

Raport Badawczy
Research Report

RB/49/2014

**Modele opóźnień w systemach
ekonomicznych.
Własności i zastosowania.
Część III. Modele opóźnienia
w systemach przepływów**

J. Gadomski

Instytut Badań Systemowych
Polska Akademia Nauk

Systems Research Institute
Polish Academy of Sciences



POLSKA AKADEMIA NAUK

Instytut Badań Systemowych

ul. Newelska 6

01-447 Warszawa

tel.: (+48) (22) 3810100

fax: (+48) (22) 3810105

Kierownik Zakładu zgłaszający pracę:
Dr hab. inż. Lech Kruś, prof. PAN

Warszawa 2014

SPIS TREŚCI

WSTĘP

CZĘŚĆ I Wprowadzenie

- Rozdział I.1 Podstawowe pojęcia
- Rozdział I.2 Rozkład opóźnienia
- Rozdział I.3 Wynikowy rozkład opóźnienia
- Rozdział I.4 Wybrane własności dynamiczne
- Rozdział I.5 Mierzenie opóźnienia
- Rozdział I.6 Średnia rozkładu opóźnienia wynikowego $M(U_i)$ jako miara opóźnienia (1)
- Rozdział I.7 Średnia rozkładu opóźnienia wynikowego $M(U_i)$ jako miara opóźnienia (2)
- Rozdział I.8 Wielomian operatorowy i funkcja tworząca
- Rozdział I.9 Podstawowe stałe struktury/rozkłady opóźnienia rozłożonego
 - I.9.1 Skończone struktury/rozkłady opóźnienia
 - I.9.1.1 Liniowa struktura opóźnienia
 - I.9.1.2 Model Almon
 - I.9.2 Niekończone struktury/rozkłady opóźnienia
 - I.9.2.1 Rozkład Pascala-Solowa
 - I.9.2.2 Model Tsurumi
 - I.9.2.3 Model z rozkładem Poissona
 - I.9.2.4 Model Jorgensena
- Rozdział I.10 Źródła zmienności struktur opóźnienia
- Podsumowanie Części I

CZĘŚĆ II Złożone struktury modeli opóźnienia rozłożonego

- Rozdział II.1. Suma modeli opóźnienia rozłożonego
- Rozdział II.2. Superpozycja modeli opóźnienia rozłożonego
- Rozdział II.3. Suma modeli opóźnienia rozłożonego wielu zmiennych
- Podsumowanie Części II

CZĘŚĆ III Modele opóźnienia w systemach przepływów

- Rozdział III.1 Sformułowanie problemu
- Rozdział III.2 Modele opóźnienia w systemach przepływów ze stałym rozkładem opóźnienia
- Rozdział III.3 Modele opóźnień w systemach przepływów ze zmiennymi rozkładami opóźnień
 - III.3.1 Model z dwoma parametrami
 - III.3.1.1 Model populacji
 - III.3.1.2 Model zmiennej sprawności procesów inwestowania w Polsce przed 1989 r.
 - III.3.1.3 Model transmisji ceny
 - III.3.1.4 Model kredytu
- Podsumowanie Części III

Dodatek

Bibliografia

Część III. Modele opóźnienia w systemach przepływów

III.1 Sformułowanie problemu

Odrębną podkategorię modeli opóźnienia stanowią modele stosowane w modelowaniu systemów przepływów, składających się z elementów: zasobu oraz strumienia zasilającego i strumienia wyczerpującego pewien zasób, gdzie strumień wyczerpujący można przedstawić w postaci modelu opóźnienia rozłożonego względem strumienia zasilającego.

W interpretacji stosowanych tu kategorii strumieni i zasobów nie zawsze zachodzi daleko idąca analogia do przepływów rzeczowych; zarówno strumienie jak i zasoby mogą nie być skupione w przestrzeni, jednak z systemami tymi omawiane modele podzielają metodologię pomiaru, którą w pewnym uproszczeniu można przedstawić w postaci dwóch zasad: wielkości zasobów obliczane są w punktach na osi czasu (odległości między tymi punktami są określane przez jednostkę czasu wyznaczającą długość jednostkowego okresu / częstotliwość pomiaru) i wyrażone w jednostkach miary zasobów; wielkości strumieni obliczane są przez zliczanie liczby jednostek miary, które „przeplęły” w danym okresie w przeliczeniu na przyjętą jednostkę czasu.

Modele opóźnienia w systemach przepływów znajdują zastosowanie w wielu dziedzinach, m. in. służą do opisu procesów demograficznych, logistycznych, hydrologicznych, finansowych, ewidencji środków trwałych i in.

Podstawowy element systemu przepływów składa się ze strumienia X zasilającego pewien zasób Z , który jest opróżniany (wyczerpywany) przez strumień Y wypływający z tego zasobu.

Równanie zasobu Z ma następującą postać:

$$z_t = z_{t-1} + x_t - y_t, \quad (3.1)$$

gdzie x_t i y_t to odpowiednio natężenia strumieni: zasilającego i wyczerpującego zasób Z w okresie t , natomiast przez z_{t-1} i z_t oznaczone zostały wielkości zasobu Z na początku i pod koniec okresu t . O wielkościach x_t , y_t i z_t stosowane będzie założenie, że dla wszystkich t są nieujemne - strumienie X i Y nie zmieniają kierunku (płyną odpowiednio do i z zasobu; ruch jednokierunkowy), ponadto nie przewiduje się ujemnych stanów zasobu. Równanie (3.1) można również przedstawić w postaci równania bilansu:

$$z_t + y_t = z_{t-1} + x_t,$$

którego prawą stronę interpretuje się jako podaż, a stronę lewą jako popyt ex post.

Gdy przedmiotem analizy jest model opóźnienia w systemie przepływów, między strumieniem wypływającym Y i strumieniem zasilającym X zachodzi następujący związek:

$$y_t = \sum_{i=0}^{\infty} v_{t,i} x_{t-i} + \varepsilon_t, \quad (3.2)$$

gdzie:

ε_t - składnik losowy spełniający warunki:

$$E(\varepsilon_t) = 0,$$

$$E(\varepsilon_{i-1}, \varepsilon_{i-j}) = 0; i \neq j; i, j = 0, 1, 2, \dots;$$

$$E(\varepsilon_i^2) = \sigma^2.$$

zdefiniowany podobnie jak dla zależności (1.8),

- współczynniki v_{i1} , $i=0, 1, 2, \dots$; tworzą strukturę opóźnienia dla której istnieje rozkład opóźnienia W_t ,

a_i - istnieje skończona suma (mnożnik długookresowy opóźnienia):

$$a_i = \sum_{l=0}^{\infty} v_{i+l} < \infty.$$

Zależność (3.2) jest zgodna ze specyfikacją (1.1a), w której składnik losowy jest podany *explicite*; pozostały składnik (suma) reprezentuje część deterministyczną tej zależności.

Dla każdego okresu t współczynniki v_{i1} , $i=0, 1, 2, \dots$; przyjmują wartości zapewniające spełnienie następującego warunku:

$$z_{t-1} + x_t \geq y_t \quad (3.3)$$

wiązającego się z założoną nieujemnością zasobu Z i wzoru (3.1), oraz zapewniającego spełnienie warunku (3.3) mówiącego, że z zasobu nie może wypłynąć więcej od ilości, która w nim była na początku okresu, powiększonej o to, co w tym okresie wpłynęło.

Zależność (3.2) zawiera składnik losowy ε_t występujący w równaniu (1.1a). Jak się okaże dalej, sposób uwzględnienia czynnika losowego ma istotne znaczenie. Gdy nie dopuszcza się ujemności zmiennej zależnej, dla składnika losowego oznacza to ograniczoność od dołu:

$$\varepsilon_t \geq -\sum_{l=0}^{\infty} v_{t+l} x_{t-l},$$

co wskazywałoby na związek wariancji z wartościami zmiennej niezależnej i strukturą opóźnienia.

Gdy wymagana jest szczelność systemu, oznaczająca, że nie są dopuszczane ani ubytki, ani dodatkowe napływy niepowiązane ze strumieniem zasilającym X , składnik losowy w zależności (3.2) może być wąsko interpretowany jako błąd pomiaru strumienia Y . Alternatywne podejście polega na posłużeniu się specyfikacją (1.1b), w której składnik losowy nie jest podany *explicite*.

Element systemu przepływów opisany za pomocą zależności (3.1) i (3.2) ma szczególną interpretację. Zasób Z można nazwać zasobem w opóźnieniu, ponieważ stanowi zasób tych części strumienia X , które „weszły” w opóźnienie, lecz z niego nie „wyszły”, zalegają w nim, w postaci części strumienia Y^{II} .

Model opóźnienia (3.2), spełniający dla każdego t warunki (3.1) i (3.3), ma szereg szczególnych własności.

¹ Cudzystów jest w tym przypadku uzasadniony, ponieważ nie wszystkie tak opisywane obiekty mają interpretację fizyczną.

Wielkość zasobu z_t pod koniec okresu t zależy od wielkości zasobu z_{t-k} sprzed k okresów ($k = 1, 2, 3, \dots$) oraz wielkości strumieni X i Y z ostatnich k okresów:

$$z_t = z_{t-k} + \sum_{i=0}^{k-1} (x_{t-i} - y_{t-i}). \quad (3.4)$$

Zależność (3.4) uzyskuje się rekurencyjnie na podstawie wzoru (3.1) przez kolejne zastępowanie wyrażeń z_{t-i} , $i = 1, 2, \dots, k-1$; wyrażeniami $z_{t-i-1} + x_{t-i} - y_{t-i}$.

Ponieważ na podstawie (3.1) i (3.2) dla kolejnych $j, j = 1, 2, 3, \dots$; zachodzą zależności:

$$y_{t-j} = \sum_{i=0}^{\infty} v_{t-j,i} x_{t-j-i} + \varepsilon_{t-j},$$

oraz

$$x_{t-j} - y_{t-j} = (1 - v_{t-j,0})x_{t-j} - v_{t-j,1}x_{t-j-1} - v_{t-j,2}x_{t-j-2} - \dots - \varepsilon_{t-j},$$

których podstawienie do (3.4) daje zależność:

$$\begin{aligned} z_t &= z_{t-k} \\ &+ (1 - v_{t,0})x_t - v_{t,1}x_{t-1} - v_{t,2}x_{t-2} - v_{t,3}x_{t-3} - \dots - \varepsilon_t \\ &+ (1 - v_{t-1,0})x_{t-1} - v_{t-1,1}x_{t-2} - v_{t-1,2}x_{t-3} - v_{t-1,3}x_{t-4} - \dots - \varepsilon_{t-1} \\ &\dots \dots \dots \\ &+ (1 - v_{t-k+1,0})x_{t-k+1} - v_{t-k+1,1}x_{t-k+2} - v_{t-k+1,2}x_{t-k+3} - v_{t-k+1,3}x_{t-k+4} - \dots - \varepsilon_{t-k+1} \end{aligned}$$

prowadzącą do następującego wzoru

$$z_t = z_{t-k} + \sum_{i=0}^{k-1} (1 - \sum_{j=0}^i v_{t-i+j,j})x_{t-i} + \sum_{i=k}^{\infty} - (\sum_{j=0}^{k-1} v_{t-i+j,j})x_{t-i} - \sum_{i=0}^{k-1} \varepsilon_{t-i} \quad (3.5)$$

ponieważ dla kolejnych $k, k=1, 2, 3, \dots$;

$$\begin{aligned} z_t &= z_{t-1} + (1 - v_{t,0})x_t - v_{t,1}x_{t-1} - v_{t,2}x_{t-2} - v_{t,3}x_{t-3} - \dots - \varepsilon_t \\ z_t &= z_{t-2} + (1 - v_{t,0})x_t - v_{t,1}x_{t-1} - v_{t,2}x_{t-2} - v_{t,3}x_{t-3} - \dots - \varepsilon_t + \\ &\quad + (1 - v_{t-1,0})x_{t-1} - v_{t-1,1}x_{t-2} - v_{t-1,2}x_{t-3} - v_{t-1,3}x_{t-4} - \dots - \varepsilon_{t-1} \\ z_t &= z_{t-3} + (1 - v_{t,0})x_t - v_{t,1}x_{t-1} - v_{t,2}x_{t-2} - v_{t,3}x_{t-3} - \dots - \varepsilon_t \\ &\quad + (1 - v_{t-1,0})x_{t-1} - v_{t-1,1}x_{t-2} - v_{t-1,2}x_{t-3} - v_{t-1,3}x_{t-4} - \dots - \varepsilon_{t-1} \\ &\quad + (1 - v_{t-2,0})x_{t-2} - v_{t-2,1}x_{t-3} - v_{t-2,2}x_{t-4} - v_{t-2,3}x_{t-5} - \dots - \varepsilon_{t-2}; \end{aligned}$$

Przez pogrupowanie wyrażeń zawierających to samo x_{t-i} $i=0, 1, 2, \dots$; uzyskujemy:

$$\begin{aligned} z_t &= z_{t-1} + (1 - v_{t,0})x_t - \sum_{i=1}^{\infty} v_{t,i}x_{t-i} - \varepsilon_t \\ z_t &= z_{t-2} + (1 - v_{t,0})x_t + (1 - v_{t-1,0} - v_{t,1})x_{t-1} - \sum_{i=2}^{\infty} (v_{t,i} + v_{t-1,i-1})x_{t-i} - \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1} \\ z_t &= z_{t-3} + (1 - v_{t,0})x_t + (1 - v_{t-1,0} - v_{t,1})x_{t-1} + (1 - v_{t-2,0} - v_{t-1,1} - v_{t,2})x_{t-2} - \\ &\quad - \sum_{i=3}^{\infty} (v_{t-2,i-2} + v_{t-1,i-1} + v_{t,i})x_{t-i} - \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1} - \varepsilon_{t-2}, \end{aligned}$$

i ostatecznie

$$z_t - z_{t-k} = \sum_{i=0}^{k-1} (1 - \sum_{j=0}^i v_{t-i+j,j})x_{t-i} + \sum_{i=k}^{\infty} - (\sum_{j=0}^{k-1} v_{t-i+j,j})x_{t-i} - \sum_{i=0}^{k-1} \varepsilon_{t-i}. \quad (3.6)$$

Prawa strona zależności (3.6) składa się z trzech części objaśniających przyrost $z_t - z_{t-k}$. Wyrażenie w nawiasie pierwszej sumy (licząc od strony lewej) pokazuje, jaka część strumienia $x_{t,i}$, który zasilił zasób Z w okresach $t-i$, $i = 0, 1, 2, \dots, k-1$; pozostaje w tym zasobie pod koniec okresu t . Suma druga reprezentuje tę ilość, która została utworzona przed okresem $t-k-1$, a która z zasobu w opóźnieniu Z wypłynęła w okresach $t-k+1, t-k+2, \dots, t$. Suma trzecia pokazuje, że błąd pomiaru zasobu w opóźnieniu kumuluje się.

Wyrażenia

$$1 - \sum_{j=0}^i v_{t-i+j,j}, \quad i = 0, 1, 2, 3, \dots;$$

ze wzoru (3.6) pokazują, jaka część strumienia X , która wpłynęła do zasobu Z w okresie $t-i$ zalega (pozostaje) pod koniec okresu t w zasobie Z :

$1 - v_{t,0}$, część strumienia x_t z okresu t , która pozostała w zasobie Z pod koniec okresu t ,
 $1 - v_{t-1,0} - v_{t,1}$, część strumienia x_{t-1} z okresu $t-1$, zalegająca w zasobie Z pod koniec okresu t ;
 $1 - v_{t-2,0} - v_{t-1,1} - v_{t,2}$, część strumienia x_{t-2} z okresu $t-2$, zalegająca w zasobie Z pod koniec okresu t ; itd.

Przyjęcie tej interpretacji określa warunki:

$$1 - \sum_{j=0}^i v_{t-i+j,j} \geq 0, \quad i = 0, 1, 2, 3, \dots; \quad (3.7)$$

z których wynika, że łączny wpływ w kolejnych okresach jednostek, które wpłynęły w okresie $t-i$, nie może być większy od ilości x_{t-i} . Warunki te zapewniają spełnienie zasady zachowania masy.

Definicja Element systemu przepływów określony za pomocą zależności (3.1) i (3.2) osiąga stan równowagi, gdy zachodzi równość

$$E(y_t) = x_t,$$

tzn. natężenie strumienia zasilającego i wartość oczekiwana strumienia wyczerpującego są sobie równe.

Nietrudno zauważyć, że w równowadze elementu systemu przepływów poziom zasobu w opóźnieniu nie ulega zmianie,

$$z_t = z_{t-1},$$

a ponadto,

$$x_t - \sum_{i=0}^{\infty} v_{t,i} x_{t-i} = (1 - v_{t,0}) x_t - v_{t,1} x_{t-1} - v_{t,2} x_{t-2} - v_{t,3} x_{t-3} - \dots = 0.$$

Z powyższej zależności wynika, że w stanie ustalonym element systemu przepływów osiąga stan równowagi, gdy

$$\sum_{i=0}^{\infty} v_{t,i} = 1.$$

Powyższy warunek wskazuje, że w stanie ustalonym przy wartościach mnożnika długookresowego mniejszych od jedności, $a_i < 1$, następuje nieskończony wzrost zasobu w opóźnieniu, a przy wartościach mnożnika długookresowego większych od jedności, $a_i > 1$, następuje wyzerowanie tego zasobu.

Definicja Mechanizm opóźnienia nazywany będzie niestabilnym w dwóch przypadkach: gdy w stanie ustalonym mnożnik długookresowy modelu (3.2) przyjmuje wartość mniejszą od jeden, lub gdy w stanie ustalonym mnożnik długookresowy modelu (3.2) przyjmuje wartość większą od jeden. Mechanizm opóźnienia nazywany będzie stabilnym, jeśli w stanie ustalonym mnożnik długookresowy modelu (3.2) przyjmuje wartość jeden.

W pierwszym przypadku trwałej niestabilności poziom zasobu w opóźnieniu Z wzrasta, natomiast w drugim przypadku trwałej niestabilności może doprowadzić do wyzerowania zasobu w opóźnieniu.

Układ (3.1) i (3.2) w stanie ustalonym pozostanie stabilny tak długo, jak długo zmianie nie ulegnie wartość mnożnika długookresowego $a_i = 1$. Przy zmiennej wartości mnożnika długookresowego zachowanie niezerowych i ograniczonych wielkości zasobu w opóźnieniu wymaga, aby przyjmował on wartości na przemian większe i mniejsze od jedności.

Warto zauważyć, że w stanie ustalonym na poziomie zerowym, tj., gdy $x^* = 0$, element systemu przepływów określony za pomocą zależności (3.1) i (3.2) znajduje się w równowadze, mimo niestabilności mechanizmu opóźnienia.

Obecnie skupimy uwagę na zbadaniu zależności poziomu zasobu Z od strumieni X w nieskończonej historii. Przejście w zależności (3.5) z $k \rightarrow \infty$ granicy, przy spełnieniu warunku

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left[\sum_{i=k}^{\infty} - \left(\sum_{j=0}^{k-i} v_{i+j,j} \right) x_{i+j} \right] = 0,$$

prorowadzi do zależności:

$$z_i = \sum_{i=0}^{\infty} \left(1 - \sum_{j=0}^i v_{i+j,j} \right) x_{i+j} + \widehat{\varepsilon}_i, \quad (3.8)$$

gdzie

$$\widehat{\varepsilon}_i = - \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon_{i+j}$$

Wyrażenie $\widehat{\varepsilon}_i$ w zależności (3.8), które - przy standardowych założeniach o zerowej wartości oczekiwanej i ograniczonej wariancji składowych sumy - ma wartość oczekiwaną równą zero oraz nieskończoną wariancję. Nie jest to sytuacja komfortowa i dlatego celowe wydaje się założenie, że zasób w opóźnieniu ma skończoną historię, rozpoczynającą się od pewnego okresu t_p , przed którym dla wszystkich $t < t_p$ wszystkie $x_t = \varepsilon_t = 0$.

Wzór (3.8) jest ważny, pokazuje bowiem strukturę czasową zasobu w opóźnieniu Z ; który został zasilany przez strumień wpływający X oraz wyczerpywany przez strumień Y w okresach $t, t-1, t-2, \dots$

Przyjmując oznaczenie

$$s_{it} = I - \sum_{j=0}^i v_{t-i+j,j}; i = 0, 1, 2, 3, \dots; \quad (3.9)$$

zależność (3.8) można przedstawić w następującej postaci:

$$z_t = \sum_{i=0}^{\infty} s_{it} x_{t-i} + \hat{\varepsilon}_t. \quad (3.10)$$

Współczynniki $s_{it}, i=0, 1, 2, \dots$; wzór (3.9), tworzą strukturę opóźnienia S_t zasobu w opóźnieniu Z względem strumienia zasilającego X . Między współczynnikami struktury S_t zasobu w opóźnieniu Z w dwóch kolejnych okresach zachodzi związek wyrażający się następującym wzorem:

$$s_{t+1,t+1} = s_{t,t} - v_{t+1,t+1}; i = 0, 1, 2, 3, \dots; \quad (3.11)$$

Prawdziwość zależności (3.11) wynika z tego, że zgodnie ze wzorem (3.9)

$$s_{it} = I - \sum_{j=0}^i v_{t-i+j,j}; i = 0, 1, 2, 3, \dots;$$

oraz

$$s_{t+1,t+1} = I - \sum_{j=0}^{t+1} v_{t+1-t+j,j} = I - \sum_{j=0}^t v_{t-i+j,j} - v_{t+1,t+1} = s_{it} - v_{t+1,t+1}.$$

Poziom z_t zasobu w opóźnieniu Z pod koniec okresu t , wzór (3.10), można interpretować jako sumę zasobów cząstkowych $z_{it}=s_{it} x_{t-i}, i=0, 1, 2, \dots$; z których każdy jest utworzony przez strumień zasilający ten zasób w okresach $t-i, i=0, 1, 2, \dots$; i jest wyczerpywany w kolejnych okresach: $t-i+1, t-i+2, \dots, t$. W świetle tej interpretacji przydatny okazuje się zapis zależności (3.8) w następującej postaci:

$$z_t = \sum_{i=0}^{\infty} z_{it} + \hat{\varepsilon}_t; \quad (3.12)$$

gdzie $z_{it}, i=0, 1, 2, \dots$; to ilość jednostek strumienia X , które wpłynęły do zasobu opóźnionego Z w okresie $t-i, i=0, 1, 2, \dots$; i które pozostają (zalegają) w tym zasobie pod koniec okresu t .

Interpretacja ta pozwala na sformułowanie warunków zapewniających spełnienie założenia o jednokierunkowości przepływów:

$$0 \leq v_{t+1,0} \leq I; \quad 0 \leq v_{t+1,i} \leq s_{t,i-1} = I - \sum_{j=0}^{i-1} v_{t-i+j,j} \leq I; \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (3.13)$$

których wymowa jest następująca: liczba jednostek strumienia X , które wpłynęły w okresie $t-i$ i zalegają w zasobie w opóźnieniu Z pod koniec okresu t stanowi ograniczenie dla wypływu tych jednostek z zasobu w opóźnieniu Z w okresie $t+1$.

Dzięki warunkom (3.13) struktura czasowa strumienia Y wypływającego z zasobu w opóźnieniu Z jest niesprzeczna ze strukturą czasową zasobu w opóźnieniu z poprzedniego okresu.

Ze wzoru (3.10) wynika, że zależność poziomu zasobu w opóźnieniu od natężenia strumienia zasilającego jest również modelem opóźnienia rozłożonego ze strukturą opóźnienia $S_t, S_t = (s_{it}, i = 0, 1, 2, \dots)$ określoną przez współczynniki zdefiniowane za pomocą wzoru (3.9).

Istotną cechą modelu (3.10) jest to, że w odróżnieniu od modelu (3.2), którego struktura opóźnienia V_t jest dana dla każdego okresu t , jego struktura opóźnienia S_t jest zależna od współczesnej jej oraz przeszłych struktur opóźnienia V_{t-i} , $i=0, 1, 2, \dots$.

Spełnienie warunków (3.13) pozwala na interpretację wzorów (3.8) lub (3.10) jako modelu opóźnienia rozłożonego o zmiennej w czasie strukturze opóźnienia S_t określonej przez współczynniki s_{it} , $i=0, 1, 2, \dots$; wzór (3.9).

Jeśli istnieje skończona dodatnia suma będąca mnożnikiem długookresowym modelu (3.8) i (3.10):

$$\sum_{i=0}^{\infty} s_{t,i} = \sum_{i=0}^{\infty} (1 - \sum_{j=0}^i v_{t-i+j,j}), \quad (3.14)$$

to istnieją unormowane współczynniki p_{it} , $i=0, 1, 2, \dots$;

$$p_{it} = \frac{s_{t,i}}{\sum_{i=0}^{\infty} s_{t,i}}, \quad i=0, 1, 2, \dots, \quad (3.15)$$

takie, że

$$z_t = \left(\sum_{i=0}^{\infty} s_{t,i} \right) \sum_{i=0}^{\infty} p_{t,i} x_{t-i} + \widehat{\varepsilon}_t.$$

Zbiór P_t współczynników, $P_t = \{ p_{t,i}, i = 0, 1, 2, \dots \}$ tworzy rozkład opóźnienia zasobu w opóźnieniu Z względem strumienia zasilającego X , natomiast zbiór współczynników q_{it} , $i = 0, 1, 2, \dots$; przyjmujący wartości:

$$q_{it} = \frac{z_{it}}{E(z_t)} = \frac{s_{it} x_{t-i}}{\sum_{i=0}^{\infty} s_{t,i} x_{t-i}}, \quad i=0, 1, 2, \dots \quad (3.16)$$

tworzy rozkład wynikowy Q_t , $Q_t = (q_{it}, i = 0, 1, 2, \dots)$, modelu opóźnienia rozłożonego (3.10).

Podkreślenia wymaga, że rozkład Q_t opisuje strukturę czasową zasobu w opóźnieniu Z ze względu na wiek (czas przebywania, zalegania w zasobie w opóźnieniu) tworzących go jednostek pochodzących z różnych okresów. W związku z tym, wyrażenie:

$$\frac{\sum_{i=0}^{\infty} i z_{t,i}}{z_t} = M(Q_t) \quad (3.17)$$

określa średni wiek jednostek tworzących zasób w opóźnieniu Z , i – co należy odnotować – jest równe wartości średniej rozkładu wynikowego Q_t , (odpowiadającemu modelowi opóźnienia rozłożonego (3.8) opartego na rozkładzie S_t i wartościach zmiennej niezależnej X).

Z elementem systemu przepływów opisanym za pomocą zależności (3.1) i (3.2) oraz spełniającym warunki (3.3) związane są następujące struktury opóźnienia i odpowiednie rozkłady (jeśli istnieją):

- struktura opóźnienia V_t zmiennej zależnej Y względem zmiennej X
- rozkład opóźnienia W_t zmiennej zależnej Y względem zmiennej X

- rozkład wynikowy opóźnienia U_i zmiennej zależnej Y względem zmiennej X
- struktura opóźnienia S_i zasobu w opóźnieniu Z względem zmiennej X
- rozkład opóźnienia P_i zasobu w opóźnieniu Z względem zmiennej X
- rozkład wynikowy opóźnienia Q_i zasobu w opóźnieniu Z względem zmiennej X (struktura czasowa opóźnienia).

Omówione w Rozdziale I miary opóźnienia, takie jak wartość średnia rozkładu wynikowego opóźnienia $M(U_i)$ oraz mediana rozkładu wynikowego opóźnienia $\eta(U_i)$, znajdują odpowiednie zastosowanie w modelach przepływów. W tej kategorii modeli opóźnienia wartość średnia rozkładu wynikowego $M(U_i)$ zmiennej zależnej Y względem zmiennej X ujmuje średni wiek jednostek tworzących strumień wypływający Y w okresie t , lub przeciętny czas, jaki jednostki strumienia wypływającego Y przebywały (zalegały) w zasobie w opóźnieniu Z . Wartość średnia rozkładu wynikowego $M(Q_i)$ odpowiada średniemu wiekowi jednostek zalegających w zasobie w opóźnieniu Z . W modelach opóźnienia w systemach przepływów klarowność interpretacji średnich rozkładów wynikowych U_i i Q_i daje tym parametrom, jak się wydaje, pewną przewagę nad medianami rozkładów jako miar opóźnienia.

W niektórych zastosowaniach wyniki szacowania wielkości opóźnienia zależą nie tylko od wykorzystywanej miary opóźnienia, ale również od innych czynników. Istotne znaczenie ma tu wielkość stosowanej jednostki czasu związana z częstotliwością pomiarów: pomiar wielkości przepływów w poszczególnych okresach oraz wielkości zasobów w punktach na osi czasu odpowiadających końcom okresów. Niezależnie od problemu ubytków (nieszczelności, rozkurzu) w systemie przepływów, przeprowadzane pomiary odnoszą się do punktów na osi czasu; bez względu na to, czy stany zasobów są wielkościami pierwotnymi czy wtórnymi, pod koniec okresu średnie opóźnienie informacji o wielkości strumienia wynosi pół okresu. O ile okoliczność ta nie ma w większości zastosowań znaczącego wpływu na wartość średnią i medianę rozkładu W_i , to w przypadku rozkładów S_i i Q_i wielkości te są niedoszacowane o wielkość pół okresu przy założeniu, że przepływ strumienia w okresie dokonuje się równomiernie (ma rozkład równomierny lub monotoniczny). Warto mieć na uwadze, że nierzadkie są przypadki, kiedy przepływy te są dalekie od równomierności; konieczność wprowadzenia poprawek znalazła wyraz, na przykład, w stosowanej w demografii zasadzie Rahtsa (patrz np. Holzer J. Z. (1994), strona 215).

W przypadku rozkładu wynikowego Q_i w stanie ustalonym (tj. wtedy, gdy odpowiednie rozkłady opóźnienia i rozkłady wynikowe są sobie równe) wystarczy, podobnie jak w przypadku rozkładu W_i , poprawka w wysokości połowy okresu (zwiększenie wartości średniej i mediany rozkładu o 1/2 okresu), natomiast przy znaczącej dynamice zmiennej niezależnej wpływającej na pogłębienie nierównomierności przepływu wewnątrz okresowego, jej wysokość powinna być dostosowana, jeśli to możliwe, do specyfiki przypadku.

III.2 Modele opóźnienia w systemach przepływów ze stałym rozkładem opóźnienia

Duże znaczenie modeli opóźnienia w systemach przepływów ze stałym rozkładem opóźnienia wynika z dwóch powodów. Pierwszy, to ich dominacja wśród modeli opóźnienia. Drugi zaś to fakt, że jako koncepcyjnie i konstrukcyjnie prostsze ułatwiają zrozumienie bardziej złożonych modeli ze zmiennym rozkładem opóźnienia.

Gdy rozkład opóźnienia W_i zmiennej zależnej Y względem zmiennej X jest stały, w podstawowym modelu systemu przepływów rozkład opóźnienia P_i zasobu w opóźnieniu Z względem zmiennej niezależnej X jest również stały, a ponadto - z wyjątkiem opóźnienia prostego mającego rozkład jednopunktowy - jego współczynniki są monotonicznie malejącą funkcją numeru współczynnika.

Własność ta wynika ze wzoru (3.7), który przy założonej stałości współczynników struktury opóźnienia można zapisać w postaci następującej zależności:

$$s_{ii} = s_i = I - \sum_{j=0}^i v_j; i = 0, 1, 2, 3, \dots;$$

z której bezpośrednio wynika, współczynniki struktury S , $S=(s_0, s_1, s_2, \dots)$ są nierosnącą funkcją indeksu; że największą wartość ma współczynnik s_0 , ponieważ kolejne powstają przez odjęcie od poprzedniego wartości współczynnika struktury V o tym samym indeksie, wzór (3.9):

$$s_{i+1} = s_i - v_{i+1}; i = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Gdy struktura opóźnienia V_i zmiennej zależnej Y względem zmiennej niezależnej X jest stała, jest oczywiste, że model o takiej strukturze opóźnienia jest stabilny tylko wtedy, gdy mnożnik długookresowy a jest równy I .

Gdy istnieje wartość średnia rozkładu opóźnienia $M(W)$, rozważane są dwa przypadki: skończonego modelu opóźnienia (3.2) rzędu n i nieskończonego modelu opóźnienia (3.2).

Modele opóźnienia rozłożonego w systemach przepływów ze stałym skończonym rozkładem opóźnienia

Suma współczynników struktury opóźnienia S zasobu w opóźnieniu Z względem zmiennej X (mnożnik długookresowy tego opóźnienia) odpowiadającej skończonemu rozkładowi rzędu n opóźnienia W modelu opóźnienia strumienia wypływającego Y względem strumienia zasilającego X jest równa:

$$\sum_{i=0}^n s_i = aM(W) + (n+1)(I-a). \quad (3.16)$$

Dowód zależności (3.16) jest następujący. Wartości współczynników s_i , $i = 0, 1, 2, \dots, n$; można przedstawić w następujący sposób:

$$s_i = I - \sum_{j=0}^i v_j = I - a \sum_{j=0}^i w_j; i = 0, 1, 2, \dots;$$

zatem

$$\sum_{i=0}^n s_i = \sum_{i=0}^n \left(1 - a \sum_{j=0}^i w_j \right) = \sum_{i=0}^n 1 - a \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^i w_j = (n+1) - a \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^i w_j.$$

Ostatnią sumę w powyższym równaniu można przedstawić w następujący sposób:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^i w_j &= (w_0) + (w_0 + w_1) + (w_0 + w_1 + w_2) + \dots + (w_0 + w_1 + \dots + w_n) \\ &= (n+1)w_0 + nw_1 + (n-1)w_2 + \dots + 1 \cdot w_n \\ &= \sum_{i=0}^n (n+1-i)w_i = (n+1) \sum_{i=0}^n w_i - \sum_{i=0}^n iw_i = (n+1) - M(W). \end{aligned}$$

Podstawiając uzyskany wynik otrzymujemy:

$$\sum_{i=0}^n s_i = (n+1) - a[(n+1) - M(W)] = aM(W) + (n+1)(1-a),$$

co potwierdza prawdziwość wzoru (3.16).

Wartość średnia $M(P)$ stałego rozkładu opóźnienia P poziomu zasobu w opóźnieniu Z względem strumienia zasilającego X związanego ze stałym skończonym rzędu n rozkładem opóźnienia W zależności strumienia wypływającego Y względem strumienia zasilającego X kształtuje się zgodnie z następującym wzorem:

$$M(P) = \frac{1}{2} \frac{a[D^2(W) + M^2(W) - M(W)] + n(n+1)(1-a)}{aM(W) + (n+1)(1-a)}. \quad (3.17)$$

Z definicji wartości średniej rozkładu opóźnienia:

$$\begin{aligned} M(P) &= \sum_{i=1}^n i \frac{s_i}{\sum_{i=0}^n s_i} = \frac{\sum_{i=1}^n i \left(1 - a \sum_{j=0}^i w_j \right)}{aM(W) + (n+1)(1-a)} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n i - a \sum_{i=1}^n i \sum_{j=0}^i w_j}{aM(W) + (n+1)(1-a)} = \\ &= \frac{\frac{1}{2} n(n+1) - a \sum_{i=1}^n i \sum_{j=0}^i w_j}{aM(W) + (n+1)(1-a)}. \end{aligned}$$

Ponieważ

a zmienna zależna y_i jest średnią arytmetyczną z ostatnich $n+1$ wartości zmiennej niezależnej x_{i-j} , $i = 0, 1, \dots, n$.

Współczynniki struktury opóźnienia S przyjmują wartości:

$$s_i = I - \sum_{j=0}^i \frac{I}{n+1} = \frac{n-i}{n+1}; i = 0, 1, 2, \dots, n;$$

(struktura Fishera, patrz Część I, podpunkt 1.8.1.1 pn. Liniowa struktura opóźnienia), a zależność zasobu Z od strumienia wpływającego X ma postać:

$$z_i = \frac{n}{2} \sum_{i=0}^n \left[\frac{2}{n} \left(\frac{n-i}{n+1} \right) \right] x_{i-i}.$$

Modele opóźnienia rozłożonego w systemach przepływów ze stałym nieskończonym rozkładem opóźnienia

Suma współczynników struktury opóźnienia S zasobu w opóźnieniu Z względem zmiennej X (mnożnik długookresowy tego opóźnienia) odpowiadającej nieskończonemu rozkładowi rzędu n opóźnienia W modelu opóźnienia strumienia wpływającego Y względem strumienia zasilającego X jest równa:

$$\sum_{i=0}^{\infty} s_i = \sum_{i=0}^{\infty} \left(I - \sum_{j=0}^i v_j \right) = \sum_{i=0}^{\infty} \left(I - a \sum_{j=0}^i w_j \right). \quad (3.18)$$

Przejdziemy teraz do wykazania, że mnożnik długookresowy zależności poziomu zasobu w opóźnieniu Z względem strumienia zasilającego X przy stałym nieskończonym rozkładzie zależności strumienia wpływającego Y względem strumienia zasilającego X przyjmuje wartość skończoną wtedy i tylko wtedy, gdy mnożnik długookresowy a jest równy I , $a=I$.

Sumę k kolejnych współczynników s_i , $i = 0, 1, \dots, k$; można przedstawić w następujący sposób:

$$\sum_{i=0}^k s_i = \sum_{i=0}^k \left(I - \sum_{j=0}^i v_j \right) = \sum_{i=0}^k \left(I - a \sum_{j=0}^i w_j \right).$$

Sumując powtarzające się współczynniki w_i , $i = 0, 1, \dots, k$; otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^k s_i &= (k+1) + a[(k+1)w_0 + kw_1 + (k-1)w_2 + \dots + 1w_k] = \\ &= (k+1) - a \sum_{i=0}^k (k+1-i)w_i \\ &= (k+1) - a(k+1) \sum_{i=0}^k w_i + a \sum_{i=0}^k i w_i \\ &= (k+1) \left(I - a \sum_{i=0}^k w_i \right) + a \sum_{i=0}^k i w_i. \end{aligned}$$

Gdy k dąży do nieskończoności, powyższa suma jest zbieżna i równa $M(W)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a=1$, ponieważ:

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^k i w_i &= M(W), \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 - a \sum_{i=0}^k w_i \right) &= 1 - a, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} (k + 1) &= \infty. \end{aligned}$$

Zatem gdy $a=1$, zależność zasobu w opóźnieniu Z względem zmiennej niezależnej X można przedstawić w następującej postaci:

$$z_i = \sum_{i=0}^{\infty} s_i x_{i-i} = \sum_{i=0}^{\infty} \left(1 - \sum_{j=0}^i v_j \right) x_{i-i} = \sum_{i=0}^{\infty} \left(1 - \sum_{j=0}^i w_j \right) x_{i-i} = M(W) \sum_{i=0}^{\infty} p_i x_{i-i}, \quad (3.19)$$

gdzie: $p_i, i = 0, 1, 2, \dots$; współczynniki stałego rozkładu opóźnienia P zasobu w opóźnieniu Z względem zmiennej niezależnej X mające postać wyrażającą się wzorem:

$$p_i = \frac{1 - \sum_{j=0}^i w_j}{M(W)}, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (3.20)$$

Współczynniki rozkładu P , wzór (3.20), odzwierciedlają strukturę wiekową zasobu w opóźnieniu Z w stanie ustalonym.

Jak wynika ze wzorów (3.19) i (3.20), między strukturami V i S zachodzi ścisły związek. Znajomość współczynników jednej z nich pozwala na jednoznaczne wyznaczenie współczynników drugiej.

Jak wynika z zależności (3.19), w przypadku modelu opóźnienia w systemie przepływów ze stałym rozkładem oraz $a=1$, w stanie ustalonym, tj. gdy $x^*, x^* = x_t, x_{t-1}, x_{t-2}, \dots$; następuje ustalenie poziomu zasobu w opóźnieniu na następującym poziomie:

$$z_i = M(W) x^*. \quad (3.21)$$

Z założeniem o stałości rozkładu opóźnienia w modelu opóźnienia rozłożonego wiąże się kolejna istotna własność: jeśli zmienną niezależną X charakteryzuje wzrost ze stałą stopą wzrostu r , to zmienna zależna Y wzrasta z tą samą stopą wzrostu r .

Model opóźnienia rozłożonego ze stałym rozkładem opóźnienia W dla okresu $t+1$ ma postać (w tej podkategorii modeli opóźnienia mnożnik długookresowy a ma z założenia wartość jeden)²:

$$y_{t+1} = \sum_{i=0}^{\infty} w_i x_{t+1-i}.$$

Zgodnie z założeniem, ewolucja zmiennej X jest opisana za pomocą wzoru:

$$x_{t-i} = x_t (1+r)^{-i}, \quad i=0, 1, 2, \dots;$$

po którego podstawieniu uzyskujemy model:

$$y_{t+1} = (1+r) \sum_{i=0}^{\infty} w_i x_{t-i} = (1+r) y_t,$$

co kończy dowód.

Następstwem powyższej własności jest oparta na tych samych przesłankach kolejna własność: jeśli model zasobu w opóźnieniu jest zgodny z modelem (3.19), to z faktu, że jest on modelem opóźnienia rozłożonego o stałym rozkładzie opóźnienia, wzrost zmiennej niezależnej X ze stałą stopą wzrostu r powoduje wzrost zasobu w opóźnieniu Z z tą samą stałą stopą wzrostu r :

$$z_{t+1} = z_t (1+r).$$

III.3 Modele opóźnień w systemach przepływów ze zmiennymi rozkładami opóźnień

III.3.1 Model z dwoma parametrami

Rozważamy element systemu przepływów jest opisany za pomocą następującego układu dwóch równań³:

$$\begin{cases} z_t = z_{t-1} + x_t - y_t \\ y_t = \lambda_t x_t + \rho_t z_{t-1} \end{cases} \quad (3.22)$$

gdzie λ_t i ρ_t są współczynnikami przyjmującymi wartości z przedziału $[0, 1]$. Gdy oba współczynniki λ_t i ρ_t przyjmują jednocześnie wartość 0, zależność (3.22) przestaje być zależnością zmiennej Y od zmiennej X . Współczynnik λ_t określa, jaka część strumienia X nie podlega opóźnieniu wypływając z systemu w tym samym okresie. Współczynnik ρ_t określa, jaka część stanu zasobu Z z początku okresu t jest w tym okresie uwalniana do strumienia wypływającego Y . Dwie interpretacje wielkości $\lambda_t x_t$ są równoważne: a) wielkość „omijająca” zasób w opóźnieniu, b) wielkość, która opuszcza zasób Z w tym samym okresie, w którym wpłynęła. Niezerowa wartość współczynnika ρ_t zapewnia zachowanie opóźnionego charakteru zależności (3.22) zmiennych Y i Z od zmiennej X .

³ Dla większej klarowności w dalszej części tego rozdziału składnik losowy został pominięty.

Równanie pierwsze układu równań (3.22) jest równaniem bilansowym: stan zasobu w opóźnieniu Z pod koniec okresu jest równy stanowi zasobu w opóźnieniu na początku okresu, powiększonemu o ilość, która napłynęła w okresie t do tego zasobu i pomniejszonemu o ilość, która w tym okresie wypłynęła z zasobu Z . Równanie drugie⁴ opisuje kształtowane się natężenia strumienia wpływającego, na który składają się: część $\lambda_t x_t$ strumienia X , oraz część $\rho_t z_{t-1}$ stanu zasobu w opóźnieniu Z z początku okresu.

Interpretacja tego modelu jest następująca. Pewien zasób Z zasilany strumieniem X jest wyczerpywany przez strumień Y . Natężenie strumienia Y zależy od poziomu zasobu Z na początku okresu oraz ilości jednostek, które w tym okresie przyniósł strumień X (łączna podaż). Natężenie strumienia wyczerpującego zasób w opóźnieniu, zależy od natężenia strumienia napływającego oraz wielkości zasobu w opóźnieniu.

Korzystając z równości:

$$z_{t-1} = z_{t-1} + x_{t-1} - y_{t-1} = (1 - \lambda_{t-1})x_{t-1} + (1 - \rho_{t-1})z_{t-1}, \quad i=0, 1, 2, \dots;$$

przez kolejne podstawianie uzyskujemy rozwiązanie:

$$\begin{aligned} y_t &= \lambda_t x_t + \rho_t z_{t-1} \\ &= \lambda_t x_t + \rho_t [(1 - \lambda_{t-1})x_{t-1} + (1 - \rho_{t-1})z_{t-2}] \\ &= \lambda_t x_t + \rho_t (1 - \lambda_{t-1})x_{t-1} + \rho_t (1 - \rho_{t-1})[(1 - \lambda_{t-2})x_{t-2} + (1 - \rho_{t-2})z_{t-3}] \\ &\dots \\ &= \lambda_t x_t + \frac{\rho_t}{1 - \rho_t} \sum_{i=1}^k \left[(1 - \lambda_{t-i}) \prod_{j=0}^{i-1} (1 - \rho_{t-j}) \right] x_{t-i} + \frac{\rho_t}{1 - \rho_t} \prod_{j=0}^{k-1} (1 - \rho_{t-j}) z_{t-k}. \end{aligned}$$

Na podstawie powyższej zależności, przechodząc z k do nieskończoności, rozwiązanie równania przyjmuje postać:

$$y_t = \lambda_t x_t + \frac{\rho_t}{1 - \rho_t} \sum_{i=1}^{\infty} \left[(1 - \lambda_{t-i}) \prod_{j=0}^{i-1} (1 - \rho_{t-j}) \right] x_{t-i}.$$

którą można przedstawić w następujący sposób:

$$y_t = \sum_{i=0}^{\infty} v_{it} x_{t-i},$$

gdzie:

$$v_{it} = \begin{cases} \lambda_t & , \quad i = 0; \\ \frac{\rho_t}{1 - \rho_t} \left[(1 - \lambda_{t-i}) \prod_{j=0}^{i-1} (1 - \rho_{t-j}) \right] & , \quad i > 1; \end{cases} \quad (3.23)$$

z której wynika, że model (3.22) jest modelem opóźnienia rozłożonego.

Natężenie strumienia wpływającego Y zależy od: natężenia strumienia zasilającego X wraz ze współczynnikiem λ , określającym, jaka część tego strumienia opuszcza zasób Z w tym samym

⁴ W modelach fizykalnych uwzględniających ciężenie ziemskie przyjmowane jest założenie, że natężenie strumienia wpływającego jest funkcją pierwiastka kwadratowego miary zasobu. Ponieważ nieliniowość jest niewygodna, w wielu modelach stosowana jest zależność liniowa, na przykład jako narzędzie programowe w Systems Dynamics, Forrester (1961).

okresie t , od poziomu zasobu Z na początku okresu t , na który wpływ ma historia jego zasilania i wyczerpywania oraz współczynnika ρ_t określającego, jaka część tego zasobu z początku okresu t wypływa w okresie t .

Model (3.22) spełnia, co wynika z założeń o wartościach współczynników λ_t i ρ_t , zasadę zachowania masy.

Przyjmując założenie, że współczynniki λ_t i ρ_t przyjmują wartości odpowiednio z przedziałów $[\lambda_{min}, \lambda_{max}]$ oraz $[\rho_{min}, \rho_{max}]$, $0 < \lambda_{min}, \lambda_{max}, \rho_{min}, \rho_{max} < 1$, można oszacować przedział wahań mnożnika długookresowego a_t :

$$\lambda_{min} + \frac{\rho_{min}}{\rho_{max}}(1 - \lambda_{max}) \leq a_t \leq \lambda_{max} + \frac{\rho_{max}}{\rho_{min}}(1 - \lambda_{min}).$$

W odróżnieniu od opisanego w Części I modelu ze współczynnikami struktury opóźnienia danymi wzorem (1.71), w którym mnożnik długookresowy jest najczęściej stały i równy jeden, patrz Rozdział 1.10, w modelu ze współczynnikami struktury opóźnienia opisanymi za pomocą wzoru (3.23) mnożnik długookresowy swobodnie zmienia wartość w zależności od kształtowania się obu współczynników λ_t i ρ_t .

W niektórych zastosowaniach przydatna może być znajomość zależności mnożnika długookresowego a_{t+1} i wartości średniej rozkładu opóźnienia $M(W_{t+1})$ w okresie $t+1$ od wartości tego mnożnika z poprzedniego okresu a_t , wartości średniej rozkładu opóźnienia z poprzedniego okresu $M(W_t)$ oraz od ostatnich wartości współczynników λ_{t+1} i ρ_{t+1} .

Zależność mnożnika długookresowego a_{t+1} w okresie $t+1$ od wartości tego mnożnika z poprzedniego okresu a_t oraz od ostatnich wartości współczynników λ_{t+1} i ρ_{t+1} kształtuje się zgodnie z następującym wzorem:

$$a_{t+1} = a_t \left(\rho_{t+1} \frac{1 - \rho_t}{\rho_t} \right) + \lambda_{t+1} + \lambda_t \cdot \rho_{t+1} \left(\frac{1 - \lambda_t}{\lambda_t} - \frac{1 - \rho_t}{\rho_t} \right).$$

Powyższy wzór bierze się stąd, że suma współczynników struktury opóźnienia (3.23) ma postać:

$$a_t = \lambda_t + \rho_t [(1 - \lambda_{t-1}) + (1 - \lambda_{t-2})(1 - \rho_{t-1}) + (1 - \lambda_{t-3})(1 - \rho_{t-1})(1 - \rho_{t-2}) + \dots].$$

Zatem powyższą zależność można przedstawić w nieco zmienionej postaci:

$$\frac{a_t - \lambda_t}{\rho_t} = (1 - \lambda_{t-1}) + (1 - \lambda_{t-2})(1 - \rho_{t-1}) + (1 - \lambda_{t-3})(1 - \rho_{t-1})(1 - \rho_{t-2}) + \dots$$

Pisząc powyższą zależność dla okresu $t=t+1$ uzyskujemy:

$$\frac{a_{t+1} - \lambda_{t+1}}{\rho_{t+1}} = (1 - \lambda_t) + (1 - \lambda_{t-1})(1 - \rho_t) + (1 - \lambda_{t-2})(1 - \rho_t)(1 - \rho_{t-1}) + \dots$$

Niewielkie przekształcenie powyższego wzoru daje następujący wynik:

$$\frac{a_{t+1} - \lambda_{t+1}}{\rho_{t+1}} = (1 - \lambda_t) + (1 - \rho_t) [(1 - \lambda_{t-1}) + (1 - \lambda_{t-2})(1 - \rho_{t-1}) + (1 - \lambda_{t-3})(1 - \rho_{t-1})(1 - \rho_{t-2}) + \dots].$$

Ponieważ, jak nietrudno zauważyć, wyrażenie w nawiasie kwadratowym jest równe $\frac{a_t - \lambda_t}{\rho_t}$, zatem

po podstawieniu i uporządkowaniu otrzymujemy:

$$a_{t+1} = a_t \left(\rho_{t+1} \frac{1 - \rho_t}{\rho_t} \right) + \lambda_{t+1} + \lambda_t \cdot \rho_{t+1} \left(\frac{1 - \lambda_t}{\lambda_t} - \frac{1 - \rho_t}{\rho_t} \right),$$

co było do okazania.

Zależność wartości średniej $M(W_{t+1})$ struktury opóźnienia opisanej za pomocą wzoru (3.22) w okresie $t+1$ od wartości średniej $M(W_t)$ z poprzedniego okresu oraz od ostatnich wartości współczynników λ_{t+1} i ρ_{t+1} kształtuje się zgodnie z następującą formułą:

$$M(W_{t+1}) = \frac{a_t}{a_{t+1}} \frac{\rho_{t+1}}{\rho_t} (1 - \rho_t) [M(W_t) + I] + \frac{\rho_{t+1}}{a_{t+1}} \lambda_t \left(\frac{1 - \lambda_t}{\lambda_t} - \frac{1 - \rho_t}{\rho_t} \right).$$

W dowodzie powyższej formuły wykorzystana jest definicja wartości średniej $M(W_t)$ rozkładu opartego na strukturze opóźnienia (3.22), którą po prostym przekształceniu można doprowadzić do następującej postaci:

$$\frac{a_t M(W_t)}{\rho_t} = I \cdot (1 - \lambda_{t-1}) + 2 \cdot (1 - \lambda_{t-2})(1 - \rho_{t-1}) + 3 \cdot (1 - \lambda_{t-3})(1 - \rho_{t-1})(1 - \rho_{t-2}) + \dots$$

Stosując tę samą formułę dla okresu $t+1$ mamy:

$$\frac{a_{t+1} M(W_{t+1})}{\rho_{t+1}} = I \cdot (1 - \lambda_t) + 2 \cdot (1 - \lambda_{t-1})(1 - \rho_t) + 3 \cdot (1 - \lambda_{t-2})(1 - \rho_t)(1 - \rho_{t-1}) + \dots$$

Dokonując przekształcenia powyższej zależności otrzymujemy:

$$\frac{a_{t+1} M(W_{t+1})}{\rho_{t+1}} = I \cdot (1 - \lambda_t) + (1 - \rho_t) [2 \cdot (1 - \lambda_{t-1}) + 3 \cdot (1 - \lambda_{t-2})(1 - \rho_{t-1}) + \dots].$$

Wyrażenie w nawiasie kwadratowym w powyższym wzorze można rozbić na dwie części:

$$\begin{aligned} \frac{a_{t+1} M(W_{t+1})}{\rho_{t+1}} &= I \cdot (1 - \lambda_t) + \\ &+ (1 - \rho_t) \{ [(1 - \lambda_{t-1}) + (1 - \lambda_{t-2})(1 - \rho_{t-1}) + \dots] + [I \cdot (1 - \lambda_{t-1}) + 2 \cdot (1 - \lambda_{t-2})(1 - \rho_{t-1}) + \dots] \}. \end{aligned}$$

Ponieważ wyrażenie w lewym nawiasie kwadratowym jest równe $\frac{a_t - \lambda_t}{\rho_t}$, a wyrażenie w prawym

nawiasie kwadratowym jest równe $\frac{a_t M(W_t)}{\rho_t}$, to po podstawieniu i uporządkowaniu uzyskujemy

wzór wyjściowy.

Model (3.22) ma ważne własności przy stałych współczynnikach struktury opóźnienia.

Niech $\lambda_i = \lambda = const.$ i $\rho_i = \rho = const.$ Stałe współczynniki struktury opóźnienia modelu (3.22) przyjmują postać:

$$v_i = \begin{cases} \lambda & , i = 0; \\ (1-\lambda)\rho(1-\rho)^{i-1} & , i \geq 1. \end{cases} \quad (3.24)$$

Mechanizm opóźnienia modelu (3.22) ze stałymi współczynnikami $\lambda_i = \lambda = const.$ i $\rho_i = \rho = const.$, zgodnymi ze wzorem (3.24) jest stabilny dla wszystkich przewidzianych założeniami wartościami tych współczynników. Własność ta wynika z definicji stabilności mechanizmu opóźnienia; mnożnik długookresowy a zależności strumienia wypływającego Y od strumienia zasilającego X jest równy jeden, $a=1$, ponieważ:

$$\begin{aligned} a &= \sum_{i=0}^{\infty} v_i = \lambda + (1-\lambda)\rho + (1-\lambda)\rho \sum_{i=2}^{\infty} (1-\rho)^{i-1} = \lambda + (1-\lambda)\rho [1 + (1-\rho) + (1-\rho)^2 + \dots] \\ &= \lambda + (1-\lambda)\rho \frac{1}{1-\rho} = 1. \end{aligned}$$

Wielkości średnia i wariancja rozkładu opóźnienia strumienia wypływającego Y względem strumienia wpływającego X ze współczynnikami (3.24) są odpowiednio równe:

$$\begin{aligned} M(W) &= \frac{1-\lambda}{\rho}, \\ D^2(W) &= \frac{(1-\lambda)(1-\rho+\lambda)}{\rho^2}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

W stanie ustalonym, dla $x_t = x_{t-1} = x_{t-2} \dots = x^*$, zgodnie z (3.21) zachodzi następująca zależność:

$$z_t = M(W)x^* = \frac{1-\lambda}{\rho} x^*.$$

Ponieważ dla każdego $k, k=1, 2, \dots$;

$$z_{t-k} = z_{t-k-1} + x_{t-k} - y_{t-k} = (1-\lambda)x_{t-k} + (1-\rho)z_{t-k-1},$$

rekurencyjne podstawianie doprowadza do następującej postaci:

$$z_t = (1-\lambda) \sum_{i=0}^{k-1} (1-\rho)^i x_{t-i} + (1-\rho)^k z_{t-k}.$$

Przechodząc do granicy przy $k \rightarrow \infty$ uzyskujemy model opóźnienia zasobu w opóźnieniu Z względem strumienia zasilającego X :

$$z_t = (1-\lambda) \sum_{i=0}^{\infty} (1-\rho)^i x_{t-i},$$

o dodatnich współczynnikach struktury opóźnienia równych:

$$s_i = (1-\lambda)(1-\rho)^i; i=0,1,2,\dots;$$

o sumie (mnożnik długookresowy) $\sum_{i=0}^{\infty} s_i$ równej

$$\sum_{i=0}^{\infty} s_i = \frac{1-\lambda}{\rho},$$

ze współczynnikami rozkładu opóźnienia zasobu w opóźnieniu Z względem strumienia zasilającego X równymi:

$$p_i = \rho(1-\rho)^i; i=0,1,2,\dots$$

i wartościami średnią $M(P)$ i wariancją $D^2(P)$ rozkładu P równymi odpowiednio:

$$\begin{aligned} M(P) &= \frac{1-\rho}{\rho}, \\ D^2(P) &= \frac{1-\rho}{\rho^2}. \end{aligned} \tag{3.26}$$

Z powyższych wzorów wynika, że rozkład P modelu (3.22) ze stałymi współczynnikami zależy tylko od współczynnika ρ i jest rozkładem geometrycznym, a jego wartość średnia jest równa wartości średniej rozkładu W .

Pokazana powyżej zależność między rozkładami W i S nie jest własnością ogólną, lecz szczególną.

W przypadku modeli opóźnienia w systemach przepływów ze stałymi rozkładami, bez względu na kształt rozkładu W , rozkład S jest rozkładem o współczynnikach monotonicznie nierosnących w funkcji numeru/indeksu współczynnika (dla każdego i , $i=0, 1, \dots$; $s_i \geq s_{i+1}$).

W analizowanym przykładzie proste przekształcenia pozwalają na zapisanie zależności zasobu w opóźnieniu Z względem strumienia wpływającego X w następujących równoważnych postaciach:

$$z_i = \sum_{i=0}^{\infty} s_i x_{t-i} = (1-\lambda) \sum_{i=0}^{\infty} (1-\rho)^i x_{t-i} = \frac{1-\lambda}{\rho} \sum_{i=0}^{\infty} \rho(1-\rho)^i x_{t-i} = M(W) \sum_{i=0}^{\infty} w_i x_{t-i}.$$

Model (3.22) ma kilka wariantów. W Przykładzie 1.3 opisanym w Rozdziale I, współczynniki ρ i λ są równe zero, w czego następstwie wszystkie współczynniki struktury opóźnienia są równe zero, $v_i=0$, $i=0, 1, \dots$; i model jest zredukowany do opóźnionej zależności zasobu Z od strumienia X , w której wszystkie współczynniki $s_i=1$, $i=0, 1, \dots$; są równe jeden (Klein (1950), Tinbergen (1959), Solow (2000)).

W przypadku, gdy współczynniki $\lambda=0$ oraz $\rho > 0$, mamy do czynienia z modelem przedstawionym w Przykładzie 1.4⁵. Zerowa wartość współczynnika λ powoduje, że współczynnik w_0 rozkładu W ma wartość zero, a rozkład ten staje się rozkładem geometrycznym przesuniętym w prawo o jeden (o jeden okres).

⁵ Różnica między przedstawionymi w Przykładzie 1.3 i Przykładzie 1.4 modelami środków trwałych polega na sposobie rozwiązania problemu nieznajomości rozkładu opóźnienia procesu deprecjacji kapitału. W Przykładzie 1.3 strumieniem zasilającym są inwestycje netto (których obliczenie wymaga znajomości rozkładu deprecjacji środków trwałych), natomiast Przykład 1.4 jest oparty na założeniu, że rozkład opóźnienia jest rozkładem geometrycznym.

Innym wariantem jest model, w którym współczynniki są z założenia równe: $\lambda = \rho > 0$. W tym przypadku model charakteryzują następujące własności:

$$v_i = w_i = \lambda(1 - \lambda)^i, \quad i = 0, 1, 2, \dots;$$

$$M(W) = \frac{1 - \lambda}{\lambda},$$

$$D^2(W) = \frac{1 - \lambda}{\lambda^2},$$

$$p_i = \lambda(1 - \lambda)^i, \quad i = 0, 1, 2, \dots;$$

$$M(P) = \frac{1 - \lambda}{\lambda},$$

$$D^2(P) = \frac{1 - \lambda}{\lambda^2},$$

wskazujące, że w rozważanym przypadku rozkłady opóźnienia W i P są identyczne.

W kolejnych punktach omówione zostaną przykłady wariantów modelu (3.22) ze zmiennymi współczynnikami.

III.3.1.1 Model populacji.

Wariantem modelu opóźnionych przepływów (3.21) jest model populacji opisujący kształtowanie się liczebności populacji w wieku τ okresów (generacji), $\tau = 0, 1, 2, \dots, \tau_k$; tj. liczby jednostek, których wiek pod koniec danego okresu jest nie mniejszy od τ i mniejszy od $\tau + 1$ okresów, przy czym parametr τ_k oznacza najwyższy wiek, jaki osiągają jednostki badanej populacji. Ten rodzaj analizy nazywany jest analizą kohortową i ma szerokie zastosowanie w demografii i ubezpieczeniach. Przypadek stałych współczynników i braku migracji oraz stałego strumienia urodzeń jest w istocie analizą stanu ustalonego, nazywanego w demografii modelem ludności zastojowej, patrz Holzer (1994), Holzer, Kędelski, Paradysz (2006), Okólski (2004).

Nie uwzględniając migracji zewnętrznych, model generacji, liczebności jednostek w grupie wiekowej τ , lub - innymi słowy - jednostek w wieku należącym do przedziału $[\tau, \tau + 1)$ ma następującą postać:

$$\begin{cases} z_t^{(\tau)} = z_{t-1}^{(\tau)} + x_t^{(\tau)} - y_t^{(\tau)} \\ y_t^{(\tau)} = \lambda_t^{(\tau)} x_t^{(\tau)} + z_{t-1}^{(\tau)} \end{cases} \quad (3.27)$$

gdzie:

$z_t^{(\tau)}$ - zasób jednostek w wieku należącym do przedziału $[\tau, \tau + 1)$ pod koniec okresu t ,

$x_t^{(\tau)}$ - liczba jednostek, które w okresie t ukończyły wiek τ okresów,

$y_t^{(\tau)}$ - liczba jednostek, które w okresie t opuściły zasób jednostek w wieku $[\tau, \tau + 1)$,

$\lambda_i^{(\tau)}$ – stopa zgonów; współczynnik określający, jaka część strumienia wpływającego w okresie t do zasobu jednostek w wieku należącym do przedziału $[\tau, \tau+1)$, opuszcza ten zasób w tym samym okresie w następstwie zgonów.

Model (3.27), będący szczególnym przypadkiem modelu (3.22) dla $\rho_i = 1$, jest stosowany w demografii, patrz np. Holzer (1994), Okólski (2004), w której przyjęty został inny system oznaczeń. Dla ujednoczenia użyta konwencja oznaczeń została dostosowana do przyjętego w niniejszej pracy ujęcia.

Istotnym uzupełnieniem układu równań (3.22) są zależności, które opisują związki między rozważanym elementem (jednostki w wieku należącym do przedziału $[\tau, \tau+1)$) a elementem poprzedzającym (jednostki w wieku należącym do przedziału $[\tau-1, \tau)$) oraz następnym (jednostki w wieku należącym do przedziału $[\tau+1, \tau+2)$).

W modelu (3.27) zasób tworzą jednostki należące do tego samego przedziału wiekowego. Strumień X zasilający zasób jednostek w wieku z przedziału $[\tau, \tau+1)$ to jednostki, które w okresie t ukończyły wiek τ okresów, a więc przeszły z zasobu jednostek w wieku z przedziału $[\tau-1, \tau)$. (W przypadku, gdy $\tau = 0$, mamy do czynienia z jednostkami należącymi do najmłodszej grupy wiekowej, w demografii zwanymi niemowlętami).

Strumień Y wyczerpujący zasób jednostek w wieku z przedziału $[\tau, \tau+1)$ tworzą zarówno jednostki, które na początku okresu t znajdowały się w zasobie jednostek w przedziale wiekowym $[\tau, \tau+1)$, zatem w okresie tym przeżyły i ukończywszy wiek równy $\tau+1$ okresów przeszły do zasobu jednostek starszych z przedziału $[\tau+1, \tau+2)$, oraz te, które zmarły w okresie t nie osiągnąwszy wieku $\tau+1$ okresów.

Zasób jednostek w wieku należącym do przedziału wiekowego $[\tau, \tau+1)$ jest wyczerpywany przez strumień Y o natężeniu $y_i^{(\tau)}$ w następstwie działania dwóch procesów: wymierania/zgonów, o natężeniu $y_i'^{(\tau)}$, oraz starzenia się (przechodzenia do zasobu wyższej grupy wiekowej), o natężeniu $y_i''^{(\tau)}$:

$$y_i^{(\tau)} = y_i'^{(\tau)} + y_i''^{(\tau)} \quad (3.28)$$

Łączna liczba zgonów $y_i^{(\tau)}$ jednostek z przedziału wiekowego $[\tau, \tau+1)$ stanowi sumę zgonów jednostek, które napłynęły i zmarły w okresie t w ilości $\lambda_i^{(\tau)} x_i^{(\tau)}$, jak i tych, które znajdowały się w zasobie jednostek z przedziału wiekowego $[\tau, \tau+1)$ na początku okresu t (co oznacza, że osiągnęły wiek τ okresów w okresie $t-1$) i w ilości $\gamma_i^{(\tau)} z_{i-1}^{(\tau)}$ zmarły w tym okresie nie osiągając wieku $\tau+1$ okresów:

$$y_i^{(\tau)} = \lambda_i^{(\tau)} x_i^{(\tau)} + \gamma_i^{(\tau)} z_{i-1}^{(\tau)}, \quad (3.29)$$

gdzie współczynnik $\gamma_i^{(\tau)}$ oznacza stopę wymieralności (w demografii w zastosowaniu do tablic przeżycia/wymieralności współczynnik ten jest nazywany prawdopodobieństwem zgonu) jednostek z przedziału wiekowego $[\tau, \tau+I)$, które należały do tego zasobu na początku okresu t^6 (innymi słowy współczynnik $\gamma_i^{(\tau)}$ określa, jaka część jednostek, które w okresie $t-I$ osiągnęły wiek τ okresów zmarła w okresie t nie osiągając wieku $\tau+I$ okresów).

Starzenie się powoduje, że wszystkie jednostki, które w ilości $z_{t-1}^{(\tau)}$ były na początku okresu t w wieku należącym do przedziału $[\tau, \tau+I)$ opuszczają ten zasób w czasie o długości dokładnie jednego okresu; jedna część jednostek w ilości $\gamma_i^{(\tau)} z_{t-1}^{(\tau)}$; jak wspomniano wyżej, w okresie t opuszcza ten zasób na skutek wymierania, wzór (3.26), a część druga - skupiająca jednostki, które przeżyły i w ilości $y_i^{(\tau)}$ osiągnęły wiek $\tau+I$ okresów opuszcza zasób jednostek z przedziału wiekowego $[\tau, \tau+I)$:

$$x_i^{(\tau+1)} = y_i^{(\tau)} = (1 - \gamma_i^{(\tau)}) z_{t-1}^{(\tau)}, \quad \tau = 0, 1, 2, \dots; \quad (3.30)$$

lub:

$$x_i^{(\tau+1)} = y_i^{(\tau)} = (1 - \gamma_i^{(\tau)})(1 - \lambda_{t-1}^{(\tau)}) x_{t-1}^{(\tau)}, \quad \tau = 0, 1, 2, \dots; \quad (3.31)$$

ponieważ:

$$z_i^{(\tau)} = (1 - \lambda_i^{(\tau)}) x_i^{(\tau)}, \quad \tau = 0, 1, 2, \dots; \quad (3.32)$$

dlatego, że część jednostek $\lambda_i^{(\tau)} x_i^{(\tau)}$, które w okresie t zasiły zasób jednostek w wieku z przedziału $[\tau, \tau+I)$ ilością $x_i^{(\tau)}$, wymiera w tym samym okresie t nie dożywając wieku $\tau+I$ okresów.

Zależność (3.31) liczby jednostek $x_i^{(\tau+1)}$, które w okresie t powiększyły stan jednostek z przedziału wiekowego $[\tau+1, \tau+2)$, (osiągnęły wiek $\tau+1$ okresów), od liczby jednostek, które w okresie $t-I$ powiększyły stan jednostek z przedziału wiekowego $[\tau, \tau+1)$, jest modelem opóźnienia prostego o jeden okres. Oznaczając za pomocą $(1 - \mu_i^{(\tau)})$ iloczyn $(1 - \mu_i^{(\tau)}) = (1 - \gamma_i^{(\tau)})(1 - \lambda_{t-1}^{(\tau)})$, wzór (3.28) można zapisać w sposób skrócony:

$$y_i^{(\tau)} = x_i^{(\tau+1)} = (1 - \mu_i^{(\tau)}) x_{t-1}^{(\tau)}, \quad \tau = 0, 1, 2, \dots \quad (3.33)$$

Współczynnik $\mu_i^{(\tau)}$ nazywany współczynnikiem wymieralności, pokazuje, jaka część jednostek, które w okresie $t-I$ osiągnęły wiek τ , zmarła nie osiągając wieku $\tau+1$.

W modelu generacji rozkład opóźnienia jest jednopunktowy z wartością średnią równą jeden. Przedstawiony model jest elementem składowym modelu opisującego rozwój populacji, w której

⁶ Założenie o niejednakowych wartościach współczynników $\lambda_i^{(\tau)}$ i $\gamma_i^{(\tau)}$ bierze się stąd, że jednostki, które należały do zasobu jednostek z przedziału wiekowego $[\tau, \tau+1)$ na początku okresu t są starsze od tych, które zasiły ten zasób w okresie t . Wartości te mogą różnić się w istotny sposób w następstwie wielu czynników, między innymi sezonowości, dynamiki urodzeń, długości okresu będącego jednostką pomiaru, wartości parametru τ_k i in.

jednostki należące do poszczególnych przedziałów wiekowych są opisane przez zależności (3.27)-(3.33).

Określenie związku między generacjami, możliwe dzięki wykorzystaniu zależności (3.27), (3.28) i (3.29), pozwala na prowadzenie analizy kohortowej. Wpierw zbadana zostanie zależność między natężeniem strumienia jednostek, które przeżyły, od natężenia strumienia jednostek zasilających.

Na podstawie (3.30) w wyniku rekurencyjnego podstawiania otrzymywane są równoważne wzory:

$$y_t^{(\tau)} = \prod_{i=0}^{t-\tau} (1 - \mu_{t-i}^{(\tau-i)}) x_{t-k-l}^{(\tau-k)}, \quad \tau = 0, 1, 2, \dots; \quad (3.34a)$$

lub

$$y_{t+\tau+k}^{(\tau+k)} = \prod_{i=0}^k (1 - \mu_{t+\tau+i}^{(\tau+i)}) x_t^{(\tau)}, \quad \tau = 0, 1, 2, \dots; \quad (3.34b)$$

które pokazują zależność liczby jednostek z przedziału wiekowego $[\tau - \kappa, \tau - \kappa + l]$, które po upływie κ okresów osiągnęły wiek $\tau + l$ okresów, wzór (3.34a), oraz zależność liczby jednostek z przedziału wiekowego $[\tau, \tau + l]$, które po upływie κ okresów osiągnęły wiek $\tau + \kappa + l$ okresów, wzór (3.34b).

Na podstawie wzoru (3.29) zgony w poszczególnych generacjach są opisane za pomocą poniższych wzorów:

$$y_t^{(0)} = \lambda_t^{(0)} x_t^{(0)} + \gamma_t^{(0)} (1 - \lambda_{t-1}^{(0)}) x_{t-1}^{(0)} = \lambda_t^{(0)} x_t^{(0)} + \frac{\gamma_t^{(0)}}{1 - \gamma_t^{(0)}} (1 - \mu_t^{(0)}) x_{t-1}^{(0)},$$

$$y_t^{(1)} = \lambda_t^{(1)} (1 - \mu_t^{(0)}) x_{t-1}^{(0)} + \frac{\gamma_t^{(1)}}{1 - \gamma_t^{(1)}} (1 - \mu_t^{(1)}) (1 - \mu_{t-1}^{(0)}) x_{t-2}^{(0)},$$

$$y_t^{(2)} = \lambda_t^{(2)} (1 - \mu_t^{(1)}) (1 - \mu_{t-1}^{(0)}) x_{t-2}^{(0)} + \frac{\gamma_t^{(2)}}{1 - \gamma_t^{(2)}} (1 - \mu_t^{(2)}) (1 - \mu_{t-1}^{(1)}) (1 - \mu_{t-2}^{(0)}) x_{t-3}^{(0)},$$

.....

$$y_t^{(\tau)} = \lambda_t^{(\tau)} x_t^{(0)} \prod_{i=0}^{\tau-1} (1 - \mu_{t-i}^{(\tau-i)}) + \frac{\gamma_t^{(\tau)}}{1 - \gamma_t^{(\tau)}} (1 - \mu_{t-1}^{(\tau)}) x_{t-\tau-1}^{(0)} \prod_{i=0}^{\tau-1} (1 - \mu_{t-i-1}^{(\tau-i)}).$$

Jak nietrudno zauważyć w powyższych równaniach, liczba zgonów w każdej generacji o numerze τ , $\tau = 1, 2, 3, \dots$; jest modelem opóźnienia rozłożonego z dwoma niezerowymi współczynnikami, przy zmiennej niezależnej odpowiednio z okresów $t - \tau$ oraz $t - \tau - 1$.

Łączna liczba zgonów y_t' w okresie t , jest równa sumie zgonów we wszystkich generacjach w okresie t ; przy wyprowadzeniu poniższego wzoru wykorzystano fakt, że w sąsiednich równaniach występują wyrażenia zawierające tę samą zmienną $x_{t-i}^{(0)}$:

$$y_t' = y_t^{(0)} + y_t^{(1)} + \dots = \lambda_t^{(0)} x_t^{(0)} + \sum_{i=1}^{\tau} \left(\frac{\gamma_t^{(i-1)}}{1 - \gamma_t^{(i-1)}} + \lambda_t^{(i)} \right) \prod_{j=0}^{i-1} (1 - \mu_{t-j}^{(i-j)}) x_{t-i}^{(0)}. \quad (3.35)$$

Łączna liczba zgonów jest również, jak to pokazuje wzór (3.35), modelem opóźnienia rozłożonego z współczynnikami struktury opóźnienia opisanymi za pomocą następujących wzorów:

$$v_{i0} = \lambda_i^{(0)}, \quad v_{ii} = \left(\frac{\gamma^{i(i-1)}}{1 - \gamma^{i(i-1)}} + \lambda_i^{(i)} \right) \prod_{j=0}^{i-1} (1 - \mu_{i-j}^{(i-j)}), \quad i = 1, 2, \dots; \quad (3.36)$$

oraz odpowiadającymi im współczynnikami rozkładu opóźnienia:

$$w_{ii} = \frac{v_{ii}}{\sum_{i=0}^{\infty} v_{ii}}, \quad i = 0, 1, 2, \dots;$$

o wartości średniej rozkładu opóźnienia w okresie t :

$$M(W_t) = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} i w_{ii}}{\sum_{i=0}^{\infty} w_{ii}}.$$

Z wcześniejszych rozważań wiadomo, że powyższy wzór tylko w przypadku stanu ustalonego można interpretować jako średni wiek jednostek, które umarły w okresie t . Poza tym przypadkiem średni wiek jednostek, które umarły w okresie t , opisuje wzór (1. 19) przedstawiający wartość średnią rozkładu wynikowego U_t :

$$M(U_t) = \sum_{i=0}^{\infty} i u_{t,i} = \sum_{i=1}^{\infty} i \frac{v_{ti} x_{t-i}^{(0)}}{\sum_{i=0}^{\infty} v_{ti} x_{t-i}^{(0)}}. \quad (3.37)$$

Przeciętne dalsze trwanie życia jednostek w wieku należącym do przedziału $[\tau_0, \tau_0 + 1]$ można szacować w najprostszy sposób korzystając ze współczynników rozkładu opóźnienia W_t z okresu t :

$$\frac{\sum_{i=\tau_0+1}^{\infty} (i - \tau_0) w_{ii} y_i^{(\tau_0+i)}}{\sum_{i=\tau_0}^{\infty} w_{ii} y_i^{(\tau_0+i)}}. \quad (3.38)$$

III.3.1.2 Model zmiennej sprawności procesów inwestowania w Polsce przed 1989 r.

Odmiana modelu (3.22), w którym $\lambda_i = \rho_i$ została zaproponowana przez W. Otto (Otto (1988)) w pracy poświęconej analizie procesów inwestycyjnych w gospodarce polskiej przed 1989 r. Przesłanką budowy tego modelu było spostrzeżenie, że cykl inwestycyjny ulega skróceniu wraz ze wzrostem zasobu niedokończonych inwestycji. Zmienną zależną w tym modelu są tzw. nakłady skutkujące (inwestycje oddane do użytku), zmienną niezależną są wielkości poniesionych nakładów inwestycyjnych, interpretowane odpowiednio jako strumień wyczerpujący oraz strumień zasilający zasób inwestycji w toku (zamrożonych nakładów inwestycyjnych). Przedstawiony niżej opis jest nieznacznie zmieniony w stosunku do oryginalnego zamieszczonego w Otto (1988).

Inwestycje rozpoczęte w roku t , NP_t , zasilają zasób nazywany zamrożeniem nakładów inwestycyjnych, którego wielkość pod koniec roku wynosi Z_t . Zasób ten jest wyczerpywany przez strumień inwestycji oddawanych w roku t do użytku NS_t :

$$Z_t = Z_{t-1} + NP_t - NS_t$$

Na czas trwania procesu inwestycyjnego wpływ ma określany egzogenicznie współczynnik ρ_t zdefiniowany przez wyrażenie:

$$\rho_t = \frac{NS_t}{Z_{t-1} + NP_t}.$$

Współczynnik ρ_t odzwierciedla relację między stanem zamrożenia pod koniec roku t do potencjalnie maksymalnej wartości zamrożenia inwestycji w roku t (w przypadku nieukończenia w tym roku żadnych inwestycji). Z założenia współczynnik ten przyjmuje wartości z przedziału $[0, 1]$.

Z powyższych dwóch zależności nietrudno wyprowadzić następującą:

$$NS_t = \rho_t (Z_{t-1} + NP_t).$$

Przez kolejne podstawiania Z_{t-1} , $i=1, 2, \dots$; uzyskuje się następującą zależność:

$$NS_t = \frac{\rho_t}{1 - \rho_t} \sum_{i=0}^{\infty} \left[\prod_{j=0}^i (1 - \rho_{t-j}) \right] NP_{t-i}.$$

Przyjmując oznaczenie:

$$w_{it} = \frac{\rho_t}{1 - \rho_t} \prod_{j=0}^i (1 - \rho_{t-j})$$

można przepisać zależność natężenia strumienia inwestycji oddawanych do użytku NS_t , od wielkości strumienia inwestycji rozpoczynanych NP_t w następującej postaci:

$$NS_t = a_t \sum_{i=0}^{\infty} w_{it} NP_{t-i},$$

która wskazuje, że zależność ta jest modelem zmiennego w czasie opóźnienia rozłożonego o rozkładzie (w_{t0}, w_{t1}, \dots) , a współczynnik a_t oznacza mnożnik długookresowy:

$$a_t = \frac{\rho_t}{1 - \rho_t} \sum_{i=0}^{\infty} \prod_{j=0}^i (1 - \rho_{t-j}).$$

Ze zbieżności sumy

$$\sum_{i=0}^{\infty} \prod_{j=0}^i (1 - \rho_{t-j})$$

wynika, że istnieje pewna wielkość ρ_t^* , $\rho_t^* > 0$, interpretowana jako liczona w roku t średnia historyczna wartość współczynnika ρ_{t-j} , $i=0, 1, 2, \dots$; że:

$$\frac{1 - \rho_t^*}{\rho_t^*} = \sum_{i=0}^{\infty} \prod_{j=0}^i (1 - \rho_{t-j}),$$

w związku z czym mnożnik długookresowy można zapisać za pomocą wzoru:

$$a_t = \frac{\frac{1 - \rho_t^*}{\rho_t^*}}{\frac{1 - \rho_t}{\rho_t}}.$$

Warto odnotować, że przy stałej wartości współczynnika $\rho_t = \rho_t^*$ mnożnik długookresowy jest równy jeden a rozkład opóźnienia jest rozkładem geometrycznym.

III.3.1.3 Model transmisji ceny

Zagadnienie transmisji ceny ma bogatą literaturę, np.: Goodwin, Harper (2000), Meyer, Cramon-Taubadel von (2004), Manera, Frey (2005). Obszerny przegląd modeli transmisji ceny można znaleźć w Hassouneh I., von Cramon-Taubadel S., Serra T., Gil J. M. (2012). Większość omawianych modeli jest zbudowana wokół obserwowanej asymetrii wzrostów i spadków cen (w Goodwin, Harper (2000) wyróżnione są trzy typy dynamiki); liczba przypadków jest jedynym naruszeniem liniowości.

Omawiane w powyższych pracach modele są modelami ekonometrycznymi, które dobrze opisują ilościowy aspekt transformacji, jednak nieco gorzej wyjaśniają działanie jej mechanizmu.

Model transmisji cen zaproponowany w Gadomski (1980), był częścią światowego modelu ziarna kakaowego, a jego zadaniem był opis transmisji cen rynku międzynarodowego na cenę rynków krajowych surowca (ziarna kakaowego). Był on zarazem próbą teoretycznego wyjaśnienia zmienności mechanizmu transmisji cen, w której naruszenie założenia o liniowości modelu było dalej idące.

Punktem wyjścia było dostrzeżenie prawidłowości polegającej na tym, że przy wysokich zapasach cena rynku krajowego reaguje z większym opóźnieniem na zmianę ceny rynku międzynarodowego, niż w przypadku, gdy zapasy te są niskie.

W modelu uwzględnione są dwa rodzaje przepływów: rzeczowe, obejmujące zapas surowca Z , strumień zakupów surowca X zasilający zapas surowca Z , strumień zużycia Y (przetwarzania na cele konsumpcyjne) wyczerpujący zapas surowca Z ; oraz strumienie pieniężne, obejmujące wartość zapasu surowca VZ , strumień wartości zakupów surowca VX powiększający wartość zapasu surowca VZ , oraz strumień wartości strumienia zużycia VY . Model jest opisany za pomocą następującego układu zależności:

$$Z_t = Z_{t-1} + X_t - Y_t,$$

$$VZ_t = VZ_{t-1} + VX_t - VY_t,$$

$$VX_t = PX_t \cdot X_t,$$

$$PY_t = \frac{VZ_{t-1}}{Z_t},$$

$$VY_t = PY_t \cdot Y_t,$$

gdzie:

- Z_t - zapas pod koniec miesiąca t ,
- X_t - zakupy w miesiącu t ,
- Y_t - zużycie w miesiącu t ,
- VZ_t - wartość zapasu pod koniec miesiąca t ,

- VX_t - wartość zakupów w miesiącu t ,
 VY_t - wartość zużycia w miesiącu t ,
 PX_t - średnia cena zakupów w miesiącu t ,
 PY_t - średnia cena jednostki zapasu, wycena na początku miesiąca t .

Dwie pierwsze zależności powyższego układu zależności są równaniami bilansowymi odpowiednio przepływów rzeczowych i pieniężnych. Zależność trzecia określa wartość strumienia zakupów dokonanych w miesiącu t . Zależność czwarta zawiera regułę wyceny wartości jednostki zapasu a zarazem ceny jednostkowej zużywanego surowca. Zależność piąta określa wartość zużytego surowca w miesiącu t na podstawie wyceny z zależności czwartej.

Rozwiązanie układu równań dla średniej ceny jednostki zapasu PY_t ma następującą postać:

$$PY_{t+1} = PY_t + \frac{X_t}{Z_t}(PX_t - PY_t).$$

Powyższa zależność jest podobna do zależności (1.54) z Części I ze współczynnikiem $\lambda_t = X_t / Z_t$. W tym przypadku jednak nie można wykluczyć przypadku, w którym wartość ilorazu $\lambda_t = X_t / Z_t$ przekracza wartość jeden - zależy to od retencji zapasu i przyjętej jednostki czasu.

Iloraz $\lambda_t = X_t / Z_t$ zależy od pożądanego przez przetwórców poziomu zapasu, który ulega zmianie między innymi pod wpływem poziomu cen oraz stopy procentowej. W okresach wysokich cen następuje pogorszenie płynności finansowej przetwórców, starających się minimalizować zapasy; wzrasta wtedy średnia wartość ilorazu X_t / Z_t , co powoduje zmniejszenie wartości średniej rozkładu opóźnienia.

III.3.1.4 Model kredytu

Makroekonomiczny model kredytu opisujący proces kształtowania się zadłużenia z tytułu kredytu z uwzględnieniem struktury terminowej został zaproponowany w pracy Gadomski (2009)⁷. Zadaniem modelu było wyjaśnienie następstw skokowej zmiany średniego terminu kredytu $T(t)$ zdefiniowanego w następujący sposób⁸:

$$T(t) = \frac{\sum_{i=0}^{\infty} i \cdot z_t^{(i)}}{\sum_{i=0}^{\infty} z_t^{(i)}},$$

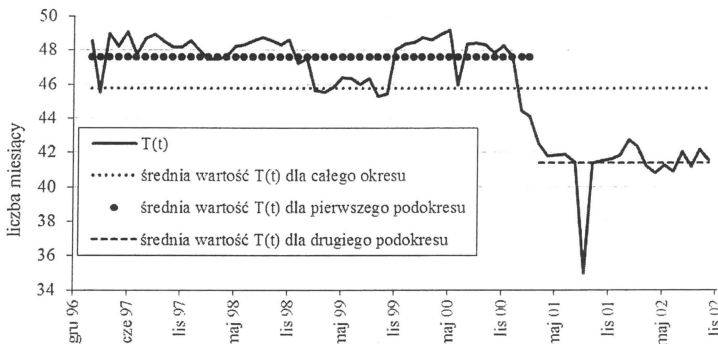
gdzie $z_t^{(i)}$ oznacza stan zadłużenia w okresie t z tytułu kredytów zaciągniętych z okresem spłat i miesięcy, $i = 0, 1, 2, \dots, n$. Wykres wartości zmiennej $T(t)$ został przedstawiony na rys. 3.1.

Model został oparty na następujących założeniach. System charakteryzuje doskonała szczelność systemu kredytowego, tzn., że wszystkie kredyty są spłacane w całości i w terminie. Kredytobiorcy

⁷ Model jest przedstawiony w uproszczeniu. Od 2003 r. NBP publikuje dane w innej dezagregacji.

⁸ Warto zauważyć, że mimo podobieństwa wielkość $T(t)$ różni się od $M(Q)$, wzór (3.17).

zaciągają kredyty z różnymi okresami spłat. W okresie t w systemie bankowym zostają udzielone kredyty w wysokości x_t , o następującej strukturze: część $\alpha_t^{(0)}$ zostaje udzielona z okresem spłaty do jednego miesiąca, część $\alpha_t^{(1)}$ na jeden miesiąc itd., część $\alpha_t^{(i)}$ na i miesięcy, przy czym przez n (liczba naturalna) oznaczono okres spłat wyrażony liczbą miesięcy. Zbiór współczynników $\alpha_t^{(i)}$, $i = 0, 1, \dots, n$, określa strukturę terminową strumienia udzielonych w okresie t kredytów odzwierciedlającą preferencje kredytobiorców. Przy ustalonym schemacie spłat (bez okresu karencji i równe raty spłat) struktura zadłużenia z tytułu kredytów zależy od łącznej wielkości udzielonego kredytu oraz struktury terminowej strumienia kredytu.



źródło: Gadomski Jan (2009) na podstawie danych NBP

rys. 3.1. Kształtowanie się średniego terminu kredytu $T(t)$ w okresie grudzień 1996 r. – listopad 2002 r.

Model jest opisany za pomocą następującego układu zależności:

$$x_t = \sum_{i=0}^n x_t^{(i)} = \sum_{i=0}^n \alpha_t^{(i)} x_t, \quad \sum_{i=0}^n \alpha_t^{(i)} = 1, \quad (3.39)$$

$$z_t = \sum_{i=0}^n z_t^{(i)}; \quad z_t^{(i)} = z_{t-1}^{(i)} + \alpha_t^{(i)} x_t - y_t^{(i)}, \quad i = 0, 2, \dots, n, \quad (3.40)$$

$$y_t^{(i)} = \frac{\alpha_{t-1}^{(i)} x_{t-1} + \alpha_{t-2}^{(i)} x_{t-2} + \dots + \alpha_{t-i}^{(i)} x_{t-i}}{i} = \frac{\sum_{j=1}^i \alpha_{t-j}^{(i)} x_{t-j}}{i} = \frac{\sum_{j=1}^i x_{t-j}^{(i)}}{i}, \quad (3.41)$$

$$y_t = y_t^{(0)} + y_t^{(1)} + \dots + y_t^{(n)}, \quad (3.42)$$

gdzie:

$x_t^{(i)}$ - kredyt udzielony w miesiącu t z okresem spłaty i miesięcy $i=0, \dots, n$;

$z_t^{(i)}$ - stan kredytów udzielonych na i miesięcy pod koniec miesiąca t ,

z_t - łączne zadłużenie z tytułu kredytów udzielonych, stan pod koniec miesiąca t ,

$y_t^{(i)}$ - spłata w miesiącu t kredytów udzielonych na i miesięcy,

y_t - łączna spłata w miesiącu t wszystkich kredytów.

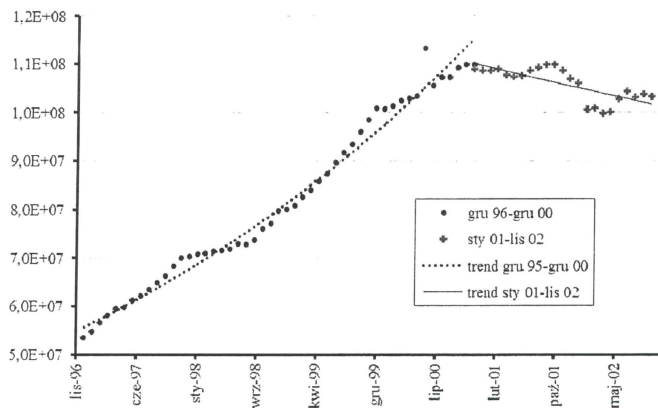
Układ równań (3.39), (3.40), (3.41) i (3.42) ma następujące rozwiązanie:

$$y_t = \alpha_t^{(0)} x_t + \sum_{i=1}^t x_{t-i} \sum_{j=i}^n \frac{\alpha_{t-j}^{(j)}}{j}. \quad (3.43)$$

Model opisany zależnością (3.43) jest należy do złożonych modeli opóźnienia rozłożonego w systemie przepływów; które zostały opisane w Części II. W tym przypadku złożoność modelu jest wynikiem sumowania (połączenia równoległego modeli opóźnienia rozłożonego).

Analiza danych pozwoliła na podział badanego okresu na dwa podokresy, w których zmienna $T(t)$ charakteryzowała się względną stabilnością; podokres pierwszy obejmujący miesiące: grudzień 1996 r. – listopad 2000 r., oraz podokres drugi obejmujący miesiące grudzień 2000 r. – listopad 2002 r. Wyróżnienie dwóch podokresów pozwoliło na uproszczenie wzoru (3.43) przez przyjęcie założenia o stałości współczynników $\alpha_i^{(i)}$, $i=0, \dots, n$; w podokresach.

Przedstawione w cytowanej pracy badanie wskazywało, że ukazana na rys. 3.1 skokowa zmiana wartości $T(t)$ była następstwem działania dwóch powiązanych czynników: spadkowi popytu na kredyt oraz zmiany struktury preferencji na korzyść wzrostu udziału kredytów krótkookresowych w wyniku zastoju, w którym znalazła się gospodarka polska w badanym okresie; kształtowanie się kredytu w gospodarce polskiej w badanym okresie przedstawiono na rys. 3.2.



źródło: Gadomski Jan (2009) na podstawie danych NBP

rys. 3.2. Kształtowanie się inu kredytu $T(t)$ w okresie grudzień 1996 r. – listopad 2002 r.

Podsumowanie Części III.

W części tej zostały omówione modele opóźnienia w systemach przepływów stanowiące węższą kategorię modeli opóźnienia rozłożonego; znajdują one zastosowanie w modelowaniu systemów, w których natężenie strumienia wypływającego z pewnego zasobu można wyrazić jako funkcję natężenia strumienia zasilającego ten zasób – model opóźnienia rozłożonego. Omówione zostały własności tej kategorii modeli opóźnienia. Pokazano, że w modelach tych zależność poziomu zasobu od natężenia strumienia zasilającego jest również modelem opóźnienia rozłożonego. W analizie tej kategorii modeli można wyróżnić następujące rozkłady opóźnienia: strumienia wypływającego względem strumienia zasilającego wraz z odpowiednim wynikowym rozkładem opóźnienia, zasobu względem strumienia zasilającego wraz z odpowiednim wynikowym rozkładem opóźnienia. Przedstawione zostały własności modeli opóźnienia w systemach przepływów ze stałymi współczynnikami; rozważania te zostały zilustrowane przekładami. W dalszej części przedstawiony został model opóźnienia ze dwoma zmiennymi współczynnikami. Omówiono jego zastosowanie w modelach demograficznych. Ponadto, przeanalizowane zostały własności modeli dostosowania częściowego ze zmiennym współczynnikiem dostosowania. Rozważania w tej części zilustrowane zostały przykładami modeli opóźnienia w systemach przepływów: modelem zmiennej sprawności procesów inwestowania, modelem transmisji ceny, modelem kredytu.

Bibliografia

1. Agarwal Vertica, Paelink Jean H. P., Reinert Kenneth A., Stough Roger R. (2008): Trade Liberalization and Income Inequality in India: a Poisson Distributed Lag Analysis, Applied Econometrics and International Development, Euro-American Assoc. of Economic Dev. Studies, Vol. 8-2.
2. Almon S. (1965): "The Distributed Lag Between Capital Appropriations and Expenditures", *Econometrica*, 33.
3. Alston Julian M., James S. Jennifer, Andersen Matthew A., Pardey Philip G. (2010): Models of Research and Productivity, w: *Persistence Pays*, Natural Resource Management and Policy, Volume 34, 2010, str. 271-311.
4. Amman Hans M., Kendrick David A., Rust John (red.): *Handbook of Computational Economics*, Vol.1, North-Holland, Elsevier, Amsterdam, Lousanne, New York, 1996. Str. 42.
5. Balke, N.S., Brown, S.P.A. and Yücel, M.K. (1998). Crude Oil and Gasoline Prices: An Asymmetric Relationship?, Federal Reserve Bank of Dallas, Economic Review, First Quarter, pp. 2-11
6. Baltagi Badi H. (2011): *Econometrics*, Springer Texts in Business and Economics, Springer Verlag, Berlin Heidelberg.
7. Baranyi József (2010), Modelling and parameter estimation of bacterial growth with distributed lag time, rozprawa doktorska, Doctoral School of Informatics, University of Szeged, Hungary.
8. Bronsztejn I. N., Siemiendajew, K. A., Musiol G., Muhlig H. (2004): *Nowoczesne kompendium matematyki*, PWN.
9. Cagan P., "The Monetary dynamics of Hyper Inflation", w Friedmann, (red.): *Studies in the Quantity Theory of Money*", University of Chicago Press, 1956.
10. Clark Darral G. (1976): Econometric Measurement of the Duration of Advertising Effects on Sales, *Journal of Marketing Research*, Vol. 13, No. 4, Nov., 1976.
11. Dahl Christian M., Kulaksizoglu Tamer (2006): Nonlinear Modeling of Changing Lag Structure in U.S. Housing Construction, rozdział 15, w: *Contributions to Economic Analysis*, Vol. 276, 2006.
12. DeLeeuw Frank (1962), The Demand for Capital Goods by Manufacturers: A Study of Quarterly Time Series, *Econometrica*.
13. Dhrymes Phoebus J. (1981): *Distributed Lags. Problems of Estimation and Formulation*, 2nd edition. North Holland Publishing Company, Amsterdam, New York, Oxford.
14. Dhrymes, Phoebus J. (2013): *Mathematics for econometrics, DE Lag Operators*, Rozdz. 6, str.171, Springer, New York.
15. Fichtenholz G. M. (1963): *Rachunek różniczkowy i całkowy*, tom III, PWN, Warszawa.

16. Fisher, Irving. (1937): Note on a Short-Cut Method for Calculating Distributed Lags, *International Statistical Institute Bulletin*, str. 323-327.
17. Forrester Jay W. (1961), *Industrial dynamics*. Cambridge, Mass., M.I.T. Press.
18. Forrester Jay W., Legasto Augusto A., Jr., Lyneis James M. (red) (1980): *System dynamics*, Amsterdam; New York, Elsevier/North-Holland.
19. Frances Philip H., Vroomen Björn (2003), Estimating Duration Intervals, Erasmus Research Institute of Management (ERIM), Rotterdam school of Management, *ERIM Report Series: Research in Management*, April 2003.
20. Frances Philip H., Vroomen Björn (2006), Estimating Confidence Bounds for Advertising Effect Duration Intervals, *Journal of Advertising*, Vol. 35, 2/2006.
21. Frick Hans (1986): A Note on a Dynamic Adjustment Equation for a Poisson istributed Lag Model, *Empirical Economics*, Vol. 11, str. 65-67, 1986.
22. Hassouneh I., von Cramon-Taubadel S., Serra T., Gil J. M. (2012), Recent Developments in the Econometric Analysis of Price Transmission, Workink paper No. 2, Transparency of Food Pricing TRANSFOP, Seventh Framework Programme, Grant Agreement No. KBBE-265601-4- TRANSOP, January, 2012.
23. Friedrich D. (1982): A Dynamic Adjustment Equation for a Poisson Distributed lag, *Empirical Economics*, Vol. 7, strony 239-249, Springer.
24. Gadomski Jan (2013): On Some Properties of the Composite Distributed Lag Models, *Operations Research and Decisions*, 3/2013.
25. Gadomski Jan (2002), A Dynamic Approach to Modeling of the Banking Sector, in: *MODEST 2002: Transition and Transformation; Problems and Models*, Owsinski J. (ed), The Interfaces Institute.
26. Gadomski Jan (2003), "An Outline of the Model of the Banking Sector in the Closed Economy"(in Polish), *Acta Universitatis Lodziensis, Folia Oeconomica* 166, 2003.
27. Gadomski Jan (2009): Dynamics of Loans in the Polish Banking System, *CONTROL AND CYBERNETICS*, Wolumin: 38 Numer: 3 Strony: 893 – 911.
28. Gadomski Jan (1986): Modele opóźnienia rozłożonego ze zmiennymi współczynnikami opóźnienia, *Prace IBS PAN, Polska Akademia Nauk, Instytut Badań Systemowych, Warszawa*.
29. Gadomski J., Klukowski Leszek (1985): Wpływ zapasów na opóźnienia cen, *Ekonomia* Nr 47, wyd.: Wydawnictwa Uniwersytetu Warszawskiego, Warszawa. ISSN 0137-3056
30. Gadomski Jan, Klukowski Leszek (1988): Właściwości opóźnień rozłożonych o parametrach zmiennych w czasie, *Ekonomia*, Nr 52, wyd.: Wydawnictwa Uniwersytetu Warszawskiego, strony 145-162, Warszawa 1988, ISSN 0137-3056

31. Goodwin Barry K., Harper Daniel C. (2000): Price Transmission, Threshold Behavior, And Asymmetric Adjustment in the U.S. Pork Sector, *Journal of Agricultural and Applied Economics*, Volume 32, No 03, December 2000.
32. Griliches Zvi (1967): Distributed Lags, A Survey, *Econometrica*, No 35, January.
33. Gutenbaum J. (red.), Inkielman M. (red.), Babarowski J., Gadomski J., Woroniecka I., (1998): *Symulacyjny model gospodarki Polski*, Seria Badania Systemowe, tom 20, Polska Akademia Nauk, Instytut Badań Systemowych, Warszawa
34. Hassouneh Islam, von Cramon-Taubadel Stephan, Serra Teresa, Gil José M. (2012): Recent Developments in the Econometric Analysis of Price Transmission, Working Paper No. 2, Transparency of Food Pricing TRANSFOP, January 2012, Seventh Framework Programme, Grant Agreement No. KBBE-265601-4-TRANSFOP.
1. Hendry, D. F., Pagan A. R., Sargan J.D.: *Handbook of Econometrics*, Rozdział 18, Dynamic Specification, w: Vol. II, Griliches Z., Intriligator M. D. (red.). Elsevier Science Publishers BV, 1984.
2. Holzer Jerzy Z., Kędelski Mieczysław, Paradysz Jan: *Demografia*. Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Poznaniu, 2006.
3. Holzer Jerzy Z. (1994), *Demografia*, wyd. IV poprawione, PWE, str. 336, Warszawa.
4. Inkielman M. (1995): *Symulacyjne metody analizy sterowanych wielozbiornikowych systemów wodnych*, Polska Akademia Nauk, Instytut Badań Systemowych, Seria: Badania systemowe, t. 19. Warszawa.
5. Intriligator M. D. (1978): *Econometric Models, Techniques and Applications*, North_Holland Publishing Company, Amsterdam, Oxford.
6. Johnson Norman L., Kotz Samuel, Kemp Adrienne W. (2008); *Univariate Discrete Distributions*, III wydanie, John Wiley&Sons, INC. New York, Chichester, Brisbane, Toronto, Singapore.
7. Jorgensen, D. W. (1966): „Rational Distributed Lag Function”, *Econometrica*, 34.
8. Kelm Robert (2005): Ekonometryczny model cen i popytu na pieniądź w Polsce: perspektywa średniookresowa 1995-2003, *Ekonomista* nr 4/2005, str. 449-481.
9. Kenkel, J. L. (1974): *Dynamic Linear Economic Models*, Gordon and Breach Science Publishers, New York, London, Paris.
10. Kim Hyeyoung, Ward Ronald W. (2013): Price Transmission Across the U.S. Food Distribution System, *Food Policy*, 41, str. 226-236.
11. Kim Minjoo (2011): „Three Essays In semi-Parametric Modelling of Time-varying Distribution”, rozprawa doktorska, Leeds University, CASIF Leeds University Business School, czerwiec 2011.

12. Klein L. R. (1950): *Economic Fluctuation in the United States, 1921-1941*. The Cowles Commission Monograph No.11, New York, John Wiley & Sons, Inc.
13. Koyck, L. M. (1954): *Distributed Lags and Investment Analysis*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam.
14. Leszkiewicz-Kędzior K., Welfe A. (2014): Asymmetric Price Adjustments in the Fuel Market, *Central European Journal of Economic Modelling and Econometrics*, CEJEME Nr 2, wol. 6, strony 105-127 (2014).
15. Maddala G. S. (1977): *Econometrics*, McGraw-Hill Book Company, New York.
16. Manera Matteo, Frey Giliola (2005): *Econometric Models of Asymmetric Price Transmission*, *Nota di Lavoro*, Fondazione Eni Enrico Mattei, No 100.2005, Leibnitz Information Centre for Economics.
17. Meyer Jochen, von Cramon-Taubadel Stephan (2004): Asymmetric Price Transmission: A Survey, *Journal of Agricultural Economics*, Volume 55, Issue 3, pages 581–611, November 2004
18. Morishima M., Murata Y., Nosse T., Saito M. (1972): *A Dynamic analysis of the American economy, 1902-1952*, w: *The Working of Econometric Models*, Cambridge University Press, New York.
19. Nerlove M. (1958): *Distributed Lags and Demand Analysis For agricultural and Other Commodities*, U. S. Department of Agriculture, Washington D. C.
20. Nowak Piotr, Gadomski Jan (2014), Deterministic properties of serially connected distributed lag models, *Operation Research and Decisions*. Vol. 23, No 3. Wrocław.
21. Okólski Marek: *Demografia. Podstawowe pojęcia, procesy i teorie w encyklopedycznym zarysie*. Wydawnictwo Naukowe SCHOLAR, WNE UW, Warszawa 2004.
22. Otto Wojciech (1985): *Wahania długości opóźnień inwestycyjnych. Próba pomiaru i wyjaśnienia*, rozprawa doktorska, Wydział Nauk Ekonomicznych, Uniwersytet Warszawski.
23. Pesando, J. S. (1972): *Seasonal Variability in Distributed Lag Models*, *Journal of the American Statistical Association*, June.
24. Pindyck Robert S., Rubinfeld Daniel L. (1998): *Econometric Models and Econometric Forecasts*, wyd. IV, McGraw-Hill International Editions, Economic series, Boston, Burr Ridge, Dubuque, Madison, New York, San Francisco, St. Luis.
25. Schmidt P. (1974): *An Argument for the usefulness of the gamma Distributed Lag Model*, *International Economic Review*, February.
26. Solow R. M. (1960): *On a Family of Lag Distributions*, *Econometrica*, April.
27. Tinbergen J. (1959): *On the Theory of Trend Movements*, w: *Jan Tinbergen Selected Papers*. Amsterdam.
28. Tinsley P. A. (1967): *An Application of Variable weight Distributed Lags*, *Journal of American Statistical Association*, Vol. 62, No. 320, str. 1277-1289.

29. Ullah Aman, Raj Baldev (1980): A Polynomial distributed Lag Model with Stochastic Coefficients and Priors, *Empirical Economics*, Vol. 5, 1980, str. 219-232.
30. Warchalski, Tomasz (2004): Modele rozłożonego opóźnienia uwzględniające dynamikę realizacji zmiennej objaśniającej, *Przegląd Statystyczny* nr 51/2004, str. 23-29.
31. Welfe Aleksander (2003): *Ekonometria, Metody i ich zastosowanie*, wydanie III zmienione, PWE 2003.
32. Welfe Władysław: Stylized, Empirical Model of Economic Growth, *Acta universitatis lodziensis, Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego*, Łódź 2005.



1. Agarwal Vertica, Paelink Jean H. P., Reinert Kenneth A., Stough Roger R. (2008): Trade Liberalization and Income Inequality in India: a Poisson Distributed Lag Analysis, *Applied Econometrics and International Development, Euro-American Assoc. of Economic Dev. Studies*, Vol. 8-2.
2. Almon S. (1965): "The Distributed Lag Between Capital Appropriations and Expenditures", *Econometrica*, 33.
3. Alston Julian M., James S. Jennifer, Andersen Matthew A., Pardey Philip G. (2010): Models of Research and Productivity, w: *Persistence Pays, Natural Resource Management and Policy*, Volume 34, 2010, str. 271-311.
4. Baltagi Badi H. (2011): *Econometrics*, Springer Texts in Business and Economics, Springer Verlag, Berlin Heidelberg.
5. Baranyi József (2010), Modelling and parameter estimation of bacterial growth with distributed lag time, rozprawa doktorska, Doctoral School of Informatics, University of Szeged, Hungary.
6. Bronsztejn I. N., Siemiendajew, K. A., Musiol G., Muhlig H. (2004): *Nowoczesne kompendium matematyki*, PWN.
7. Cagan P., "The Monetary dynamics of Hyper Inflation", w: *Friedmann, (red.): Studies in the Quantity Theory of Money*, University of Chicago Press, 1956.
8. Clark Darral G. (1976): Econometric Measurement of the Duration of Advertising Effects on Sales, *Journal of Marketing Research*, Vol. 13, No. 4, Nov., 1976.
9. Dahl Christian M., Kulaksizoglu Tamer (2006): Nonlinear Modeling of Changing Lag Structure in U.S. Housing Construction, rozdział 15, w: *Contributions to Economic Analysis*, Vol. 276, 2006.

10. DeLeeuw Frank (1962), The Demand for Capital Goods by Manufacturers: A Study of Quarterly Time Series, *Econometrica*.
11. Dhrymes Phoebus J. (1981): Distributed Lags. Problems of Estimation and Formulation, 2nd edition. North Holland Publishing Company, Amsterdam, New York, Oxford.
12. Dhrymes, Phoebus J. (2013): Mathematics for econometrics, DE Lag Operators, Rozdz. 6, str.171, Springer, New York.
13. Fichtenholz G. M. (1963): *Rachunek różniczkowy i całkowy*, tom III, PWN, Warszawa.
14. Fisher, Irving. (1937): Note on a Short-Cut Method for Calculating Distributed Lags, *International Statistical Institute Bulletin*, str. 323-327.
15. Frances Philip H., Vroomen Björn (2003), Estimating Duration Intervals, Erasmus Research Institute of Management (ERIM), Rotterdam school of Management, *ERIM Report Series: Research in Management*, April 2003.
16. Frances Philip H., Vroomen Björn (2006), Estimating Confidence Bounds for Advertising Effect Duration Intervals, *Journal of Advertising*, Vol. 35, 2/2006.
17. Frick Hans (1986): A Note on a Dynamic Adjustment Equation for a Poisson Distributed Lag Model, *Empirical Economics*, Vol. 11, str. 65-67, 1986.
18. Friedrich D. (1982): A Dynamic Adjustment Equation for a Poisson Distributed lag, *Empirical Economics*, Vol. 7, strony 239-249, Springer.
19. Gadomski Jan (2013): On Some Properties of the Composite Distributed Lag Models, *Operations Research and Decisions*, 3/2013.
20. Gadomski Jan (1986): Modele opóźnienia rozłożonego ze zmiennymi współczynnikami opóźnienia, *Prace IBS PAN, Polska Akademia Nauk, Instytut Badań Systemowych*, Warszawa.
21. Gadomski Jan (2009): Dynamics of Loans in the Polish Banking System, *Control And Cybernetics*, Wolumin: 38, Numer: 3, Strony: 893 – 911.
22. Gadomski J., Klukowski Leszek (1985): Wpływ zapasów na opóźnienia cen, *Ekonomia* Nr 47, wyd.: Wydawnictwa Uniwersytetu Warszawskiego, Warszawa. ISSN 0137-3056
23. Gadomski Jan, Klukowski Leszek (1988): Właściwości opóźnień rozłożonych o parametrach zmiennych w czasie, *Ekonomia*, Nr 52, wyd.: Wydawnictwa Uniwersytetu Warszawskiego, strony 145-162, Warszawa 1988, ISSN 0137-3056
24. Goodwin Barry K., Harper Daniel C. (2000): Price Transmission, Threshold Behavior, And Asymmetric Adjustment in the U.S. Pork Sector, *Journal of Agricultural and Applied Economics*, Volume 32, No 03, December 2000.
25. Griliches Zvi (1967): Distributed Lags, A Survey, *Econometrica*, No 35, January.

26. Gutenbaum J. (red.), Inkielman M. (red.), Babarowski J., Gadomski J., Woroniecka I., (1998): *Symulacyjny model gospodarki Polski*, Seria Badania Systemowe, tom 20, Polska Akademia Nauk, Instytut Badań Systemowych, Warszawa
27. Hendry, D. F., Pagan A. R., Sargan J.D.: *Handbook of Econometrics*, Rozdział 18, Dynamic Specification, w: Vol. II, Griliches Z., Intriligator M. D. (red.). Elsevier Science Publishers BV, 1984.
28. Holzer Jerzy Z. (1994), Demografia, wyd. IV poprawione, PWE, str. 336, Warszawa.
29. Intriligator M. D. (1978): *Econometric Models, Techniques and Applications*, North_Holland Publishing Company, Amsterdam, Oxford.
30. Johnson Norman L., Kotz Samuel, Kemp Adrienne W. (2008); *Univariate Discrete Distributions*, III wydanie, John Wiley&Sons, INC. New York, Chichester, Brisbane, Toronto, Singapore.
31. Kelm Robert (2005): Ekonometryczny model cen i popytu na pieniądź w Polsce: perspektywa średniookresowa 1995-2003, *Ekonomista* nr 4/2005, str. 449-481.
32. Kelm Robert (2001): Restrykcje w modelach z rozkładami opóźnień, *Przegląd statystyczny*, tom 48 nr 3-4/2001, str. 131-150.
33. Kenkel, J. L. (1974): *Dynamic Linear Economic Models*, Gordon and Breach Science Publishers, New York, London, Paris.
34. Kim Hyeyoung, Ward Ronald W. (2013): Price Transmission Across the U.S. Food Distribution System, *Food Policy*, 41, str. 226-236.
35. Klein L. R. (1950): *Economic Fluctuation in the United States, 1921-1941*. The Cowles Commission Monograph No.11, New York, John Wiley & Sons, Inc.
36. Koyck, L. M. (1954): *Distributed Lags and Investment Analysis*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam.
37. Maddala G. S. (1977): *Econometrics*, McGraw-Hill Book Company, New York.
38. Manera Matteo, Frey Giliola (2005): *Econometric Models of Asymmetric Price Transmission*, Nota di Lavoro, Fondazione Eni Enrico Mattei, No 100.2005, Leibnitz Information Centre for Economics.
39. Meyer Jochen, von Cramon-Taubadel Stephan (2004): Asymmetric Price Transmission: A Survey, *Journal of Agricultural Economics*, Volume 55, Issue 3, pages 581–611, November 2004
40. Nerlove M. (1958): *Distributed Lags and Demand Analysis For agricultural and Other Commodities*, U. S. Department of Agriculture, Washington D. C.

41. Nowak Piotr, Gadomski Jan (2013), Deterministic properties of superposition of the distributed lag models, *Operations Research and Decisions*, 3/2013.
42. Otto Wojciech (1985): Wahania długości opóźnień inwestycyjnych. Próba pomiaru i wyjaśnienia, rozprawa doktorska, Wydział Nauk Ekonomicznych, Uniwersytet Warszawski.
43. Pesando, J. S. (1972): Seasonal Variability in Distributed Lag Models, *Journal of the American Statistical Association*, June.
44. Pindyck R. S., Rubinfeld D. L. (1998): *Econometric Models and Econometric Forecasts*, Forth Edition, Irwin/McGraw-Hill, Boston Massachusetts.
45. Schmidt P. (1974): An Argument for the usefulness of the gamma Distributed Lag Model, *International Economic Review*, February.
46. Solow R. M. (1960): On a Family of Lag Distributions, *Econometrica*, April.
47. Tinbergen J. (1959): On the Theory of Trend Movements, w: *Jan Tinbergen Selected Papers*, Amsterdam.
48. Tinsley P. A. (1967): An Application of Variable weight Distributed Lags, *Journal of American Statistical Association*, Vol. 62, No. 320, str. 1277-1289.
49. Ullah Aman, Raj Baldev (1980): A Polynomial distributed Lag Model with Stochastic Coefficients and Priors, *Empirical Economics*, Vol. 5, 1980, str. 219-232.
50. Warchański, Tomasz (2004): Modele rozłożonego opóźnienia uwzględniające dynamikę realizacji zmiennej objaśniającej, *Przegląd Statystyczny* nr 51/2004, str. 23-29.
51. Welfe Aleksander, Kelm Robert (1997): Zastosowanie modelu racjonalnych oczekiwań do opisu kształtowania się płac przeciętnych w Polsce 02.1991-04.1995, *Przegląd Statystyczny* nr 44/1997, str. 241-257.

Gadomski Jan, Klukowski Leszek: Właściwości opóźnień rozłożonych o parametrach zmiennych w czasie, *Ekonomia*, Wydawnictwa Uniwersytetu Warszawskiego, Warszawa, 1988, ISSN 0137-3056, zeszyt 52.

Gadomski Jan (2002), A Dynamic Approach to Modeling of the Banking Sector, in: *MODEST 2002: Transition and Transformation; Problems and Models*, Owsinski J. (ed), The Interfaces Institute.

Gadomski Jan (2003), "An Outline of the Model of the Banking Sector in the Closed Economy"(in Polish), *Acta Universitatis Lodziensis, Folia Oeconomica* 166, 2003.

Gadomski Jan (2009): Dynamics of Loans in the Polish Banking System, *CONTROL AND CYBERNETICS*, Wolumin: 38 Numer: 3 Strony: 893 – 911.

