

69/2003

**Raport Badawczy**

**RB/56/2003**

**Research Report**

**Metody aproksymacji  $L^2$   
liniowych modeli  
dynamicznych**

**W. Krajewski**

**Instytut Badań Systemowych  
Polska Akademia Nauk**

**Systems Research Institute  
Polish Academy of Sciences**



# **POLSKA AKADEMIA NAUK**

## **Instytut Badań Systemowych**

ul. Newelska 6

01-447 Warszawa

tel.: (+48) (22) 8373578

fax: (+48) (22) 8372772

Kierownik Pracowni zgłaszający pracę:  
Prof. dr hab. inż. Krzysztof C. Kiwiel

Warszawa 2003

Metody aproksymacji  $L^2$   
liniowych modeli dynamicznych

Wiesław Krajewski

Instytut Badań Systemowych PAN

Warszawa 2003

# 1 Wprowadzenie

Zadanie upraszczania modeli polega na zastąpieniu modelu złożonego o dużej wymiarowości modelem prostszym, który dostatecznie dobrze będzie opisywał zachowanie się systemu. Może to na przykład oznaczać, że odpowiedź modelu uproszczonego na pewien ustalony zbiór sygnałów wejściowych powinna być zbliżona do reakcji modelu pierwotnego na te same sygnały. Jako miarę jakości przybliżenia przyjmuje się wtedy pewną normę różnicy między sygnałami wyjściowymi obu modeli. Formulowane w ten sposób zadanie upraszczania modeli jest równoważne pewnemu zadaniu aproksymacji.

W praktyce rozważane były trzy normy: norma  $L^2$  (lub  $H^2$ ), norma  $H^\infty$  oraz norma Hankla. Zadania aproksymacji modeli, w których wykorzystywana była pierwsza z tych norm mają najdłuższą historię. Jednak liczbą opracowanych metod a także liczbą uzyskanych wyników o charakterze teoretycznym znacznie ustępują zadaniom, w których wykorzystywane są pozostałe dwie normy. Mimo bowiem dość oczywistej interpretacji i klasycznego charakteru zadanie aproksymacji modeli wykorzystujące normę  $L^2$  jest zadaniem trudnym. Stan ten tworzy pewne wyzwania i stąd ciągle zainteresowanie tym problemem.

Praca poświęcona jest problemowi optymalnej aproksymacji  $L^2$  modeli dynamicznych. W punkcie 2 przedstawimy formalną postać zadania aproksymacji w normie  $L^2$ . Zależy ona od przyjętej parametryzacji modeli. Rozróżnimy dwa przypadki, modeli danych w dziedzinie częstotliwościowej oraz modeli w przestrzeni stanu. Przedstawimy także krótki przegląd prac poświęconych rozważanemu zagadnieniu.

W punkcie 3 podamy warunki konieczne optymalności dla zadania aproksymacji  $L^2$ , gdy modele dane są w postaci macierzy transmitancji. Otrzymane dla modeli z wieloma wejściami i wieloma wyjściami warunki interpolacyjne są następnie przekształcane do postaci macierzowych równań wielomianowych.

W następnym punkcie opisany jest algorytm iteracyjnej interpolacji wyznaczania modelu uproszczonego polegający na poszukiwaniu rozwiązania otrzymanego w poprzednim punkcie układu macierzowych równań nieliniowych.

Punkt 5 jest z kolei poświęcony analizie zbieżności omawianego w punkcie 4 algorytmu. Okazuje się, że w pewnych przypadkach algorytm ten nie jest zbieżny. Dlatego w punkcie 6 zostały przedstawione modyfikacje zapewniające zbieżność.

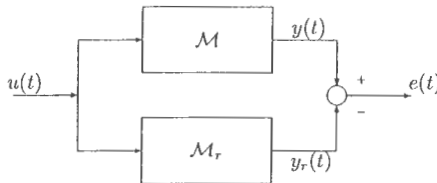
W punkcie 7 przedstawiony został znany w literaturze przedmiotu algorytm gradientowy, a w punkcie 8 algorytm optymalnej aproksymacji modeli danych w postaci równań stanu. W ostatniej części omówione zostały wybrane przykłady. Wyjaśniają one, dlaczego algorytm gradientowy nie są skuteczne w przypadku zadania optymalnej aproksymacji modeli.

## 2 Zadanie aproksymacji $L^2$ liniowych modeli dynamicznych

Zadanie aproksymacji modeli jest szczególnym przypadkiem zadania upraszczania modeli. Polega na zastąpieniu modelu złożonego o dużej wymiarowości modelem prostszym wyznaczonym tak, aby reakcje (sygnały wyjściowe) obu modeli na to samo pobudzenie (sygnał wejściowy) były możliwie bliskie sobie. Jako miarę bliskości tych sygnałów przyjmujemy normę kwadratową. Sygnałem wejściowym zwykle wtedy zakładanym jest impuls Diraca w ujęciu deterministycznym lub szum biały, gdy rozważa się podejście stochastyczne.

Oznaczmy przez  $\mathcal{M}$  model złożony wysokiego rzędu a przez  $\mathcal{CM}_r$  klasę modeli, do której należy poszukiwany model uproszczony  $\mathcal{M}_r$ . Jeśli ponadto  $y(t)$  i  $y_r(t)$  reprezentują sygnały wyjściowe modeli  $\mathcal{M}$  oraz  $\mathcal{M}_r$ , rys. 1, to ten ostatni jest rozwiązaniem zadania minimalizacji

$$\min_{\mathcal{M}_r \in \mathcal{CM}_r} \|y(t) - y_r(t)\|_2. \quad (1)$$



Rysunek 1: Aproksymacja modelu złożonego.

W celu wyznaczenia rozwiązania zadania (1) należy przyjąć odpowiednie założenia dotyczące parametryzacji modelu  $\mathcal{M}$  oraz klasy modeli  $\mathcal{CM}_r$ . W praktyce rozważane dotychczas były albo modele dane w postaci macierzy transmitancji, albo modele w przestrzeni stanu. Zaś upraszczanie modeli polegające na wyznaczeniu rozwiązania zadania minimalizacji (1) nazywane jest aproksymacją  $L^2$  (lub  $H^2$ ) modeli.

Rozważmy stabilny układ liniowy o  $m_i$  wejściach i  $m_o$  wyjściach opisany macierzą transmitancji  $F(s) = [f_{ij}(s)]_{m_o \times m_i}$ , której wszystkie elementy  $f_{ij}(s)$  są funkcjami wymiernymi zmiennej  $s$ . Przyjmijmy następnie, że macierz transmitancji  $G(s) = [g_{ij}(s)]_{m_o \times m_i}$ , której elementy  $g_{ij}(s)$  są również funkcjami wymiernymi zmiennej  $s$  reprezentuje model uproszczony.

W zadaniach aproksymacji  $L^2$  wielowymiarowych modeli dynamicznych danych w postaci macierzy transmitancji zamiast sygnałów wyjściowych  $y(t)$  oraz  $y_r(t)$  rozważane są zwykle odpowiednio macierze odpowiedzi impulsowych. Możemy zatem przyjąć, że błąd przybliżenia wynikający z zastąpienia modelu  $F(s)$  przez model  $G(s)$  jest równy

$$E(s) = F(s) - G(s). \quad (2)$$

Współczynniki elementów  $g_{ij}(s)$  macierzy transmitancji  $G(s)$  wyznaczane są tak, aby minimalizować funkcjonal

$$\begin{aligned} J = \|E(s)\|^2 &= \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} \text{tr} E^*(-s^*)E(s) ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{tr} E^*(j\omega)E(j\omega) d\omega. \end{aligned} \quad (3)$$

Z twierdzenia Parsewala wynika bowiem równoważność zadania minimalizacji (1) z minimalizacją funkcjonau  $J$ .

W celu wyznaczenia macierzy transmitancji  $G(s)$  należy dodatkowo przyjąć odpowiednie założenia dotyczące jej struktury. W praktyce rozważane są trzy następujące przypadki:

1. bieguny macierzy transmitancji  $G(s)$  są ustalone a priori,
2. stopień wspólnego mianownika wszystkich elementów  $g_{ij}(s)$  jest ustalony,
3. stopień McMillana macierzy transmitancji  $G(s)$  jest ustalony.

Przypadek pierwszy jest najprostszy. Znalazienie modelu  $G(s)$  sprowadza się bowiem do wyznaczenia współczynników wielomianów znajdujących się w licznikach elementów  $g_{ij}(s)$ . Współczynniki te stanowią rozwiązanie układu równań liniowych wynikających z warunków koniecznych optymalności. Biegunami macierzy transmitancji  $G(s)$  są zwykle ustalone w pewien sposób wybrane bieguny macierzy  $F(s)$ . Na przykład mogą to być bieguny  $F(s)$  leżące najbliżej osi urojonej lub te, z którymi związana jest największa energia.

W pozostałych dwóch przypadkach wyznaczone muszą być współczynniki wszystkich wielomianów, tych znajdujących się w licznikach oraz tych, które występują w mianownikach elementów  $g_{ij}(s)$ . Niezbędne jest wtedy rozwiązanie układu równań nieliniowych.

Dla układów z jednym wejściem lub jedym wyjściem ( $m_i = 1$  lub  $m_o = 1$ ) przypadki 2 i 3 niczym się nie różnią. Mogą one być różne jedynie wtedy, gdy jednocześnie  $m_i > 1$  i  $m_o > 1$ .

Rozważmy z kolei stabilny układ liniowy o  $m_i$  wejściach i  $m_o$  wyjściach opisany równaniami

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad (4)$$

$$y(t) = Cx(t). \quad (5)$$

Przyjmijmy także, że model uproszczony jest reprezentowany przez

$$\dot{x}_r(t) = A_r x_r(t) + B_r u(t), \quad (6)$$

$$y_r(t) = C_r x_r(t). \quad (7)$$

Wtedy błąd przybliżenia jest równy

$$e(t) = y(t) - y_r(t). \quad (8)$$

W ogólnym przypadku nieznanne macierze  $A_r$ ,  $B_r$  i  $C_r$  należy wyznaczyć tak, aby minimalizować funkcjonal:

$$J = \int_0^{\infty} \|e(t)\|^2 dt. \quad (9)$$

Możliwy jest również prostszy przypadek, w którym macierz  $A_r$  jest dana i wtedy wyznaczone muszą być jedynie macierze  $B_r$  i  $C_r$ .

Podobnie definiowane są zadania aproksymacji  $L^2$  dla modeli z czasem dyskretnym. Relacje występujące między modelami z czasem ciągłym a modelami z czasem dyskretnym sprawiają, że pewne wyniki otrzymane dla zadań aproksymacji jednej klasy modeli mogą być bez trudu przeniesione na zadania odnoszące się do aproksymacji modeli drugiej klasy. Dotyczy to przede wszystkim istnienia i jednoznaczności rozwiązań zadania aproksymacji modeli, a także własności tych rozwiązań. Opracowywane natomiast metody i algorytmy w sposób istotny zależą od parametryzacji modeli.

Rozważane zadanie aproksymacji modeli należy do zadań klasycznych. Jego początki sięgają prac Walsh'a z początku lat trzydziestych poświęconych interpolacji i aproksymacji funkcji na okręgu jednostkowym [18]. Można bowiem przyjąć, że wyniki otrzymane przez Walsh'a dotyczą warunków optymalności aproksymacji modeli dyskretnych w czasie.

Następnie w 1949 roku Aigrain i Williams [1] opublikowali warunki konieczne optymalności dla modeli z czasem ciągłym, przy założeniu, że model uproszczony może mieć tylko jednokrotne bieguny rzeczywiste. Wyniki te zostały w roku 1967 uogólnione przez Leunbergera i Meiera [16] na przypadek modeli z dowolnymi biegunami.

Wspomniane prace poświęcone były warunkom koniecznym optymalności. Nie zaproponowano w nich efektywnych metod pozwalających na wyznaczenie modelu uproszczonego, który by te warunki spełniał.

Podobny charakter ma również artykuł [2], w którym rozważane są warunki konieczne dla modeli macierzowych z wieloma wejściami i wyjściami układów dyskretnych. Warunki te mają postać warunków interpolacyjnych i można je uznać za uogólnienie wyników Walsh'a.

W roku 1992 opublikowana została praca [17], w której zaproponowany został gradientowy algorytm optymalnej aproksymacji  $L^2$  transmitancji układów ciągłych z jednym wejściem i jednym wyjściem. Jednak ze względu na własności funkcjonalów (3) lub (9) metody gradientowe nie zawsze są skuteczne.

Optymalnej aproksymacji  $L^2$  modeli danych w postaci macierzy transmitancji dla układów ciągłych poświęcone zostały prace [11], [12], [13]. Otrzymane dla tych modeli warunki konieczne optymalności w postaci warunków interpolacyjnych doprowadzone zostały do postaci równań wielomianowych. Te ostatnie pozwoliły na opracowanie efektywnego algorytmu wyznaczania modeli uproszczonych. Ponieważ algorytm ten nie we wszystkich przypadkach był zbieżny w wyniku dalszych prac zaproponowane zostały warianty, dla których zbieżność była już zapewniła [3], [4], [5].

### 3 Warunki optymalności dla modeli w postaci macierzy transmitancji

Załóżmy, że macierz transmitancji  $F(s)$  doprowadzona została do postaci

$$F(s) = [f_{hi}(s)] = \frac{N(s)}{d(s)}, \quad (10)$$

w której  $d(s)$  jest wielomianem stopnia  $\nu$  równym wspólnemu mianownikowi wszystkich elementów  $f_{hi}(s)$ .  $N(s)$  jest natomiast macierzą o wymiarach  $m_o \times m_i$ , której elementy są wielomianami stopnia co najwyżej  $\nu - 1$ .

Podobnie przyjmijmy, że poszukiwana macierz  $G(s)$  dana jest w tej samej postaci

$$G(s) = [g_{hi}(s)] = \frac{M(s)}{c(s)}. \quad (11)$$

$c(s)$  jest wielomianem stopnia  $\rho < \nu$  równym wspólnemu mianownikowi elementów  $g_{hi}(s)$ . Elementy macierzy  $M(s)$  o wymiarach  $m_o \times m_i$  są wielomianami stopnia co najwyżej  $\rho - 1$ .

W celu uproszczenia prezentacji przyjmijmy ponadto, że macierz  $G(s)$  ma jedynie bieguny jednokrotne, niekoniecznie rzeczywiste. Uwzględnienie biegunów wielokrotnych komplikuje jedynie zapis nie zmieniając otrzymanych dalej wyników końcowych. Macierz  $G(s)$  można wówczas przedstawić w postaci

$$G(s) = \sum_{k=1}^{\rho} \frac{R_k}{s - p_k}, \quad (12)$$

w której  $R_k = [r_{hi}^k]$ ,  $k = 1, \dots, \rho$  są macierzami residuów. Wynika stąd, że elementy macierzy  $G(s)$  są równe

$$g_{hi}(s) = \sum_{k=1}^{\rho} \frac{r_{hi}^k}{s - p_k}. \quad (13)$$

Zdefiniowany w równaniu (3) funkcjonal możemy przedstawić w następującej postaci

$$J = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{h=1}^{\rho} \sum_{i=1}^{\rho} c_{hi}^*(j\omega) e_{hi}(j\omega) d\omega = \sum_{h=1}^{\rho} \sum_{i=1}^{\rho} J_{hi}, \quad (14)$$

przy czym

$$J_{hi} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |e_{hi}(j\omega)|^2 d\omega.$$

Na początek rozważmy przypadek ustalonych a priori biegunów  $p_1, \dots, p_{\rho}$ . Aby znaleźć macierz  $G(s)$  należy zatem wyznaczyć elementy  $r_{hi}^k$  macierzy residuów  $R_k$ .

Pochodna funkcjonału  $J$  względem elementu  $r_{hi}^k$  wynosi

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial r_{hi}^k} &= \frac{\partial J_{hi}}{\partial r_{hi}^k} = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} \left( \left( -\frac{1}{s - p_k} \right) c_{hi}^*(-s^*) + c_{hi}(s) \left( -\frac{1}{-s - p_k^*} \right) \right) ds \\ &= \frac{1}{\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} c_{hi}(s) \frac{1}{s - p_k^*} ds. \end{aligned} \quad (15)$$



Przyrównując tę pochodną do zera i wykorzystując wzór całkowy Cauchy'ego otrzymujemy

$$e_{hi}(-p_k^*) = f_{hi}(-p_k^*) - g_{hi}(-p_k^*) = 0.$$

A ponieważ ostatnia równość musi być spełniona dla dowolnych  $k$ ,  $h$  oraz  $i$ , wynika stąd

$$F(-p_k^*) - G(-p_k^*) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, \rho. \quad (16)$$

Otrzymane równania są warunkami koniecznymi optymalności macierzy transmitancji  $G(s)$  otrzymanymi przy założeniu, że jej bieguny są znane a priori. Tworzą one  $\rho$  warunków interpolacyjnych oznaczających, że wartości funkcji macierzowych  $G(s)$  i  $F(s)$  w punktach  $-p_k^*$  muszą być sobie równe.

Rozważmy teraz przypadek ogólny, w którym nie są znane również bieguny macierzy transmitancji  $G(s)$ . Dodatkowo należy wówczas wyznaczyć pochodne  $\frac{\partial J}{\partial p_k}$ ,  $k = 1, \dots, \rho$ . Dla dowolnego  $k$  otrzymujemy

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial p_k} &= \frac{1}{2\pi j} \sum_{h=1}^{\rho} \sum_{i=1}^{\rho} \int_{-j\infty}^{+j\infty} \left( \frac{r_{hi}^k}{(s-p_k)^2} e_{hi}^*(-s^*) + e_{hi}(s) \frac{r_{hi}^{k*}}{(s-p_k^*)^2} \right) ds \\ &= \frac{1}{\pi j} \sum_{h=1}^{\rho} \sum_{i=1}^{\rho} \int_{-j\infty}^{+j\infty} \frac{r_{hi}^k}{(s-p_k)^2} e_{hi}^*(-s^*) ds. \end{aligned} \quad (17)$$

Przyrównując (17) do zera i wykorzystując twierdzenie o residuach otrzymujemy

$$2 \sum_{h=1}^{\rho} \sum_{i=1}^{\rho} [f_{hi}'^*(-p_k^*) - g_{hi}'^*(-p_k^*)] r_{hi}^k = 0,$$

dla  $k = 1, \dots, \rho$ . Równania te możemy zapisać w postaci macierzowej

$$\text{tr} \{ F'^*(-p_k^*) - G'^*(-p_k^*) \} R_k = 0, \quad k = 1, 2, \dots, \rho. \quad (18)$$

Wynika stąd, że układ równań (16), (18) reprezentuje warunki konieczne optymalności macierzy transmitancji  $G(s)$ . Stanowią one uogólnienie warunków koniecznych otrzymanych w [16] dla układów skalarnych

$$\left. \begin{aligned} f(-p_k^*) - g(-p_k^*) &= 0 \\ f'(-p_k^*) - g'(-p_k^*) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad k = 1, 2, \dots, \rho. \quad (19)$$

Przyjmijmy teraz, że macierz transmitancji  $G(s)$  może mieć bieguny wielokrotne. Wówczas po analogicznych przekształceniach zamiast (16) i (18) otrzymamy następujący układ równań

$$F^{(l)}(-p_k^*) - G^{(l)}(-p_k^*) = 0, \quad l = 0, \dots, \mu_k - 1, \quad (20)$$

$$\text{tr} [ F^{(\mu_k)*}(-p_k^*) - G^{(\mu_k)*}(-p_k^*) ] R_{k,\mu_k} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, \rho, \quad (21)$$

w których  $\mu_k$  jest równe krotności bieguna  $p_k$ , symbole  $(l)$  i  $(\mu_k)$  oznaczają pochodne rzędu  $l$  oraz  $\mu_k$  a macierz  $R_{k,\mu_k}$  reprezentuje współczynnik przy  $\frac{1}{(s-p_k)^{\mu_k}}$  w rozkładzie  $G(s)$  na ułamki proste.

Warunki otrzymane dla modeli w postaci (12) mają głównie znaczenie teoretyczne. Znacznie częściej bowiem modele dane są w postaci (11). I dlatego warunki konieczne optymalności, prowadzące do równań względem współczynników wielomianu  $c(s)$  i macierzy  $M(s)$  są bardziej przydatne przy opracowywaniu efektywnych metod wyznaczania modeli uproszczonych.

Przyjmijmy więc, że macierze  $F(s)$  i  $G(s)$  dane są w postaci (10), (11). Z warunku (16) wynika wtedy

$$N(-p_k^*)c(-p_k^*) - M(-p_k^*)d(-p_k^*) = 0. \quad (22)$$

To z kolei oznacza, że elementy macierzy

$$N_E(s) = N(s)c(s) - M(s)d(s)$$

występującej w liczniku macierzy błędów  $E(s) = \frac{N_E(s)}{d_E(s)}$  są wielomianami stopnia co najwyżej  $\nu + p - 1$  i ponadto każdy z nich zawiera czynnik  $c(-s^*)$ . Innymi słowy istnieje macierz  $Q_1(s)$  o wymiarach  $m_o \times m_i$  wielomianów stopnia co najwyżej  $\nu - 1$  taka, że

$$N(s)c(s) - M(s)d(s) = Q_1(s)c^*(-s^*). \quad (23)$$

Podobnie z warunku (18) wynika

$$\text{tr} [N_E^*(-p_k^*)d_E^*(-p_k^*) - N_E^*(-p_k^*)d_E^*(-p_k^*)]R_k = 0, \quad (24)$$

przy czym  $d_E(s) = d(s)c(s)$ . Uwzględniając w ostatniej równości warunek (22) otrzymujemy

$$\text{tr} N_E^*(-p_k^*)R_k = 0. \quad (25)$$

Z równania (23) wynika, że

$$N_E^*(s) = Q_1'(s)c^*(-s^*) + Q_1(s)c^{**}(-s^*). \quad (26)$$

Jeśli  $p_k$  jest biegunem jednokrotnym<sup>1</sup>,  $c(p_k) = 0$  i  $c'(p_k) \neq 0$ . Dlatego warunek (25) jest równoważny równaniu

$$\text{tr} Q_1^*(-p_k^*)R_k = 0. \quad (27)$$

Ponieważ

$$R_k = \frac{1}{c^k(p_k)}M(p_k), \quad (28)$$

przy czym

$$c^k(p_k) = \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^p (s - p_l), \quad (29)$$

z (27) wynika

$$\text{tr} Q_1^*(-p_k^*)M(p_k) = 0. \quad (30)$$

<sup>1</sup>Założenie to nie ma wpływu na postać wyprowadzanych warunków koniecznych. Dla biegunu o krotności  $\mu_k$  wykorzystujemy fakt, że  $c(p_k) = \dots = c^{(\mu_k-1)}(p_k) = 0$  i  $c^{(\mu_k)}(p_k) \neq 0$

Ostatnie równanie jest spełnione, jeśli wielomian  $\text{tr } Q_1^*(s)M(-s^*)$  jest podzielny przez  $c(-s^*)$ , to znaczy

$$\text{tr } Q_1^*(s)M(-s^*) = q_2(s^*)c(-s^*) \quad (31)$$

dla pewnego wielomianu  $q_2(s^*)$  stopnia co najwyżej  $\nu - 2$ .

Ograniczając się do modeli o współczynnikach rzeczywistych otrzymaliśmy ostatecznie, że jeśli macierz  $G(s)$  minimalizuje funkcjonal  $J$ , wtedy istnieje  $Q_1(s)$  macierz wielomianów stopnia co najwyżej  $\nu - 1$  oraz wielomian  $q_2(s)$  stopnia co najwyżej  $\nu - 2$  spełniające równania

$$N(s)c(s) - M(s)d(s) = Q_1(s)c(-s), \quad (32)$$

$$\text{tr } Q_1^T(s)M(-s) = q_2(s)c(-s). \quad (33)$$

W przypadku skalarnym te dwa równania redukują się do jednego równania wielomianowego [14]

$$n(s)c(s) - m(s)d(s) = q(s)c^2(-s), \quad (34)$$

dla pewnego wielomianu  $q(s)$  stopnia co najwyżej  $\nu - \rho - 1$ .

## 4 Algorytm iteracyjnej interpolacji - wariant podstawowy

Otrzymane warunki konieczne optymalności (32), (33) są równoważne układowi  $(\nu + \mu + 1)m_o m_i - 1$  nieliniowych równań z taką samą liczbą niewiadomych, którymi są współczynniki macierzy transmitancji  $G(s) = \frac{M(s)}{c(s)}$ , macierzy  $Q_1(s)$  oraz wielomianu  $q_2(s)$ . Podobnie dla modeli z jednym wejściem i jednym wyjściem warunek (34) jest równoważny układowi  $\nu + \mu$  równań z niewiadomymi, którymi są współczynniki wielomianów  $m(s)$ ,  $c(s)$  i  $q(s)$ .

Niżej przedstawimy algorytm wyznaczania rozwiązania tych układów równań. Jego podstawą jest następujący układ równań rekurencyjnych dla modeli z wieloma wejściami i wyjściami

$$N(s)c^{(h+1)}(s) - M^{(h+1)}(s)d(s) = Q_1^{(h+1)}(s)c^{(h)}(-s), \quad (35)$$

$$\text{tr}\{(Q_1^{(h+1)})^T(s)M^{(h)}(-s)\} = q_2^{(h+1)}(s)c^{(h)}(-s). \quad (36)$$

Podobnie dla modeli z jednym wejściem i jednym wyjściem można wykorzystać

$$n(s)c^{(h+1)}(s) - m^{(h+1)}(s)d(s) = q^{(h+1)}(s)(c^{(h)}(-s))^2. \quad (37)$$

W obu przypadkach  $(h)$  oraz  $(h + 1)$  oznaczają numery iteracji.

Z podanych związków wynika, że w każdej iteracji należy rozwiązać układ równań liniowych. Jak się dalej przekonamy macierz tego układu jest macierzą rzadką o dość specjalnej strukturze. Własność ta ma duże znaczenie dla efektywności numerycznej omawianego algorytmu.

Nietrudno również sprawdzić, analizując na przykład równanie (37), że wyznaczone w kolejnych iteracjach model  $G^{(h+1)}(s)$  spełnia warunki interpolacyjne (32), (33) lub (34) w punktach  $-p_k^{(h)}$ , przy czym  $-p_k^{(h)}$  są biegunami modelu  $G^{(h)}(s)$ . Ta z kolei własność wyjaśnia nazwę przedstawianego algorytmu.

Zanim dokładnie opiszemy algorytm zdefiniujmy  $\mu = m_o m_i$  a także założmy, że elementy macierzy  $M(s)$ ,  $N(s)$  oraz  $Q_1(s)$  są przedstawiane w porządku leksykograficznym. Przyjmijmy również pojedynczy indeks  $k$  w celu wskazania elementu  $(i, j)$  wspomnianych macierzy

$$k = m_i(i - 1) + j, \quad i = 1, \dots, m_o, \quad j = 1, \dots, m_i.$$

Zgodnie z tym założeniem element  $n_{ij}(s)$  macierzy  $N(s)$  oznaczany będzie

$$n_{ij}(s) = n_k(s) = \sum_{l=0}^{\nu-1} n_{k,l} s^l.$$

Utwórzmy następnie z jego współczynników wektor

$$n_k = [n_{k,0}, \dots, n_{k,\nu-1}]^T \in \mathbb{R}^\nu.$$

Podobnie utwórzmy z elementów  $m_k^{(l)}(s)$  i  $q_{1k}^{(h+1)}(s)$  macierzy  $M^{(l)}(s)$ ,  $l = h, h+1$ , oraz  $Q_1^{(h+1)}(s)$ , a także z wielomianów  $q_2^{(h+1)}(s)$ ,  $d(s)$  i  $c^{(l)}(s)$ ,  $l = h, h+1$  wektory

$$m_k^{(l)} = [m_{k,0}^{(l)}, \dots, m_{k,\rho-1}^{(l)}]^T \in \mathbb{R}^\rho$$

$$q_{1k}^{(h+1)} = [q_{1k,0}^{(h+1)}, \dots, q_{1k,\nu-1}^{(h+1)}]^T \in \mathbb{R}^\nu, \quad q_2^{(h+1)} = [q_{2,0}^{(h+1)}, \dots, q_{2,\nu-2}^{(h+1)}]^T \in \mathbb{R}^{\nu-1}$$

$$d = [d_0, \dots, d_{\nu-1}]^T \in \mathbb{R}^\nu, \quad c^{(l)} = [c_0^{(l)}, \dots, c_{\rho-1}^{(l)}]^T \in \mathbb{R}^\rho$$

Następnie uporządkujmy wszystkie niewiadome, które należy wyznaczyć w  $(h+1)$ -ej iteracji tak, aby utworzyły wektor

$$x^{(h+1)} = [x_1^T, \dots, x_\mu^T, x_{\mu+1}^T]^T \in \mathbb{R}^{(\nu+\rho)(\mu+1)-1}, \quad (38)$$

przy czym

$$x_k^{(h+1)} = \begin{bmatrix} m_k^{(h+1)} \\ q_{1k}^{(h+1)} \end{bmatrix}, \quad k = 1, \dots, \mu, \quad x_{\mu+1}^{(h+1)} = \begin{bmatrix} q_2^{(h+1)} \\ c^{(h+1)} \end{bmatrix}. \quad (39)$$

Dzięki temu związki rekurencyjne (35), (36) możemy zapisać w postaci

$$A(x^{(h)})x^{(h+1)} = b \quad (40)$$

lub równoważnie

$$x^{(h+1)} = (A(x^{(h)}))^{-1}b. \quad (41)$$

W celu przedstawienia dokładnej struktury macierzy  $A(x^{(h)})$  zdefiniujmy następujące macierze:

$$D_1 = \begin{bmatrix} d_0 & 0 & \dots & 0 \\ d_1 & d_0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{\rho-1} & d_{\rho-2} & \dots & d_0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\rho \times \rho},$$

$$D_2 = \begin{bmatrix} d_\rho & d_{\rho-1} & \dots & d_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & d_{\nu-1} & \dots & d_{\nu-\rho+1} \\ 0 & 1 & \dots & d_{\nu-\rho+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\nu \times \rho},$$

$$C_1^{(h)} = \begin{bmatrix} -c_0^{(h)} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ c_1^{(h)} & -c_0^{(h)} & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -(-1)^{\rho-1}c_{\rho-1}^{(h)} & -(-1)^{\rho-2}c_{\rho-2}^{(h)} & \dots & -c_0^{(h)} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\rho \times \nu},$$

$$C_2^{(h)} = \begin{bmatrix} -(-1)^\rho & -(-1)^{\rho-1}c_{\rho-1}^{(h)} & \dots & c_1^{(h)} & -c_0^{(h)} & \dots & 0 \\ 0 & -(-1)^\rho & \dots & -c_2^{(h)} & c_1^{(h)} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & -(-1)^\rho \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\nu \times \nu},$$

$$\Delta = \begin{bmatrix} -D_1 & C_1^{(h)} \\ -D_2 & C_2^{(h)} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(\nu+\rho) \times (\nu+\rho)}.$$

Następnie wprowadźmy macierz  $\bar{C}_1^{(h)} \in \mathbb{R}^{\rho \times (\nu-1)}$  otrzymaną z  $C_1^{(h)}$  w wyniku usunięcia jej ostatniej kolumny oraz macierz  $\bar{C}_2^{(h)} \in \mathbb{R}^{(\nu-1) \times (\nu-1)}$  otrzymaną z  $C_2^{(h)}$  w wyniku usunięcia ostatniej kolumny i ostatniego wiersza, po czym zdefiniujmy

$$\bar{\Delta} = \begin{bmatrix} \bar{C}_1^{(h)} & 0_{\rho, \rho} \\ \bar{C}_2^{(h)} & 0_{\nu-1, \rho} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(\nu+\rho-1) \times (\nu+\rho-1)},$$

w której  $0_{\rho, \rho}$ ,  $0_{\nu-1, \rho}$  reprezentują macierze o wymiarach odpowiednio  $\rho \times \rho$  i  $\nu-1 \times \rho$  złożone z samych zer.

Na koniec zdefiniujmy jeszcze macierze:

$$N_{k,1} = \begin{bmatrix} n_{k,0} & 0 & \dots & 0 \\ n_{k,1} & n_{k,0} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n_{k, \rho-1} & n_{k, \rho-2} & \dots & n_{k,0} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\rho \times \rho},$$

$$\begin{aligned}
N_{k,2} &= \begin{bmatrix} n_{k,\rho} & n_{k,\rho-1} & \dots & n_{k,1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n_{k,\nu-1} & n_{k,\nu-2} & \dots & n_{k,\nu-\rho} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & n_{k,\nu-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\nu \times \rho}, \\
N_k &= \begin{bmatrix} 0_{\rho,\nu-1} & N_{k,1} \\ 0_{\nu,\nu-1} & N_{k,2} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(\nu+\rho) \times (\nu+\rho-1)}, \\
M_{k,1}^{(h)} &= \begin{bmatrix} m_{k,0}^{(h)} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -m_{k,1}^{(h)} & m_{k,0}^{(h)} & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^{\rho-1} m_{k,\rho-1}^{(h)} & (-1)^{\rho-2} m_{k,\rho-2}^{(h)} & \dots & m_{k,0}^{(h)} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\rho \times \nu}, \\
M_{k,2}^{(h)} &= \begin{bmatrix} 0 & (-1)^{\rho-1} m_{k,\rho-1}^{(h)} & \dots & -m_{k,1}^{(h)} & m_{k,0}^{(h)} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & m_{k,2}^{(h)} & -m_{k,1}^{(h)} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & (-1)^{\rho-1} m_{k,\rho-1}^{(h)} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(\nu-1) \times \nu}, \\
M_k^{(h)} &= \begin{bmatrix} 0_{\rho,\rho} & M_{k,1}^{(h)} \\ 0_{\nu-1,\rho} & M_{k,2}^{(h)} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(\nu+\rho-1) \times (\nu+\rho)}.
\end{aligned}$$

Przy wprowadzonych oznaczeniach macierz  $A(x^{(h)})$  w równaniu (40) (lub (41)) przyjmuje postać

$$A(x^{(h)}) = \begin{bmatrix} \Delta & 0 & \dots & 0 & N_1 \\ 0 & \Delta & \dots & 0 & N_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \Delta & N_\mu \\ M_1^{(h)} & M_2^{(h)} & \dots & M_\mu^{(h)} & \Delta \end{bmatrix}. \quad (42)$$

Natomiast wektor  $b$  w tych samych równaniach jest dany przez

$$b = [b_1^T, \dots, b_\mu^T, o_{\nu+\rho-1}^T]^T,$$

przy czym  $o_{\nu+\rho-1}$  jest wektorem utworzonym z  $\nu + \rho - 1$  zer i

$$b_k^T = [o_\rho^T, \bar{b}_k^T],$$

$$b_k^T = [-n_{k,0}, \dots, -n_{k,\nu-1}]^T \in \mathbb{R}^\nu.$$

Bezpośrednie rozwiązanie równania (40) wymaga odwrócenia macierzy (42), która jest macierzą rzędu  $(\nu + \rho)(\mu + 1) - 1$ . Jednak dzięki jej specjalnej strukturze jest możliwa znaczna poprawa efektywności numerycznej tej procedury.

Pierwszych  $\mu$  wierszy (blokowych) macierzy  $A(x^{(h)})$  prowadzi bowiem do układu równań

$$-D_1 m_k^{(h+1)T} + C_1^{(h)} q_{1k}^{(h+1)T} + N_{k,1} c^{(h+1)T} = 0_\rho, \quad k = 1, \dots, \mu, \quad (43)$$

$$-D_2 m_k^{(h+1)T} + C_2^{(h)} q_{1k}^{(h+1)T} + N_{k,2} c^{(h+1)T} = \bar{b}_k, \quad k = 1, \dots, \mu. \quad (44)$$

Ponieważ  $C_2^{(h)}$  jest macierzą nicosobliwą możemy z równania (44) wyznaczyć  $q_{1k}^{(h+1)}$  i wstawić do (43) otrzymując

$$\Gamma m_k^{(h+1)T} + \Theta_k c^{(h+1)T} = t_k, \quad k = 1, \dots, \mu, \quad (45)$$

przy czym

$$\Gamma = -D_1 + C_1^{(h)} (C_2^{(h)})^{-1} D_2 \in \mathbb{R}^{\rho \times \rho}, \quad (46)$$

$$\Theta_k = N_{k,1} - C_1^{(h)} (C_2^{(h)})^{-1} N_{k,2} \in \mathbb{R}^{\rho \times \rho}, \quad (47)$$

$$t_k = -C_1^{(h)} (C_2^{(h)})^{-1} \bar{b}_k \in \mathbb{R}^\rho. \quad (48)$$

Uwzględniając ostatni  $(\mu + 1)$ -y wiersz blokowy macierzy  $A(x^{(h)})$  otrzymujemy

$$\sum_{k=1}^{\mu} M_{k,1}^{(h)} q_{1k}^{(h+1)T} + \bar{C}_1^{(h)} q_2^{(h+1)T} = 0_\rho, \quad (49)$$

$$\sum_{k=1}^{\mu} M_{k,2}^{(h)} q_{1k}^{(h+1)T} + \bar{C}_2^{(h)} q_2^{(h+1)T} = 0_{\nu-1}. \quad (50)$$

Ponieważ  $\bar{C}_2^{(h)}$  jest macierzą nicosobliwą, możemy z równania (50) wyznaczyć  $q_2^{(h+1)T}$  a następnie wstawić, razem z  $q_{1k}^{(h+1)}$  wyznaczonym z (44), do równania (49) otrzymując

$$\sum_{k=1}^{\mu} \Pi_k m_k^{(h+1)T} + \Phi c^{(h+1)T} = t_{\mu+1} \quad (51)$$

przy czym

$$\Pi_k = (M_{k,1}^{(h)} - \bar{C}_1^{(h)} (\bar{C}_2^{(h)})^{-1} M_{k,2}^{(h)}) D_2 \in \mathbb{R}^{\rho \times \rho}, \quad (52)$$

$$\Phi = \sum_{k=1}^{\mu} (M_{k,1}^{(h)} - \bar{C}_1^{(h)} (\bar{C}_2^{(h)})^{-1} M_{k,2}^{(h)}) N_{k,2} \in \mathbb{R}^{\rho \times \rho}, \quad (53)$$

$$t_{\mu+1} = \sum_{k=1}^{\mu} (M_{k,1}^{(h)} - \bar{C}_1^{(h)} (\bar{C}_2^{(h)})^{-1} M_{k,2}^{(h)}) \bar{b}_k \in \mathbb{R}^{\rho \times \rho}. \quad (54)$$

Z równania (45) otrzymujemy ostatecznie

$$m_k^{(h+1)T} = \Gamma^{-1} (t_k - \Theta_k c^{(h+1)T}), \quad k = 1, \dots, \mu, \quad (55)$$

skąd po wstawieniu do równania (51) wynika

$$H c^{(h+1)T} = v, \quad (56)$$

$$H = \Phi - \sum_{k=1}^{\mu} \Pi_k \Gamma^{-1} \Theta_k \in \mathbb{R}^{\rho \times \rho}, \quad (57)$$

$$v = t_{\mu+1} - \sum_{k=1}^{\mu} \Pi_k \Gamma^{-1} t_k \in \mathbb{R}^{\rho}. \quad (58)$$

Z powyższych rozważań wynika następujący algorytm wyznaczania macierzy transmitancji  $G(s) = \frac{M(s)}{c(s)}$ :

**krok 1** Przyjmij przybliżenie początkowe  $c^{(h)} = c^{(0)}$  i  $m_k^{(h)} = m_k^{(0)}$ ,  $k = 1, \dots, \mu$ . Następnie wyznacz  $D_1$ ,  $D_2$  oraz  $N_{k,1}$ ,  $N_{k,2}$  i  $b_k$  dla  $k = 1, \dots, \mu$ .

**krok 2** Wyznacz macierze  $C_1^h$ ,  $C_2^h$ ,  $C_1^h$ ,  $C_2^h$  oraz  $M_{k,1}$ ,  $M_{k,2}$  dla  $k = 1, \dots, \mu$ .

**krok 3** Na podstawie wzorów (46), (47), (48) wyznacz  $\Gamma$ ,  $\Theta_k$  i  $t_k$  dla  $k = 1, \dots, \mu$ . Następnie wykorzystując wzory (52), (53), (54) oblicz  $\Pi_k$ ,  $k = 1, \dots, \mu$ ,  $\Phi$  i  $t_{\mu+1}$ .

**krok 4** Z (57), (58) oblicz macierz  $H$  i wektor  $v$ , po czym wyznacz  $c^{h+1}$  rozwiązując równanie (56).

**krok 5** Korzystając z (55) wyznacz  $m_k^{h+1}$  dla  $k = 1, \dots, \mu$ .

**krok 6** Sprawdź, czy jest spełnione przyjęte kryterium stopu. Jeśli tak, zakończ obliczenia. W przeciwnym razie podstaw  $h = h + 1$  i wróć do kroku 2.

Dla modeli z jednym wejściem i jednym wyjściem można wykorzystywać przedstawiony wyżej algorytm lub jego wariant otrzymany w wyniku podobnych rozważań dla równania (40).

W celu implementacji tych algorytmów zostały napisane odpowiednie programy w języku pakietu Matlab. Pewne szczegóły dotyczące tych programów przedstawione zostały w [13]. Z kolei wnioski dotyczące implementacji algorytmów przedstawione są w [12].

Okazało się, że przedstawiona procedura iteracyjna nie zawsze jest zbieżna. W dalszej części tego rozdziału przedstawiona zostanie analiza zbieżności podanego algorytmu a także dwa jego zbieżne warianty.

Dokładna analiza przebiegu algorytmu we wszystkich przypadkach, w których ciąg kolejnych rozwiązań nie był zbieżny pokazała, że co najmniej jedno z nich zawsze leżało bardzo blisko lokalnego minimum. Dlatego w praktycznych implementacjach przedstawionego algorytmu wystarczyło ustalić z góry liczbę iteracji i wybrać najlepsze<sup>2</sup> z dotychczasowych rozwiązań.

Należy przy tym zauważyć, że algorytm ten nie wymaga dużych nakładów obliczeniowych. W każdej iteracji konieczne jest jedynie odwrócenie dwóch macierzy  $\Gamma$  i  $H$  rzędu  $\rho$  oraz dwóch macierzy trójkątnych  $C_2^{(h)}$  i  $C_2^{(h)}$ .

<sup>2</sup>Zapewniające najmniejszą wartość funkcjonału  $J$



## 5 Analiza zbieżności algorytmu iteracyjnej interpolacji

W celu uproszczenia rozważań w punkcie tym ograniczymy się do przypadku modelu z jednym wejściem i jednym wyjściem. Założymy dodatkowo, że transmitancja  $g(s)$  modelu uproszczonego ma bieguny jednokrotne, to znaczy można ją przedstawić w postaci

$$g(s) = \sum_{k=1}^{\rho} \frac{r_k}{s + p_k}, \quad r_k \in \mathbb{R}, p_k \in \mathbb{R}_+. \quad (59)$$

Minimalizowany funkcjonal jest wówczas równy

$$\begin{aligned} J(\mathbf{r}, \mathbf{p}) &= \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} (f(s) - g(s))(f(-s) - g(-s))ds = \\ &= \mathbf{r}^T P_{11} \mathbf{r} - 2\mathbf{r}^T \mathbf{f}(\mathbf{p}) + \|\mathbf{f}\|^2, \end{aligned} \quad (60)$$

przy czym  $\mathbf{r}^T = [r_1, \dots, r_\rho]$ ,  $\mathbf{p}^T = [p_1, \dots, p_\rho]$ ,  $P_{11} = \left[ \frac{1}{p_i + p_j} \right]$ ,  $i, j = 1, \dots, \rho$ ,  $\mathbf{f}(\mathbf{p})^T = [f(p_1), \dots, f(p_\rho)]$ .

W wyniku wykonania bezpośrednich obliczeń można pokazać, że hesjan funkcjonału (60) wynosi

$$H(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = 2 \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} \bar{H}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix},$$

przy czym  $R = \text{diag}\{r_i\}$ ,  $i = 1, \dots, \rho$ ,

$$\bar{H}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} - B_2 R^{-1} \end{bmatrix} = P - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B_2 R^{-1} \end{bmatrix}, \quad (61)$$

$P_{12} = \left[ -\frac{1}{(p_i + p_j)^2} \right]$ ,  $P_{22} = \left[ \frac{1}{2(p_i + p_j)^3} \right]$ ,  $i, j = 1, \dots, \rho$ ,  $B_2 = \text{diag}\left\{ \frac{\partial(f(p_i) - g(p_i))}{\partial p_i} \right\}$ ,  $i = 1, \dots, \rho$ .

Hesjan  $H(\mathbf{r}, \mathbf{p})$  jest dodatnio (ujemnie) półokreślony o ile taka jest macierz  $\bar{H}(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ . Ponieważ  $P_{11}$  jest macierzą dodatnio określoną,  $\bar{H}(\mathbf{r}, \mathbf{p})$  nie może być ujemnie półokreślona. Stąd wynika, że  $J(\mathbf{r}, \mathbf{p})$  nie może mieć maksimumów lokalnych. Jedynymi punktami stacjonarnymi funkcjonału  $J(\mathbf{r}, \mathbf{p})$  mogą być minima i punkty siodłowe.

Ostatnią własność możemy zinterpretować następująco. Dla ustalonych wartości biegunów  $J$  jest funkcjonałem kwadratowym względem wektora residuów  $\mathbf{r}$ . Z dodatniej określoności macierzy  $P_{11}$  wynika, że zawsze istnieje minimum tego funkcjonału. Przyjmijmy, że jest ono osiągnięte dla wektora  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{p})$ . Podstawiając otrzymaną w ten sposób wartość do funkcjonału  $J$  otrzymamy nowy funkcjonal zmiennej  $\mathbf{p}$ , to znaczy  $\bar{J}(\mathbf{p}) = J(\mathbf{r}, \mathbf{r}(\mathbf{p}))$ . Jeśli na przykład pewien wektor  $\mathbf{p}$  jest punktem, w którym funkcjonal  $\bar{J}$  osiąga maksimum (minimum), wówczas para  $(\mathbf{r}(\mathbf{p}), \mathbf{p})$  jest punktem siodłowym (punktem minimum) funkcjonału  $J$ .

Przejdźmy teraz do zbadania, jak zachowuje się omawiany algorytm w otoczeniu punktu stacjonarnego. W tym celu przedstawimy związki rekurencyjne (40) w postaci warunków interpolacyjnych

$$f(p_k^{(h)}) - g^{(h+1)}(p_k^{(h)}) = 0, \quad k = 1, \dots, \rho,$$

$$f'(p_k^{(h)}) - g^{(h+1)}(p_k^{(h)}) = 0, \quad k = 1, \dots, \rho.$$

Następnie przedstawimy te warunki w postaci równania wektorowego

$$\Psi_I(\mathbf{p}^{(h)}, \mathbf{p}^{(h+1)}, \mathbf{r}^{(h+1)}) = 0, \quad (62)$$

w którym

$$\mathbf{p}^{(i)} = [p_1^{(i)}, \dots, p_\rho^{(i)}], \quad i = h, h+1, \\ \mathbf{r}^{(h+1)} = [r_1^{(h+1)}, \dots, r_\rho^{(h+1)}]^T.$$

Równanie to w sposób niejawni definiuje funkcję

$$\left[ \begin{array}{c} \mathbf{r}^{(h+1)} \\ \mathbf{p}^{(h+1)} \end{array} \right] = \Psi_E(\mathbf{p}^{(h)}) = \left[ \begin{array}{c} \Psi_{E1}(\mathbf{p}^{(h)}) \\ \Psi_{E2}(\mathbf{p}^{(h)}) \end{array} \right].$$

Ponieważ w otoczeniu punktu stacjonarnego jacobian  $\frac{\partial \Phi_I}{\partial \Phi_E}$  jest nieosobliwy, możemy wykorzystując twierdzenie o odwzorowaniu uwikłanym wyznaczyć pochodną

$$\frac{d\Phi_E}{d\mathbf{p}^{(h)}} = - \left[ \frac{\partial \Phi_I}{\partial \Phi_E} \right]^{-1} \frac{\partial \Phi_I}{\partial \mathbf{p}^{(h)}}.$$

Dla transmitancji  $g(s)$  o postaci jak w (59) otrzymujemy bowiem

$$\frac{\partial \Phi_I}{\partial \Phi_E} = \left[ \begin{array}{cc} \bar{P}_{11} & \bar{P}_{12} \\ \bar{P}_{12} & \bar{P}_{22} \end{array} \right] \left[ \begin{array}{cc} I & 0 \\ 0 & \bar{R} \end{array} \right], \quad (63)$$

$$\bar{P}_{11} = \left\{ \frac{1}{p_i^{(h)} + p_j^{(h+1)}} \right\}, \quad \bar{P}_{12} = \left\{ - \frac{1}{(p_i^{(h)} + p_j^{(h+1)})^3} \right\}, \\ \bar{P}_{22} = \left\{ 2 \frac{1}{(p_i^{(h)} + p_j^{(h+1)})^2} \right\}, \quad \bar{R} = \text{diag}\{r_i^{(h+1)}\}, \quad i, j = 1, \dots, \rho,$$

oraz

$$\frac{\partial \Phi_I}{\partial \mathbf{p}^{(h)}} = \left[ \begin{array}{c} \bar{B}_1 \\ \bar{B}_2 \end{array} \right],$$

$$B_1 = \text{diag} \left\{ \frac{\partial}{\partial p_i^{(h)}} (f(p_i^{(h)}) - g^{(h+1)}(p_i^{(h)})) \right\},$$

$$B_2 = \text{diag} \left\{ \frac{\partial}{\partial p_i^{(h)}} (f'(p_i^{(h)}) - g^{(h+1)}(p_i^{(h)})) \right\}, \quad i = 1, \dots, \rho.$$

Jeśli  $(\mathbf{r}, \mathbf{p})$  jest punktem stacjonarnym i  $\mathbf{r}^{(h+1)} = \mathbf{r}^{(h)} = \mathbf{r}$  oraz  $\mathbf{p}^{(h+1)} = \mathbf{p}^{(h)} = \mathbf{p}$ , wówczas

$$\frac{\partial \Phi_I}{\partial \mathbf{p}} = \frac{\partial \Phi_I}{\partial \mathbf{p}^{(h)}} \Big|_{\mathbf{p}^{(h)} = \mathbf{p}} = \left[ \begin{array}{c} 0 \\ B_2 \end{array} \right],$$

skąd następnie wynika

$$\frac{\partial \Phi_{E2}}{\partial \mathbf{p}} = \frac{\partial \Phi_{E2}}{\partial \mathbf{p}^{(h)}} \Big|_{\mathbf{p}^{(h)} = \mathbf{p}} = R^{-1} (P_{22} - P_{12} P_{11}^{-1} P_{12})^{-1} B_2. \quad (64)$$

W celu wskazania, że odpowiednie warości wyznaczone zostały w punkcie stacjonarnym, we wszystkich symbolach występujących w ostatnich dwóch zależnościach opuszczony został znak "kreski".

Należy zauważyć, że:

- jeśli  $g(s)$  reprezentuje układ rzeczywiście rzędu  $\rho$ , wszystkie residua są różne od zera i  $R$  jest macierzą nieosobliwą,
- nieosobliwość macierzy  $P_{11}$  i  $P_{22} - P_{12}P_{11}^{-1}P_{12}$  wynika z faktu, że  $P$  we wzorze (61) jest dodatnio określoną macierzą formy kwadratowej

$$\int_0^\infty \left( \sum_{i=1}^{\rho} x_i e^{-p_i t} - t \left( \sum_{i=1}^{\rho} x_{\rho+i} e^{-p_i t} \right) \right)^2 dt, \quad p_i > 0.$$

Widomo również, że ciąg kolejnych przybliżeń  $\mathbf{p}^{(h)}$  jest zbieżny do punktu stałego  $\mathbf{p}$  odwzorowania  $\Phi_{E2}$ , jeśli wszystkie wartości własne macierzy (64) należą do przedziału otwartego  $(-1, 1)$ . A ponieważ macierze podobne mają te same wartości własne, aby wyjaśnić, jak zachowuje się analizowany algorytm w pobliżu punktu stacjonarnego, zbadamy wartości własne macierzy

$$R \frac{\partial \Phi_{E2}}{\partial \mathbf{p}} R^{-1} = (P_{22} - P_{12}P_{11}^{-1}P_{12})^{-1} B_2 R^{-1}. \quad (65)$$

Symetryczna macierz blokowa  $\bar{H}(\mathbf{r}, \mathbf{p})$  dana wzorem (61) jest macierzą określoną (dodatnio lub ujemnie) [8], jeśli tak samo określone są (dodatnio lub ujemnie) macierze:  $P_{11}$  oraz

$$-\Sigma = P_{22} - B_2 R^{-1} - P_{12} P_{11}^{-1} P_{12}. \quad (66)$$

Macierz  $\Sigma$  jest równa macierzy, jaką otrzymamy przyjmując  $\lambda = 1$  w pęku macierzy

$$K - \lambda S,$$

w którym

$$K = B_2 R^{-1}, \quad S = P_{22} - P_{12} P_{11}^{-1} P_{12}.$$

Ponieważ jest to pęk regularny, istnieje transformacja nieosobliwa  $y = Zz$  [6], w wyniku której forma kwadratowa

$$y^T (K - \lambda S) y$$

jest doprowadzona do postaci

$$z^T (\Lambda - \lambda I) z,$$

przy czym  $I$  jest macierzą jednostkową rzędu  $\rho$  a  $\Lambda$  jest macierzą diagonalną utworzoną z wartości własnych rozpatrywanej wiązki macierzy, to znaczy utworzoną z pierwiastków równania

$$\det(K - \lambda S) = 0.$$

Ostatnie równanie jest spełnione wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\det(S^{-1}K - \lambda I) = 0.$$

Jeśli zatem punkt stacjonarny, w otoczeniu którego analizujemy zachowanie się algorytmu jest punktem siodłowym funkcjonułu  $J$ , macierz  $\Sigma$  nie jest macierzą określoną (ani dodatnio ani ujemnie). To z kolei oznacza, że co najmniej jedna z wartości własnych pęku  $\Lambda - I$  jest większa od 1. W tym przypadku ciąg kolejnych przybliżeń

$$\mathbf{p}^{(h+1)} = \Psi_{E2}(\mathbf{p}^{(h)}) \quad (67)$$

nie może być zbieżny do punktu stałego odwzorowania  $\Psi_{E2}$ .

Jeśli natomiast punkt stacjonarny jest punktem minimum funkcjonułu  $J$ , wtedy wszystkie wartości własne pęku  $\Lambda - I$  są mniejsze od 1. Wynika stąd, że ciąg kolejnych przybliżeń (67) jest zbieżny do punktu stałego odwzorowania  $\Psi_{E2}$ , jeśli te wartości własne są również większe od  $-1$ .

Przyjmijmy na koniec, że  $\gamma : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{C}^p$  reprezentuje odwzorowanie  $\mathbf{p}^{(h)} = \gamma(\mathbf{c}^{(h)})$ . Uwzględniając je w (67) otrzymujemy zależność rekurencyjną

$$\mathbf{c}^{(h+1)} = \Phi(\mathbf{c}^{(h)}), \quad (68)$$

przy czym  $\Phi = \gamma^{-1} \circ \Psi_{E2} \circ \gamma$  a  $\gamma^{-1}$  jest odwzorowaniem odwrotnym do  $\gamma$ . Zauważmy, że ciąg kolejnych przybliżeń (68) jest dokładnie tym samym ciągiem, który jest otrzymywany w wyniku zastosowania procedury z punktu 3.

Jeśli zatem  $\hat{\mathbf{p}}$ ,  $\hat{\mathbf{c}}$  są punktami stałymi odwzorowań  $\Psi_{E2}$  i  $\Phi$ , to znaczy  $\hat{\mathbf{c}} = \gamma(\hat{\mathbf{p}})$ , wtedy jacobiany  $\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{c}^{(h)}}(\hat{\mathbf{c}})$ ,  $\frac{\partial \Psi_{E2}}{\partial \mathbf{p}^{(h)}}(\hat{\mathbf{p}})$  są macierzami podobnymi i mają takie same wartości własne, mniejsze od 1. Wynika stąd, że ciąg kolejnych przybliżeń (68) odpowiadający ciągowi otrzymywanemu w wyniku zastosowania algorytmu iteracyjnej interpolacji jest zbieżny, o ile wartości własne jacobianu są jednocześnie większe od  $-1$ .

## 6 Modyfikacje zapewniające zbieżność algorytmu iteracyjnej interpolacji

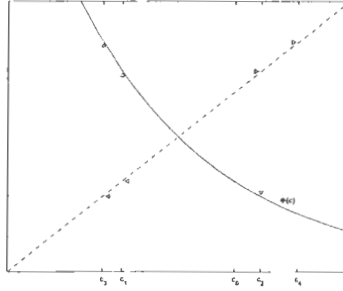
Zgodnie z przedstawioną w punkcie 3 metodą iteracyjnej interpolacji wyznaczany jest ciąg kolejnych przybliżeń optymalnego w normie  $L^2$  modelu uproszczonego. Polega to na wyznaczeniu punktu stałego  $\mathbf{x} = (A(\mathbf{x}))^{-1}\mathbf{b}$  odwzorowania definiowanego w sposób niejawnny przez warunki konieczne optymalności (32) i (33) lub (34). Wektor  $\mathbf{x}$  jest określony równaniami (38) i (39). Zadanie to może być sprowadzone do postaci równoważnej, w której wyznaczany jest punkt stały  $\hat{\mathbf{c}} = \Phi(\hat{\mathbf{c}})$  odwzorowania zredukowanego  $\Phi : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ , którego argument  $\mathbf{c}$  został utworzony ze współczynników mianownika transmitancji  $G(s)$ .

W poprzednim punkcie pokazaliśmy, że  $\Phi$  nie zawsze jest odwzorowaniem zwężającym. Wartości własne jacobianu  $\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{c}^{(h)}}(\hat{\mathbf{c}})$  mogą bowiem być mniejsze od  $-1$ , skąd wynika, że ciąg  $\mathbf{c}^h$  nie jest zbieżny. Własność ta zilustrowana na rys. 2 ma następującą interpretację: krok wykonywany w kolejnej iteracji jest krokiem we właściwym kierunku, może być jednak za długi.

W tym punkcie przedstawimy dwie modyfikacje metody iteracyjnej interpolacji, które zapewniają zbieżność ciągu kolejnych przybliżeń do lokalnie optymalnego modelu uproszczonego. Obie te modyfikacje oparte są na tym samym stwierdzeniu.

Załóżmy ogólnie, że wyznaczony ma być punkt stały  $\hat{\xi} = v(\hat{\xi})$  pewnego odwzorowania  $v : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ . Zamiast ciągu kolejnych przybliżeń  $\xi^{h+1} = v(\xi^h)$  możemy rozważyć wyznaczanie ciągu  $\xi^{h+1} = w(\xi^h)$ , o ile odwzorowanie  $w : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$  spełnia następujące warunki:

1.  $\hat{\xi} = w(\hat{\xi})$ ,
2. wartości własne jacobianu  $\frac{\partial w}{\partial \xi}(\hat{\xi})$  znajdują się wewnątrz koła jednostkowego,
3.  $w$  może być zdefiniowane bez jakichkolwiek informacji o  $\hat{\xi}$ .



Rysunek 2: Przykład rozbieżnego ciągu kolejnych przybliżeń  $x^h$ .

Wynika stąd, że definiując w różny sposób funkcje  $w$  możemy otrzymać rodzinę algorytmów wyznaczania optymalnego w normie  $L^2$  modelu uproszczonego.

Rozważmy pierwszy przypadek, w którym  $v$  reprezentuje odwzorowanie zredukowane  $\Phi$ . Jako  $w$  przyjmijmy

$$\Phi_\alpha(c) = \alpha\Phi(c) + (1 - \alpha)c. \quad (69)$$

Zgodnie z tym w kolejnych iteracjach wyznaczany będzie ciąg przybliżeń

$$\bar{c}^{h+1} = \Phi_\alpha(\bar{c}^h). \quad (70)$$

Z (69) wynika, że dla  $\bar{c}^h = c^h$  kolejne przybliżenie  $\bar{c}^{h+1}$  jest wyznaczone w postaci kombinacji liniowej punktów  $c^h$  oraz  $c^{h+1} = \Phi(c^h)$  a więc należy do odcinka, którego końcami są  $c^h$  i  $\Phi(c^h)$ .

Za taką modyfikacją algorytmu przemawiają wnioski płynące z przeprowadzonej wcześniej analizy. Wynika z nich bowiem, że krok wykonywany w kolejnej iteracji jest krokiem być może za długim, ale za to wykonywanym we właściwym kierunku. Odpowiednie skrócenie tego kroku powinno zapewnić zbieżność tej zmodyfikowanej procedury rekurencyjnej.

Z (69) wynika, że każdy punkt stały  $\hat{c}$  odwzorowania  $\Phi$  jest również punktem stałym odwzorowania  $\Phi_\alpha$ . Prawdziwy jest bowiem ciąg równości

$$\Phi_\alpha(\hat{c}) = \alpha\Phi(\hat{c}) + (1 - \alpha)\hat{c} = \alpha\hat{c} + (1 - \alpha)\hat{c} = \hat{c}.$$

Jakobian odwzorowania  $\Phi_\alpha$  w punkcie  $\hat{c}$  wynosi

$$\frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial \mathbf{c}}(\hat{c}) = \alpha \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{c}}(\hat{c}) - I \right) + I,$$

przy czym  $I$  jest macierzą jednostkową odpowiedniego rozmiaru. Jeśli przez  $\lambda_m$  oznaczmy najmniejszą wartość własną jacobianu  $\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{c}}(\hat{c})$ , to całe jego spektrum zawiera się w przedziale lewostronnie domkniętym  $[\lambda_m, 1)$ , to znaczy  $\sigma\left\{\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{c}}(\hat{c})\right\} \subset [\lambda_m, 1)$ . Stąd wynika, że dla  $\alpha > 0$

$$\sigma\left\{\frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial \mathbf{c}}(\hat{c})\right\} \subset [\alpha(\lambda_m - 1) + 1, 1).$$

Jeśli zatem

$$0 < \alpha < \alpha_m = \frac{2}{1 - \lambda_m}, \quad (71)$$

wszystkie wartości własne jacobianu  $\frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial \mathbf{c}}(\hat{c})$  leżą wewnątrz koła jednostkowego i  $\Phi_\alpha$  jest odwzorowaniem zwężającym.

Z powyższych rozważań wynika następujący algorytm wyznaczania macierzy transmitancji  $G(s) = \frac{M(s)}{c(s)}$ :

- krok 1** Przyjmij przybliżenie początkowe  $c^{(h)} = c^{(0)}$  i  $m_k^{(h)} = m_k^{(0)}$ ,  $k = 1, \dots, \mu$ .  
Następnie wyznacz  $D_1$ ,  $D_2$  oraz  $N_{k,1}$ ,  $N_{k,2}$  i  $b_k$  dla  $k = 1, \dots, \mu$ .
- krok 2** Wyznacz macierze  $C_1^h$ ,  $C_2^h$ ,  $\bar{C}_1^h$ ,  $\bar{C}_2^h$  oraz  $M_{k,1}$ ,  $M_{k,2}$  dla  $k = 1, \dots, \mu$ .
- krok 3** Na podstawie wzorów (46), (47), (48) wyznacz  $\Gamma$ ,  $\Theta_k$  i  $t_k$  dla  $k = 1, \dots, \mu$ .  
Następnie wykorzystując wzory (52), (53), (54) oblicz  $\Pi_k$ ,  $k = 1, \dots, \mu$ ,  $\Phi$  i  $t_{\mu+1}$ .
- krok 4** Z (57), (58) oblicz macierz  $H$  i wektor  $v$ , po czym wyznacz  $c^{h+1}$  rozwiązując równanie (56).
- krok 5** Zgodnie z (69) podstaw

$$c^{h+1} = \alpha c^{h+1} + (1 - \alpha)c^h. \quad (72)$$

**krok 6** Korzystając z (55) wyznacz  $m_k^{h+1}$  dla  $k = 1, \dots, \mu$ .

**krok 7** Sprawdź, czy jest spełnione przyjęte kryterium stopu. Jeśli tak, zakończ obliczenia. W przeciwnym razie podstaw  $h = h + 1$  i wróć do kroku 2.

Współczynnik skrócenia kroku  $\alpha$  można wybrać na wiele różnych sposobów. Jeśli uda się oszacować  $\lambda_m$ , wtedy  $\alpha = \frac{\alpha_m}{2}$  zapewni dobrą szybkość zbieżności algorytmu. Maleje ona zdecydowanie, gdy wybierzemy  $\alpha$  bliskie 0 lub  $\alpha_m$ .

Alternatywą może być zmiana wartości  $\alpha$  w trakcie działania algorytmu, na przykład po przekroczeniu założonej liczby iteracji lub adaptacyjnie w zależności od wartości funkcjonału  $J$  w kolejnych iteracjach.

Rozważmy teraz przypadek

$$v(x) = A(x)^{-1}b, \quad (73)$$

w którym argument  $x$  jest definiowany jak w (38), (39) natomiast macierz  $A$  i wektor  $b$  są określone w (42), (4). Przyjmijmy również  $w$  w postaci

$$w(x) = \left( I - \frac{\partial v}{\partial x}(x) \right)^{-1} \left( v(x) - \frac{\partial v}{\partial x}(x)x \right). \quad (74)$$

Jeśli  $\hat{x}$  jest punktem stałym odwzorowania  $v$ , to  $w(\hat{x}) = \hat{x}$ . Nietrudno również wykazać, że  $\frac{\partial w}{\partial x}(\hat{x}) = 0$ . Zapewnia to kwadratową zbieżność ciągu

$$x^{(h+1)} = w(x^{(h)}) = \left( I - \frac{\partial v}{\partial x}(x^{(h)}) \right)^{-1} \left( v(x^{(h)}) - \frac{\partial v}{\partial x}(x^{(h)})x^{(h)} \right) \quad (75)$$

do  $\hat{x}$ .

Ostatnia własność wynika również z faktu, że procedura rekurencyjna określona w (75) odpowiada metodzie Newtona zastosowanej do wyznaczenia rozwiązania równania wynikającego z warunków koniecznych optymalności. Zgodnie bowiem z [15] dla dwukrotnie różniczkowalnego w sposób ciągły odwzorowania  $P(x)$  ciąg  $x^{(h+1)} = x^{(h)} - \left( \frac{\partial P}{\partial x}(x^{(h)}) \right)^{-1} P(x^{(h)})$  jest zbieżny do rozwiązania równania  $P(x) = 0$ . Jeśli zatem  $P(x) = x - v(x)$ , to

$$x^{(h+1)} = x^{(h)} - \left( I - \frac{\partial v}{\partial x}(x^{(h)}) \right)^{-1} \left( x^{(h)} - v(x^{(h)}) \right)$$

i uwzględniając następnie

$$I - \left( I - \frac{\partial v}{\partial x}(x^{(h)}) \right)^{-1} = - \left( I - \frac{\partial v}{\partial x}(x^{(h)}) \right)^{-1} \frac{\partial v}{\partial x}(x^{(h)})$$

otrzymujemy prawą stronę równości (75).

Przechodząc do szczegółów technicznych zauważmy, aby otrzymać w kolejnej iteracji  $x^{(h+1)}$  należy rozwiązać równanie

$$\left( I - \frac{\partial v}{\partial x}(x^{(h)}) \right) x^{(h+1)} = v(x^{(h)}) - \frac{\partial v}{\partial x}(x^{(h)})x^{(h)}. \quad (76)$$

Występujący w nim jacobian  $\frac{\partial v}{\partial x}(x^{(h)})$  możemy wyznaczyć korzystając z twierdzenia o odwzorowaniu uwikłanym dla  $y = v(x)$  określonym równaniem

$$\Upsilon(x, y) = A(x)y - b = 0. \quad (77)$$

Ponieważ  $\frac{\partial v}{\partial x}(x) = - \left( \frac{\partial \Upsilon}{\partial y} \right)^{-1} \circ \frac{\partial \Upsilon}{\partial x}(x)$  oraz  $\frac{\partial \Upsilon}{\partial y}(x^{(h)}, y^{(h)}) = A(x^{(h)})$  i  $\frac{\partial \Upsilon}{\partial x}(x^{(h)}, y^{(h)}) = \frac{\partial(A(x)y^{(h)})}{\partial x}(x^{(h)})$ , równanie (76) przyjmuje postać

$$\left( A(x^{(h)}) + \frac{\partial(A(x)y^{(h)})}{\partial x}(x^{(h)}) \right) x^{(h+1)} = A(x^{(h)})y^{(h)} + \frac{\partial(A(x)y^{(h)})}{\partial x}(x^{(h)})x^{(h)}, \quad (78)$$

przy czym  $y^{(h)}$  jest równe kolejnemu przybliżeniu otrzymanemu z (41), to znaczy  $y^{(h)} = x^{(h+1)}(A(x^{(h)}))^{-1}b$ , natomiast  $\frac{\partial(A(x)y^{(h)})}{\partial x}(x^{(h)})$  oznacza pochodną odwzorowania  $A(x)y$  względem  $x$  dla  $x = x^{(h)}$  i  $y = y^{(h)}$ .

Aby wyznaczyć tę pochodną zauważmy, że

$$A(x^{(h)})y^{(h)} = \begin{bmatrix} \Delta\tilde{x}_1^{(h+1)} + N_1\tilde{x}_{\mu+1}^{(h+1)} \\ \vdots \\ \Delta\tilde{x}_\mu^{(h+1)} + N_\mu\tilde{x}_{\mu+1}^{(h+1)} \\ \sum_{l=i}^{\mu} M_l^{(h)}\tilde{x}_l^{(h+1)} + \Delta\tilde{x}_{\mu+1}^{(h+1)} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(\nu+\rho)\mu+\nu+\rho-1} \quad (79)$$

Dla dowolnego  $k, \dots, \mu$ ,  $N_k\tilde{x}_{\mu+1}^{(h+1)}$  nie zależy od  $x^{(h)}$  natomiast

$$\Delta\tilde{x}_k^{(h+1)} = D\tilde{m}_k^{(h+1)} + C^{(h)}\tilde{q}_{1k}^{(h+1)}, \quad (80)$$

gdzie  $D = [D_1^T, D_2^T]^T$  i  $C^{(h)} = [(C_1^{(h)})^T, (C_2^{(h)})^T]^T$ , zależy jedynie od  $c^{(h)}$ . Dlatego

$$\frac{\partial(A(x^{(h)})y^{(h)})}{\partial x^{(h)}}(x^{(h)}) = \frac{\begin{bmatrix} 0_{(\nu+\rho),(\nu+\rho)} & \dots & 0_{(\nu+\rho),(\nu+\rho)} & 0_{(\nu+\rho),(\nu-1)} & \frac{\partial(C^h\tilde{q}_{1k}^{(h+1)})}{\partial c^{(h)}} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0_{(\nu+\rho),(\nu+\rho)} & \dots & 0_{(\nu+\rho),(\nu+\rho)} & 0_{(\nu+\rho),(\nu-1)} & \frac{\partial(C^h\tilde{q}_{1\mu}^{(h+1)})}{\partial c^{(h)}} \end{bmatrix}}{\frac{\partial}{\partial x^k}(\sum_{l=i}^{\mu} M_l^{(h)}\tilde{x}_l^{(h+1)} + \Delta\tilde{x}_{\mu+1}^{(h+1)})} \quad (81)$$

Ponieważ  $k$ -ta kolumna macierzy  $C^{(h)} \in \mathbb{R}^{(\rho+\nu)\times\nu}$  jest równa

$$\left[ 0_{k-1,1}^T, [-c_0^{(h)}, c_1^{(h)}, \dots, -(-1)^{\rho-1}c_{\rho-1}^{(h)}, -(-1)^\rho]^T, 0_{\nu-k,1}^T \right]^T,$$

gdzie  $0_{l,1}$  oznacza wektor utworzony z  $l$  zer, to

$$\frac{\partial(C^h\tilde{q}_{1k}^{(h+1)})}{\partial c^{(h)}} = \begin{bmatrix} -\tilde{q}_{1k,0}^{(h+1)} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\tilde{q}_{1k,1}^{(h+1)} & \tilde{q}_{1k,0}^{(h+1)} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ -\tilde{q}_{1k,\rho-1}^{(h+1)} & \tilde{q}_{1k,\rho-2}^{(h+1)} & -\tilde{q}_{1k,\rho-3}^{(h+1)} & \dots & -(-1)^{\rho-1}\tilde{q}_{1k,0}^{(h+1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ -\tilde{q}_{1k,\nu-1}^{(h+1)} & \tilde{q}_{1k,\nu-2}^{(h+1)} & -\tilde{q}_{1k,\nu-3}^{(h+1)} & \dots & -(-1)^{\rho-1}\tilde{q}_{1k,\nu-\rho}^{(h+1)} \\ 0 & \tilde{q}_{1k,\nu-1}^{(h+1)} & -\tilde{q}_{1k,\nu-2}^{(h+1)} & \dots & -(-1)^{\rho-1}\tilde{q}_{1k,\nu-\rho+1}^{(h+1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -(-1)^{\rho-1}\tilde{q}_{1k,\nu-1}^{(h+1)} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} = \check{C}_k \quad (82)$$



Podobnie ponieważ

$$M_k^{(h)} \bar{x}_k^{(h+1)} = \begin{bmatrix} M_{k,1}^{(h)} \\ M_{k,2}^{(h)} \end{bmatrix} \bar{q}_{1k}^{(h+1)} = \begin{bmatrix} m_{k,0}^{(h)} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -m_{k,1}^{(h)} & m_{k,0}^{(h)} & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (-1)^{\rho-1} m_{k,\rho-1}^{(h)} & (-1)^{\rho-2} m_{k,\rho-2}^{(h)} & \dots & m_{k,0}^{(h)} & (-1)^{\rho-1} m_{k,\rho-1}^{(h)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & (-1)^{\rho-1} m_{k,\rho-1}^{(h)} & \dots & -m_{k,1}^{(h)} & m_{k,0}^{(h)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & (-1)^{\rho-1} m_{k,\rho-1}^{(h)} \end{bmatrix} \bar{q}_{1k}^{(h+1)}$$

zależy jedynie od  $m_k$ , aby otrzymać  $\frac{\partial}{\partial x_k}(M_k^{(h)} \bar{x}_k^{(h+1)})$  wystarczy wyznaczyć

$$\frac{\partial}{\partial m_k^{(h)}} \left( \begin{bmatrix} M_{k,1}^{(h)} \\ M_{k,2}^{(h)} \end{bmatrix} \bar{q}_{1k}^{(h+1)} \right) = \begin{bmatrix} \bar{q}_{1k,0}^{(h+1)} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \bar{q}_{1k,1}^{(h+1)} & -\bar{q}_{1k,0}^{(h+1)} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \dots & \vdots \\ \bar{q}_{1k,\rho-1}^{(h+1)} & -\bar{q}_{1k,\rho-2}^{(h+1)} & \dots & (-1)^{\rho-2} \bar{q}_{1k,1}^{(h+1)} & (-1)^{\rho-1} \bar{q}_{1k,0}^{(h+1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -(-1)^{\rho-1} \bar{q}_{1k,\rho-1}^{(h+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{1k,1} \\ \bar{Q}_{1k,2} \end{bmatrix} \quad (83)$$

dla  $k = 1, \dots, \mu$ .

Zauważmy następnie, że

$$\bar{\Delta} \bar{x}_{\mu+1}^{(h+1)} = \begin{bmatrix} \bar{C}_1^{(h)} \\ \bar{C}_2^{(h)} \end{bmatrix} \bar{q}_2^{(h+1)} = \begin{bmatrix} -c_0^{(h)} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ c_1^{(h)} & -c_0^{(h)} & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -(-1)^{\rho-1} c_{\rho-1}^{(h)} & -(-1)^{\rho-2} c_{\rho-2}^{(h)} & \dots & -c_0^{(h)} & 0 & \dots & 0 \\ -(-1)^{\rho} & -(-1)^{\rho-1} c_{\rho-1}^{(h)} & \dots & c_1^{(h)} & -c_0^{(h)} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & -(-1)^{\rho-1} c_{\rho-1}^{(h)} \end{bmatrix} \bar{q}_2^{(h+1)}$$

zależy tylko od  $c^{(h)}$  i aby otrzymać  $\frac{\partial}{\partial c^{(h)}}(\bar{\Delta} \bar{x}_{\mu+1}^{(h+1)})$  wystarczy jedynie wyznaczyć

$$\frac{\partial}{\partial c^{(h)}} \begin{bmatrix} \bar{C}_1^{(h)} \\ \bar{C}_2^{(h)} \end{bmatrix} \bar{q}_2^{(h+1)} =$$

$$\begin{bmatrix} -\tilde{q}_{2,0}^{(h+1)} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\tilde{q}_{2,1}^{(h+1)} & \tilde{q}_{2,0}^{(h+1)} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ -\tilde{q}_{2,\rho-1}^{(h+1)} & \tilde{q}_{2,\rho-2}^{(h+1)} & -\tilde{q}_{2,\rho-3}^{(h+1)} & \dots & -(-1)^{\rho-1}\tilde{q}_{2,0}^{(h+1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ -\tilde{q}_{2,\nu-2}^{(h+1)} & \tilde{q}_{2,\nu-3}^{(h+1)} & -\tilde{q}_{2,\nu-4}^{(h+1)} & \dots & -(-1)^{\rho-1}\tilde{q}_{2,\nu-\rho-1}^{(h+1)} \\ 0 & \tilde{q}_{2,\nu-2}^{(h+1)} & -\tilde{q}_{2,\nu-3}^{(h+1)} & \dots & -(-1)^{\rho-1}\tilde{q}_{2,\nu-\rho}^{(h+1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -(-1)^{\rho-1}\tilde{q}_{2,\nu-2}^{(h+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{Q}_{2,1} \\ \tilde{Q}_{2,1} \end{bmatrix} \quad (84)$$

Uwzględniając (81), (82), (6), (84) w równaniu (78) otrzymujemy, że jego rozwiązanie wymaga odwrócenia macierzy  $\tilde{A}(x^{(h)}) = A(x^{(h)}) + \frac{\partial(A(x)y^{(h)})}{\partial x}(x^{(h)})$ . Zauważmy przy tym, że

$$\tilde{A}(x^{(h)}) = \begin{bmatrix} \Delta & 0 & \dots & 0 & \tilde{N}_1 \\ 0 & \Delta & \dots & 0 & \tilde{N}_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \Delta & \tilde{N}_\mu \\ \tilde{M}_1^{(h)} & \tilde{M}_2^{(h)} & \dots & \tilde{M}_\mu^{(h)} & \tilde{\Delta} \end{bmatrix} \quad (85)$$

gdzie

$$\begin{aligned} \tilde{N}_k &= \left[ 0_{\rho+\nu,\nu-1} \begin{bmatrix} N_{k,1} \\ N_{k,2} \end{bmatrix} + \tilde{C}_k \right] \in \mathbb{R}^{(\nu+\rho) \times (\nu+\rho-1)}, \\ \tilde{M}_k^{(h)} &= \begin{bmatrix} \tilde{Q}_{1k,1} & M_{k,1}^{(h)} \\ \tilde{Q}_{1k,2} & M_{k,2}^{(h)} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(\nu+\rho-1) \times (\nu+\rho)}, \\ \tilde{\Delta} &= \begin{bmatrix} \tilde{C}_1^{(h)} & \tilde{Q}_{2,1} \\ \tilde{C}_2^{(h)} & \tilde{Q}_{2,2} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(\nu+\rho-1) \times (\nu+\rho-1)} \end{aligned}$$

Widać stąd, że  $\tilde{A}(x^{(h)})$  jest macierzą rzadką strukturze prawie takiej samej jak  $A(x^{(h)})$ . Jedyna różnica polega na występowaniu różnych od zera bloków w ostatnim wierszu macierzy  $\tilde{A}(x^{(h)})$ . To z kolei oznacza, że złożoność obliczeniowa zmodyfikowanego algorytmu jest porównywalna ze złożonością algorytmu podstawowego. Wystarczy bowiem w każdej iteracji odwrócić dwie macierze  $\Delta$  i  $\tilde{\Delta} - \sum_{k=1}^{\mu} \sum_{l=1}^{\mu} \tilde{M}_k^{(h)} \Delta^{-1} \tilde{N}_k$  o wymiarach  $(\nu + \rho) \times (\nu + \rho)$ .

Z powyższych rozważań wynika następujący algorytm wyznaczania macierzy transmittancji  $G(s) = \frac{M(s)}{c(s)}$ :

**krok 1** Przyjmij przybliżenie początkowe  $c^{(h)} = c^{(0)}$  i  $m_k^{(h)} = m_k^{(0)}$ ,  $k = 1, \dots, \mu$ .  
Następnie wyznacz  $D_1, D_2$  oraz  $N_{k,1}, N_{k,2}$  i  $b_k$  dla  $k = 1, \dots, \mu$ .

**krok 2** Wyznacz macierze  $C_1^h, C_2^h, \tilde{C}_1^h, \tilde{C}_2^h$  oraz  $M_{k,1}, M_{k,2}$  dla  $k = 1, \dots, \mu$ .

**krok 3** Na podstawie wzorów (46), (47), (48) wyznacz  $\Gamma$ ,  $\Theta_k$  i  $t_k$  dla  $k = 1, \dots, \mu$ . Następnie wykorzystując wzory (52), (53), (54) oblicz  $\Pi_k$ ,  $k = 1, \dots, \mu$ ,  $\Phi$  i  $t_{\mu+1}$ .

**krok 4** Z (57), (58) oblicz macierz  $H$  i wektor  $v$ , po czym wyznacz  $c^{h+1}$  rozwiązując równanie (56).

**krok 5** Korzystając z (55) wyznacz  $m_k^{h+1}$  dla  $k = 1, \dots, \mu$ .

**krok 6** Dla  $k = 1, \dots, \mu$  oblicz

$$q_{1k}^{(h+1)T} = (C_2^{(h)})^{-1} (\bar{b}_k + D_2 m_k^{(h+1)T} - N_{k,2} c^{(h+1)T}).$$

**krok 7** Utwórz macierze  $\tilde{N}_k$ ,  $\tilde{M}_k^{(h)}$ ,  $\tilde{\Delta}$ .

**krok 8** Wyznacz  $\begin{bmatrix} q_2^{(h+1)} \\ c^{(h+1)} \end{bmatrix}$  rozwiązując równanie

$$(\tilde{\Delta} - \sum_{k=1}^{\mu} \tilde{M}_k^{(h)} \Delta^{-1} \tilde{N}_k) \begin{bmatrix} q_2^{(h+1)} \\ c^{(h+1)} \end{bmatrix} = \tilde{b}_{\mu+1} - \sum_{k=1}^{\mu} \tilde{M}_k^{(h)} \Delta^{-1} b_k,$$

**krok 9** Dla  $k = 1, \dots, \mu$  wyznacz

$$\begin{bmatrix} m_k^{(h+1)} \\ q_{1k}^{(h+1)} \end{bmatrix} = \Delta^{-1} (b_k - \tilde{N}_k \begin{bmatrix} q_2^{(h+1)} \\ c^{(h+1)} \end{bmatrix}).$$

**krok 10** Sprawdź, czy jest spełnione przyjęte kryterium stopu. Jeśli tak, zakończ obliczenia. W przeciwnym razie podstaw  $h = h + 1$  i wróć do kroku 2.

## 7 Metody gradientowe optymalnej aproksymacji modeli

Omawiane dotychczas metody optymalnej w normie  $L^2$  aproksymacji modeli należą do metod bezgradientowych. Polegają na wyznaczaniu rozwiązań równań wynikających z warunków koniecznych optymalności. Efektywność tych metod jest wynikiem własności analizowanych w punkcie 4.

Przedstawimy obecnie metodę, która należy do klasy metod gradientowych. Omówiona dokładnie w często cytowanej pracy [17] stanowi pewien wyspecjalizowany wariant metod kierunków poprawy. Opracowana została dla modeli układów z jednym wejściem i jednym wyjściem. Ze względu na dużą złożoność i trudności obliczeniowe właściwe metodom gradientowym, gdy są wykorzystywane w źle uwarunkowanych zadaniach minimalizacji, nie należy się spodziewać, aby próba przeniesienia tej metody na przypadek aproksymacji modeli układów z wieloma wejściami i wyjściami uwieńczona została sukcesem.

Przyjmijmy, że transmitancja

$$f(s) = \frac{n(s)}{d(s)} = \frac{b_{n-1}s^{n-1} + \dots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0} \quad (86)$$

reprezentuje model wysokiego rzędu a transmitancja

$$g(s) = \frac{m(s)}{c(s)} = \frac{\beta_{n-1}s^{n-1} + \dots + \beta_1s + \beta_0}{s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \dots + \alpha_1s + \alpha_0} \quad (87)$$

odpowiada poszukiwanemu optymalnemu modelowi uproszczonemu.

Wprowadźmy, tak jak w [17], następujące oznaczenia

$$\begin{aligned} a &= [a_0, a_1, \dots, a_{n-1}]^T, \\ a &= [b_0, b_1, \dots, b_{n-1}]^T, \\ \alpha &= [\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{m-1}]^T, \\ \beta &= [\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{m-1}]^T, \\ e &= [e_0, e_1, \dots, e_{n+m-1}]^T, \\ f &= [f_0, f_1, \dots, f_{n+m-1}]^T, \\ p(s) &= [1, s, s^2, \dots, s^{n+m-1}]^T. \end{aligned}$$

Zdefiniujmy także macierze Toeplitza  $A$  i  $B$  o wymiarach  $(n+m) \times m$  oraz  $n+m$ -wymiarowe wektory  $c$  i  $d$ :

$$A = \begin{bmatrix} a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \dots & a_{n-m+2} & a_{n-m+1} & a_{n-m} \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_{n-m+3} & a_{n-m+2} & a_{n-m+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} b_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-3} & \dots & b_{n-m+2} & b_{n-m+1} & b_{n-m} \\ 1 & b_{n-1} & b_{n-2} & \dots & b_{n-m+3} & b_{n-m+2} & b_{n-m+1} \\ 0 & 1 & b_{n-1} & \dots & b_{n-m+4} & b_{n-m+3} & b_{n-m+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & b_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$c = \begin{bmatrix} 0_m \\ a \end{bmatrix}, \quad d = \begin{bmatrix} 0_m \\ b \end{bmatrix},$$

w których  $0_m$  oznacza  $m$ -wymiarowy wektor złożony z samych zer.

Przy wprowadzonych oznaczeniach błąd przybliżenia wynosi

$$e(s) = \frac{e^T p(s)}{f^T p(s) + s^{n+m}} \quad (88)$$

a minimalizowany funkcjonal jest równy

$$J(\alpha, \beta) = (A\beta - B\alpha + c)^T P(\beta)(A\beta - B\alpha + c), \quad (89)$$

przy czym

$$P(\beta) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{p(j\omega)}{f^T p(j\omega) + (j\omega)^{n+m}} \right] \left[ \frac{p(j\omega)}{f^T p(j\omega) + (j\omega)^{n+m}} \right]^* d\omega.$$

Zdefiniujmy następnie macierze  $C$ ,  $F$  i wektor kolumnowy  $h$  tak, aby

$$C(sI - F)^{-1}h = \frac{p(s)}{f^T p(s) + s^{n+m}}.$$

Jedną z możliwych realizacji trójki  $(C, F, h)$  jest postać kanoniczna regulatorowa [10], w której

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -f_0 & -f_1 & -f_2 & \dots & -f_{n+m} \end{bmatrix}, \quad h = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

a  $C$  jest macierzą jednostkową. Wówczas  $P$  jest rozwiązaniem macierzowego równania Lapunowa

$$FP + PF^T + (2\pi)hh^T = 0. \quad (90)$$

Gradient funkcjonału  $J(\alpha, \beta)$  jest równy

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = -2B^T P(A\beta - B\alpha + c), \quad (91)$$

$$\frac{\partial J}{\partial \beta} = 2A^T P(A\beta - B\alpha + c) - 2B^T PCh, \quad (92)$$

przy czym macierze  $P$  i  $Q$  są rozwiązaniami równań Lapunowa: (90) oraz

$$F^T Q + QF + (A\beta - B\alpha + c)(A\beta - B\alpha + c)^T = 0. \quad (93)$$

Po przyrównaniu  $\frac{\partial J}{\partial \alpha}$  i  $\frac{\partial J}{\partial \beta}$  do zera, otrzymujemy układ równań stanowiący warunki konieczne optymalnej w normie  $L^2$  aproksymacji transmitancji (86) przez model (87)

$$-2B^T P(A\beta - B\alpha + c) = 0, \quad (94)$$

$$2A^T P(A\beta - B\alpha + c) - 2B^T PCh = 0. \quad (95)$$

Jak widać, warunki te są zdecydowanie bardziej złożone od omawianych w punkcie 2 warunków (32), (33) lub (34).

Metoda zaproponowana w [17] oparta jest na doprowadzeniu podanych wyżej warunków do postaci

$$\alpha = \alpha - \frac{1}{2}(B^T P B)^{-1} g_\alpha,$$

$$\beta = \beta - \frac{1}{2}(A^T P A)^{-1} g_\beta,$$

w której  $g_\alpha = \frac{\partial J}{\partial \alpha}$  oraz  $g_\beta = \frac{\partial J}{\partial \beta}$ . Następnie w kolejnych iteracjach wyznaczane są po dwa kierunki poprawy. Służą one do niezależnej aktualizacji wartości  $\alpha^k$  i  $\beta^k$ . Ponieważ  $J(\alpha, \beta)$  jest, przy ustalonym  $\beta$ , dodatnio określoną formą kwadratową wektora  $\alpha$ , wartość  $\alpha^{k+1}$  minimalizującą  $J(\alpha, \beta^k)$  w kierunku  $g_\alpha^k = g_\alpha(\alpha^k, \beta^k)$  można wyznaczyć analitycznie. Wynosi ona

$$\alpha^{k+1} = \alpha^k - \frac{1}{2}(B^T P^k B)^{-1} g_\alpha^k, \quad (96)$$

przy czym  $P^k = P(\beta^k)$ . Wyznaczenie wektora  $\beta^{k+1}$  wymaga już rozwiązania pomocniczego zadania minimalizacji w odpowiednio określonym kierunku poprawy.

Przebieg algorytmu jest następujący [17]:

**krok 1** Określ wartości początkowe  $\alpha^k = \alpha^0$ ,  $\beta^k = \beta^0$ .

**krok 2** Utwórz  $F^k = F(\beta^k)$  i wyznacz rozwiązanie  $P^k = P(\beta^k)$  równania Lapunowa (90). Następnie korzystając ze wzoru (89) oblicz wartość funkcjonału  $J^k = J(\alpha^k, \beta^k)$  i znormalizuj ją  $\mathcal{J}^k = \sqrt{\frac{J^k}{J_0}}$ ,  $J_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \|f(j\omega)\|^2 d\omega$ . Jeśli  $\mathcal{J}^k - \mathcal{J}^{k-1} \leq \epsilon$ , zakończ działanie procedury.

**krok 3** Wyznacz ze wzorów (91) i (96) odpowiednio wektory  $g_\alpha^k$  oraz  $\alpha^{k+1}$ .

**krok 4** Wyznacz macierz  $Q^k = Q(\alpha^{k+1}, \beta^k)$  rozwiązując równanie Lapunowa (93), w którym macierz  $F$  została zastąpiona przez  $F^k$  a wektory  $\alpha$ ,  $\beta$  odpowiednio przez  $\alpha^{k+1}$  i  $\beta^k$ . Następnie wyznacz ze wzoru (92) wektor  $g_\beta^k = g_\beta(\alpha^{k+1}, \beta^k)$  i kierunek poprawy  $p_k = -\frac{1}{2}(A^T P^k A)^{-1} g_\beta^k$ , po czym wykonaj minimalizację w tym kierunku

$$\min_{\delta^k} J(\alpha^{k+1}, \beta^k + \delta^k p_k).$$

Oznaczając przez  $\tilde{\delta}^k$  wyznaczoną w tym pomocniczym zadaniu wartość otrzymaną

$$\beta^{k+1} = \beta^k + \tilde{\delta}^k p_k.$$

**krok 5** Podstaw  $k = k + 1$  i wróć do wykonania kroku 2.

W pracy [17] wykazana została zbieżność przedstawionego algorytmu. Warto jednak zauważyć, że jego implementacja wymaga rozwiązania w każdej iteracji dwóch macierzowych równań Lapunowa rzędu  $n + m$ , a także wyznaczenia minimum kierunkowego. Ma to duży wpływ na efektywność numeryczną tego algorytmu.

## 8 Metody optymalnej aproksymacji modeli w przestrzeni stanów

Dany jest model wysokiego rzędu

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad (97)$$

$$y(t) = Cx(t), \quad (98)$$

w którym  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^{m_i}$ ,  $y \in \mathbb{R}^{m_o}$ . Ma on być zastąpiony prostszym modelem

$$\dot{x}_r(t) = A_r x_r(t) + B_r u(t), \quad (99)$$

$$y_r(t) = C_r x_r(t), \quad (100)$$

w którym  $x_r \in \mathbb{R}^m$ ,  $u \in \mathbb{R}^{m_i}$ ,  $y_r \in \mathbb{R}^{m_o}$  oraz  $m < n$ .

Sformułowane w punkcie ?? zadanie optymalnej w normie  $L^2$  aproksymacji modeli polega na wyznaczeniu trójki  $(A_r, B_r, C_r)$  minimalizującej funkcjonal:

$$J(A_r, B_r, C_r) = \int_0^\infty \|e(t)\|^2 dt, \quad (101)$$

przy czym  $e(t) = y(t) - y_r(t)$ .

Aby wyznaczyć tę trójkę Wilson rozważał, [19], [20], model rozszerzony

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{A}\tilde{x}(t) + \tilde{B}u(t), \quad (102)$$

$$\tilde{y}(t) = \tilde{C}\tilde{x}(t), \quad (103)$$

w którym

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} x \\ x_r \end{bmatrix}, \quad \tilde{y} = y - y_r,$$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A_r \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} B \\ B_r \end{bmatrix}, \quad \tilde{C} = \begin{bmatrix} C & -C_r \end{bmatrix}.$$

Wówczas bowiem funkcjonal  $J$  może być sprowadzony do postaci

$$J(A_r, B_r, C_r) = \text{Trace}\{RM\}, \quad (104)$$

przy czym  $R$  jest rozwiązaniem równania Lyapunowa

$$\tilde{A}R + R\tilde{A}^T + S = 0 \quad (105)$$

a macierze  $M$  i  $S$  są równe

$$M = \begin{bmatrix} C^T C & -C^T C_r \\ -C_r^T C & C_r^T C_r \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} BB^T & BB_r^T \\ B_r B^T & B_r B_r^T \end{bmatrix}.$$

Wynika stąd, że zadanie optymalnej aproksymacji modeli jest równoważne zadaniu minimalizacji funkcjonału (104) względem  $A_r$ ,  $B_r$  i  $C_r$  przy ograniczeniach równościowych (105). Analizując funkcjonal Lagrangea

$$L(A_r, B_r, C_r, R) = \text{Trace}\{\lambda RM + (\tilde{A}R + R\tilde{A}^T + S)P\} \quad (106)$$

Wilson otrzymał warunki konieczne istnienia rozwiązania tego zadania. Prowadzą one do dwóch powiązanych ze sobą równań Lyapunowa

$$\tilde{A}R + R\tilde{A}^T + S = 0 \quad (107)$$

$$\tilde{A}^T P + P\tilde{A} + M = 0 \quad (108)$$

Przedstawiając następnie macierze  $R$  oraz  $P$  w postaci blokowej

$$R = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{12}^T & R_{22} \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12}^T & P_{22} \end{bmatrix},$$

odpowiadającej podziałowi macierzy  $\tilde{A}$ , Wilson otrzymał

$$A_r = \theta_1 A \theta_2, \quad (109)$$

$$B_r = \theta_1 B, \quad (110)$$

$$C_r = C \theta_2, \quad (111)$$

przy czym

$$\theta_1 = -P_{22}^{-1} P_{12}^T, \quad \theta_2 = R_{12}^T R_{22}^{-1}.$$

Niestety, uwzględnienie ostatnich zależności w równaniach (107) i (108) nie pozwala na wyznaczenie  $\theta_1$  i  $\theta_2$  w postaci jawnej. Dlatego w [19] dla układów z jednym wejściem lub jednym wyjściem a w [20] dla układów wielowymiarowych zaproponowany został algorytm iteracyjny wyznaczania wartości  $A_r$ ,  $B_r$  oraz  $C_r$ . Jego przebieg jest następujący [20]:

- krok 1** Wybierz macierz  $A_r^k = A_r^0$  zakładając jej strukturę, daną na przykład w postaci kanonicznej regulatorowej, oraz wyznacz tę macierz ustalając jej początkowe wartości własne.
- krok 2** Wybierz  $B_r^{k,1}$  tak, aby  $(A_r^k, B_r^{k,1})$  była parą sterowalną.
- krok 3** Dla ustalonego  $B_r^{k,1}$  rozwiąż równanie Lapunowa (107) i wykorzystując (111) wyznacz macierz  $C_r^{k,1}$ . Następnie dla ustalonego  $C_r^{k,1}$  rozwiąż równanie Lapunowa (108) i wykorzystując (110) wyznacz macierz  $B_r^{k,2}$ .
- krok 4** Powtarzaj procedurę z kroku 3 do momentu, aż kolejne rozwiązania będą takie same, to znaczy  $B_r^{k,i} = B_r^{k,i+1} = \dots$  oraz  $C_r^{k,i} = C_r^{k,i+1} = \dots$
- krok 5** Sprawdź, czy spełniony został założony warunek stopu. Jeśli tak, zakończ działanie algorytmu. W przeciwnym razie zmień zgodnie z założoną procedurą wartości własne macierzy  $A_r$  otrzymując  $A_r^{k+1}$  i wróć do kroku 2.

Przedstawiony algorytm został sprawdzony na wybranych przykładach. Ni gdzie jednak nie wykazano jego zbieżności.

Zadanie optymalnej aproksymacji modelu (97), (98) przez model (99), (100) było następnie rozważane przez Hylanda i Bernsteina [9]. Przeprowadzili oni bardzo dokładną analizę równań Lapunowa (107), (108) dochodząc do prostszych warunków koniecznych optymalności oraz wykazali istnienie projekcji, niekoniecznie ortogonalnej, której wynikiem jest model (99), (100).



Jeśli bowiem macierze  $A_r$ ,  $B_r$ ,  $C_r$  reprezentują optymalny model uproszczony, to muszą istnieć nieujemnie określone macierze  $\hat{P}$  oraz  $\hat{Q}$  takie, że dla pewnych  $\Gamma$ ,  $G$ ,  $M$  spełniających warunki

$$\hat{Q}\hat{P} = G^T M \Gamma, \quad \Gamma G^T = I$$

prawdziwe są równości

$$A_r = \Gamma A G^T, \quad (112)$$

$$B_r = \Gamma B, \quad (113)$$

$$C_r = C G^T. \quad (114)$$

Macierze  $\hat{P}$  oraz  $\hat{Q}$  spełniają ponadto warunki

$$\text{rank}(\hat{Q}) = \text{rank}(\hat{P}) = \text{rank}(\hat{Q}\hat{P}) = m,$$

$$\tau[A\hat{Q} + \hat{Q}A^T + BB^T] = 0, \quad (115)$$

$$\tau[A^T\hat{P} + \hat{P}A + C^T C] = 0, \quad (116)$$

przy czym  $\tau = G^T \Gamma$  reprezentuje macierz wspomnianej projekcji.

Przebieg algorytmu jest następujący [9]:

**krok 1** Przyjmij  $\tau^k = \tau^0 = I$ .

**krok 2** Wyznacz  $\hat{Q}^k$  oraz  $\hat{P}^k$  rozwiązując równania

$$(A - \tau^k A \tau_{\perp}^k) \hat{Q}^k + \hat{Q}^k (A - \tau^k A \tau_{\perp}^k)^T + BB^T = 0, \quad (117)$$

$$(A - \tau^k A \tau_{\perp}^k)^T \hat{P}^k + \hat{P}^k (A - \tau^k A \tau_{\perp}^k) + C^T C = 0, \quad (118)$$

w których  $\tau_{\perp}^k = I - \tau^k$ .

**krok 3** Wykonaj jednoczesną diagonalizację macierzy  $\hat{Q}^k$ ,  $\hat{P}^k$

$$\Phi^k \hat{Q}^k (\Phi^k)^T = (\Phi^k)^{-T} \hat{P}^k (\Phi^k)^{-1} = \Sigma^k \quad (119)$$

$$\Sigma^k = \text{diag}\{\sigma_1^k, \dots, \sigma_n^k\}, \quad \sigma_1^k \geq \sigma_2^k \geq \dots \geq \sigma_n^k \geq 0.$$

**krok 4** Jeśli  $k > 1$ , wyznacz

$$e_k = \sqrt{\frac{\text{trace}(C^T C W_e) - \text{trace}(C^T C \tau^k \hat{Q}^k (\tau^k)^T)}{\text{trace}(C^T C W_e)}}, \quad (120)$$

przy czym macierz  $W_e$  rozwiązaniem równania Lapunowa

$$A W_e + W_e A^T + BB^T = 0.$$

Jeśli  $|e_k - e_{k-1}|$  jest mniejsza od założonej wartości przejdź do kroku 8. W przeciwnym razie przejdź do wykonywania kroku 5.

**krok 5** Wyznacz  $m$  operatorów projekcji

$$\Pi_{i_1}[\widehat{Q}^k \widehat{P}^k], \dots, \Pi_{i_m}[\widehat{Q}^k \widehat{P}^k]$$

na wektory własne iloczynu macierzy  $\widehat{Q}^k \widehat{P}^k$

$$\Pi_i[\widehat{Q}^k \widehat{P}^k] = \Phi^k E_i(\Phi^k)^{-1}.$$

$E_i$  jest macierzą, w której element  $(i, i)$  jest równy 1 a wszystkie pozostałe elementy są równe 0.

**krok 6** Wyznacz zaktualizowaną wartość operatora projekcji

$$\tau^{k+1} = \sum_{r=1}^m \Pi_{i_r}[\widehat{Q}^k \widehat{P}^k] \quad (121)$$

**krok 7** Sprawdź, czy jest spełnione wybrane kryterium stopu. Jeśli nie, podstaw  $k = k + 1$  i wróć do kroku 2.

**krok 8** Podstaw

$$\widehat{Q} = \tau^k \widehat{Q}^k (\tau^k)^T, \quad \widehat{P}^k = (\tau^k)^T \widehat{P}^k \tau^k. \quad (122)$$

## 9 Przykłady i wyniki obliczeń

W kolejnym przykładzie rozważymy analizowany w [7] układ szóstego rzędu, w którym

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -5.4545 & 4.5455 & 0 & -0.0545 & 0.0455 & 0 \\ 10 & -21 & 11 & 0.10 & -0.2100 & 0.1100 \\ 0 & 5.5 & -6.5 & 0 & 0.0550 & -0.0650 \end{bmatrix},$$

$$b^T = [0 \ 0 \ 0 \ 0.0909 \ 0.4 \ -0.5], \quad c = [2 \ -2 \ 3 \ 0 \ 0 \ 0]$$

Jego transmitancja jest równa

$$f(s) = \frac{-2.1182s^4 - 0.2481s^3 - 24.832s^2 - 0.906s - 45.364}{s^6 + 0.3295s^5 + 32.972s^4 + 3.6093s^3 + 180.58s^2 + 3.5662s + 119.08}.$$

Układ ten ma trzy pary biegunów zespolonych  $-0.0038 \pm j0.8738$ ,  $-0.0297 \pm j2.4374$  oraz  $-0.1313 \pm j5.1217$ . Oznacza to, że zastąpienie tego układu modelem uproszczonym nieparzystego rzędu nie jest zadaniem prostym.

Przyjmijmy zatem, że model uproszczony jest modelem pierwszego rzędu

$$g(s) = \frac{m_0}{s + c_0}.$$

Algorytm podstawowy iteracyjnej interpolacji nie był zbieżny w tym przypadku. Najlepszym z rozpatrywanych w ciągu 200 iteracji przybliżeniem okazał się model

$$g_{01}(s) = \frac{-0.3094}{s + 0.4365},$$

dla którego błąd przybliżenia  $J = 3.986$ .

Bardzo dobrze działały natomiast algorytmy zmodyfikowane. Pierwszy z nich przy współczynniku skrócenia kroku  $\alpha = 0.5$  znalazł w sześciu iteracjach model

$$g_{m1}(s) = \frac{-0.3682}{s + 0.6746},$$

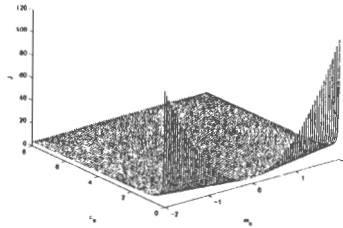
dla którego  $J = 3.976$ . Drugi algorytm zmodyfikowany znalazł ten sam model w czterech iteracjach.

We wszystkich trzech przypadkach punktem startowym był model, w którym  $c_0^{(0)} = 1$ . Dla modeli z jednym wejściem i jednym wyjściem wartość  $m_0^{(0)}$  nie musi być określana. Okazało się również, że nawet dla bardzo odległego od rozwiązania optymalnego przybliżenia początkowego, na przykład dla  $c_0^{(0)} = 100$ , liczba iteracji nieznacznie przekraczała 10.

Podobne zachowanie się analizowanych algorytmów można było zaobserwować przy wyznaczaniu modeli uproszczonych rzędu 3 oraz 5.

Natomiast zachowanie się standardowego algorytmu gradientowego zależy w istotny sposób od punktu startowego. Na przykład dla  $m_0^{(0)} = 1$  i  $c_0^{(0)} = 1$  algorytm gradientowy nie był zbieżny w założonej liczbie iteracji. Tylko wtedy gdy punkt startowy znajdował się bardzo blisko poszukiwanego minimum, na przykład  $m_0^{(0)} = -0.2$  i  $c_0^{(0)} = 0.4$  algorytm gradientowy znajdował je.

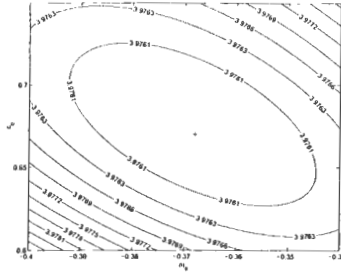
Takie zachowanie się algorytmu gradientowego jest wynikiem pokazanego na rys. 3 bardzo "płaskiego" kształtu powierzchni stanowiącej wykres funkcjonału  $J(m_0, c_0)$ . Dodatkowo na rys. 4 pokazane zostały poziomice tego funkcjonału. Znakiem + zaznaczony jest punkt reprezentujący optymalny model uproszczony.



Rysunek 3: Wykres funkcjonału błędów  $J(m_0, c_0)$ .

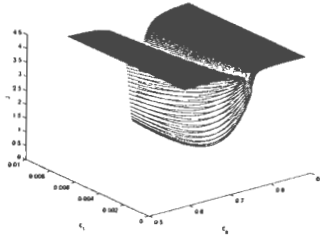
Załóżmy teraz, że wyznaczany model uproszczony jest modelem drugiego rzędu

$$g(s) = \frac{m_1 s + m_0}{s^2 + c_1 s + c_0}.$$



Rysunek 4: Poziomice funkcjonału błędu  $J(m_0, c_0)$  w otoczeniu minimum.

W celu prezentacji graficznej wyników przyjmijmy również, że dla danych wartości  $c_0$  i  $c_1$  współczynniki  $m_0$  oraz  $m_1$  są zawsze ustalane w sposób optymalny. Dzięki temu błąd aproksymacji jest funkcjałem zależnym od dwóch tylko argumentów  $c_0$  i  $c_1$ . Funkcjonał ten ma trzy minima lokalne osiągane w punktach  $c_0^1 = 0.7634$  i  $c_1^1 = 0.0076$ ,  $c_0^2 = 5.9275$  i  $c_1^2 = 0.0602$ ,  $c_0^3 = 26.1370$  i  $c_1^3 = 0.2682$ . Odpowiadające im wartości funkcjonału błędu wynoszą odpowiednio  $J(c_0^1, c_1^1) = 0.2934$ ,  $J(c_0^2, c_1^2) = 3.979$  oraz  $J(c_0^3, c_1^3) = 3.8777$ . Wykres przedstawiający wszystkie trzy minima lokalne jest mało czytelny. Dlatego dwa z nich pokazane zostały na rys. 5 i rys. 6. Odpowiadające im zbiory poziomice przedstawione są na rys. 7 i rys. 8.

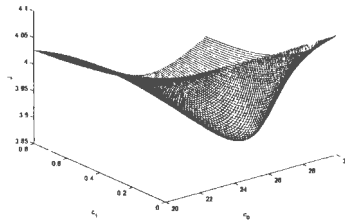


Rysunek 5: Wykres zredukowanego funkcjonału błędu  $J(c_0, c_1)$  w otoczeniu punktu  $c_0^1 = 0.7634$  i  $c_1^1 = 0.0076$ .

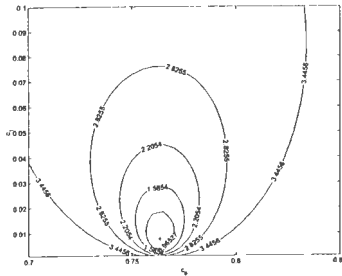
Modele uproszczone odpowiadające minimum lokalnym mają bieguny zespolone położone bardzo blisko trzech par biegunów modelu pełnego rzędu. Startując na przykład z  $c^{(0)}(s) = s^2 + s + 1$  wszystkie trzy algorytmy znalazły ten sam model uproszczony

$$g(s) = \frac{-0.0035s - 0.2095}{s^2 + 0.0076s + 0.7634},$$

którego bieguny wynoszą  $s_{1,2} = -0.0038 \pm 0.8738i$ . Startując z kolei z  $c^{(0)}(s) =$



Rysunek 6: Wykres zredukowanego funkcjonału błędu  $J(c_0, c_1)$  w otoczeniu punktu  $c_0^3 = 26.1370$  i  $c_1^3 = 0.2682$ .



Rysunek 7: Poziomice funkcjonału błędu  $J(c_0, c_1)$  w otoczeniu punktu  $c_0^1 = 0.7634$  i  $c_1^1 = 0.0076$ .

$s^2 + 100s + 100$  wszystkie trzy algorytmy znalazły model uproszczony

$$g(s) = \frac{-0.0222s + 1.6683}{s^2 + 0.2672s + 26.3417},$$

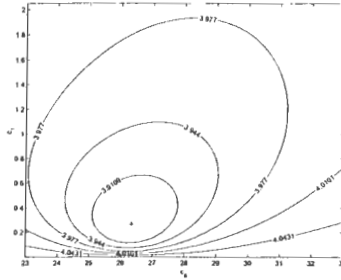
którego bieguny są równe  $s_{1,2} = -0.1341 \pm 5.1306i$ . Jeśli natomiast punkt startowy był równy  $c^{(0)}(s) = s^2 + s + 10$ , to otrzymywany był model uproszczony

$$g(s) = \frac{0.0101s + 0.2624}{s^2 + 0.0602s + 5.9275},$$

którego bieguny wynoszą  $s_{1,2} = -0.0301 \pm 2.4345i$ .

## Literatura

- [1] P. R. Aigrain and E. M. Williams. Synthesis of n-reactance networks for desired transient response. *Journal of Applied Physics*, 20:597–600, 1949.



Rysunek 8: Poziomice funkcjonału błędu  $J(c_0, c_1)$  w otoczeniu punktu  $c_0^3 = 26.1370$  i  $c_1^3 = 0.2682$ .

- [2] V. Erohin. On the best approximation of analytic functions by rational functions. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, (128):29–32, 1959.
- [3] A. Ferrante, W. Krajewski, A. Lepschy, and U. Viaro. A new algorithm for  $l_2$  optimal model reduction. In S. Bańka, S. Domek, and Z. Emirsajłow, editors, *Proceedings of the International Symposium on Mathematical Models in Automation and Robotics*, pages 224–229, Międzyzdroje, Polska, August 1998. Wydawnictwa Politechniki Szczecińskiej.
- [4] A. Ferrante, W. Krajewski, A. Lepschy, and U. Viaro. Convergent algorithm for  $l_2$  model reduction. *Automatica*, 35(1):75–79, 1999.
- [5] A. Ferrante, W. Krajewski, A. Lepschy, and U. Viaro. A convergent algorithm for  $l_2$  optimal mimo model reduction. In E. Kuljanic, editor, *Advanced Manufacturing Systems and Technology*, volume 406 of *CISM Courses and Lectures*, pages 651–657. Springer Verlag, 1999.
- [6] F. R. Gantmacher. *The Theory of Matrices*, volume 1. Chelsea Publishing Company, New York, 1977.
- [7] W. Gawronski and J. N. Juang. Model reduction for flexible structures. In W. Leondes, editor, *Control and Dynamic Systems*, pages 143–222. Academic Press, New York, 1990.
- [8] R. A. Horn and C. R. Johnson. *Matrix Analysis*. Cambridge University Press, 1990.
- [9] D. C. Hyland and D. S. Bernstein. The optimal projection equations for model reduction and the relationships among the methods of wilson, skelton and moore. *IEEE Trans. Aut. Control*, AC-30(12):1201–1211, 1985.
- [10] T. Kaczorek. *Teoria sterowania i systemów*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 1993.

- [11] W. Krajewski, A. Lepschy, G. A. Mian, and U. Viaro. Optimality conditions in multivariable  $l_2$  model reduction. *Journal of the Franklin Institute*, 330(3):431–439, 1993.
- [12] W. Krajewski, A. Lepschy, M. Redivo-Zaglia, and U. Viaro. Results of the application of an algorithm for  $l_2$  model reduction. *Journal of Circuits, Systems, and Computers*, 4(3):295–303, 1994.
- [13] W. Krajewski, A. Lepschy, M. Redivo-Zaglia, and U. Viaro. A program for solving the  $l_2$  reduced-order model problem with fixed denominator degree. *Numerical Algorithms*, 9:355–377, 1995.
- [14] A. Lepschy, G. A. Mian, G. Pinato, and U. Viaro. Rational  $l_2$  approximation: a nongradient algorithm. In *Proc. 30th Conference on Decision and Control*, pages 2321–2324, Brighton, England, 1991.
- [15] D. G. Luenberger. *Teoria optymalizacji*. PWN, Warszawa, 1974.
- [16] L. Meier and D. G. Luenberger. Approximation of linear constant systems. *IEEE Trans. Aut. Control*, AC-12:585–588, 1967.
- [17] J. T. Spanos, M. H. Milman, and D. L. Mingori. A new algorithm for  $l_2$  optimal model reduction. *Automatica*, 28:897–909, 1992.
- [18] J. L. Walsh. *Interpolation and Approximation by Rational Functions in the Complex Domain*. AMS, Providence, RI, 2nd edition, 1956.
- [19] D. A. Wilson. Optimum solution of model-reduction problem. *Proc. IEE*, 117:1161–1165, 1970.
- [20] D. A. Wilson. Model reduction for multivariable systems. *Int. J. Contr.*, 20(1):57–64, 1974.











