit auch eine einzige Seite $b \equiv CB'$ und Ecke $A \equiv bPA'''$, alsdann muß aber auch $c \equiv AB$ durch C' gehen, da im vollständigen Viereck $PABC$, wo ein Paar Gegenseiten PA, BC in A''', A', das andere Paar PB, CA in B''', B' und PC in C''' die Gerade p schneiden, die sechste Seite AB durch denjenigen Punkt gehen muß, welcher in der durch die zwei Paare A', A'''; B', B''' bestimmten Involution C''' zugeordnet ist. Somit gehört zu jedem durch A' gehenden Strahle a ein und nur ein Dreieck von der verlangten Beschaffenheit; dasselbe gilt aber auch von jedem durch A''' gehenden Strahle a, also gibt es gerade $2 \cdot n$ Dreiecke, die zu dem fest gewählten Paaretripel die beschriebene Lage haben.

Folglich ist $\frac{n}{6} \cdot 2n = \frac{n^2}{3}$ die Anzahl aller überhaupt möglichen Dreiecke, in bezug auf welche P und p Pol und Polare und die natürlichen von einem solchen Dreieck auf p und um P herrührenden Involutionen mit den gegebenen identisch sind.

Um ein solches Dreieck zu konstruieren, ermittelt man vorerst irgendein Paaretripel auf p mit Hilfe der früher gefundenen Methode, alsdann verfährt man in der oben angegebenen Weise.

Ist aber die Involution auf der Geraden p und somit auch die zu ihr perspektive Strahleninvolution um P hyperbolisch, so ist die Anzahl derjenigen Dreiecke gleich n, in bezug auf welche die Träger P und p der Involutionen Pol und Polare und die Involutionen selbst mit den natürlichen, die vom Dreieck herrühren, identisch sind. Denn ein solches Dreieck muß, nach der zweiten Definition von Pol und Polare, einen der Doppelstrahlen zur Seite und den auf dem zweiten Doppelstrahle liegenden Doppelpunkt zur Gegenecke haben und seine beiden übrigen Ecken müssen durch die beiden Träger der Involutionen harmonisch getrennt sein; die beiden Doppelstrahlen können aber ihre Rolle vertauschen, folglich ist die Anzahl aller möglichen Dreiecke gleich n. Wenn man aber die Forderung, daß die Polare vom Pol, wenn ihre natürlichen Involutionen hyperbolisch sind, durch zwei Dreiecksecken harmonisch getrennt sein soll, fallen läßt, so ist die Anzahl der Dreiecke gleich n^2.

Fünfter Abschnitt.

Erzeugung der Kegelschnitte durch Pole und Polaren in bezug auf ein Dreieck.

17. Sehen wir nun zu, was für Gebilde die Punkte P', P'', P''' und die Geraden p, p', p'' und p''' beschreiben, wenn der Punkt P eine gerade Punktreihe durchläuft.

Von nun an sollen unter A', A'' usw., a', a'' usw. die Elemente des von P und p herrührenden Systems (Nr. **3**) und unter $\overline{A'}$, $\overline{A''}$ usw., $\overline{a'}$, $\overline{a''}$ usw. die Elemente desjenigen Systems verstanden werden, welches von der festen Geraden, auf der P sich bewegt, oder vom festen Punkte, um welchen p sich dreht, herrührt.

Durchläuft der Punkt P eine Gerade g, die durch keine Dreiecksecke geht, so beschreibt der auf der Ecktransversalen AP liegende Punkt A'' auf der Seite a eine zu der von P auf g beschriebene perspektive Punktreihe; ebenso beschreiben dann B'' auf der Seite b und C'' auf der Seite c zu $g(P)$ perspektive Punktreihen. Da nun A' und A'' stets durch die Ecken B und C harmonisch getrennt sind, so muß auch A' auf a eine zu $a(A'')$ und somit auch zu $g(P)$ projektive Punktreihe beschreiben, ebenso müssen B' auf b und C' auf c zu $g(P)$ projektive Punktreihen beschreiben.

Nun entspricht dem Schnittpunkte A der Träger der beiden projektiven Punktreihen $b(B')$ und $c(C')$, als $c(C')$ angehörig, in $b(B')$ der Punkt $\overline{B''} \equiv BGb$, welcher von $\overline{B'} \equiv bg$ durch die Ecken C und A harmonisch getrennt ist (dabei ist G der Pol von g in bezug auf ABC). Denn wenn C' nach A kommt, muß auch der von C' durch A und B harmonisch getrennte Punkt C'' dahin gekommen sein, dies kann aber nur dann eintreten, wenn P auf b liegt, da P auf CC'' liegt; es muß also dann P in $bg \equiv \overline{B'}$ angelangt sein, alsdann fällt aber B'' mit $P \equiv \overline{B'}$ und B' mit $\overline{B''}$ zusammen. Ebenso muß der Ecke B, als $a(A')$ angehörig, in $c(C')$ der Punkt $\overline{C''}$ und der Ecke C, als $b(B')$ angehörig, in $a(A')$ der Punkt $\overline{A''}$ entsprechen.

Folglich sind je zwei der drei Punktreihen $a(A')$, $b(B')$ und $c(C')$ zueinander projektiv, nicht aber perspektiv.

Da ferner nach (III) 4. P' von P durch A und A'' harmonisch getrennt ist und P auf g und A'' auf a sich bewegen, so muß P' sich auf einer durch $ag \equiv \overline{A'}$ gehenden und von g durch a und A oder, was auf dasselbe herauskommt, durch a und $\overline{a''}$ harmonisch getrennten Geraden bewegen; diese Gerade ist aber nach (IV) 4. keine andere als die Gerade g' des g angehörigen Systems. P' beschreibt bei ihrer Bewegung auf g' eine zu $g(P)$ perspektive Punktreihe, da P' stets auf AP liegt; ebenso beschreiben P'' auf g'' und P''' auf g''' zu $g(P)$ perspektive Punktreihen. Es sind aber auch nach (III) je zwei der vier Punktreihen $g(P)$, $g'(P')$, $g''(P'')$ und $g'''(P''')$ zueinander perspektiv; die Dreieckseite, auf der die Träger dieser beiden Punktreihen sich schneiden, und die ihr gegenüberliegende Ecke des Dreiecks sind die involutorische Achse und das Perspektivitätszentrum dieser beiden Punktreihen, da die involutorische Achse vom Perspektivitätszentrum durch die beiden Träger der perspektiven Punktreihen harmonisch getrennt sein muß.

Die Polare p des Punktes P beschreibt, wenn P die Gerade g durchläuft, als Verbindungslinie der entsprechenden Punkte B' und C' in den beiden projektiven, nicht aber perspektiven Punktreihen $b(B')$ und $c(C')$, einen zu $g(P)$ projektiven Strahlenbüschel zweiter Ordnung, zu welchem auch die Dreieckseiten gehören und welcher einen Kegelschnitt Γ umhüllt. Die Berührungspunkte der Dreieckseiten als Strahlen dieses Büschels sind, wie wir sahen, $\overline{A''}$, $\overline{B''}$, $\overline{C''}$, womit also Γ eindeutig bestimmt ist. Die Verbindungslinien $\overline{a'}$, $\overline{b'}$ und $\overline{c'}$ der Ecken des Tangentendreiecks ABC mit den Berührungspunkten $\overline{A''}$, $\overline{B''}$ und $\overline{C''}$ der Gegenseiten schneiden sich im Pole G der Geraden g in bezug auf dieses Dreieck und die Schnittpunkte

$\overline{A'}$, $\overline{B'}$ und $\overline{C'}$ der Seiten des Berührungspunktendreiecks $\overline{A''}\,\overline{B''}\,\overline{C''}$ mit den Tangenten a, b und c an den Gegenecken des letzteren liegen in g; es sind also G und g Perspektivitätszentrum und -achse des Tangenten- und Berührungspunktendreiecks ABC und $\overline{A''}\,\overline{B''}\,\overline{C''}$.

G und g sind Pol und Polare auch in bezug auf den Kegelschnitt Γ, ja sogar die um G und auf g vom Grunddreieck ABC herrührenden Involutionen sind mit den um G und auf g vom Kegelschnitt Γ herrührenden identisch. Denn der Pol von $\overline{a'}$ in bezug auf Γ muß einerseits, da $\overline{a'}$ durch $A \equiv bc$ geht, auf der Berührungssehne $\overline{B''}\,\overline{C''}$ der Tangenten b und c, andererseits, da $\overline{a'}$ auch durch den Berührungspunkt $\overline{A''}$ der Tangente a geht, auf $a \equiv BC$ liegen; dieser Pol muß also $\overline{A'} \equiv (\overline{B''}\,\overline{C''}, BC)$ sein. Ebenso muß $\overline{B'}$ der Pol von $\overline{b'}$ in bezug auf Γ sein; folglich muß $G \equiv \overline{a'}\,\overline{b'}$ der Pol von $g \equiv \overline{A'}\,\overline{B'}$ in bezug auf Γ sein. Nun sind $\overline{A'}, \overline{A'''} \equiv g\overline{a'}$ und $\overline{B'}, \overline{B'''} \equiv g\overline{b'}$ in bezug auf Γ konjugierte Punkte, folglich müssen die beiden auf g von Γ und ABC herrührenden Involutionen miteinander identisch sein; ebenso müssen die beiden um G von Γ und ABC herrührenden Involutionen identisch sein, da diese zu den auf g perspektiv sind.

Die Gerade g verläuft gänzlich außerhalb und ihr Pol G liegt innerhalb des Kegelschnitts Γ; es geht somit kein einziger Strahl des Γ umhüllenden Büschels durch G. Denn die um G und auf g von Γ herrührenden Involutionen sind mit denjenigen identisch, die vom Dreieck ABC herrühren, und diese letzten sind elliptisch.

Da ferner, wenn P die durch keine Ecke gehende Gerade g durchläuft, P', P'' und P''' die keine Ecke enthaltenden und zu $g(P)$ perspektiven Punktreihen $g'(P')$, $g''(P'')$ und $g'''(P''')$ durchlaufen und p', p'', p''' die Polaren von P', P'', P''' in bezug auf das Dreieck ABC sind (Nr. 2), so beschreiben, ebenso wie p, p', p'' und p''' drei zu $g'(P')$, $g''(P'')$, $g'''(P''')$ und somit auch zu $g(P)$ projektive Strahlenbüschel zweiter Ordnung, zu welchen auch die Dreieckseiten a, b, c gehören und welche die Kegelschnitte Γ' resp. Γ'' resp. Γ''' umhüllen. Die Berührungspunkte der Dreieckseiten als Strahlen des Γ'

resp. Γ'' resp. Γ''' umhüllenden Büschels sind $\overline{A''}$, $\overline{B'}$, $\overline{C'}$ resp. $\overline{B''}$, $\overline{C'}$, $\overline{A'}$ resp. $\overline{C''}$, $\overline{A'}$, $\overline{B'}$ und es verhalten sich G' und g' in bezug auf Γ', G'' und g'' in bezug auf Γ'' und G''' und g''' in bezug auf Γ''', wie sich G und g in bezug auf Γ verhalten.

Einer der vier Kegelschnitte Γ, Γ', Γ'' und Γ''' liegt ganz innerhalb des Dreiecks und jeder der übrigen drei liegt ganz außerhalb in je einem der vollkommenen Dreieckswinkel α, β, γ; keine zwei dieser Kegelschnitte haben also, außer einem gemeinsamen Berührungspunkt in einer der Dreieckseiten, noch einen reellen Punkt gemein. Denn, wie nach Nr. **3** leicht einzusehen, liegt einer der vier Punkte G, G', G'', G''' innerhalb des Dreiecks und jeder der übrigen drei außerhalb in je einem der vollkommenen Winkel α, β, γ, und ein Kegelschnitt nebst allen von ihm eingeschlossenen Punkten ist in dem einem der beiden vollkommenen Winkel enthalten, die von zwei beliebigen Tangenten gebildet wird.

Somit haben wir:

Satz 4: Beschreibt der Punkt P eine gerade Punktreihe $g(P)$, die keine der Dreiecksecken A, B, C enthält, so beschreiben die Punkte P', P'', P''' die drei zu $g(P)$ perspektiven geraden Punktreihen $g'(P')$, $g''(P'')$, $g'''(P''')$. Je zwei der vier Punktreihen $g(P)$, $g'(P')$, $g''(P'')$, $g'''(P''')$ sind zueinander perspektiv; die Dreieckseite, auf der die Träger dieser beiden Punktreihen sich schneiden, und ihre Gegenecke sind die involutorische Achse und das Perspektivitätszentrum dieser beiden Punktreihen. Die Geraden p, p', p'', p''' beschreiben dann vier zu $g(P)$, $g'(P')$, $g''(P'')$, $g'''(P''')$ und somit auch zueinander projektive Strahlenbüschel zweiter Ordnung, welche die Kegelschnitte Γ, Γ', Γ'', Γ''' umhüllen. Diese vier Kegelschnitte sind dadurch bestimmt, daß sie sämtlich dem Dreieck ABC eingeschrieben sind und von den Dreieckseiten a, b, c Γ in $\overline{A''}$, $\overline{B''}$ und $\overline{C''}$, Γ' in $\overline{A''}$, $\overline{B'}$ und $\overline{C'}$, Γ'' in $\overline{B''}$, $\overline{C'}$ und $\overline{A'}$ und endlich Γ''' in $\overline{C''}$, $\overline{A'}$ und $\overline{B'}$ berührt werden.

Die Gerade g und ihr Pol G in bezug auf das Dreieck ABC sind Perspektivitätsachse und -zentrum der von den drei Tangenten a, b, c des Kegelschnitts Γ und ihren Berührungspunkten $\overline{A''}$, $\overline{B''}$, $\overline{C''}$ gebildeten Dreiecke ABC und $\overline{A''}\overline{B''}\overline{C''} \equiv g'''g'g''$. Die Involutionen der in bezug auf Γ konjugierten Elemente auf g und um G sind identisch mit den Involutionen, die auf g und um G vom Dreieck ABC herrühren; g und G sind also Polare und Pol auch in bezug auf Γ, g verläuft gänzlich außerhalb und G liegt innerhalb des Kegelschnitts Γ und kein einziger Strahl des Γ umhüllenden Büschels geht durch G. Dasselbe gilt von g' und G' in bezug auf Γ', von g'' und G'' in bezug auf Γ'' und von g''' und G''' in bezug auf Γ'''.

Je zwei der projektiven Kegelschnitte Γ, Γ', Γ'' und Γ''' haben drei Tangenten, nämlich die Dreieckseiten a, b, c, und einen Berührungspunkt in einer derselben entsprechend gemein, ihre übrigen gemeinsamen Punkte sind imaginär.

Dual: Beschreibt die Gerade p einen Strahlenbüschel erster Ordnung $G(p)$, der keine der Dreieckseiten a, b, c enthält, so beschreiben die Geraden p', p'', p''' die drei zu $G(p)$ perspektiven Strahlenbüschel erster Ordnung $G'(p')$, $G''(p'')$, $G'''(p''')$. Je zwei der vier Strahlenbüschel $G(p)$, $G'(p')$, $G''(p'')$, $G'''(p''')$ sind zueinander perspektiv; die Dreiecksecke, durch welche die Verbindungslinie der Träger dieser beiden Strahlenbüschel geht, und ihre Gegenseite sind das involutorische Zentrum und der perspektive Durchschnitt dieser beiden Strahlenbüschel. Die Punkte P, P', P'', P''' beschreiben dann vier zu $G(p)$, $G'(p')$, $G''(p'')$, $G'''(p''')$ und somit auch zueinander projektive Punktreihen zweiter Ordnung (Kegelschnitte) γ, γ', γ'', γ'''. Diese vier Kegelschnitte sind dadurch bestimmt, daß sie sämtlich dem Dreieck ABC umgeschrieben sind und in den Dreiecksecken A, B, C γ von $\overline{a''}$, $\overline{b''}$ und $\overline{c''}$, γ' von $\overline{a''}$, $\overline{b'}$ und $\overline{c'}$, γ'' von $\overline{b''}$, $\overline{c'}$ und $\overline{a'}$ und endlich γ''' von $\overline{c''}$, $\overline{a'}$ und $\overline{b'}$ tangiert werden.

Der Punkt G und seine Polare g in bezug auf das Dreieck ABC sind Perspektivitätszentrum und -achse der von den drei Kurvenpunkten A, B, C des Kegelschnitts γ

und ihren Tangenten $\overline{a''}$, $\overline{b''}$, $\overline{c''}$ gebildeten Dreiecke ABC und $\overline{a''}\overline{b''}\overline{c''} \equiv G''' G' G''$.

Die Involutionen der in bezug auf γ konjugierten Elemente auf g und um G sind identisch mit den Involutionen, die auf g und um G vom Dreieck ABC herrühren; G und g sind also Pol und Polare auch in bezug auf γ, G liegt innerhalb und g verläuft gänzlich außerhalb γ und kein einziger Kurvenpunkt von γ liegt auf g. Dasselbe gilt von G' und g' in bezug auf γ', von G'' und g'' in bezug auf γ'' und von G''' und g''' in bezug auf γ'''. Je zwei der vier projektiven Kegelschnitte γ, γ', γ'' und γ''' haben drei Punkte, nämlich die Dreiecksecken A, B und C, und eine Tangente an einem derselben entsprechend gemein, ihre übrigen gemeinsamen Tangenten sind imaginär.

Da die perspektiven Involutionen um G und auf g in bezug auf Γ und γ, um G' und auf g' in bezug auf Γ' und γ', um G'' und auf g'' in bezug auf Γ'' und γ'' und endlich um G''' und auf g''' in bezug auf Γ''' und γ''' mit dem vom Dreieck ABC herrührenden elliptischen Involutionen identisch sind, so folgt:

Zusatz: Die beiden Kegelschnitte Γ und γ resp. Γ' und γ' resp. Γ'' und γ'' resp. Γ''' und γ''' berühren sich doppelt, und zwar ist diese doppelte Berührung imaginär; ihre gemeinsamen Tangenten und Berührungspunkte sind die imaginären Doppelstrahlen und -Punkte der Involutionen von G und g resp. G' und g' resp. G'' und g'' resp. G''' und g'''.

Aus dem Satze 4 folgt weiter: Beschreibt der Punkt P irgendeinen Kegelschnitt, welcher dem Dreieck ABC umgeschrieben ist, und bezeichnet man die Tangente dieses Kegelschnitts in B mit $\overline{b''}$ und in C mit $\overline{c''}$, so muß dieser Kegelschnitt mit dem von den Polen der sämtlichen durch den Schnittpunkt $\overline{b'}\overline{c'} \equiv G$ gehenden Geraden in bezug auf ABC beschriebenen Kegelschnitt γ identisch sein, wobei $\overline{b'}$ die von $\overline{b''}$ durch AB und BC und ebenso $\overline{c'}$ die von $\overline{c''}$ durch BC und CA harmonisch getrennte Gerade sein soll. Denn diese beiden Kegelschnitte haben nach Satz 4 die drei Punkte A, B, C und die beiden Tangenten $\overline{b}''$ und $\overline{c}''$ an zwei von diesen drei Punkten gemein.

Es gilt somit auch die Umkehrung des Satzes 4, nämlich:

Satz 5: Beschreibt der Punkt P eine Punktreihe zweiter Ordnung (Kegelschnitt) γ, die dem Dreieck ABC umgeschrieben ist, so beschreibt die Gerade p einen zu $\gamma(P)$ projektiven, nicht aber perspektiven Strahlenbüschel erster Ordnung $G(p)$, der dadurch bestimmt ist, daß sein Mittelpunkt G das Perspektivitätszentrum der beiden von den drei Punkten A, B, C des Kegelschnitts γ und ihren Tangenten gebildeten Dreiecke ist; die Geraden p', p'', p''' beschreiben dann die zu $G(p)$ perspektiven Strahlenbüschel erster Ordnung $G'(p')$, $G''(p'')$, $G'''(p''')$ und die Punkte P', P'', P''' beschreiben die zu γ projektiven Kegelschnitte γ', γ'', γ'''.

Dual: Beschreibt die Gerade p einen Strahlenbüschel zweiter Ordnung, zu welchem auch die Seiten des Dreiecks ABC gehören, welcher also einen diesem Dreieck eingeschriebenen Kegelschnitt Γ umhüllt, so beschreibt der Punkt P eine zu diesem Strahlenbüschel projektive, nicht aber perspektive gerade Punktreihe $g(P)$, die dadurch bestimmt ist, daß ihr Träger g die Perspektivitätsachse der beiden von den drei Tangenten BC, CA, AB des Kegelschnitts Γ und ihren Berührungspunkten gebildeten Dreiecke ist; die Punkte P', P'', P''' beschreiben dann die zu $g(P)$ perspektiven geraden Punktreihen $g'(P')$, $g''(P'')$, $g'''(P''')$ und die Geraden p', p'', p''' beschreiben die drei Strahlenbüschel zweiter Ordnung, welche die zu Γ projektiven Kegelschnitte Γ', Γ'' und Γ''' umhüllen.

Hierbei sind $G, G' \ldots g, g' \ldots \gamma, \gamma' \ldots \Gamma, \Gamma' \ldots$ in der in Satz 4 angegebenen Weise untereinander verbunden.

18. Die Sätze 4 und 5 gewähren uns eine neue Auffassung der Punktreihen und Strahlenbüschel zweiter Ordnung:

Nehmen wir drei beliebige Punkte X, Y, Z eines Kegelschnitts und die Tangenten an zwei von diesen drei

Punkten, etwa y an Y und z an Z, so kann dieser Kegelschnitt als Erzeugnis der Pole (P) desjenigen Strahlenbüschels $G(p)$ in bezug auf das Dreieck XYZ aufgefaßt werden, dessen Mittelpunkt G der Pol der Geraden

$$g \equiv (y, ZX)(z, XY)$$

in bezug auf XYZ ist.

Dual: Nehmen wir drei beliebige Tangenten x, y, z eines Kegelschnitts und die Berührungspunkte in zwei von diesen drei Tangenten, etwa Y in y und Z in z, so können die Tangenten dieses Kegelschnitts als Erzeugnis der Polaren (p) derjenigen Punktreihe $g(P)$ in bezug auf das Dreieck xyz aufgefaßt werden, deren Träger g die Polare des Punktes

$$G \equiv (Y, zx)(Z, xy)$$

in bezug auf xyz ist.

Nach Satz 4 muß also im ersten Falle auch der Schnittpunkt der dritten Tangente x an X mit der Gegenseite YZ im Dreieck XYZ auf der Geraden g liegen und im zweiten Falle auch die Verbindungslinie des dritten Berührungspunktes X in x mit der Gegenecke yz im Dreieck xyz durch den Punkt G gehen, womit der bekannte Satz, daß die drei Schnittpunkte der Seiten eines einem Kegelschnitt eingeschriebenen Dreiecks mit den Tangenten an den Gegenecken in einer Geraden liegen, und der ihm dual gegenüberstehende Satz von neuem bewiesen ist.

Es ergibt sich somit nach Satz 4:

Satz 6: Drei Tangenten eines Kegelschnitts und ihre Berührungspunkte bilden zwei perspektive Dreiecke und der Kegelschnitt kann entweder als Erzeugnis der Pole (P), in bezug auf das von den drei Berührungspunkten gebildete Dreieck, desjenigen Strahlenbüschels, dessen Träger das Perspektivitätszentrum dieser beiden Dreiecke ist, oder als Erzeugnis der ihn umhüllenden Polaren (p), in bezug auf das von den drei Tangenten gebildete Dreieck, derjenigen Punktreihe, deren Träger die Perspektivitätsachse dieser beiden Dreiecke ist, aufgefaßt werden. Das Perspektivitätszentrum und die -Axe dieser beiden Dreiecke sind Pol und Polare in bezug auf dieselben und den Kegelschnitt, und die Involutionen der in bezug auf den letzten konjugierten Strahlen durch das Perspektivitätszentrum resp. konjugierten Punkte auf der -Achse sind mit den von den beiden Dreiecken herrührenden elliptischen identisch; das Zentrum liegt also innerhalb und die Achse gänzlich außerhalb des Kegelschnitts.

Innerhalb des von den drei Berührungspunkten gebildeten Dreiecks liegt dann und nur dann kein Punkt des Kegelschnitts, wenn das Zentrum innerhalb dieses Dreiecks liegt, und außerhalb des von den drei Tangenten gebildeten Dreiecks liegt dann und nur dann kein Punkt des Kegelschnitts, wenn das Zentrum innerhalb des letzten Dreiecks liegt.

Denn nur, wenn das Zentrum innerhalb des von den drei Berührungspunkten gebildeten Dreiecks liegt, schneiden alle durch das Zentrum gehenden Strahlen dieses Dreieck, somit müssen dann ihre Pole in bezug auf dieses Dreieck sämtlich außerhalb desselben liegen (Nr. 2). Liegt ferner das Zentrum, welches innerhalb des Kegelschnitts liegt, innerhalb des von den drei Tangenten gebildeten Dreiecks, so kann dann kein Punkt des Kegelschnitts außerhalb dieses Dreiecks liegen, weil ein Kegelschnitt nebst allen von ihm eingeschlossenen Punkten nur in dem einen derjenigen beiden vollkommenen Winkel enthalten ist, die von zwei beliebigen Tangenten gebildet werden.

Wir können jetzt die folgende Aufgabe mit Hilfe des Lineals allein lösen.

Aufgabe: Es seien zwei Kegelschnitte γ und γ_1 durch je fünf Elemente gegeben, darunter die drei gemeinsamen Punkte $X, Y, Z,$ es soll der vierte gemeinsame Punkt ermittelt werden.

Auflösung: Man ermittelt die Perspektivitätszentra G und G_1 der beiden von den drei Punkten X, Y und Z und ihren Tangenten, als Punkte von γ resp. γ_1, gebildeten Dreiecke, alsdann den Pol der Verbindungslinie GG_1 in bezug auf das Dreieck XYZ; dieser Pol wird der gesuchte vierte gemeinsame Punkt sein.

Für die duale Aufgabe ist dual zu verfahren.

Denn γ besteht aus den sämtlichen Polen (P) des Strahlenbüschels um G und ebenso γ_1 aus den sämtlichen Polen (P) des Strahlenbüschels um G_1, wobei die Pole (P) in bezug auf das Dreieck XYZ genommen sein sollen. Folglich muß der Pol (P) des diesen beiden Büscheln gemeinsamen Strahles GG_1 beiden Kegelschnitten γ und γ_1 angehören und somit der vierte gemeinsame Punkt sein; und wenn die Verbindungslinie GG_1 durch eine Dreiecksecke gehen soll, und alsdann der Pol (P) von GG_1 mit dieser Ecke zusammenfallen wird, so werden aber dann, nach Satz 4, γ und γ_1 die von GG_1 durch die beiden in dieser Ecke zusammenstoßenden Dreieckseiten harmonisch getrennte Gerade zur gemeinsamen Tangente haben, und sich also in dieser Ecke berühren. Daraus folgt die bekannte Tatsache, daß wenn zwei Kegelschnitte drei reelle Punkte gemein haben, sie noch einen vierten reellen gemein haben müssen.

19. Aus dieser Auffassung der Kegelschnitte ergibt sich ferner:

Satz 7: Eine beliebige Gerade r schneidet, berührt oder liegt gänzlich außerhalb eines Kegelschnitts γ, welcher durch irgend drei Punkte X, Y und Z geht, je nachdem das Perspektivitätszentrum G der beiden von den drei Punkten X, Y, Z und ihren Tangenten x, y, z gebildeten Dreiecke außerhalb, auf oder innerhalb desjenigen Kegelschnitts P liegt, welcher dem Dreieck XYZ eingeschrieben ist und bei welchem dieses Tangentendreieck mit dem von den in seinen Seiten YZ, ZX, XY liegenden Berührungspunkten X', Y', Z' gebildeten Dreieck die Gerade r zu ihrer Perspektivitätsachse haben; und umgekehrt.

Denn soll die Gerade r den Kegelschnitt γ schneiden, welcher als von den Polen (P) der durch das Perspektivitätszentrum G gehenden Geraden in bezug auf das Dreieck XYZ

beschrieben gedacht werden kann, so werden dann durch G zwei Polaren von zwei auf r liegenden Punkten, nämlich von den beiden Schnittpunkten der Geraden r mit dem Kegelschnitt γ in bezug auf das Dreieck XYZ gehen und somit wird G außerhalb des von den Polaren (p) der auf r liegenden Punkte in bezug auf dasselbe Dreieck eingehüllten Kegelschnitts, welcher nach Satz 4 mit dem Kegelschnitt P des vorstehenden Satzes identisch ist, liegen müssen. Soll ferner r den Kegelschnitt γ berühren, so wird dann durch G eine einzige Polare eines auf r liegenden Punktes, nämlich des auf r liegenden Berührungspunktes gehen und somit wird G auf dem Kegelschnitt P liegen müssen. Soll endlich r gänzlich außerhalb γ liegen, so wird dann durch G keine Polare eines auf r liegenden Punktes gehen und somit wird G innerhalb des Kegelschnitts P liegen müssen.

Der vorstehende Satz bleibt auch dann noch richtig, wenn r durch einen der drei Punkte, etwa X, geht, alsdann aber reduziert sich der Kegelschnitt P auf die von r durch YZ und ZX harmonisch getrennte Gerade (Satz 13 in Nr. **21**).

Manchmal kann man hierüber entscheiden, ohne den Kegelschnitt P zu Hilfe zu nehmen oder wenigstens ohne ihn vollständig zu zeichnen. Mit Hilfe des Satzes 6 ergibt sich nämlich:

Zusatz: Die Gerade r schneidet den Kegelschnitt γ, wenn das Perspektivitätszentrum G außerhalb des Dreiecks XYZ liegt und r entweder dieses Dreieck gar nicht oder diejenigen beiden Seiten desselben schneidet, welche den den Punkt G nicht enthaltenden vollkommenen Dreieckswinkel bilden. Dagegen liegt die Gerade r gänzlich außerhalb γ, wenn G innerhalb und r gänzlich außerhalb des Dreiecks xyz oder $X'Y'Z'$ liegt.

Denn wenn die Gerade r außerhalb des Dreiecks XYZ verläuft, liegt ihr Pol R in bezug auf dieses Dreieck, welcher Punkt zugleich Perspektivitätszentrum der beiden Dreiecke XYZ und $X'Y'Z'$ ist, und somit nach Satz 6 auch der ganze Kegelschnitt P innerhalb des Dreiecks XYZ. Schneidet ferner die Gerade r das Dreieck XYZ, so liegt ihr Pol R (Nr. **2**) und somit auch der ganze Kegelschnitt P in dem vollkommenen Dreieckswinkel, welcher von den von r geschnittenen Dreieckseiten gebildet wird. Liegt der Punkt G innerhalb des Dreiecks xyz, so liegt dann auch der ganze Kegelschnitt γ innerhalb desselben. Verläuft endlich r gänzlich außerhalb des Dreiecks $X'Y'Z'$, so liegt der Punkt R, der Pol von r auch in bezug auf dieses Dreieck ist, innerhalb desselben, alsdann kann kein Punkt von P und demnach, wie man leicht einsehen kann, auch kein dem Äußeren von P angehöriger Punkt innerhalb dieses Dreiecks liegen.

Wenden wir den Satz 7 auf die unendlich ferne Gerade s_∞ an, so ergibt sich:

Satz 8: Ein Kegelschnitt γ, welcher einem Dreieck umgegeschrieben ist, ist Ellipse, Parabel oder Hyperbel, je nachdem das Perspektivitätszentrum G der beiden Dreiecke, von denen das eine das γ eingeschriebene und das zweite das von den drei Tangenten an den Ecken des ersten gebildete Dreieck ist, innerhalb, auf oder außerhalb der Ellipse Σ_∞ liegt, welche letztere dem γ eingeschriebenen Dreiecke eingeschrieben ist, durch die Seitenmitten dieses Dreiecks geht und den Schwerpunkt S desselben zu ihrem Mittelpunkte hat.

Denn Σ_∞ ist mit demjenigen Kegelschnitt identisch, welcher von den Polaren (p) der auf s_∞ liegenden Punkte in bezug auf das γ eingeschriebene Dreieck eingehüllt wird (Satz 6); nach Satz 4 muß also der Pol S der unendlich fernen Geraden s_∞ in bezug auf dieses Dreieck ihr Pol auch in bezug auf den Kegelschnitt Σ_∞ und demnach Mittelpunkt des letztern sein und s_∞ außerhalb Σ_∞ liegen und demnach muß Σ_∞ eine Ellipse sein. (Für den dualen Fall leitete Möbius (Barycentrischer Calcul, § 260) auf ganz anderem Wege einen diesem letzten analogen Satz ab.)

Zusatz: Der dem Dreieck umgeschriebene Kegelschnitt γ ist dann und nur dann eine gleichseitige Hyperbel, wenn das Perspektivitätszentrum G auf der Polare h des Höhenpunktes H in bezug auf dieses Dreieck liegt, und wenn dies Dreieck rechtwinklig ist, wenn G auf der von der

Höhe zur Hypotenuse durch die Katheten harmonisch getrennten Geraden liegt.

Denn ein einem Dreieck umgeschriebener Kegelschnitt ist dann und nur dann eine gleichseitige Hyperbel, wenn er durch den Höhenpunkt H dieses Dreiecks geht, demnach wenn H in bezug auf dasselbe Dreieck ein Pol einer durch G gehenden Geraden ist, also wenn G auf h liegt. Wenn aber ein Kegelschnitt einem rechtwinkligen Dreieck umgeschrieben ist, so ist er dann und nur dann eine gleichseitige Hyperbel, wenn derselbe von der Höhe zur Hypotenuse tangiert wird, also, nach Satz 4, wenn G auf der von der Höhe zur Hypotenuse durch die Katheten harmonisch getrennten Geraden liegt.

Mit Hilfe des Satzes 7 kann ferner die folgende Aufgabe gelöst werden.

Aufgabe: Einen Kegelschnitt zu konstruieren, welcher durch drei gegebene Punkte geht und zwei gegebene keinen dieser Punkte enthaltende Geraden zu Tangenten hat.

Auflösung: Man ermittelt die Schnittpunkte derjenigen beiden Kegelschnitte, welche dem von den drei gegebenen Punkten gebildeten Dreieck eingeschrieben sind und bei welchen dieses Dreieck mit dem von den drei in seinen Seiten liegenden Berührungspunkten eines jeden dieser beiden Kegelschnitte gebildeten Dreieck je eine der beiden gegebenen Geraden zur Perspektivitätsachse haben. Alsdann genügt jeder Kegelschnitt und nur ein solcher, welcher dem Dreieck der drei gegebenen Punkte umgeschrieben ist und bei welchem dieses Dreieck mit dem von den drei Tangenten in seinen Ecken gebildeten Dreieck einen der ermittelten Schnittpunkte zum Perspektivitätszentrum haben, den gestellten Forderungen.

Für die duale Aufgabe ist dual zu verfahren.

Denn letzterer Kegelschnitt geht durch die drei gegebenen Punkte und muß, nach Satz 7, von den beiden gegebenen Geraden berührt werden, da das beschriebene Perspektivitätszentrum auf den beiden ersten Kegelschnitten liegt.

Die gestellte Aufgabe ist somit auf die Ermittelung der Schnittpunkte zweier Kegelschnitte zurückgeführt, von denen drei gemeinsamen Tangenten gegeben sind; und umgekehrt kann die letztere Aufgabe auf die erstere zurückgeführt werden.

Die gestellte Aufgabe hat also keine oder vier reelle Lösungen, je nachdem die beiden ersten Kegelschnitte keine oder vier reelle Punkte gemein haben. Demnach sind keine reellen Lösungen vorhanden, wenn zwei Seiten des Dreiecks der drei gegebenen Punkte beide zugleich nur von einer der beiden gegebenen Geraden geschnitten werden, wenn also die beiden Geraden durch zwei dieser drei Punkte getrennt sind.

Denn verläuft die andere der beiden gegebenen Geraden gänzlich außerhalb dieses Dreiecks, so liegt einer der beiden ersteren Kegelschnitte gänzlich außerhalb dieses Dreiecks, während der andere Kegelschnitt gänzlich innerhalb desselben liegt; schneidet ferner die andere Gerade dieses Dreieck, aber nicht dieselben beiden Seiten wie die erste Gerade, so liegen die beiden ersteren Kegelschnitte in zwei verschiedenen vollkommenen Dreieckswinkeln, während innerhalb des Dreiecks kein Punkt dieser Kegelschnitte liegt. In diesen beiden Fällen haben also diese beiden Kegelschnitte keinen reellen Punkt gemein.

Geht aber eine der gegebenen Geraden durch einen der drei Punkte, während die zweite Gerade keinen dieser Punkte enthält, so reduziert sich einer der beiden ersten Kegelschnitte, nach Satz 13 in Nr. **21**, auf die von der ersten Geraden durch die beiden auf dieser Geraden nicht gelegenen Punkte harmonisch getrennte Gerade, und die Aufgabe hat dann keine oder zwei reelle Lösungen.

20. Kehren wir nun zum Grunddreieck ABC zurück, so haben wir:

Satz 9: Der von den Polen (P) der Strahlen des Büschels erster Ordnung $G(p)$ in bezug auf das Dreieck ABC beschriebene Kegelschnitt γ, wo der Träger G des Büschels auf keiner Dreieckseite liegt, ist Ellipse, Parabel oder Hyperbel, je nachdem der Punkt G innerhalb, auf oder außerhalb der dem Dreieck zugehörigen Ellipse Σ_∞ liegt. Eine gleichseitige Hyperbel ist γ dann und nur dann, wenn G auf der Polare h des Höhenpunktes H in bezug auf ABC, oder wenn ABC rechtwinklig ist und G auf der von der Höhe zur Hypotenuse durch die Katheten harmonisch getrennten Geraden liegt. Ferner ist γ dann und nur dann ein Kreis, wenn G mit dem innerhalb Σ_∞ liegenden Perspektivitätszentrum K derjenigen beiden Dreiecke zusammenfällt, von denen eins das Grunddreieck ABC und das zweite das von den Tangenten des Umkreises an den Ecken des ersten gebildete Dreieck ist.

Denn γ geht immer durch A, B, C, und durch drei Punkte kann ein einziger Kreis gelegt werden; zu jedem ABC umgeschriebenen Kegelschnitt gehört aber nur ein Punkt G (Satz 5), also ist γ dann und nur dann ein Kreis, wenn G mit K zusammenfällt.

Wir können nun einige Eigenschaften dieses Punktes K herleiten. Nach Satz 4 wird der von G herrührende Kegelschnitt γ in A, B, C von den Geraden $\overline{a''}$ resp. $\overline{b''}$ resp. $\overline{c''}$ tangiert und nach (III) 1.—3. ist

$$\overline{b''}\overline{c''} \equiv G', \quad \overline{c''}\overline{a''} \equiv G'', \quad \overline{a''}\overline{b''} \equiv G''',$$

also werden, wenn G mit K zusammenfällt, K', K'', K''' die Schnittpunkte derjenigen Tangentenpaare des Umkreises sein, deren Berührungssehnen BC, CA, AB sind. Folglich muß K' resp. K'' resp. K''' auf der Mittelsenkrechten zur Seite BC resp. CA resp. AB liegen.

Nun wissen wir, daß, wenn P eine Gerade g durchläuft, P', P'', P''' die Geraden g', g'', g''' durchlaufen, wobei die Schnittpunkte gg', gg'', gg''' auf a, b, c liegen und g von g' resp. g'' resp. g''' durch a und A resp. b und B resp. c und C harmonisch getrennt ist.

Folglich muß K: erstens, weil K' auf der Mittelsenkrechten zu BC liegt, auf der durch die Mitte M_1 von BC gehenden und von der Mittelsenkrechten zu BC durch BC und die Mittellinie M_1A harmonisch getrennten Geraden liegen; zweitens, zufolge der Lage von K'', auf der durch M_2 gehenden und von der Mittelsenkrechten zu CA durch CA und M_2B harmonisch getrennten Geraden liegen; drittens, zufolge der Lage von K''', auf der durch M_3 gehenden und von der Mittelsenkrechten zu AB durch AB und M_3C harmonisch getrennten Geraden liegen.

Somit haben wir:

Satz 10: In einem Dreieck ABC schneiden sich die drei Geraden, von denen jede durch eine Seitenmitte geht und von der zugehörigen Mittelsenkrechten durch die Mittellinie und Seite harmonisch getrennt ist, in dem Punkte K. Die Pole dieser drei Geraden in bezug auf dieses Dreieck liegen auf dem Umkreise.

Daraus folgt weiter:

Satz 11: In einem Dreieck ABC liegen der Punkt K, der Mittelpunkt M des Umkreises und der Schwerpunkt S mit je zwei der drei Seitenmitten M_1, M_2, M_3 und der mit jeder dieser beiden Mitten auf einer Seite liegenden Dreiecksecke auf einem Kegelschnitt; auf jedem dieser drei Kegelschnitte ist die Dreiecksecke von S durch K und M harmonisch getrennt. Ferner liegen K und M mit je zwei der drei Seitenmitten und den beiden mit je der dritten Mitte auf einer Seite liegenden Dreiecksecken auf einem Kegelschnitt; auf jedem dieser drei Kegelschnitte sind die beiden Dreiecksecken durch K und M harmonisch getrennt.

Denn, wie wir sahen, sind etwa

$$M_2(M_2A,\ M_2S;\ M_2K,\ M_2M)$$

und

$$M_3(M_3A,\ M_3S;\ M_3K,\ M_3M)$$

harmonische Würfe, also ist

$$M_2(M_2A,\ M_2S,\ M_2K,\ M_2M,\ldots) \\ \barwedge\ M_3(M_3A,\ M_3S,\ M_3K,\ M_3M,\ldots).$$

Diese beiden Strahlenbüschel sind nur projektiv, nicht aber perspektiv, da sonst auf der Verbindungslinie KM die Ecke A

und ebenso B und C liegen müßten, was unmöglich ist; folglich liegen M_2, M_3, A, S, K und M auf einem Kegelschnitt und es bilden auf dem letzten die vier Punkte $A, S; K, M$, welche aus M_2 durch vier harmonische Strahlen projiziert werden, einen harmonischen Wurf. Da ferner in einem harmonischen Wurfe zwei zugeordnete Elemente miteinander vertauscht werden können, ohne Aufhebung der harmonischen Eigenschaft, so ist auch

$$M_2(M_2A, M_2S, M_2K, M_2M, \ldots) \barwedge M_3(M_3S, M_3A, M_3K, M_3M, \ldots)$$

oder

$$M_2(M_2C, M_2B, M_2K, M_2M, \ldots) \barwedge M_3(M_3C, M_3B, M_3K, M_3M, \ldots),$$

demnach liegen auch M_2, M_3, B, C, K und M auf einem Kegelschnitt und es sind $B, C; K, M$ vier harmonische Punkte desselben.

Nach Satz 4 müssen der Punkt K und seine Polare k in bezug auf das Dreieck auch in bezug auf den Umkreis Pol und Polare sein, auch die Involutionen, die vom Dreieck und seinem Umkreise um K resp. auf k herrühren, müssen identisch sein und k liegt außerhalb des Umkreises. Ferner sind bekanntlich zwei in bezug auf einen Kreis konjugierte Gerade dann und nur dann zueinander normal, wenn mindestens eine der beiden ein Durchmesser dieses Kreises ist.

Somit haben wir:

Satz 12: Die vom Punkte K auf seine in bezug auf das Dreieck Polare k gefällte Senkrechte geht durch den Mittelpunkt M des Umkreises, sie ist eine der Achsen der Involution um K und trifft die Polare k im Mittelpunkte der Involution auf der letzten, dabei sind diese Involutionen die vom Dreieck und seinem Umkreise herrührenden.

21. Bisher wurde der Fall betrachtet, wo der Punkt P sich auf einer durch keine Dreiecksecke gehenden Geraden bewegt. Durchläuft aber P eine Gerade g, die durch eine Ecke, etwa A, geht, ohne mit einer Seite des Dreiecks zusammenzufallen, so bleibt die Gerade $AP \equiv a'$ und somit auch die Punkte A'' und A', während dieser ganzen Bewegung, unveränderlich, es ist nämlich dann $a' \equiv g \equiv \overline{a''}$, $A'' \equiv ga \equiv \overline{A'}$, $A' \equiv \overline{A''}$ und, wie wir oben (Nr. **6**) sahen, fallen dann g' mit $g \equiv \overline{a''}$, g'' und g''' mit $A\overline{A''} \equiv \overline{a'}$ zusammen. Alsdann beschreibt der Punkt P', der von P durch A und $A'' \equiv \overline{A'}$ harmonisch getrennt ist, auf $g \equiv g' \equiv \overline{a''}$ eine zu der von P auf g beschriebene involutorische Punktreihe und die Punkte P'' und P''', die durch A und $A' \equiv \overline{A''}$ voneinander harmonisch getrennt sind, beschreiben auf $\overline{a'} \equiv g'' \equiv g'''$ zwei zueinander involutorisch liegende Punktreihen. Die beiden hyperbolischen Involutionen $\overline{a''}(P, P')$ und $\overline{a'}(P'', P''')$, deren Doppelpunkte A und $\overline{A'}$ resp. A und $\overline{A''}$ sind, werden aus den Ecken B und C je durch die nämliche Strahleninvolution projiziert, und zwar in der Weise, nach (III) 2., 3., 5., 6, daß, wenn ein Paar dieser beiden Strahleninvolutionen durch ein Paar P, P' der Punktinvolution auf $\overline{a''}$ geht, dasselbe auch durch das dem Paare P, P' zugehörige Paar P'', P''' auf $\overline{a'}$ geht.

Nun ist $A' \equiv \overline{A''}$, also muß p, solange P von der Dreiecksecke verschieden ist, durch $\overline{A''}$ gehen, und wenn P mit der Dreiecksecke A zusammenfällt, kann jede durch A gehende Gerade als sein p angesehen werden; somit beschreibt dann p zwei Strahlenbüschel erster Ordnung, deren Mittelpunkte $\overline{A''}$ und A sind. Der Strahlenbüschel $\overline{A''}(p)$, welcher zu der Punktreihe $b(B')$ perspektiv und somit auch zu der Punktreihe $g(P)$ projektiv ist, hat zu der letztern weder perspektive noch involutorische Lage. Denn p geht dann und nur dann durch P, wenn P mit A oder mit $\overline{A'}$ zusammenfällt, läge nun $\overline{A''}(p)$ zu $g(P)$ involutorisch, so wären dann A und $\overline{A'}$ die Doppelpunkte der durch diese involutorischen Gebilde auf g entstehenden Involution und somit müßte P von $pg \equiv pa' \equiv A'''$ durch A und $\overline{A'}$ harmonisch getrennt sein; es ist aber B'' von B' durch A und C harmonisch getrennt und $B''P$ und $C\overline{A'}$ gehen durch die Dreiecksecke B; somit müßte auch $B'A''' \equiv p$ durch die Dreiecksecke B gehen, was unmöglich ist. Analog kann man zeigen, daß $\overline{A''}(p)$ zu $g(P')$ weder perspektiv noch involutorisch liegt. Ferner müssen, solange P von der Dreiecksecke verschieden ist, p' durch $A' \equiv \overline{A''}$, p'' und p''' durch $A'' \equiv \overline{A'}$ gehen, p' von p durch a und $a'' \equiv \overline{a'}$ und p'' von p''' durch a und $a' \equiv \overline{a''}$ harmonisch getrennt sein, und wenn P mit der Ecke A zusammenfällt, kann jede durch A gehende Gerade als sein p' event. p'' event. p''' angesehen werden; somit beschreiben dann p', p'', p''' je zwei Strahlenbüschel erster Ordnung $\overline{A''}(p')$ und $A(p')$ resp. $\overline{A'}(p'')$ und $A(p'')$ resp. $\overline{A'}(p''')$ und $A(p''')$. Die beiden konzentrischen Strahlenbüschel $\overline{A''}(p)$ und $\overline{A''}(p')$ resp. $\overline{A'}(p'')$ und $\overline{A'}(p''')$ liegen involutorisch. Die somit gebildeten hyperbolischen Involutionen $\overline{A''}(p, p')$ und $\overline{A'}(p'', p''')$ haben a und $\overline{a'}$ resp. a und $\overline{a''}$ zu Doppelstrahlen, sind also zu $\overline{a''}(P, P')$ resp. $\overline{a'}(P'', P''')$ perspektiv, doch geht niemals ein von den Doppelstrahlen verschiedenes Paar p, p' resp. p'', p''' durch das ihm zugehörige Paar P, P' resp. P'', P''', und sind zueinander in der Weise doppelt perspektiv, daß die einander zugehörigen Paare p, p' und p'', p''' sich auf dem perspektiven Durchschnitt schneiden, und zwar sind dabei die perspektiven Durchschnitte die Dreieckseiten b und c, nach (IV) 2., 3., 5., 6.

Wenn endlich P eine Seite, etwa a, durchläuft, so fallen dann stets P' mit P und die beiden Punkte P'' und P''' mit demjenigen Punkte zusammen, welcher je von P durch die Ecken B und C harmonisch getrennt ist; somit beschreibt $P'' \equiv P'''$ auf a eine zu der von $P \equiv P'$ auf a beschriebene involutorische Punktreihe, ihre Doppelpunkte sind B und C; die vier Geraden p, p', p'', p''' fallen dann mit dieser Seite a zusammen, solange P von einer der Ecken verschieden ist, kommt aber P nach B oder C, so kann jede durch B resp. C gehende Gerade als sein p, p', p'' oder p''' angesehen werden. Somit haben wir:

Satz 13: Beschreibt P eine gerade Punktreihe $g(P)$, deren Träger g durch eine Dreiecksecke, etwa A, geht, ohne jedoch mit einer Seite zusammenzufallen, so beschreibt P' auf demselben Träger $g \equiv g' \equiv \overline{a''}$ eine zu der von P beschriebene involutorische Punktreihe; P und P' sind somit Punktepaare einer hyperbolischen Involution auf $\overline{a''}$, deren Doppelpunkte A und $\overline{A'} \equiv ga$ sind. P'' und P''' beschreiben auf $g'' \equiv g''' \equiv \overline{a'} \equiv A\overline{A''}$ eine hyperbolische Involution, deren Doppelpunkte A und $\overline{A''}$ sind, wobei $\overline{A'}$ von $\overline{A''}$ durch B und C harmonisch getrennt ist. Die beiden Involutionen $\overline{a''}(P, P')$ und $\overline{a'}(P'', P''')$ sind zueinander in der Weise doppelt perspektiv, daß die Verbindungslinien zweier einander zugehöriger Paare P, P' und P'', P''' durch ein der beiden Perspektivitätszentra gehen, diese Zentra sind die beiden Ecken B und C.

Die Geraden p, p', p'', p''' beschreiben je zwei Strahlenbüschel erster Ordnung $\overline{A''}(p)$ und $A(p)$ resp. $\overline{A''}(p')$ und $A(p')$ resp. $\overline{A'}(p'')$ und $A(p'')$ resp. $\overline{A'}(p''')$ und $A(p''')$. Die beiden konzentrischen Büschel $\overline{A''}(p)$ und $\overline{A''}(p')$ resp. $\overline{A'}(p'')$ und $\overline{A'}(p''')$ liegen involutorisch; jeder dieser vier Büschel ist zu jeder der vier Punktreihen $\overline{a''}(P)$, $\overline{a''}(P')$, $\overline{a'}(P'')$, $\overline{a'}(P''')$ projektiv, aber weder perspektiv noch involutorisch. Die beiden Strahleninvolutionen $\overline{A''}(p, p')$ und $\overline{A'}(p'', p''')$ sind hyperbolisch, haben a und $\overline{a'}$ resp. a und $\overline{a''}$ zu Doppelstrahlen, sind zu den Punktinvolutionen $\overline{a''}(P, P')$ resp. $\overline{a'}(P'', P''')$ perspektiv, doch geht niemals ein von den Doppelstrahlen verschiedenes Paar p, p' resp. p'', p''' durch das ihm zugehörige Paar P, P' resp. P'', P''', und sind zueinander in der Weise doppelt perspektiv, daß die Schnittpunkte zweier einander zugehöriger Paare p, p' und p'', p''' auf einem der beiden perspektiven Durchschnitte liegen, diese Durchschnitte sind die beiden Seiten b und c des Dreiecks. Und dual.

Ferner haben wir:

Satz 14: Durchläuft P eine Dreieckseite, etwa a, so fällt dann stets P' mit P zusammen und der Punkt P'', welcher dann stets mit P''' zusammenfällt, beschreibt auf derselben Seite eine zu $a(P)$ involutorische Punktreihe; die Doppelpunkte der somit gebildeten Involution $a(P, P'')$ sind die Ecken B und C. Jede der vier Geraden p, p', p'', p''' erzeugt dann die beiden Strahlenbüschel erster Ordnung, deren Träger die beiden Ecken B und C sind. Und dual.

Soll anstelle der Ecke A oder der Seite a in den Sätzen 13 und 14 B oder C resp. b oder c treten, so werden anstelle der Punkte und Geraden P', P'', P''' und p', p'', p''', g', g'', g''' die Punkte und Gerade P'', P''', P' und p'', p''', p', g'', g''', g' resp. P''', P', P'' und p''', p', p'', g''', g', g'' treten.

22. In den Sätzen 4, 5, 13, 14 sind die von p, während der Bewegung des Punktes P, beschriebenen Gebilde angegeben worden. Nach der zweiten Definition von Pol und Polare durch Involutionen ist aber p nur dann Polare des Punktes P, wenn dieser letztere auf keiner der Dreieckseiten liegt; somit treten im Satze 4 als Polaren der drei Punkte $ga \equiv \overline{A'}$, $gb \equiv \overline{B'}$, $gc \equiv \overline{C'}$ anstelle der Dreieckseiten, welche die p dieser Punkte sind, die drei Geraden $\overline{a'}$, $\overline{b'}$, $\overline{c'}$, welche die Polaren derselben auch in bezug auf Γ sind und nicht zu den Tangenten von Γ gehören; und dual treten als Pole anstelle der Ecken A, B, C die Punkte $\overline{A'}$, $\overline{B'}$, $\overline{C'}$. Im Satze 5 treten als Polaren anstelle der drei Geraden $\overline{a'}$, $\overline{b'}$, $\overline{c'}$ die Dreieckseiten; und dual. Im Satze 13 wird von den Polaren nur der eine Büschel um $\overline{A''}$ beschrieben, und zwar tritt anstelle der Geraden $\overline{a'}$, welche p von A ist, die Seite a und anstelle der letzten, welche p von $\overline{A'}$ ist, die erste Gerade $\overline{a'}$. Im Satze 14 wird von den Polaren ein zu $a(P)$ involutorisch liegender Strahlenbüschel um die Gegenecke A beschrieben; und dual.

Der Satz 13 gibt eine zweite Berechtigung für die Wahl der eindeutigen Zuordnung von Pol und Polare, die wir in Nr. 6 getroffen haben, wenn der Punkt auf einer Dreieckseite liegt.

Wir können jetzt die folgende Frage beantworten:

Gibt es in bezug auf ein Dreieck auch konjugierte Punkte und Geraden, wie sie in bezug auf einen Kegelschnitt vorhanden sind, oder nicht?

Die Antwort lautet: Keine zwei Punkte oder Gerade sind im allgemeinen, d. h. wenn keiner der beiden Punkte auf einer

Seite liegt resp. keine der beiden Geraden durch eine Ecke geht, einander konjugiert.

Denn soll ein Punkt Q auf der Polare r des auf keiner Seite liegenden Punktes R liegen und von den Schnittpunkten der Dreieckseiten mit r verschieden sein, so ist die Polare q von Q nach beiden Definitionen ein Strahl des von den p der Punkte von r beschriebenen Büschels zweiter Ordnung und kann demnach nicht durch R gehen (Satz 4). Liegt aber ein Punkt auf einer Seite, so ist er zu den sämtlichen Punkten seiner Polare konjugiert; und dual. Denn nach der ersten Definition von p fällt das p eines auf einer Seite liegenden Punktes mit dieser Seite zusammen, somit ist ein solcher Punkt sich selbst und allen auf derselben Seite liegenden Punkten konjugiert; nach der zweiten Definition geht die Polare eines Seitenpunktes durch die Gegenecke und wird von diesem Seitenpunkte durch die beiden übrigen Ecken harmonisch getrennt, somit geht nach Satz 13 die Polare eines jeden auf der Polare des Seitenpunktes liegenden Punktes durch den Seitenpunkt, und dieser letztere ist also wieder allen Punkten seiner Polare konjugiert. Ein auf keiner Seite liegender Punkt ist also nach der ersten Definition keinem Punkte und nach der zweiten Definition nur drei Punkten, nämlich den drei Schnittpunkten seiner Polare mit den Dreieckseiten konjugiert; und dual. Sich selbst konjugierte Punkte gibt es nach der zweiten Definition nicht, nach der ersten Definition sind es alle Seitenpunkte; und dual.

Sechster Abschnitt.

Erzeugung der Kegelschnittbüschel und Kegelschnittscharen durch Pole und Polaren in bezug auf ein Dreieck.

23. Von nun an sollen P und p variabel hinsichtlich g und G und diese letztere ihrerseits variabel hinsichtlich D und d sein; es soll also etwa die Gerade d der Träger derjenigen Punktreihe erster Ordnung $d(G)$ sein, deren Elemente G ihrerseits ebenfalls Träger von Strahlenbüscheln erster Ordnung $G(p)$ sind; dabei sollen D und d, ebenso wie P, p und G, g, Pol und Polare in bezug auf das Grunddreieck ABC sein. Ferner sollen unter $\underline{\overline{A'}}$, $\underline{\overline{A''}}$ usw., $\underline{\overline{a'}}$, $\underline{\overline{a''}}$ usw. die Elemente des von D und d herrührenden Systems, während unter $\overline{A'}$, $\overline{A''}$ usw., $\overline{a'}$, $\overline{a''}$ usw., wie bisher, die Elemente des von G und g herrührenden Systems verstanden werden.

Durchläuft der Punkt G, um welchen sich eine Gerade p dreht, welcher also der Mittelpunkt des Strahlenbüschels $G(p)$ ist, eine feste durch keine Dreiecksecke gehende Gerade d, so durchlaufen, nach Satz 4, die Mittelpunkte der Strahlenbüschel $G'(p')$, $G''(p'')$ und $G'''(p''')$ die durch keine Dreiecksecke gehenden Geraden d', d'' und d'''. Je zwei dieser vier geraden Punktreihen $d(G)$, $d'(G')$, $d''(G'')$, $d'''(G''')$ sind zueinander perspektiv; die Seite, auf der sich die Träger dieser beiden Punktreihen schneiden, und die ihr gegenüberliegende Dreiecksecke, sind die involutorische Achse und das Perspektivitätszentrum derselben.

Die Pole (P) der sämtlichen Geraden p in bezug auf das Dreieck ABC beschreiben dann den durch die vier Punkte A,

B, C, D gehenden Kegelschnittbüschel $\mathfrak{D}$, wobei D der Pol der festen Geraden d in bezug auf das Dreieck ABC ist.

Denn die Pole (P) eines jeden Strahlenbüschels $G(p)$, dessen Mittelpunkt G ein beliebiger auf d liegender Punkt ist, beschreiben einen dem Dreieck ABC umgeschriebenen Kegelschnitt γ, welcher auch durch den Pol D der einem solchen Strahlenbüschel $G(p)$ angehörenden Geraden d gehen muß. Und umgekehrt beschreiben die Polaren (p) der Punkte eines jeden dem Viereck $ABCD$ umgeschriebenen Kegelschnitts γ einen Strahlenbüschel erster Ordnung $G(p)$, dessen Mittelpunkt G auf der Polare d des Punktes D in bezug auf das Dreieck ABC liegt; und zu zwei voneinander verschiedenen Kegelschnitten γ gehören stets zwei voneinander verschiedene Strahlenbüschel $G(p)$; und umgekehrt. Folglich beschreiben die Pole (P) aller Strahlenbüschel $G(p)$, deren Mittelpunkte G auf der Geraden d liegen, die sämtlichen dem Viereck $ABCD$ umgeschriebenen Kegelschnitte γ oder, was dasselbe bedeutet, den Kegelschnittbüschel $\mathfrak{D}$.

Die feste Gerade d schneidet jeden Kegelschnitt γ des Büschels $\mathfrak{D}$ in zwei reellen Punkten.

Denn jeder Punkt G von d liegt innerhalb des ihm zugehörigen Kegelschnitts γ (Satz 4), somit muß d den letzten in zwei reellen Punkten schneiden.

Die Involution, die durch den Kegelschnittbüschel $\mathfrak{D}$ in d eingeschnitten wird, ist bekanntlich identisch mit der durch das vollständige Viereck $ABCD$ in d eingeschnittenen und diese letztere ist keine andere, nach Nr. **5**, als die auf d vom Dreieck ABC herrührende natürliche Involution, da D Pol von d in bezug auf das Dreieck ABC ist; somit muß sie stets elliptisch sein.

24. Die Pole dieser Geraden d in bezug auf die sämtlichen Kegelschnitte γ des Büschels $\mathfrak{D}$ liegen auf dem Kegelschnitt Δ, welcher von den Polaren (g) der auf d liegenden Punkte G in bezug auf das Dreieck ABC eingehüllt wird, und zwar ist der Pol von d in bezug auf den Kegelschnitt γ_i von $\mathfrak{D}$ der Berührungspunkt von g_i als Tangente von Δ.

Beweis. Die Polare eines Punktes G_i von d in bezug auf denjenigen Kegelschnitt γ_i, der von den Polen (P) des Strahlenbüschels $G_i(p)$ in bezug auf ABC erzeugt wird, ist mit der Polare g_i desselben Punktes in bezug auf ABC identisch (Satz 3), also muß der Pol von d in bezug auf γ_i, weil d durch G_i geht, auf der Polare g_i von G_i liegen, und zwar muß dieser Pol derjenige Punkt auf g_i sein, welcher in der auf g_i von γ_i und somit auch in der mit ihr identischen vom Dreieck ABC herrührenden Involution dem Schnittpunkte dg_i zugeordnet ist.

Nun muß aber der Punkt, welcher in der von ABC auf g_i herrührenden natürlichen Involution dem Schnittpunkte dg_i zugeordnet ist, der Berührungspunkt von g_i als Tangente des Kegelschnitts Δ sein.

Um die Richtigkeit dieser Behauptung zu beweisen, stelle ich die folgende Betrachtung an.

Paart man die Tangenten g des Kegelschnitts Δ in der Weise zu einer Involution, daß man die Gerade d zur Involutionsachse macht, also so, daß je zwei auf d sich schneidende Tangenten von Δ einander zugeordnet sein sollen, und schneidet man diese Tangenteninvolution mit einer dieser Tangenten, etwa mit g_i, so wird in der so in g_i eingeschnittenen Involution der Berührungspunkt von g_i dem Schnittpunkte dg_i zugeordnet sein. Denn durch diesen Berührungspunkt geht nur eine einzige Tangente von Δ, nämlich g_i selbst und dieser ist in der Tangenteninvolution die durch den Schnittpunkt dg_i gehende und von g_i verschiedene Tangente von Δ zugeordnet. Die in dieser Weise auf g_i entstandene Involution muß aber mit der vom Dreieck ABC herrührenden identisch sein. Die Richtigkeit hiervon erhellt folgendermaßen. Die Dreieckseiten a, b, c sind Tangenten von Δ und ihre Berührungspunkte sind $\overline{A''}$, $\overline{B''}$, $\overline{C''}$, wobei $\overline{A''}$ von $\overline{A'} \equiv ad$, $\overline{B''}$ von $\overline{B'} \equiv bd$, $\overline{C''}$ von $\overline{C'} \equiv cd$ durch B und C resp. C und A resp. A und B harmonisch getrennt sind (Satz 4). Folglich muß diejenige Tangente von Δ, die durch $\overline{A'}$ geht und von a verschieden ist, von der letztern Tangente a durch die Tangenten b und c harmonisch getrennt sein, da diese vier Tangenten von einer unter ihnen, nämlich a, in den vier harmonischen Punkten $\overline{A'}$, $\overline{A''}$; C, B geschnitten werden. Diese vier harmonischen Tangenten schneiden nun jede Tangente von Δ in vier harmonische Punkte, und da drei von diesen vier Tangenten, nämlich a, b, c, die Tangente g_i von Δ in den Punkten $\overline{A_i'}$, $\overline{B_i'}$, $\overline{C_i'}$ schneiden, so muß die vierte Tangente, die durch $\overline{A'}$ geht, durch den Punkt $\overline{A_i'''} \equiv (AG_i, g_i)$ gehen, welcher von $\overline{A_i'}$ durch $\overline{B_i'}$ und $\overline{C_i'}$ harmonisch getrennt ist. Es muß also die Verbindungslinie $\overline{A'}\,\overline{A_i'''}$ eine Tangente von Δ sein; ebenso müssen die Verbindungslinien $\overline{B'}\,\overline{B_i'''}$ und $\overline{C'}\,\overline{C_i'''}$ Tangenten von Δ sein. Nun sind a, $\overline{A'}\,\overline{A_i'''}$; b, $\overline{B'}\,\overline{B_i'''}$; c, $\overline{C'}\,\overline{C_i'''}$ drei Strahlenpaare in derjenigen Tangenteninvolution um den Kegelschnitt Δ, die die Gerade d zur Involutionsachse hat, denn es ist $\overline{A'} \equiv ad$, $\overline{B'} \equiv bd$, $\overline{C'} \equiv cd$. Ferner sind $\overline{A_i'}$, $\overline{A_i'''}$; $\overline{B_i'}$, $\overline{B_i'''}$; $\overline{C_i'}$, $\overline{C_i'''}$ die Schnittpunkte dieser drei Strahlenpaare mit g_i. Folglich müssen die beiden Involutionen auf g_i, nämlich die vom Dreieck ABC herrührende und die von der Tangenteninvolution um Δ, die d zur Involutionsachse hat, eingeschnittene, identisch sein, da sie die drei Punktepaare $\overline{A_i'}$, $\overline{A_i'''}$; $\overline{B_i'}$, $\overline{B_i'''}$; $\overline{C_i'}$, $\overline{C_i'''}$ gemein haben. Es muß somit, wie behauptet wurde, der Berührungspunkt von g_i als Tangente von Δ auch in der auf g_i vom Dreieck herrührenden Involution dem Schnittpunkte dg_i zugeordnet sein.

Folglich muß der Pol von d in bezug auf γ_i der Berührungspunkt von g_i als Tangente von Δ sein, da beide dem Schnittpunkte dg_i in der vom Dreieck ABC auf g_i herrührenden Involution zugeordnet sein müssen, w. z. b. w.

25. Bekanntlich laufen die Polaren eines beliebigen Punktes in bezug auf sämtliche Kegelschnitte eines Büschels durch einen Punkt.

Ich behaupte nun:

Der Punkt, in welchem die Polaren eines auf der festen Geraden d liegenden Punktes G_i in bezug auf sämtliche Kegelschnitte des Büschels $\mathfrak{D}$ zusammenlaufen, ist der Berührungspunkt von g_i als Tangente von Δ, und zwar ist die Polare von G_i in bezug auf γ_k die Verbindungslinie der Berührungspunkte von g_i und g_k als Tangenten von Δ.

Beweis. Wie wir sahen, ist der Berührungspunkt einer Tangente g_k von Δ Pol von d in bezug auf γ_k, folglich muß die Polare eines auf d liegenden Punktes G_i in bezug auf γ_k durch den Pol von d in bezug auf denselben Kegelschnitt γ_k, also durch den Berührungspunkt von g_k gehen; es geht somit stets jede Polare von G_i in bezug auf irgendein γ von $\mathfrak{D}$ durch einen Punkt von Δ und umgekehrt geht durch jeden Punkt von Δ mindestens eine solche Polare von G_i und durch zwei Punkte von Δ gehen mindestens zwei solche Polaren. Soll nun der Punkt, in welchen sämtliche solche Polaren zusammenlaufen, nicht auf dem Kegelschnitt Δ liegen, so müßte jede dieser Polaren, die durch einen Punkt und somit, wenn sie keine Tangente von Δ ist, durch noch einen zweiten Punkt von Δ geht, mit einer zweiten dieser Polaren zusammenfallen, welche durch den zweiten Schnittpunkt der ersteren Polare mit Δ gehen muß, da sie zwei Punkte gemein hätten, nämlich diesen zweiten Schnittpunkt und den nicht auf Δ liegenden Punkt, in welchen diese Polaren sämtlich zusammenlaufen; und da durch den letzteren Punkt höchstens zwei Tangenten von Δ gehen, so müßten alle übrigen Polaren, die keine Tangenten von Δ sind, zu je zwei zusammenfallen. Zwei solche Polaren von G_i können aber nie zusammenfallen, denn fielen etwa die beiden Polaren von G_i in bezug auf γ_m und γ_n zusammen, so müßte auf d G_i vom Schnittpunkte der gemeinsamen Polare mit d durch die beiden Schnittpunkte von d mit γ_m und ebenso durch die beiden Schnittpunkte von d mit γ_n harmonisch getrennt sein, was unmöglich ist, da diese zwei Paar Schnittpunkte von γ_m und γ_n mit d, zwei Paar der vom Kegelschnittbüschel $\mathfrak{D}$ in d eingeschnittenen elliptischen Involutionen sind und solche Paare niemals durch die nämlichen zwei Punkte gleichzeitig harmonisch getrennt sein können. Folglich muß der Punkt, in welchen diese Polaren von G_i zusammenlaufen, auf dem Kegelschnitt Δ liegen; da aber die Polare von G_i in bezug auf γ_i g_i (Satz 3), und g_i eine Tangente von Δ ist, so kann dieser Punkt kein anderer als der Berührungspunkt von g_i sein; und die Polare von G_i in bezug auf γ_k muß demnach die Verbindungslinie der Berührungspunkte von g_i und g_k sein, womit die Behauptung bewiesen ist.

Da nun jeder Punkt G von d auf einem und nur auf einem der Kegelschnitte γ des Büschels $\mathfrak{D}$ liegt und somit seine Polare in bezug auf diesen Kegelschnitt die Tangente an demselben Kegelschnitt in G ist, so muß die Tangente an jedem der Kegelschnitte γ in einem Schnittpunkte G_i dieses Kegelschnitts mit d durch den Berührungspunkt der Tangente g_i von Δ gehen. Da ferner der von den Polaren (g) gebildete Strahlenbüschel zweiter Ordnung $\Delta(g)$ und somit auch der von ihm eingehüllte Kegelschnitt Δ seiner Berührungspunkte zu der geraden Punktreihe $d(G)$ projektiv ist und die Gerade d außerhalb Δ liegt (Satz 3); und da bekanntlich eine Punktreihe erster und eine zu ihr projektive Punktreihe zweiter Ordnung, wenn sie keine Punkte entsprechend gemein haben, einen Strahlenbüschel dritter Ordnung erzeugen, so umhüllen die Verbindungslinien der Punkte G_i von d mit den Berührungspunkten der Tangenten g_i von Δ, also die Tangenten an den Kegelschnitten γ von $\mathfrak{D}$ in den Punkten G von d eine Kurve dritter Klasse, von der d eine isolierte Doppeltangente ist.

Zu den Tangenten dieser Kurve dritter Klasse gehören auch die Dreieckseiten a, b, c und die drei Ecktransversalen $\overline{\underline{a'}} \equiv AD$, $\overline{\underline{b'}} \equiv BD$ und $\overline{\underline{c'}} \equiv CD$, also die drei Paar Gegenseiten a, $\overline{\underline{a'}}$; b, $\overline{\underline{b'}}$; c, $\overline{\underline{c'}}$ des vollständigen Vierecks $ABCD$. Denn diese drei Paare Gegenseiten sind die drei Geradenpaare, in welche drei Kegelschnitte des Büschels $\mathfrak{D}$ aufgelöst sind, und somit fallen die drei Paare Tangenten in den Schnittpunkten von d und den drei Geradenpaaren mit diesen drei letzteren zusammen.

26. Wie wir gesehen haben, wenn ein Punkt P und seine Polare p in bezug auf ABC gegeben sind und der Punkt P, als irgend einer durch ihn gehenden Geraden g angehörig, aufgefaßt wird, ist der Berührungspunkt des von g herrührenden Kegelschnitts Γ auf p derjenige Punkt, welcher in der vom Dreieck ABC auf p herrührenden Involution dem Schnittpunkte gp zugeordnet ist.

Wenn also eine Gerade g den Strahlenbüschel erster Ordnung $P(g)$ beschreibt, so beschreibt der Berührungspunkt des von g herrührenden Kegelschnitts Γ auf der Polare p von P in bezug auf ABC eine zu $P(g)$ involutorische Punktreihe; und zwar sind die somit auf p und um P entstehenden Involutionen mit den von ABC herrührenden identisch.

Dual: Wenn ein Punkt G die gerade Punktreihe $p(G)$ beschreibt, so beschreibt die Tangente an dem von G herrührenden Kegelschnitt γ in dem Pol P von p in bezug auf ABC einen zu $p(G)$ involutorischen Strahlenbüschel erster Ordnung; und zwar sind die somit um P und auf p entstehenden Involutionen mit den von ABC herrührenden identisch.

Somit ist der Kegelschnittbüschel $\mathfrak{D}(\gamma)$, indem man seine Kegelschnitte sämtlich durch ihre Tangenten im Grundpunkte D ersetzt, zu der geraden Punktreihe $d(G)$ projektiv, ja sogar involutorisch.

Ebenso beschreiben die Punkte P', P'', P''' die Kegelschnittbüschel $\mathfrak{D}'(\gamma')$, $\mathfrak{D}''(\gamma'')$, $\mathfrak{D}'''(\gamma''')$, deren Grundpunkte A, B, C, D' resp. A, B, C, D'' resp. A, B, C, D''' sind, und wobei $\mathfrak{D}'(\gamma')$ zu $d'(G')$, $\mathfrak{D}''(\gamma'')$ zu $d''(G'')$, $\mathfrak{D}'''(\gamma''')$ zu $d'''(G''')$ und somit alle drei Kegelschnittbüschel zu $d(G)$ projektiv sind.

Wir haben somit:

Satz 15: Beschreibt der Punkt P die sämtlichen geraden Punktreihen $g(P)$, deren Träger g ihrerseits einen keine Dreieckseite enthaltenden Strahlenbüschel erster Ordnung $D(g)$ bilden, so beschreiben die Punkte P', P'', P''' die sämtlichen geraden Punktreihen $g'(P')$ resp. $g''(P'')$ resp. $g'''(P''')$, deren Träger g', g'', g''' ihrerseits die Strahlenbüschel erster Ordnung $D'(g')$, $D''(g'')$, $D'''(g''')$ bilden. Je zwei von vier zusammengehörigen Punktreihen $g(P)$, $g'(P')$, $g''(P'')$, $g'''(P''')$ sind zueinander perspektiv; die Dreieckseite, auf der die Träger dieser beiden Punktreihen sich schneiden, und die Gegenecke sind die involutorische Achse und das Perspektivitätszentrum derselben Punktreihen. Ferner sind je zwei der vier Strahlenbüschel $D(g)$, $D'(g')$, $D''(g'')$, $D'''(g''')$ zueinander perspektiv; die Dreiecksecke, durch welche die Verbindungslinie der Träger der beiden Strahlenbüschel geht, und die Gegenseite sind das involutorische Zentrum und der perspektive Durchschnitt derselben Strahlenbüschel.

Die Geraden p, p', p'', p''' beschreiben dann die Tangenten der sämtlichen Kegelschnitte Γ resp. Γ' resp. Γ'' resp. Γ''' der Kegelschnittscharen $\mathfrak{d}(\Gamma)$, $\mathfrak{d}'(\Gamma')$, $\mathfrak{d}''(\Gamma'')$, $\mathfrak{d}'''(\Gamma''')$, deren Grundtangenten a, b, c, d resp. a, b, c, d' resp. a, b, c, d'' resp. a, b, c, d''' sind; dabei sind d, d', d'', d''' die Polaren von D, D', D'', D''' in bezug auf das Dreieck $ABC \equiv cab$. Diese vier Kegelschnittscharen sind zu $D(g)$, $D'(g')$, $D''(g'')$ und $D'''(g''')$ projektiv. Durch den festen Punkt D gehen zwei reelle Tangenten an jedem Kegelschnitt Γ der Schar $\mathfrak{d}(\Gamma)$; die von $\mathfrak{d}(\Gamma)$ um D herrührende Involution ist mit der von ABC und somit auch mit der vom Kegelschnitt δ, der von den Polen (G) in bezug auf ABC der durch D gehenden Geraden g beschrieben wird, um D herrührenden Involution identisch.

Die Polaren von D in bezug auf sämtliche Kegelschnitte der Schar $\mathfrak{d}(\Gamma)$ umhüllen den zu $D(g)$ und somit auch zu $\mathfrak{d}(\Gamma)$ projektiven Kegelschnitt δ, und zwar ist die Polare von D in bezug auf den Kegelschnitt Γ_i von $\mathfrak{d}(\Gamma)$ die Tangente an δ im Punkte G_i. Die Pole einer Geraden g_i von $D(g)$ in bezug auf sämtliche Kegelschnitte der Schar $\mathfrak{d}(\Gamma)$ bilden eine zu $\mathfrak{d}(\Gamma)$ projektive gerade Punktreihe, deren Träger die Tangente an δ im Punkte G_i ist, und zwar ist der Pol von g_i in bezug auf den Kegelschnitt Γ_k von $\mathfrak{d}(\Gamma)$ der Schnittpunkt der beiden Tangenten an δ in den Punkten G_i und G_k.

Somit ist die gerade Punktreihe der Pole einer Geraden g_i von $D(g)$ in bezug auf sämtliche Kegelschnitte der Schar $\mathfrak{d}(\Gamma)$ identisch mit der Punktreihe der Pole der sämtlichen Geraden $D(g)$ in bezug auf den einzigen Kegelschnitt Γ_i von $\mathfrak{d}(\Gamma)$. Die Pole sämtlicher Geraden von

$D(g)$ in bezug auf sämtliche Kegelschnitte der Schar $\mathfrak{d}(\Gamma)$ bilden also die sämtlichen geraden Punktreihen, deren Träger Tangenten an δ sind; sowohl diese Punktreihen als auch der von ihren Trägern gebildete Tangentenbüschel um den Kegelschnitt δ sind sämtlich zu $D(g)$ und $\mathfrak{d}(\Gamma)$ projektiv, so daß der Pol von g_i in bezug auf Γ_k, wenn derselbe als der Tangente in G_i angehörig aufgefaßt und also g_i festgehalten wird, g_k in $D(g)$ und Γ_k in $\mathfrak{d}(\Gamma)$, und wenn derselbe als der Tangente in G_k angehörig aufgefaßt und also Γ_k festgehalten wird, g_i in $D(g)$ und Γ_i in $\mathfrak{d}(\Gamma)$ entspricht.

Endlich ist der Ort der Berührungspunkte der durch D an jedem der Kegelschnitte von $\mathfrak{d}(\Gamma)$ gelegten Tangenten eine Kurve dritter Ordnung, von der D ein isolierter Doppelpunkt ist; zu dieser Kurve gehören die Dreiecksecken A, B, C und die drei Punkte $\overline{A'} \equiv ad$, $\overline{B'} \equiv bd$, $\overline{C'} \equiv cd$.

Dasselbe gilt von D' und δ', D'' und δ'', D''' und δ''' in bezug auf $\mathfrak{d}'(\Gamma')$ resp. $\mathfrak{d}''(\Gamma'')$ resp. $\mathfrak{d}'''(\Gamma''')$. Die Kegelschnittschar $\mathfrak{d}(\Gamma)$ hat mit $\mathfrak{d}'(\Gamma')$ resp. $\mathfrak{d}''(\Gamma'')$ resp. $\mathfrak{d}'''(\Gamma''')$ das Punktepaar A, $\overline{A'}$ resp. B, $\overline{B'}$ resp. C, $\overline{C'}$ gemein; die beiden übrigen Punktepaare sind für $\mathfrak{d}'(\Gamma')$ B, $\overline{B''} \equiv bd'$ und C, $\overline{C''} \equiv cd'$, für $\mathfrak{d}''(\Gamma'')$ C, $\overline{C''}$ und A, $\overline{A''} \equiv ad''$, für $\mathfrak{d}'''(\Gamma''')$ A, $\overline{A''}$ und B, $\overline{B''}$.

Dual: Beschreibt die Gerade p die sämtlichen Strahlenbüschel erster Ordnung $G(p)$, deren Träger G ihrerseits eine keine Dreiecksecke enthaltende gerade Punktreihe $d(G)$ bilden, so beschreiben die Geraden p', p'', p''' die sämtlichen Strahlenbüschel erster Ordnung $G'(p')$ resp. $G''(p'')$ resp. $G'''(p''')$, deren Träger G', G'', G''' ihrerseits die geraden Punktreihen $d'(G')$, $d''(G'')$, $d'''(G''')$ bilden. Je zwei von vier zusammengehörigen Strahlenbüscheln $G(p)$, $G'(p')$, $G''(p'')$, $G'''(p''')$ sind zueinander perspektiv; die Dreiecksecke, durch welche die Verbindungslinie der Träger der beiden Strahlenbüschel geht, und die Gegenseite sind das involutorische Zentrum und der perspektive Durchschnitt derselben Strahlenbüschel. Ferner sind je zwei der vier Punktreihen $d(G)$, $d'(G')$, $d''(G'')$, $d'''(G''')$ zueinander perspektiv; die Dreieckseite, auf der die Träger dieser beiden Punktreihen sich schneiden, und die Gegenecke sind die involutorische Achse und das Perspektivitätszentrum derselben Punktreihen.

Die Punkte P, P', P'', P''' beschreiben dann die sämtlichen Kegelschnitte γ resp. γ' resp. γ'' resp. γ''' der Kegelschnittbüschel $\mathfrak{D}(\gamma)$, $\mathfrak{D}'(\gamma')$, $\mathfrak{D}''(\gamma'')$, $\mathfrak{D}'''(\gamma''')$, deren Grundpunkte A, B, C, D resp. A, B, C, D' resp. A, B, C, D'' resp. A, B, C, D''' sind; diese vier Kegelschnittbüschel sind zu $d(G)$, $d'(G')$, $d''(G'')$, $d'''(G''')$ projektiv.

Die feste Gerade d schneidet sämtliche Kegelschnitte des Büschels $\mathfrak{D}(\gamma)$ in je zwei reellen Punkten; die durch $\mathfrak{D}(\gamma)$ in d eingeschnittene Involution ist mit der von ABC und somit auch mit der vom Kegelschnitt Δ, der von den Polaren (g) der auf d liegenden Punkte G in bezug auf ABC eingehüllt wird, auf d herrührenden Involution identisch.

Die Pole von d in bezug auf sämtliche Kegelschnitte des Büschels $\mathfrak{D}(\gamma)$ liegen auf dem zu $d(G)$ und somit auch zu $\mathfrak{D}(\gamma)$ projektiven Kegelschnitt Δ, und zwar ist der Pol von d in bezug auf den Kegelschnitt γ_i von $\mathfrak{D}(\gamma)$ der Berührungspunkt von Δ auf g_i. Die Polaren eines Punktes G_i von $d(G)$ in bezug auf sämtliche Kegelschnitte des Büschels $\mathfrak{D}(\gamma)$ bilden einen zu $\mathfrak{D}(\gamma)$ projektiven Strahlenbüschel erster Ordnung, dessen Träger der Berührungspunkt von Δ auf g_i ist, und zwar ist die Polare von G_i in bezug auf den Kegelschnitt γ_k von $\mathfrak{D}(\gamma)$ die Verbindungslinie der beiden Berührungspunkte von Δ auf g_i und g_k. Somit ist der Strahlenbüschel erster Ordnung der Polaren eines Punktes G_i von $d(G)$ in bezug auf sämtliche Kegelschnitte des Büschels $\mathfrak{D}(\gamma)$ identisch mit dem Strahlenbüschel der Polaren der sämtlichen Punkte $d(G)$ in bezug auf den einzigen Kegelschnitt γ_i von $\mathfrak{D}(\gamma)$. Die Polaren sämtlicher Punkte von $d(G)$ in bezug auf sämtliche Kegelschnitte des Büschels $\mathfrak{D}(\gamma)$ bilden also die sämtlichen Strahlenbüschel erster Ordnung, deren Träger auf Δ liegen; sowohl diese Strahlenbüschel als auch der von ihren Trägern gebildete Kegelschnitt Δ sind sämtlich zu $d(G)$

und $\mathfrak{D}(\gamma)$ projektiv, so daß die Polare von G_i in bezug auf γ_k, wenn dieselbe als dem Berührungspunkte auf g_i angehörig aufgefaßt und also G_i festgehalten wird, G_k in $d(G)$ und γ_k in $\mathfrak{D}(\gamma)$, und wenn dieselbe als dem Berührungspunkte auf g_k angehörig aufgefaßt und also γ_k festgehalten wird, G_i in $d(G)$ und γ_i in $\mathfrak{D}(\gamma)$ entspricht.

Endlich umhüllen die Tangenten an die Kegelschnitte von $\mathfrak{D}(\gamma)$ in den Punkten G von $d(G)$ eine Kurve dritter Klasse, von der d eine isolierte Doppeltangente ist; zu den Tangenten dieser Kurve gehören die Dreieckseiten a, b, c und die drei Geraden $\underline{\overline{a'}} \equiv AD$, $\underline{\overline{b'}} \equiv BD$, $\underline{\overline{c'}} \equiv CD$.

Dasselbe gilt von d' und Δ', d'' und Δ'', d''' und Δ''' in bezug auf $\mathfrak{D}'(\gamma')$ resp. $\mathfrak{D}''(\gamma'')$ resp. $\mathfrak{D}'''(\gamma''')$. Der Kegelschnittbüschel $\mathfrak{D}(\gamma)$ hat mit $\mathfrak{D}'(\gamma')$ resp. $\mathfrak{D}''(\gamma'')$ resp. $\mathfrak{D}'''(\gamma''')$ das Geradenpaar a, $\underline{\overline{a'}}$ resp. b, $\underline{\overline{b'}}$ resp. c, $\underline{\overline{c'}}$ gemein; die zwei übrigen Geradenpaare von $\mathfrak{D}'(\gamma')$, $\mathfrak{D}''(\gamma'')$, $\mathfrak{D}'''(\gamma''')$ sind $b, \underline{\overline{b''}} \equiv BD'$ und $c, \underline{\overline{c''}} \equiv CD'$ resp. $c, \underline{\overline{c''}}$ und $a, \underline{\overline{a''}} \equiv AD''$ resp. $a, \underline{\overline{a''}}$ und $b, \underline{\overline{b''}}$.

Nach Satz 5 gilt auch die Umkehrung des vorstehenden Satzes.

27. Dieser letzte Satz gewährt uns die folgende neue Auffassung der Kegelschnittbüschel und Kegelschnittscharen mit vier reellen Grundpunkten bzw. Grundtangenten.

Ein Kegelschnittbüschel mit vier reellen Grundpunkten kann als Erzeugnis der Pole (P) der sämtlichen Strahlenbüschel erster Ordnung $G(p)$, deren Träger G auf der Polare eines der vier Grundpunkte in bezug auf das Dreieck der drei andern liegen, in bezug auf dasselbe Dreieck aufgefaßt werden.

Dual: Eine Kegelschnittschar mit vier reellen Grundtangenten kann als Erzeugnis der Polaren (p) der sämtlichen geraden Punktreihen $g(P)$, deren Träger g durch den Pol einer der vier Grundtangenten in bezug auf das Dreieck der drei andern gehen, in bezug auf dasselbe Dreieck aufgefaßt werden.

Es gibt somit vier ausgezeichnete Geraden im Kegelschnittbüschel und vier ausgezeichnete Punkte in der Kegelschnittschar; diese sind die Polaren der Grundpunkte bzw. die Pole der Grundtangenten in bezug auf das Dreieck der je drei andern, welche identisch sind (Abschnitt I) mit den Polaren der Grundpunkte bzw. den Polen der Grundtangenten in bezug auf das Diagonaldreieck des von den Grundpunkten bzw. Grundtangenten gebildeten vollständigen Vierecks bzw. Vierseits.

Alles das über die Gerade d und den Punkt D im Satze 15 Ausgesprochene gilt für jede dieser vier ausgezeichneten Geraden bzw. jeden dieser vier ausgezeichneten Punkte.

Vermittels dieser neuen Auffassung des Kegelschnittbüschels können wir die charakteristische Eigenschaft des Kegelschnittbüschels, daß

> jede Transversale durch dasselbe in einer Involution geschnitten wird,

wenn dasselbe vier reelle Grundpunkte hat, folgendermaßen nachweisen. Je zwei Polaren eines Punktepaares, in welchem die Transversale l von einem Kegelschnitte des Büschels geschnitten wird, in bezug auf das von drei der vier Grundpunkten gebildete Dreieck müssen sich auf der Polare des vierten Grundpunktes in bezug auf dasselbe Dreieck schneiden. Folglich sind in derjenigen Tangenteninvolution um den von den Polaren der auf l liegenden Punkte in bezug auf dasselbe Dreieck eingehüllten Kegelschnitt Λ, welche die Polare des vierten Grundpunktes in bezug auf dasselbe Dreieck zur Involutionsachse hat, je zwei Tangenten einander zugeordnet, die Polaren eines solchen Punktepaares sind. Demnach müssen diese Punktepaare selbst Paare konjugierter Punkte einer Involution auf l sein, da der Tangentenbüschel der Polaren um Λ zu der geraden Punktreihe ihrer Pole auf l projektiv ist. Auch die Umkehrung dieser Eigenschaft, nämlich daß

> alle Kegelschnitte, welche einem gegebenen Dreieck umgeschrieben sind und außerdem durch je zwei konjugierte Punkte einer gegebenen Involution gehen, noch durch einen

vierten festen Punkt laufen und also einen Kegelschnittbüschel bilden,

läßt sich hiermit folgendermaßen nachweisen.

Es entsteht nämlich eine Tangenteninvolution um den von den Polaren der Punkte der gegebenen Involution in bezug auf das gegebene Dreieck eingehüllten Kegelschnitt, wenn je zwei Tangenten einander zugeordnet werden, welche Polaren eines Punktepaares der gegebenen Involution sind, da der Tangentenbüschel der Polaren zur Punktreihe ihrer Pole projektiv ist. Folglich müssen sich je zwei Polaren eines Punktepaares der gegebenen Involution in bezug auf das gegebene Dreieck auf der Involutionsachse der so entstandenen Tangenteninvolution schneiden. Demnach müssen die Träger der sämtlichen Strahlenbüschel erster Ordnung, deren Pole in bezug auf das gegebene Dreieck demselben umgeschriebene und durch je ein Punktepaar der gegebenen Involution gehende Kegelschnitte erzeugen, auf dieser Involutionsachse liegen und somit gehen alle diese Kegelschnitte noch durch den Pol der Involutionsachse in bezug auf das gegebene Dreieck und bilden ein Kegelschnittbüschel.

Die duale Eigenschaft der Kegelschnittschar kann durch die duale Betrachtnng nachgewiesen werden.

Noch einige bekannte Sätze über den Kegelschnittbüschel und die Kegelschnittschar ergeben sich leicht aus dieser Auffassung.

28. Wir können nunmehr den folgenden Satz aufstellen.

Satz 16: Eine beliebige Gerade t berührt dann und nur dann einen gegebenen Kegelschnitt, welcher von irgend drei Geraden x, y, z berührt wird, wenn die Perspektivitätsachse der beiden von den drei Tangenten x, y, z und ihren Berührungspunkten gebildeten Dreiecke durch den Pol T der Geraden t in bezug auf das Tangentendreieck xyz geht. Ist aber dies nicht der Fall, so schneidet die Gerade t den gegebenen Kegelschnitt oder liegt gänzlich außerhalb desselben, je nachdem die Perspektivitätsachse eine gerade oder eine ungerade Zahl von Ecken des von den drei Schnittpunkten der drei Tangenten x, y, z untereinander und dem Pol T

der Geraden t gebildeten Vierecks auf jeder ihrer Seiten hat, wenn keine der Ecken dieses Vierecks innerhalb des Dreiecks der drei andern liegt; das umgekehrte Verhältnis tritt ein, wenn eine der Ecken dieses Vierecks vom Dreieck der andern eingeschlossen wird.

Dual: Ein beliebiger Punkt T liegt dann und nur dann auf einem gegebenen Kegelschnitt, welcher durch drei Punkte X, Y, Z geht, wenn das Perspektivitätszentrum der beiden von den drei Punkten X, Y, Z und den Tangenten an ihnen gebildeten Dreiecke auf der Polare t des Punktes T in bezug auf das Dreieck XYZ liegt. Ist aber dies nicht der Fall, so liegt der Punkt T außerhalb oder innerhalb des gegebenen Kegelschnitts, je nachdem das Perspektivitätszentrum innerhalb oder außerhalb derjenigen fünf Räume liegt, welche durch die Zerschneidung der ganzen Ebene durch die Seiten des von den drei Verbindungslinien der drei Punkte X, Y, Z untereinander und der Polare t des Punktes T gebildeten vollständigen Vierseits entstehen und in welche die drei Diagonalen dieses Vierseits hineinfallen.

Beweis. Soll die Gerade t den gegebenen von den Polaren der auf der Perspektivitätsachse liegenden Punkte in bezug auf das Dreieck xyz eingehüllten Kegelschnitt berühren, so wird sie dann zu diesen Polaren gehören und also ihr Pol T auf der Perspektivitätsachse liegen müssen; ist umgekehrt das letztere der Fall, so gehört t zu diesen Polaren und ist somit eine Tangente an dem gegebenen Kegelschnitt.

Soll ferner die Gerade t den gegebenen Kegelschnitt schneiden, so wird durch jeden der beiden Schnittpunkte der Geraden t und dieses Kegelschnitts eine einzige Tangente an denselben, also eine einzige Polare eines auf der Perspektivitätsachse liegenden Punktes in bezug auf das Dreieck xyz gehen. Folglich müssen dann zwei Kegelschnitte des von der Geraden t in bezug auf dasselbe Dreieck herrührenden Büschels $\mathfrak{T}(\gamma)$ von der Perspektivitätsachse berührt werden, nämlich diejenigen beiden Kegelschnitte dieses Büschels $\mathfrak{T}(\gamma)$, welche von den Polen der beiden Strahlenbüschel erster Ordnung um diese

Schnittpunkte erzeugt werden. Demnach ist die durch das Kegelschnittbüschel $\mathfrak{T}(\gamma)$ in der Perspektivitätsachse eingeschnittene Involution hyperbolisch; diese letztere ist aber mit der von demjenigen vollständigen Viereck auf der Perspektivitätsachse herrührenden Involution identisch, welches von den vier Grundpunkten des Büschels $\mathfrak{T}(\gamma)$, also von den Ecken des Dreiecks xyz und dem Pol T der Geraden t gebildet wird. Es muß also dann die Perspektivitätsachse zu den Ecken dieses Vierecks, nach dem schon oben (Nr. 5) zitierten Kriterium, die verlangte Lage haben. Soll endlich die Gerade t gänzlich außerhalb des gegebenen Kegelschnitts liegen, so wird durch jeden Punkt auf der Geraden t zwei Tangenten an demselben Kegelschnitt, also zwei Polaren zweier auf der Perspektivitätsachse liegende Punkte in bezug auf das Dreieck xyz gehen. Folglich muß dann die Perspektivitätsachse die sämtlichen Kegelschnitte des Büschels $\mathfrak{T}(\gamma)$ in je zwei reellen Punkten schneiden; die durch $\mathfrak{T}(\gamma)$ in der Perspektivitätsachse eingeschnittene Involution wird also dann elliptisch sein und somit muß die Perspektivitätsachse zu den Ecken des Vierecks der Grundpunkte von $\mathfrak{T}(\gamma)$ die im vorstehenden Satze dann verlangte Lage haben.

Im dualen Satze ist das dem obigen Kriterium entsprechende für das vollständige Vierseit (Steiner, Synthetische Geometrie T. II, § 18, Nr. 56) benutzt worden. Der vorstehende Satz bleibt auch noch dann richtig, nach dem weitern Satze 22, wenn t durch eine Ecke des Tangentendreiecks xyz geht.

29. Wenden wir diesen Satz auf die unendlich ferne Gerade s_∞ an, so ergibt sich das folgende Kriterium.

Satz 17: Ein Kegelschnitt, welcher von irgend drei Geraden x, y, z berührt wird, ist eine Ellipse oder eine Hyperbel oder endlich eine Parabel, je nachdem die Perspektivitätsachse der beiden von den drei Tangenten x, y, z und ihren Berührungspunkten gebildeten Dreiecke eine gerade oder eine ungerade Zahl von den folgenden vier Punkten auf jeder ihrer Seiten hat oder endlich durch den vierten Punkt derselben geht; diese vier Punkte sind: die drei Ecken und der Schwerpunkt des Tangentendreiecks xyz.

Denn der Pol der unendlich fernen Geraden in bezug auf ein Dreieck ist stets der Schwerpunkt desselben und liegt stets innerhalb desselben.

Wenn also ein Kegelschnitt durch irgend fünf Elemente gegeben ist, kann man mit Hilfe des Lineals allein drei Tangenten an demselben und die Perspektivitätsachse der beiden von diesen drei Tangenten und ihren Berührungspunkten gebildeten Dreiecke ermitteln; um nun über die Art des gegebenen Kegelschnitts entscheiden zu können, kommt noch, nach dem eben gefundenen Kriterium, nur darauf an: den Schwerpunkt dieses Tangentendreiecks ausfindig zu machen und dies kann wieder mit Hilfe des Lineals allein geschehen, wenn ein Parallelogramm oder zwei rational geteilte Strecken irgendwo in der Ebene des Kegelschnitts gegeben sind.

Kehren wir nun wieder zum Grunddreieck ABC um, so haben wir dem Satze 9 entsprechend:

Satz 18: Der Kegelschnitt Γ, der von den Polaren (p) der keine Ecke des Dreiecks ABC enthaltenden geraden Punktreihe $g(P)$ in bezug auf dieses Dreieck eingehüllt wird, ist eine Ellipse oder eine Hyperbel oder endlich eine Parabel, je nachdem der Träger g der Punktreihe $g(P)$ eine gerade oder ungerade Zahl von den vier Punkten A, B, C, S auf jeder seiner Seiten hat, oder endlich durch den Punkt S geht; dabei bedeutet S den Schwerpunkt des Dreiecks ABC. Ein Kreis ist dieser Kegelschnitt Γ dann und nur dann, wenn der Träger g mit einer derjenigen vier Geraden k_0, k_1, k_2, k_3 zusammenfällt, von denen jede Perspektivitätsachse der beiden Dreiecke: das Grunddreieck ABC und das aus den drei in den Seiten desselben liegenden Berührungspunkten seines Inkreises resp. seines Ankreises an BC resp. an CA resp. an AB gebildete Dreieck ist.

30. Nach der neuen Auffassung der Kegelschnittbüschel und Kegelschnittscharen ergeben sich nun mit Hilfe der Sätze 9 und 18 die folgenden Sätze:

Satz 19: Ein Kegelschnittbüschel mit vier reellen Grundpunkten enthält lauter Hyperbeln oder Hyperbeln und eine einzige Parabel oder endlich Hyperbeln, zwei Parabeln, durch die der Übergang von den Hyperbeln zu den Ellipsen geschieht, und Ellipsen, je nachdem die Polare eines der vier Grundpunkte in bezug auf das von den drei andern Grundpunkten gebildete Dreieck die diesem Dreieck zugehörige Ellipse Σ_∞ nicht trifft oder berührt oder endlich schneidet. Unter den Hyperbeln dieses Büschels kommt eine einzige gleichseitige vor, wenn nicht der Büschel aus lauter gleichseitigen Hyperbeln besteht; das letztere tritt dann und nur dann ein, wenn einer der vier Grundpunkte und somit jeder der Höhenpunkt des von den drei andern gebildeten Dreiecks ist. Unter den Ellipsen, wenn es deren gibt, kommt dann und nur dann ein einziger Kreis vor, wenn die Polare des einen Grundpunktes in bezug auf das Dreieck der drei andern durch den diesem Dreieck zugehörigen oben (Satz 9) definierten Punkt K geht, sonst kommt kein Kreis vor.

Unter den Kegelschnitten des Büschels kommen drei Geradenpaare vor; diese sind drei ausgeartete Hyperbeln oder zwei ausgeartete Hyperbeln und eine ausgeartete Parabel oder endlich eine ausgeartete Hyperbel und zwei ausgeartete Parabeln, je nachdem die Polare des einen Grundpunktes in bezug auf das Dreieck der drei andern durch keine oder durch eine oder endlich durch zwei der Mitten der Seiten desselben geht. Weder eine der Ellipsen noch die Parabel, wenn sie einzig vorkommt, kann in ein Geradenpaar ausarten; die einzige gleichseitige Hyperbel des Büschels artet dann und nur dann in ein Geradenpaar aus, wenn einer der vier Grundpunkte und somit jeder auf einer Höhe im Dreieck der drei andern Grundpunkte liegt.

Denn von den Punkten, welche auf der Polare eines Grundpunktes in bezug auf das Dreieck der drei andern und zugleich außerhalb, auf oder innerhalb der diesem Dreieck zugehörigen Ellipse Σ_∞ liegen, müssen im Kegelschnittbüschel Hyperbeln, Parabeln oder Ellipsen herrühren; und nur von dem Schnittpunkte dieser Polare mit der Polare des Höhenpunktes desselben Dreiecks oder, wenn dieses Dreieck rechtwinklig ist, vom Schnittpunkte derselben Polare mit der von der Höhe zur Hypotenuse durch die Katheten harmonisch getrennten Geraden rührt eine gleichseitige Hyperbel her. Soll aber der Kegelschnittbüschel mehr als eine gleichseitige Hyperbel besitzen, so wird diese Polare mit der Polare des Höhenpunktes und also der eine Grundpunkt mit dem Höhenpunkt des Dreiecks der drei andern zusammenfallen müssen; und dies wird dann von jedem der vier Grundpunkte gelten müssen, da anstatt der Polare des einen Grundpunktes die Polare jedes andern Grundpunktes in bezug auf das Dreieck der je drei übrigen treten kann. Ferner rühren, nach den Sätzen 4 und 13, nur von den drei Schnittpunkten der Polare des einen Grundpunktes in bezug auf das Dreieck der drei andern mit den Seiten desselben drei Geradenpaare her und diese Schnittpunkte liegen außerhalb Σ_∞, wenn sie nicht mit den Seitenmitten desselben Dreiecks zusammenfallen, in welchen auch Σ_∞ von seinen Seiten berührt wird; durch einen dieser Schnittpunkte geht dann und nur dann die Polare des Höhenpunktes desselben Dreiecks in bezug auf dasselbe oder, wenn dasselbe Dreieck rechtwinklig ist, die von der Höhe zur Hypotenuse durch die Katheten harmonisch getrennte Gerade, nach Satz 13, wenn der Pol dieser Polare, also der eine Grundpunkt zusammen mit dem Höhenpunkte auf einer von diesem Schnittpunkte durch zwei Seiten des Dreiecks harmonisch getrennten Geraden, also auf einer Höhe desselben Dreiecks liegt, demnach artet dann und nur dann die einzige gleichseitige Hyperbel des Büschels in ein Geradenpaar aus.

Ferner haben wir:

Satz 20: Eine Kegelschnittschar mit vier reellen Grundtangenten besitzt unendlich viele Ellipsen, unendlich viele Hyperbeln und eine einzige Parabel, wenn nicht die Schar aus lauter Parabeln besteht; das letztere tritt dann und nur dann ein, wenn die unendlich ferne Gerade eine der Grundtangenten ist. Es kommt unter den Ellipsen der Schar kein Kreis oder nur ein Kreis oder endlich zwei Kreise vor, je nachdem der Pol einer der vier Grundtangenten in bezug auf das von den drei andern Grundtangenten gebildete Dreieck auf keiner der vier demselben Dreieck zugehörigen im Satze 18 definierten Geraden k_0, k_1, k_2 und k_3 oder nur auf einer derselben oder endlich im Schnittpunkte zweier derselben liegt.

Die Übergänge von den Ellipsen zu den Hyperbeln geschehen durch die drei Punktepaare der Schar, welche von den drei Verbindungslinien des Pols mit den Dreiecksecken herrühren, und durch die einzige Parabel der Schar. Diese Parabel artet dann und nur dann in ein der drei Punktepaare der Schar aus, wenn zwei von den vier Grundtangenten einander parallel sind.

Denn dann und nur dann liegt der Pol der einen Grundtangente zusammen mit dem Schwerpunkt des Dreiecks der drei andern auf einer durch eine Ecke desselben Dreiecks gehenden Geraden.

Ferner gilt:

Satz 21: Ein Kegelschnittbüschel, welcher die drei Ecken und den Schwerpunkt eines Dreiecks zu seinen vier Grundpunkten hat, besteht aus lauter Hyperbeln und seine Mittelpunktskurve ist die dem Dreieck zugehörige Ellipse Σ_∞.

Denn die Polare des Schwerpunktes eines Dreiecks in bezug auf dasselbe ist die unendlich ferne Gerade und die Polaren der unendlich fernen Punkte in bezug auf ein Dreieck umhüllen die dem Dreieck zugehörige Ellipse Σ_∞, folglich müssen, nach Satz 15, die Pole der unendlich fernen Geraden in bezug auf sämtliche Kegelschnitte des Büschels in diesem Falle auf der Ellipse Σ_∞ liegen und somit ist diese die Mittelpunktskurve dieses Büschels.

31. Im Satze 15 wurde vorausgesetzt, daß die Träger g der geraden Punktreihen $g(P)$ ihrerseits einen keine Dreieckseite enthaltenden Strahlenbüschel erster Ordnung $D(g)$ bilden. Liegt aber der Träger D des letzten Strahlenbüschels $D(g)$ auf einer Dreieckseite, etwa auf a, so bleibt der

Schnittpunkt $ga \equiv \overline{A'}$ und somit auch der Punkt $\overline{A''}$, der von $\overline{A'}$ durch die Ecken B und C harmonisch getrennt ist, für alle diese Punktreihen $g(P)$ unverändert, es ist nämlich der erste $\overline{A'}$ mit dem festen Punkte $D \equiv \overline{A''}$ und der zweite $\overline{A''}$ mit $\overline{A'}$ identisch. Alsdann müssen alle Kegelschnitte, die von den Polaren (p) dieser Punktreihen $g(P)$ in bezug auf das Grunddreieck ABC eingehüllt werden, nach Satz 4 im Punkte $\overline{A'} \equiv \overline{A''}$ von der Dreieckseite a berührt werden. Da nun alle diese Kegelschnitte auch von den beiden andern Dreieckseiten b und c berührt werden, so muß, wie man leicht einsehen kann, die Polare des festen Punktes $D \equiv \overline{A''}$, der von $\overline{A'}$ durch die Ecken B und C harmonisch getrennt ist, in bezug auf alle diese Kegelschnitte die Gerade $\overline{a''} \equiv A\overline{A'}$ sein.

Hierdurch ergibt sich mit Hilfe der Sätze 4, 5 und 13:

Satz 22: Beschreibt der Punkt P die sämtlichen geraden Punktreihen $g(P)$, deren Träger g ihrerseits einen Strahlenbüschel erster Ordnung $D(g)$ bilden, wobei der Mittelpunkt D des letzteren, ohne mit einer Dreiecksecke zusammenzufallen, auf der Seite a liegt, so beschreiben die Punkte P', P'', P''' die sämtlichen geraden Punktreihen $g'(P')$ resp. $g''(P'')$ resp. $g'''(P''')$, wobei die Träger g' der Punktreihen $g'(P')$ ihrerseits um den festen Punkt $D \equiv D' \equiv \overline{A''}$ einen mit $D(g)$ konzentrischen und involutorisch liegenden Strahlenbüschel $D'(g')$ und die Träger g'' und g''' der Punktreihen $g''(P'')$ und $g'''(P''')$ ihrerseits um den Punkt $\overline{A'} \equiv D'' \equiv D'''$ zwei konzentrische und involutorisch liegende Strahlenbüschel erster Ordnung bilden. Diese beiden Strahleninvolutionen $\overline{A''}(g, g')$ und $\overline{A'}(g'', g''')$ sind hyperbolisch, haben die Geraden $a, \overline{a'}$ resp. $a, \overline{a''}$ zu Doppelstrahlen und sind zueinander in der Weise doppelperspektiv mit den beiden Dreieckseiten b und c als perspektive Durchschnitte, daß je zwei zusammengehörige Paare g, g' und g'', g''' sich auf jeder der beiden Seiten b und c schneiden. Je zwei von vier zusammengehörigen Punktreihen $g(P)$, $g'(P')$, $g''(P'')$, $g'''(P''')$ sind perspektiv; ihre involutorische Achse und ihr Perspektivitätszentrum sind die Dreieckseite, auf der die

Träger dieser beiden Punktreihen sich schneiden, und die Gegenecke zu derselben Seite.

Die Geraden p, p', p'', p''' beschreiben dann die Tangentenbüschel der sämtlichen Kegelschnitte Γ resp. Γ' resp. Γ'' resp. Γ''' der Schar $\mathfrak{d}(\Gamma)$, $\mathfrak{d}'(\Gamma')$, $\mathfrak{d}''(\Gamma'')$, $\mathfrak{d}'''(\Gamma''')$, wobei die beiden Scharen $\mathfrak{d}(\Gamma)$, $\mathfrak{d}'(\Gamma')$ und ebenso die beiden Scharen $\mathfrak{d}''(\Gamma'')$, $\mathfrak{d}'''(\Gamma''')$ die Grundelemente gemein haben und involutorisch sind; es sind nämlich die drei Dreieckseiten a, b, c Grundtangenten aller dieser vier Scharen, während noch zu einem Grundpunkte in a die ersten zwei $\mathfrak{d}(\Gamma)$ und $\mathfrak{d}'(\Gamma')$ den Punkt $\overline{\underline{A'}}$ und die andern zwei $\mathfrak{d}''(\Gamma'')$ und $\mathfrak{d}'''(\Gamma''')$ den Punkt $\overline{\underline{A''}}$ haben. Diese vier Scharen sind sämtlich zu $D(g)$, $D'(g')$, $D''(g'')$ und $D'''(g''')$ projektiv.

Der feste Punkt $D \equiv D'$ resp. $D'' \equiv D'''$ liegt außerhalb sämtlicher Kegelschnitte der Schar $\mathfrak{d}(\Gamma)$ resp. $\mathfrak{d}''(\Gamma'')$ und der von den Polaren des Punktes D resp. D'' in bezug auf sämtliche Kegelschnitte der Schar $\mathfrak{d}(\Gamma)$ resp. $\mathfrak{d}''(\Gamma'')$ eingehüllte Kegelschnitt reduziert sich in diesem Falle auf das Geradenpaar a, $\overline{\underline{a''}}$ resp. a, $\overline{\underline{a'}}$, welches von den Polen des Strahlenbüschels $D(g)$ resp. $D''(g'')$ in bezug aus das Dreieck ABC erzeugt wird.

Und dual.

Es gilt auch die Umkehrung des vorstehenden Satzes.

32. Wir haben hierdurch die folgende Auffassung derjenigen Kegelschnittbüschel und Kegelschnittscharen, bei welchen zwei der vier Grundpunkte bzw. zwei der vier Grundtangenten zusammenfallen, welche also drei Grundpunkte und eine Grundtangente in einem derselben bezw. drei Grundtangenten und einen Grundpunkt in einer derselben.

Ein Kegelschnittbüschel mit drei reellen Grundpunkten und einer reellen Grundtangente in einem derselben kann als Erzeugnis der Pole (P) der sämtlichen Strahlenbüschel erster Ordnung $G(p)$, deren Träger g auf der von der Grundtangente durch die beiden auf der letztern sich schneidenden Seiten des von den drei Grundpunkten gebildeten Dreiecks harmonisch getrennten Geraden liegen, in bezug auf dasselbe Dreieck aufgefaßt werden.

Dual: Eine Kegelschnittschar mit drei reellen Grundtangenten und einem reellen Grundpunkte in einer derselben kann als Erzeugnis der Polaren (p) der sämtlichen geraden Punktreihen $g(P)$, deren Träger g durch den von dem Grundpunkte durch die beiden mit dem letztern auf einer Grundtangente liegenden Ecken des von den drei Grundtangenten gebildeten Dreiecks harmonisch getrennten Punkt gehen, in bezug auf dasselbe Dreieck aufgefaßt werden.

Die charakteristische Eigenschaft des Kegelschnittbüschels und der Kegelschnittschar besitzt auch ein solcher Büschel bzw. eine solche Schar; dies kann vermittels dieser neuen Auffassung analog wie oben nachgewiesen werden.

Der Satz 19 wird folgendermaßen modifiziert:

Satz 23: Ein Kegelschnittbüschel, bei welchem zwei von den vier reellen Grundpunkten zusammenfallen, enthält entweder lauter Hyperbeln oder Hyperbeln, zwei Parabeln, durch die der Übergang von den Hyperbeln zu den Ellipsen geschieht, und Ellipsen, je nachdem die Grundtangente ins Innere des Dreiecks der drei Grundpunkte eindringt oder nicht. Unter den Hyperbeln kommt eine einzige gleichseitige vor, wenn das Dreieck der drei Grundpunkte nicht rechtwinklig ist; ist aber dieses Dreieck rechtwinklig und die Grundtangente die Höhe zur Hypotenuse in demselben, so besteht dieser Büschel aus lauter gleichseitigen Hyperbeln. Unter den Ellipsen, wenn es deren im Büschel gibt, kommt dann und nur dann ein Kreis vor, wenn die oben fixierte Gerade, von der der Büschel herrührt, durch den Punkt K desselben Dreiecks geht. Unter den Kegelschnitten dieses Büschels kommen zwei Geradenpaare vor; diese sind entweder eine ausgeartete Parabel und eine ausgeartete Hyperbel oder zwei ausgeartete Hyperbeln, je nachdem die Grundtangente zu einer Seite des nämlichen Dreiecks parallel ist oder nicht. Die gleichseitige Hyperbel, wenn sie einzig vorkommt, artet dann und nur dann in ein Geradenpaar aus, wenn die Grundtangente Höhe in diesem Dreieck ist.

Die Modifikationen rühren davon her, daß anstelle der Polaren eines Grundpunktes im Satze 19 hier die Gerade tritt, welche durch eine Ecke des Dreiecks der drei Grundpunkte geht und von der Grundtangente durch zwei Seiten dieses Dreiecks harmonisch getrennt ist.

Ebenso muß der Satz 20 folgendermaßen modifiziert werden.

Eine Kegelschnittschar, bei welcher zwei Grundtangenten zusammenfallen, besitzt entweder unendlich viele Hyperbeln und eine einzige in ein Punktepaar aufgelöste Parabel, aber keine Ellipsen, oder unendlich viele Hyperbeln, eine einzige Parabel, die in ein Punktepaar nicht aufgelöst werden kann, und unendlich viele Ellipsen, je nachdem der Grundpunkt im Unendlichen liegt oder nicht, wenn die unendlich ferne Gerade nicht eine der Grundtangenten ist; sonst besteht die Schar aus lauter Parabeln. Unter den Kegelschnitten dieser Schar kommen nur zwei Punktepaare vor.

Auch eine solche Kegelschnittschar kann höchstens zwei Kreise besitzen; dies kann nur dann eintreten, wenn die beiden Seiten des von den drei Grundtangenten gebildeten Dreiecks, auf welchen der Grundpunkt nicht liegt, einander gleich sind.

Denn soll eine solche Schar zwei Kreise besitzen, so wird die Zentrale dieser beiden Kreise, welche Winkelhalbierende im Dreieck der drei Grundtangenten ist, im Grundpunkte auf der Grundtangente senkrecht stehen und somit auch Höhe in demselben Dreieck sein; folglich muß dann das letztere ein gleichschenkliges sein.

Endlich kann der Fall, daß der Punkt P die sämtlichen eine Dreiecksecke enthaltenden geraden Punktreihen $g(P)$ beschreibt, vermittels der Sätze 13 und 14 leicht erledigt werden.

33. Zum Schluß will ich noch den folgenden Satz aufstellen.

Satz 24: Die Kegelschnitte φ_1 und Φ_1 und ebenso φ und Φ, welche von dem im Satze 3 definierten Punkte F_1 und seiner Polare f_1 in bezug auf das Dreieck ABC resp. von F und f herrühren, haben F_1 und f_1 resp. F und f zu einem Brennpunkte und zu der diesem Brennpunkte zugehörigen Leitlinie und somit die von F_1 auf f_1 resp. von F auf f gefällte Senkrechte zur Hauptachse. Ist ein Winkel im Dreieck ABC größer $\frac{2}{3}\pi$, so sind die Kegelschnitte φ_1 und Φ_1 Hyberbeln, und zwar ist φ_1 keine gleichseitige. Sind aber sämtliche Dreieckwinkel kleiner $\frac{2}{3}\pi$, so ist Φ_1 eine Ellipse; und ist speziell das Dreieck gleichseitig, so sind dann und nur dann φ_1 und Φ_1 der Umkreis und der Inkreis des Dreiecks und Φ ist dann und nur dann eine Parabel.

Φ kann niemals ein Kreis und Φ_1 niemals einer der Ankreise sein. φ ist stets eine Hyperbel.

Denn die vom Dreieck um F_1 resp. F herrührende Strahleninvolution ist rechtwinklig und diese muß, nach Satz 4, mit der von φ_1 und Φ_1 resp. φ und Φ herrührenden Strahleninvolution identisch sein, also muß F_1 resp. F ein Brennpunkt von φ_1, Φ_1 resp. φ, Φ sein. Ferner sind F_1 und f_1 resp. F und f Pol und Polare auch in bezug auf φ_1 und Φ_1 resp. φ und Φ. Ist ein Dreieckwinkel größer $\frac{2}{3}\pi$, so liegt F_1 (Satz 3) im größten Dreieckscheitelwinkel und f_1 muß dann die beiden den größten Dreieckwinkel einschließenden Seiten in den ersten Hälften von der gemeinsamen Ecke aus gerechnet schneiden, somit müssen, nach den Sätzen 9 und 18, φ_1 und Φ_1 Hyperbeln sein. Sind aber sämtliche Dreieckwinkel kleiner $\frac{2}{3}\pi$, so liegt F_1 im Innern des Dreiecks und f_1 außerhalb desselben und Φ_1 muß dann eine Ellipse sein. Soll ferner φ_1 oder Φ_1 ein Kreis sein, so muß dann der Brennpunkt F_1 der Mittelpunkt dieses Kreises sein, dies kann aber nur dann eintreten, wenn das Dreieck gleichseitig ist (Satz 3). Aus demselben Grunde kann Φ_1 keiner der Ankreise und Φ überhaupt kein Kreis sein. Ist aber das Dreieck gleichseitig, so ist ohne weiteres klar, daß φ_1 und Φ_1 der Um- bzw. Inkreis ist; alsdann und nur dann ist Φ eine Parabel, da nur dann F ein Peripheriepunkt des Umkreises ist und ein einem Dreieck eingeschriebener Kegelschnitt nur dann eine Parabel ist, wenn sein Brennpunkt auf dem Umkreise des Dreiecks liegt. Endlich muß φ stets eine Hyperbel sein, weil F außerhalb des Dreiecks liegt (Satz 3).

Anhang.

34. Werfen wir einen Rückblick auf das in den letzten zwei Abschnitten Auseinandergesetzte, so sehen wir:

Wird ein Punkt D in der Ebene eines Dreiecks ABC als Träger nullter Stufe, d. h. als einfaches Element aufgefaßt, so gehören zu ihm in bezug auf das Dreieck ABC drei weitere Punkte D', D'', D''' und vier Geraden d, d', d'' und d''', welche sämtlich als Träger nullter Stufe aufzufassen sind, dabei sind D und d, D' und d', D'' und d'', D''' und d''' Pol und Polare in bezug auf das Dreieck.

Wird aber derselbe Punkt D als Träger erster Stufe, also als Träger eines Strahlenbüschels erster Ordnung $D(g)$ aufgefaßt, so gehören zu ihm in bezug auf das Dreieck dieselben drei Punkte D', D'', D''' und vier Kegelschnitte δ, δ', δ'' und δ''', welche jetzt sämtlich als Träger erster Stufe, also die drei Punkte als Träger von Strahlenbüscheln erster Ordnung $D'(g')$, $D''(g'')$, $D'''(g''')$ und die vier Kegelschnitte als Träger von krummen Punktreihen $\delta(G)$, $\delta'(G')$, $\delta''(G'')$ und $\delta'''(G''')$ aufzufassen sind; dabei bilden G, G', G'', G''', g, g', g'', g''' als Träger nullter Stufe ein in bezug auf das Dreieck zusammengehöriges System.

Wird ferner derselbe Punkt D als Träger zweiter Stufe, also als Träger der sämtlichen durch ihn gehenden geraden Punktreihen $D[g(P)]$ aufgefaßt, so gehören zu ihm in bezug auf das Dreieck wieder dieselben drei Punkte D', D'', D''' und vier Kegelschnittscharen $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{d}'$, $\mathfrak{d}''$ und $\mathfrak{d}'''$, welche jetzt sämtlich als Träger zweiter Stufe, also die drei Punkte als Träger der sämtlichen durch sie gehenden geraden Punktreihen $D'[g'(P')]$, $D''[g''(P'')]$, $D'''[g'''(P''')]$

und die vier Kegelschnittscharen als Träger der in ihnen enthaltenen und ihrerseits wieder Träger von Strahlenbüscheln zweiter Ordnung seienden Kegelschnitte $\mathfrak{d}[\Gamma(p)]$, $\mathfrak{d}'[\Gamma'(p')]$, $\mathfrak{d}''[\Gamma''(p'')]$ und $\mathfrak{d}'''[\Gamma'''(p''')]$ aufzufassen sind; dabei bilden g, g', g'', g''', Γ, Γ', Γ'', Γ''' als Träger erster Stufe und P, P', P'', P''', p, p', p'', p''' als Träger nullter Stufe je ein in bezug auf das Dreieck zusammengehöriges System.

Und dual.

Werden wir weiter gehen und einen Punkt oder eine Gerade als Träger dritter Stufe auffassen, so werden hierdurch Kegelschnittnetze bzw. Scharscharen entstehen. Auch können imaginäre Elemente in den Kreis unserer Untersuchungen herangezogen und somit die entwickelte Theorie auch auf Dreiecke mit imaginären Elementen ausgedehnt werden. Doch gehe ich hier auf die Untersuchung derselben nicht näher ein.

Wie wir sahen, können Kegelschnitte, Kegelschnittbüschel und Scharen ursprünglich als Erzeugnisse von Polen und Polaren in bezug auf ein Dreieck definiert werden. Diese Auffassung der Kegelschnitte usw. kann zu einem neuen Ausgangspunkt der Theorie derselben gemacht werden.

Aber nicht nur die Kegelschnitte allein, sondern sämtliche unikursalen Kurven können als Erzeugnisse von Polen und Polaren in bezug auf ein Dreieck definiert werden.

Nachtrag.

Nach meiner Promotion habe ich über die in Nr. 5 (Seite 14) eingeführten Involutionen, die um jeden Punkt und auf jeder Geraden in der Ebene eines Dreiecks entstehen, eine Reihe von Sätzen aufgestellt, die ich demnächst zu veröffentlichen denke und von denen ich hier nur den folgenden ohne Beweis angebe:

Charakteristisch für eine einem Punkte P in bezug auf das Dreieck zugehörige Strahleninvolution ist, daß in ihr je zwei Strahlen, deren Pole in bezug auf das Dreieck mit dem Träger P der Strahleninvolution in einer Geraden liegen, einander zugeordnet sind, und daß die Pole zweier solcher Strahlen ihrerseits in der ihrer Verbindungslinie in bezug auf das Dreieck zugehörigen Punktinvolution einander zugeordnet sind; und dual.

Auch will ich hier noch einige Folgerungen aus dem Satze 7 (Seite 52) angeben.

Auf diesem Satze beruht die folgende Lösung der Aufgabe:

Einen Kegelschnitt zu konstruieren, welcher durch vier gegebene Punkte A, B, C, D geht und eine gegebene Gerade g zur Tangente hat.

Auflösung: Man ermittelt die beiden Schnittpunkte P_1 und P_2 der Polare eines der vier gegebenen Punkte, etwa der Polare d von D, in bezug auf das Dreieck ABC der drei andern mit dem Kegelschnitt Γ, welcher dem Dreieck ABC eingeschrieben ist und bei welchem dieses Tangentendreieck ABC mit dem von den drei in seinen Seiten liegenden Berührungspunkten gebildeten Dreieck die gegebene Gerade g zu ihrer Perspektivitätsachse haben. Alsdann genügt jeder der beiden Kegelschnitte π_1, π_2 und nur einer dieser beiden, welche dem Dreieck ABC umschrieben sind und bei welchen dieses Dreieck mit dem von den je drei Tangenten in seinen Ecken gebildeten Dreieck einen der ermittelten Schnittpunkte P_1 und P_2 zu ihrem Perspektivitätszentrum haben, den gestellten Forderungen.

Denn π_1 und π_2, die als von den Polen der sämtlichen durch P_1 resp. P_2 gehenden Geraden in bezug auf das Dreieck ABC beschrieben gedacht werden können, gehen durch A, B, C und, weil P_1 und P_2 auf der Polare d von D liegen, auch durch D und werden nach Satz 7 von g berührt, weil P_1 und P_2 auch auf Γ liegen. Ob die gestellte Aufgabe keine, eine oder zwei reelle Lösungen hat, hängt nun davon ab, ob die Polare d von D den Kegelschnitt Γ nicht trifft, berührt oder schneidet; es liefert somit der Satz 16 (Seite 77) das Kriterium dafür. Für die duale Aufgabe ist dual zu verfahren.

Vermittels des Satzes 7 ergibt sich ferner der folgende Satz:

Beschreibt der Punkt P die sämtlichen geraden Punktreihen $t(P)$, deren Träger t die Tangenten des von den Polen G der Strahlen des Büschels erster Ordnung $D(g)$ bezüglich ein Dreieck ABC beschriebenen Kegelschnitts δ sind, so beschreibt dann die Polare p von P bezüglich ABC die Tangenten der sämtlichen Kegelschnitte T, welche dem Dreieck ABC eingeschrieben sind und außerdem durch den Punkt D gehen, welche also ein sogenanntes gemischtes Kegelschnittsystem bilden; und zwar ist T_i derjenige Kegelschnitt des Systems, welcher in D von der Polare g_i des Berührungspunktes G_i von δ auf t_i bezüglich ABC berührt wird, das Kegelschnittsystem ist also zu $\delta(G)$ und $D(g)$ projektiv.

Und dual.

Denn der Punkt D, welcher für den ABC umschriebenen Kegelschnitt δ das im Satze 7 erwähnte Perspektivitätszentrum ist, muß (Satz 7) auf jedem der Kegelschnitte T, welcher Kegelschnitt stets (Satz 4) ABC eingeschrieben ist und die ihm zugehörige Gerade t zu der im Satze 7 erwähnten Perspektivitätsachse hat, liegen, weil δ von t berührt wird.

Die Gebilde, die dann von P', P'', P''' und p', p'', p''' beschrieben werden, können in analoger Weise wie im Satze 15 angegeben werden.

Wir sehen also, daß auch die gemischten Kegelschnittsysteme als Erzeugnisse von Polen und Polaren in bezug auf ein Dreieck aufgefaßt werden können.

Anmerkung zu Nr. **18** (Seite 49): Sind fünf Punkte eines Kegelschnitts gegeben, so kann dieser Kegelschnitt als Erzeugnis der Pole (P) desjenigen Strahlenbüschels $G(p)$ in bezug auf das von irgend drei der fünf gegebenen Punkte gebildete Dreieck aufgefaßt werden, dessen Mittelpunkt G der Schnittpunkt der Polaren der je zwei übrigen Punkte in bezug auf dasselbe Dreieck ist; und dual.

Anmerkung zu Seite 51, Auflösung: Zur Ermittlung von G und G_1 ist nicht nötig, die Tangenten in X, Y, Z zu ziehen, wenn die je fünf γ und γ_1 bestimmende Elemente Punkte sind, sondern man ermittelt die Polaren der je zwei übrigen Punkte von γ und γ_1 in bezug auf XYZ, alsdann sind die beiden Schnittpunkte dieser Polarenpaare die Punkte G und G_1.

Überhaupt werden das Perspektivitätszentrum und -achse der beiden von irgend drei Punkten eines Kegelschnitts und ihren Tangenten gebildeten Dreiecke dadurch ermittelt, daß man die Polaren irgend zweier Punkte desselben Kegelschnitts in bezug auf das Dreieck der drei ersten Punkte zum Durchschnitt bringt bzw. die Pole irgend zweier Tangenten desselben Kegelschnitts in bezug auf das Dreieck der drei ersten Tangenten durch eine Gerade verbindet.

Die Sätze 4, 5, 13, 14, 15, 22 geben zugleich nach Nr. **3** über die Bewegungen der Ecken oder Seiten eines veränderlichen, aber ein konstantes Diagonaldreieck habenden vollständigen Vierecks oder Vierseits Aufschluß, wenn eine dieser Ecken oder Seiten in der in diesen Sätzen angegebenen Weise sich bewegt.