55/2008

Raport Badawczy
Research Report

RB/56/2008

Wieloczynnikowy model pełnej dekompozycji przyczynowej oparty na wskaźniku Divisii

W. Jęda

Instytut Badań Systemowych
Polska Akademia Nauk

Systems Research Institute
Polish Academy of Sciences

POLSKA AKADEMIA NAUK

Instytut Badań Systemowych

ul. Newelska 6

01-447 Warszawa

tel.: (+48) (22) 3810100

fax: (+48) (22) 3810105

Kierownik Pracowni zgłaszający pracę:
Prof. dr hab. inż. Zbigniew Nahorski

Warszawa 2008

Wieloczynnikowy model pełnej dekompozycji przyczynowej oparty na wskaźniku Divisii

Waldemar Jęda

Streszczenie

W pracy przedstawia się rozwinięcie multiplikatywnego modelu dekompozycji przyczynowej szeregów czasowych opartego na wskaźniku Divisii na przypadek dowolnej liczby czynników dekompozycji. Zaproponowano taki sposób obliczania czynników dekompozycji, który gwarantuje brak czynnika rezydualnego.

Wprowadzenie

Metoda dekompozycji przyczynowej (indeksowej) jest techniką stosowaną pierwotnie do analizy wpływu postępu technicznego oraz zmian strukturalnych w gospodarce na intensywność zapotrzebowania energetycznego gospodarki. Obszar stosowania metody rozszerzono następnie na inne typy zmiennych środowiskowych, w tym również na emisje CO2. Obszerny przegląd prac na ten temat został przedstawiony w pracy [1].

Punktem wyjścia dla niniejszej pracy jest multiplikatywny model dekompozycji przyczynowej przedstawiony w pracy [1] i [2], oparty na wykorzystaniu wskaźnika Divisii. Model ten uogólniono na dowolną liczbę czynników dekompozycji.

1. Wyprowadzenie n-czynnikowego modelu dekompozycji

Przedstawione poniżej wyniki są rozwinięciem obliczeń zaprezentowanych w opracowaniu [2], w którym rozważano dekompozycję indeksową emisji C02 względem 3 czynników, mianowicie sektorów produkcji, ich emisyjności produkcji, oraz wielkości całkowitej produkcji.

Załóżmy że V jest dodatnią wielkością zagregowaną zależną od n czynników, postaci:

$$\begin{aligned} V &= \sum_{i=1}^{m} V_i \\ V_i &= \prod_{j=1}^{n} x_{j,i} \end{aligned} \tag{1}$$

gdzie indeks i wskazuje na konkretny składnik wielkości V, taki jak na przykład sektor produkcji, zaś indeks j numeruje czynniki mające wpływ na tą wielkość. Następnie załóżmy, że w przedziale czasu od 0 do T wielkość zagregowana zmienia się od $V(0) = \sum_{i=1}^{m} \prod_{j=1}^{n} x_{j,i}(0)$ do $V(T) = \sum_{i=1}^{m} \prod_{j=1}^{n} x_{j,i}(T)$.

Logarytmując i różniczkując po czasie obie strony (1) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \ln V(t) &= \frac{1}{V(t)} \frac{d}{dt} V(t) \\ &= \sum_{i=1}^{m} \frac{V_i(t)}{V(t)} \frac{\dot{V}_i(t)}{V_i(t)} \\ &= \sum_{i=1}^{m} v_i(t) \frac{\left(\frac{d}{dt} \prod_{j=1}^{n} x_{j,i}(t) \right)}{\prod_{j=1}^{n} x_{j,i}(t)} \\ &= \sum_{i=1}^{m} v_i(t) \frac{d}{dt} \ln \prod_{j=1}^{n} x_{j,i}(t) \\ &= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} v_i(t) \frac{d}{dt} \ln x_{j,i}(t) , \end{aligned} \tag{2}$$

gdzie v_i , zdefiniowane jako :

$$v_i = \frac{V_i}{V}, \qquad \sum_{i=1}^{m} v_i = 1, \tag{3}$$

jest bezwymiarową wagą mierzącą wkład względnej szybkości zmian cechy $x_{i,j}$ na względną szybkość zmian zagregowanej wielkości V. Znak kropki oznacza różniczkowanie po czasie.

Całkując po czasie zależność (2) otrzymujemy:

$$\ln V(T) - \ln V(0) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \int_0^T v_i(t) \, \dot{\ln} x_{j,i}(t) \, dt \tag{4}$$

co po obustronnym zastosowaniu funkcji ekspotencjalnej prowadzi do postaci wyrażającej wielkość V przez iloczyn n czynników mierzących wpływ zmian :

$$V(T) = V(0) \prod_{j=1}^{n} D_j, \qquad D_j = \exp\left(\int_0^T \sum_{i=1}^{m} v_i \, \dot{\ln} x_{j,i}(t) \, dt \right). \tag{5}$$

Wielkości D_j są tzw. wskaźnikami (indeksami) Divisii [1].

Dla danych dyskretnych wskaźniki D_j występujące w (5) przybliża się przez wartości przybliżone $\hat{D}_j$, w szczególności wykorzystujące wartości rozważanych wielkości wyłącznie na krańcach przedziału całkowania. W tym miejscu zauważmy, że błędy przy niezależnym obliczaniu wartości kolejnych wskaźników D_j na ogół nie kompensują się, co w ogólności prowadzi do modyfikacji (5) do postaci:

$$V(T) = V(0) \prod_{j=1}^{n} \hat{D}_j \cdot D_{rsd}, \qquad D_{rsd} = \frac{V(T)}{V(0) \prod_{j=1}^{n} \hat{D}_j}. \tag{6}$$

Poniżej rozpatrzymy zastosowanie dwóch przypadków szczególnych formuły (5), dla $n = 3$ oraz 4, na podstawie których wskażemy dogodny sposób ominięcia tego niepożądanego efektu.

2 Model trzyczynnikowy

Przyjmijmy następujące oznaczenia:

$$E = \sum_{i=1}^{m} E_i = \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{E_i}{Q_i} \right) \left(\frac{Q_i}{Q} \right) Q , \tag{7}$$

gdzie E oznacza emisje, m – liczbę sektorów produkcji Q_i generujących emisje.

Zgodnie z (5) zmianę emisji w okresie od 0 do T możemy zdekomponować na trzy czynniki:

$$\begin{aligned} E(T) &= E(0) \prod_{j=1}^{3} D_j \\ D_1 &= \exp\left(\int_0^T \sum_{i=1}^{m} \frac{E_i(t)}{E(t)} \ln \frac{E_i(t)}{Q_i(t)} dt \right), \\ D_2 &= \exp\left(\int_0^T \sum_{i=1}^{m} \frac{E_i(t)}{E(t)} \ln \frac{Q_i(t)}{Q(t)} dt \right), \\ D_3 &= \exp\left(\int_0^T \sum_{i=1}^{m} \frac{E_i(t)}{E(t)} \ln Q(t) dt \right). \end{aligned} \tag{8}$$

Formuły (8) na wskaźniki Divisi można przekształcić do znacznie prostszej postaci:

$$\begin{aligned} D_1 &= \frac{E(T)}{E(0)} \exp(-C), \\ D_2 &= \frac{Q(0)}{Q(T)} \exp(C), \\ D_3 &= \frac{Q(T)}{Q(0)}, \\ C &= \int_0^T \sum_{i=1}^{m} \frac{E_i(t)}{E(t)} \ln Q_i(t) dt . \end{aligned} \tag{9}$$

Sposób obliczania całki C przedstawiono m.in. w raporcie [2]. Można również wykorzystać inne oszacowania, np. podane w pracy [1].

1.2 Model czteroczynnikowy

Model trzyczynnikowy, opisany przez (7), można łatwo rozszerzyć na przypadek czteroczynnikowy, np. poprzez uwzględnienie zależności produkcji Q od kapitału K [3,4]:

$$E = \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{E_i}{Q_i} \right) \left(\frac{Q_i}{K_i} \right) \left(\frac{K_i}{K} \right) K . \tag{10}$$

K_i oznacza wielkość zgromadzonego w sektorze i kapitału, generującego produkcję Q_i.

Zgodnie z (5) zmianę emisji w okresie od 0 do T możemy zdekomponować tym razem na cztery czynniki:

$$\begin{aligned}
E(T) &= E(0) \prod_{j=1}^{4} D_j \\
D_1 &= \exp\left(\int_0^T \sum_{i=1}^{m} \frac{E_i(t)}{E(t)} \dot{\ln} \frac{E_i(t)}{Q_i(t)} dt \right), \\
D_2 &= \exp\left(\int_0^T \sum_{i=1}^{m} \frac{E_i(t)}{E(t)} \dot{\ln} \frac{Q_i(t)}{K_i(t)} dt \right), \\
D_3 &= \exp\left(\int_0^T \sum_{i=1}^{m} \frac{E_i(t)}{E(t)} \dot{\ln} \frac{K_i(t)}{K(t)} dt \right), \\
D_4 &= \exp\left(\int_0^T \sum_{i=1}^{m} \frac{E_i(t)}{E(t)} \dot{\ln} K(t) dt \right).
\end{aligned} \tag{11}$$

Wyrażenie na D_1 można znacznie uprościć:

$$
\begin{aligned}
D_1 &= \exp\left(\int_0^T \sum_{i=1}^m \frac{E_i(t)}{E(t)} \dot{\ln} \frac{E_i(t)}{Q_i(t)} dt\right) \\
&= \frac{\exp\left(\int_0^T \sum_{i=1}^m \frac{E_i(t)}{E(t)} \dot{\ln} E_i(t) dt\right)}{\exp\left(\int_0^T \sum_{i=1}^m \frac{E_i(t)}{E(t)} \dot{\ln} Q_i(t) dt\right)} \\
&= \frac{E(T)}{E(0)} \left[\exp\left(\int_0^T \sum_{i=1}^m \frac{E_i(t)}{E(t)} \dot{\ln} Q_i(t) dt\right)\right]^{-1}.
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Z kolei wskaźnik D_4 przyjmuje postać:

$$
\begin{aligned}
D_4 &= \exp\left(\int_0^T \sum_{i=1}^m \frac{E_i(t)}{E(t)} \dot{\ln} K(t) dt\right) \\
&= \exp\left(\int_0^T \dot{\ln} K(t) \sum_{i=1}^m \frac{E_i(t)}{E(t)} dt\right) \\
&= \exp\left(\int_0^T \dot{\ln} K(t) dt\right) \\
&= \frac{K(T)}{K(0)}.
\end{aligned}
\tag{13}
$$

Pozostałe środkowe wskaźniki otrzymujemy jako:

$$
\begin{aligned}
D_2 &= \exp(C_1 - \frac{\exp\left(\int_0^T \sum_{i=1}^m \frac{E_i(t)}{E(t)} \dot{\ln} Q_i(t) dt\right)}{\exp\left(\int_0^T \sum_{i=1}^m \frac{E_i(t)}{E(t)} \dot{\ln} K_i(t) dt\right)}, \\
D_3 &= \frac{K(0)}{K(T)} \exp\left(\int_0^T \sum_{i=1}^m \frac{E_i(t)}{E(t)} \dot{\ln} K_i(t) dt\right).
\end{aligned}
\tag{14}
$$

Ostatecznie możemy przepisać (10) do postaci:

$$
\begin{aligned}
D_1 &= \frac{E(T)}{E(0)}\exp(-C1), \\
D_2 &= \exp(C1 - C2), \\
D_3 &= \frac{K(0)}{K(T)}\exp(C2), \\
D_4 &= \frac{K(T)}{K(0)}, \\
C_1 &= \int_0^T \sum_{i=1}^{m} \frac{E_i(t)}{E(t)} \dot{\ln} Q_i(t)\,dt, \\
C_2 &= \int_0^T \sum_{i=1}^{m} \frac{E_i(t)}{E(t)} \dot{\ln} K_i(t)\,dt.
\end{aligned}
\tag{15}
$$

Podobnie jak w przypadku modelu trzyczynnikowego (9) model czteroczynnikowy daje pełną dekompozycję, bez względu na sposób wyliczenia określonych przez (15) całek C_1 i C_2. Wynika to z faktu, że ewentualne niedoszacowania wartości tych całek, wynikające z zastosowanej procedury numerycznej, ulegają wzajemnej kompensacji.

Podsumowanie

W pracy dokonano uogólnienia procedury dekompozycji multiplikatywnej typu Divisii na przypadek dowolnej liczby czynników, od których zależy badana wielkość zagregowana. Odpowiednie rozbicie indeksów dekompozycji D_j na czynniki, typu (9) i (15), dla wielkości zagregowanej V określonej na sposób (7) lub (10), zawsze prowadzi do wzajemnego skompensowania się błędów szacowania wielkości D_j, które w naturalny sposób grupują się w pary. Reguła ta dotyczy dowolnej liczby n czynników określonych przez (1).

Bibliografia

[1] Ang, W., Zhang, F.Q., (2000). A survey of index decomposition analysis in energy andenvironmental studies. Energy 25 (12), 1149–1176.

[2] Jęda, W., Wierzbicki, M., (2008). Multiplikatywny model pełnej dekompozycji przyczynowej dynamiki emisji CO2 względem produkcji. Raport badawczy IBS PAN.

[3] Bartoszczuk, P., Gadomski, J., Horabik, J., Jęda, W., Nahorski, Z., (2007). Wstępna koncepcja modeli ujmujących zależności między wymaganym obniżeniem emisji gazów cieplarnianych a postępem technologicznym i technicznym. Raport badawczy IBS PAN.

[4] Allen R. G. D. (1975) *Ekonomia matematyczna*, PWN, Warszawa.