Raport Badawczy

Research Report

RB/48/2014

Modele opóźnień w systemach ekonomicznych. Własności i zastosowania. Część II. Złożone struktury modeli opóźnienia rozłożonego

J. Gadomski

Instytut Badań Systemowych
Polska Akademia Nauk

Systems Research Institute
Polish Academy of Sciences

POLSKA AKADEMIA NAUK

Instytut Badań Systemowych

ul. Newelska 6

01-447 Warszawa

tel.: (+48) (22) 3810100

fax: (+48) (22) 3810105

Kierownik Zakładu zgłaszający pracę:
Dr hab. inż. Lech Kruś, prof. PAN

Warszawa 2014

SPIS TREŚCI

CZĘŚĆ II. Złożone struktury modeli opóźnienia rozłożonego

Wśród podstawowych sposobów połączeń modeli opóźnienia rozłożonego uwaga zostanie skupiona na dwóch: sumowaniu i superpozycji. Sumowanie modeli opóźnienia rozłożonego można interpretować analogicznie do połączenia równoległego, a ich superpozycję na wzór połączenia szeregowego w elektrotechnice. Elementem wspólnym analizowanych modeli opóźnienia rozłożonego o złożonych strukturach jest ta sama zmienna niezależna zarówno w modelach składowych, jak i modelu złożonym. Należy też zauważyć, że model ADL, omówiony w punkcie 2.4 Rozdziału 9 Części I, można również interpretować jak sumę modeli opóźnienia rozłożonego, z tym jednak, że zmienna zależna jest tam sumą zmiennych zależnych n modeli opóźnienia rozłożonego n zmiennych niezależnych.

Przykładem takich złożonych systemów, w których modele te znajdują zastosowanie są, na przykład, sieci dystrybucji, w których strumień dostaw jest rozdzielany pomiędzy poszczególne podsystemy (np. regionalne), oraz przechodzi przez kolejne ogniwa systemu. Celem analizy będzie uzyskanie odpowiedzi na pytania dotyczące własności rozkładu opóźnienia złożonego modelu opóźnienia na podstawie znajomości własności składowych modeli opóźnienia. Odpowiedzi na te pytania są przydatne zarówno w analizie, jak i w projektowaniu tych systemów.

Analiza złożonych modeli opóźnienia rozłożonego staje się prostsza dzięki wykorzystaniu operatorów opóźnienia i funkcji tworzących. Pojęcia te zostały wprowadzone w Części I w Rozdziale 1.8. Czytelnik zainteresowany bardziej zaawansowaną literaturą może sięgnąć do następujących pozycji: Koźniewska[1](1972), Kenkel[2](1974), Dhrymes[3](1981), Dhrymes[4] (2013), Heij, Boer (2004)[5].

W analizie złożonych modeli opóźnienia rozłożonego uwaga będzie skupiona na dwóch rodzajach podstawowych związków między modelami opóźnienia rozłożonego:

- suma (lub połączenie równoległe)
- iloczyn, (superpozycja lub połączenie szeregowe).

---

1 Koźniewska(1972): Równania rekurencyjne, PWN, Warszawa.

2 Kenkel(1974), *Dynamic Linear Economic Models*, Gordon and Breach Science Publishers, New York, London, Paris.

3 Dhrymes P. J. (1981): *Distributed Lags. Problems of Estimation and Formulation*, 2nd edition. North Holland Publishing Company, Amsterdam, New York, Oxford.

4 Dhrymes, Phoebus J. (2013): Mathematics for econometrics, DE Lag Operators, Rozdz. 6, str.171, Springer, New York.

5 Heij C., Boer de P., Frances P. H., Kloek T., Dijk van H. K.: *Econometric Methods with Applications in Business and Economics*, Oxford University Press, Oxford New York, 2004.

II.1. Suma modeli opóźnienia rozłożonego

Z sumą modeli opóźnienia rozłożonego mamy do czynienia, gdy zmienna zależna y_t jest sumą skończonej liczby n zmiennych zależnych $y_t^{(j)}$, $j = 1, 2,..,n;$ względem tej samej zmiennej niezależnej x_t:

$$\begin{aligned} y_t &= y_t^{(1)} + y_t^{(2)} + \ldots + y_t^{(n)} = \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} v_{ti}^{(1)} x_{t-i} + \varepsilon_t^{(1)} + \sum_{i=0}^{\infty} v_{ti}^{(2)} x_{t-i} + \varepsilon_t^{(2)} \ldots + \sum_{i=0}^{\infty} v_{ti}^{(n)} x_{t-i} + \varepsilon_t^{(n)}, \end{aligned} \tag{2.1}$$

przy czym[/]

$$y_t^{(1)} = \sum_{i=0}^{\infty} v_{ti}^{(1)} x_{t-i} + \varepsilon_t^{(1)},\ y_t^{(2)} = \sum_{i=0}^{\infty} v_{ti}^{(2)} x_{t-i} + \varepsilon_t^{(2)}, \cdots,\ y_t^{(n)} = \sum_{i=0}^{\infty} v_{ti}^{(n)} x_{t-i} + \varepsilon_t^{(n)}, \tag{2.2}$$

(gdzie n jest skończoną liczbą naturalną) będących zmiennymi określanymi za pomocą wzoru (1.1):

$$y_t = \sum_{i=0}^{\infty} v_{ti}^{(1)} x_{t-i} + \sum_{i=0}^{\infty} v_{ti}^{(2)} x_{t-i} + \ldots + \sum_{i=0}^{\infty} v_{ti}^{(n)} x_{t-i} + \sum_{j=1}^{n} e_t^{(j)} = \sum_{i=0}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{n} v_{ti}^{(j)}\right) x_{t-i} + e_t;$$

lub (2.3)

$$y_t = \sum_{i=0}^{\infty} v_{ti} x_{t-i} + e_t;$$

gdzie:

$$v_{ti} = \sum_{j=1}^{n} v_{ti}^{(j)};$$

i (2.4)

$$e_t = \sum_{j=1}^{n} e_t^{(j)}.$$

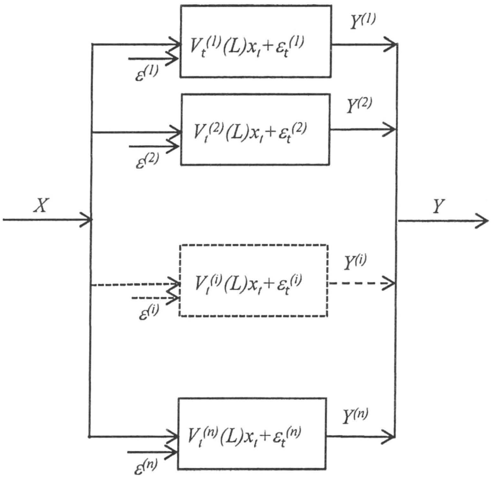
Sumę modeli opóźnienia rozłożonego można interpretować, analogicznie do połączeń obwodów elektrycznych, jako ich połączenie równoległe, rys. 2.1.

Dalsze rozważania będą prowadzone przy założeniu, że składniki losowe w modelach składowych spełniają założenia: $E(e_t^{(j)}) = 0$, $D^2(e_t^{(j)}) = (\sigma^{(j)})^2 < \infty$ oraz $D^2(e_t^{(j)} e_{t-i}^{(j)}) = 0$, $j = 1, 2,..,n;$ $i = 1, 2, \ldots$.

Wzór (2.4) uzyskany został przez sumowanie współczynników występujących przy kolejnych zmiennych x_{t-i}, $i = 0, 1, 2,\ldots$.

UWAGA 1. Powyższe wywód potwierdza, co zostało zasygnalizowane w Części I, że model (1.1) może być interpretowany jako suma modeli opóźnienia prostego (zwłoki) o postaci: $y_t^{(j)} = v_{tj}^{(j)} x_{t-j} + e_t^{(j)}$; $j = 0, 1, 2,\ldots$.

Model (1.1) charakteryzuje struktura opóźnienia V_t, na której podstawie - jak to wiadomo z Części I - nie zawsze można zbudować rozkład opóźnienia W_t (ponieważ zbieżność powyższej sumy może wynikać z odpowiedniej zbieżności iloczynów $v_{ti}x_{t-i} \rightarrow 0$, dla $i \rightarrow \infty$, a nie z istnienia rozkładu opóźnienia).



rys. 2.1 Suma modeli opóźnienia rozłożonego.

Dobrze jest również zwrócić uwagę na omówioną w Części I własność, że skończone modele opóźnienia zawsze mają rozkład opóźnienia i wartość średnią rozkładu opóźnienia.

Jeżeli sumowane modele opóźnienia rozłożonego $y_t^{(j)}$, $j = 1, 2,.., n$; mają rozkłady opóźnienia, to mnożnik długookresowy modelu zsumowanego jest równy:

$$a_t = \sum_{j=1}^{n} a_t^{(j)} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=0}^{\infty} v_{ti}^{(j)} \tag{2.5}$$

a współczynniki rozkładu W_t modelu opóźnienia rozłożonego utworzonego przez zsumowanie modeli składowych $W_t^{(j)}$, $j = 1, 2,.., n$; są zdefiniowane za pomocą wzoru:

$$w_{ti} = \sum_{j=1}^{n} \frac{a_t^{(j)}}{a_t} w_{ti}^{(j)} \tag{2.6}$$

gdzie $w_{ti}^{(j)}$, $i = 1, 2,..$; $j = 1, 2,.., n$; oznaczają współczynniki rozkładów opóźnienia $W_t^{(j)}$ zmiennej zależnej $y_t^{(j)}$ względem zmiennej niezależnej x_t.

Zależność (2.5) wynika z definicji mnożnika długookresowego, wzór (1.9). O ile wartość mnożnika długookresowego a_t (2.5) modelu zsumowanego jest po prostu sumą wartości składowych mnożników długookresowych $a_t^{(j)}$, $j = 1, 2,.., n$; to wartość i-tego współczynnika rozkładu W_t, wzór (2.6), jest średnią ważoną wartości i-tych współczynników rozkładów sumowanych, przy czym współczynnikami wagowymi są udziały i-tego mnożnika długookresowego w wartości mnożnika długookresowego modelu zsumowanego $a_t^{(j)}/a_t$; $j = 1, 2,.., n$.

Jeśli każdy z n sumowanych modeli opóźnienia rozłożonego ma rozkład opóźnienia $W_t^{(j)}$ i skończoną wartość średnią rozkładu opóźnienia $M(W_t^{(j)})$, $j= 1, 2,.., n$, to wartość średnia $M(W_t)$ rozkładu opóźnienia W_t powstałego z zsumowania modeli opóźnienia rozłożonego wyraża się za pomocą wzoru:

$$M(W_t) = \frac{a_t^{(1)}}{a_t} M(W_t^{(1)}) + \frac{a_t^{(2)}}{a_t} M(W_t^{(2)}) + \ldots + \frac{a_t^{(n)}}{a_t} M(W_t^{(n)}) \tag{2.7}$$

Powyższa zależność jest wyprowadzona z definicji wartości średniej rozkładu opóźnienia przez wykonanie kolejnych przekształceń:

$$M(W_t) = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} i \sum_{j=1}^{n} v_{ti}^{(j)}}{\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{n} v_{ti}^{(j)}} = \frac{\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{\infty} i a_t^{(j)} w_{ti}^{(j)}}{\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=0}^{\infty} v_{ti}^{(j)}} = \frac{\sum_{j=1}^{n} a_t^{(j)} \sum_{i=1}^{\infty} i w_{ti}^{(j)}}{\sum_{j=1}^{n} a_t^{(j)}} = \sum_{j=1}^{n} \frac{a_t^{(j)}}{a_t} M(W_t^{(j)}).$$

UWAGA 2. Wartość średnia $M(W_t)$ rozkładu opóźnienia W_t powstałego ze zsumowania n modeli opóźnienia rozłożonego jest średnią ważoną wartości średnich sumowanych rozkładów opóźnienia $M(W_t^{(j)})$, $j= 1, 2,.., n$; w której wagami są udziały wartości mnożników długookresowych poszczególnych modeli w wartości mnożnika długookresowego modelu sumarycznego:

$$\frac{a_t^{(j)}}{\sum_{j=1}^{n} a_t^{(j)}} = \frac{a_t^{(j)}}{a_t}, j= 1, 2,.., n.$$

Między wariancją $D^2(W_t)$ rozkładu W_t , będącego wynikiem sumowania n modeli opóźnienia rozłożonego, a średnią ważoną wariancji składowych rozkładów opóźnienia $D^2(W_t^{(j)})$ zachodzi następująca relacja:

$$D^2(W_t) \geq \sum_{j=1}^{n} \frac{a_t^{(j)}}{a_t} D^2(W_t^{(j)}). \tag{2.8}$$

Dowód prawdziwości powyższej relacji jest przeprowadzony w Dodatku w Twierdzeniu 5.

W przypadku, gdy liczba sumowanych modeli opóźnień jest równa $n=2$, zależność (2.8) przyjmuje postać:

$$\begin{aligned} D^2(W_t) &= D^2\left(\frac{a_t^{(1)}}{a_t} W_t^{(1)} + \frac{a_t^{(2)}}{a_t} W_t^{(2)} \right) \\ &= \frac{a_t^{(1)}}{a_t} D^2(W_t^{(1)}) + \frac{a_t^{(2)}}{a_t} D^2(W_t^{(2)}) + \frac{a_t^{(1)} a_t^{(2)}}{a_t^2} \left[M(W_t^{(1)}) - M(W_t^{(2)}) \right]^2. \end{aligned}$$

Wyprowadzenie powyższej zależności znajduje się w Dodatku w Twierdzeniu 6.

Relacja (2.8) pokazuje, że w ogólnym przypadku wzrost liczby sumowanych modeli opóźnienia rozłożonego prowadzi do wzrostu wariancji rozkładu modelu wynikowego. W szczególnym przypadku, gdy wszystkie wartości średnie sumowanych rozkładów opóźnienia są równe, wariancja rozkładu opóźnienia powstałego w wyniku sumowania modeli opóźnienia rozłożonego jest równa średniej ważonej wariancji rozkładów opóźnienia modeli sumowanych.

Z przyjętych założeń wynika, że składnik losowy w sumie modeli opóźnienia rozłożonego ma wartość oczekiwaną i wariancję równe:

$$E(e_t)=0 \text{ oraz } D^2(e_t)=\sum_{j=1}^{n}\left(\sigma^{(j)}\right)^2 .$$

W przypadku sumy n skończonych modeli opóźnienia rozłożonego opisanej za pomocą wzoru (2.3):

$$y_t=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=i_d(V_t^{(j)})}^{i_g(V_t^{(j)})} v_{ti}^{(j)}x_{t-i}+\varepsilon_t^{(j)}\right),$$

gdzie $i_g(V_t^{(j)})$ i $i_d(V_t^{(j)})$, $j=1, 2, .., n$; odpowiednio największy indeks współczynnika struktury opóźnienia $V_t^{(j)}$ nierównego zeru oraz najmniejszy indeks współczynnika struktury opóźnienia $V_t^{(j)}$ nierównego zeru, największy indeks $i_g(V_t\ )$ nierównego zeru współczynnika struktury opóźnienia $V_t^{[n]}$ jest równy:

$$i_g(V_t^{[n]})=max\{i_g(V_t^{(1)}),i_g(V_t^{(2)}),...,i_g(V_t^{(n)})\},$$

a najmniejszy indeks $i_d(V_t\ )$ nierównego zeru współczynnika struktury opóźnienia $V_t^{[n]}$ jest równy:

$$i_d(V_t^{[n]})=min\{i_g(V_t^{(1)}),i_g(V_t^{(2)}),...,i_g(V_t^{(n)})\}.$$

Zgodnie z podaną w Części I definicją rozpiętości struktury opóźnienia, rozpiętość struktury opóźnienia $V_t^{[n]}$ jest równa:

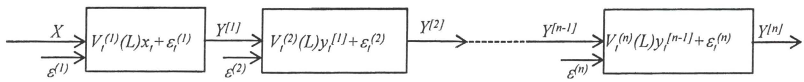
$$R(V_t^{[n]})=max\{i_g(V_t^{(1)}),i_g(V_t^{(2)}),...,i_g(V_t^{(n)})\}-min\{i_g(V_t^{(1)}),i_g(V_t^{(2)}),...,i_g(V_t^{(n)})\}+1.$$

II.2. Superpozycja modeli opóźnienia rozłożonego

Z superpozycją modeli opóźnienia rozłożonego mamy do czynienia, gdy zmienna zależna $y_t^{[n]}$ jest opisana za pomocą modelu opóźnienia rozłożonego względem pewnej zmiennej niezależnej $y_t^{[n-1]}$, która jest z kolei zmienną zależną modelu opóźnienia rozłożonego względem innej zmiennej niezależnej $y_t^{[n-2]}$, itd.:

$$
\begin{aligned}
y_t^{[n]} &= \sum_{i=0}^{\infty} v_{ti}^{(n)} y_{t-i}^{[n-1]} + \varepsilon_t^{(n)} \quad, \\
y_t^{[n-1]} &= \sum_{i=0}^{\infty} v_{ti}^{(n-1)} y_{t-i}^{[n-2]} + \varepsilon_t^{(n-1)}, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
y_t^{[1]} &= \sum_{i=0}^{\infty} v_{ti}^{(1)} x_{t-i} + \varepsilon_t^{(1)} \quad .
\end{aligned}
\tag{2.9}
$$

Schemat superpozycji modeli opóźnienia rozłożonego przedstawiony został na rys. 2.2.



rys. 2.2. Superpozycja modeli opóźnienia rozłożonego.

Klasyczną pozycją w bibliografii modeli opóźnienia rozłożonego, w której zwrócona została uwaga na własności modeli połączonych szeregowo, tj., gdy oddziaływanie jednego zjawiska na jakieś inne zjawisko podlega kolejno działaniu dwóch różnych mechanizmów opóźnienia, jest artykuł Zvi Grilichesa[6], Griliches (1967).

Posługując się zapisem operatorowym układ zależności (2.9) można przedstawić, na podstawie wzoru (2.10), w następującej postaci:

$$
\begin{aligned}
y_t^{[n]} &= V_t^{(n)}(L) y_{t-i}^{[n-1]} + \varepsilon_t^{(n)}, \\
y_t^{[n-1]} &= V_t^{(n-1)}(L) y_{t-i}^{[n-2]} + \varepsilon_t^{(n-1)}, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
y_t^{[1]} &= V_t^{(1)}(L) x_t \qquad + \varepsilon_t^{(1)}.
\end{aligned}
\tag{2.10}
$$

Przez kolejne podstawianie powyższy układ równań można zapisać za pomocą następujących zależności:

[6] Zvi Griliches, Griliches (1967), ograniczył analizę do superpozycji dwóch modeli opóźnienia rozłożonego.

$$
\begin{aligned}
&y_t^{[1]} = V_t^{(1)}(L)x_t + \varepsilon_t^{(1)};\\
&y_t^{[2]} = V_t^{(2)}(L)V_t^{(1)}(L)x_t + V_t^{(2)}(L)\varepsilon_t^{(1)} + \varepsilon_t^{(2)};\\
&y_t^{[3]} = V_t^{(3)}(L)V_t^{(2)}(L)V_t^{(1)}(L)x_t + V_t^{(3)}(L)V_t^{(2)}(L)\varepsilon_t^{(1)} + V_t^{(3)}(L)\varepsilon_t^{(2)} + \varepsilon_t^{(3)};\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&y_t^{[n]} = V_t^{(n)}(L)\cdot\ldots\cdot V_t^{(1)}(L)x_t \ +\\
&+V_t^{(n)}(L)\cdot\ldots\cdot V_t^{(2)}(L)\varepsilon_t^{(1)} + V_t^{(n)}(L)\cdot\ldots\cdot V_t^{(3)}(L)\varepsilon_t^{(2)} + \ldots + V_t^{(n)}\varepsilon_t^{(n-1)} + \varepsilon_t^{(n)}
\end{aligned} \tag{2.11}
$$

Oznaczając za pomocą symbolu $V_t^{[j]}(L)$ iloczyn operatorów wielomianowych

$$V_t^{[j]}(L) = V_t^{(j)}(L)V_t^{(j-1)}(L)\cdot\ldots\cdot V_t^{(1)}(L) = \prod_{i=1}^{j} V_t^{(i)}(L),\ j=1,\ 2,\ \ldots;$$

ostatnią zależność układu (2.11) można zapisać w następującej postaci:

$$y_t^{[n]} = V_t^{[n]}(L)x_t + \frac{V_t^{[n]}(L)}{V_t^{[1]}(L)}e_t^{(1)} + \frac{V_t^{[n]}(L)}{V_t^{[2]}(L)}e_t^{(2)} + \ldots + \frac{V_t^{[n]}(L)}{V_t^{[n-1]}(L)}e_t^{(n-1)} + e_t^{(n)}$$

lub (2.12)

$$y_t^{[n]} = V_t^{[n]}(L)x_t + e_t^{\{n\}},$$

gdzie wyrażenie $e_t^{\{n\}}$ jest zdefiniowane w następujący sposób

$$e_t^{\{n\}} = \sum_{j=1}^{n} \frac{V_t^{[n]}(L)}{V_t^{[j]}(L)}e_t^{(j)}.$$

Warto zauważyć, że każdemu iloczynowi $V_t^{[j]}(L)$, $j=1,\ 2,\ \ldots$; operatorów wielomianowych odpowiada pewna struktura opóźnienia $V_t^{[j]} = \left(v_{t0}^{[j]}, v_{t1}^{[j]}, \ldots\right)$ (której współczynniki są nieujemne, ponieważ są sumami iloczynów liczb nieujemnych). Ponadto, ilorazy $\dfrac{V_t^{[n]}(L)}{V_t^{[j]}(L)}$, $j=1,\ 2,\ \ldots$; operatorów wielomianowych są również operatorami wielomianowymi mającymi tę własność, że każdemu takiemu ilorazowi odpowiada iloczyn:

$$V_t^{(j+1)}(L)V_t^{(j+2)}(L)\cdot\ldots\cdot V_t^{(n)}(L)$$

będący operatorem wielomianowym o nieujemnych współczynnikach, któremu odpowiada pewna struktura opóźnienia.

Jeżeli istnieją rozkłady opóźnienia $W_t^{(1)}, W_t^{(2)}, \ldots, W_t^{(n)}$, odpowiadające strukturom opóźnienia $V_t^{(1)}, V_t^{(2)}, \ldots, V_t^{(n)}$, zależność (2.12) można przedstawić w następującej postaci:

$$y_t^{[n]} = a_t^{[n]}W_t^{[n]}(L)x_t + \frac{a_t^{[n]}W_t^{[n]}(L)}{a_t^{[1]}W_t^{[1]}(L)}e_t^{(1)} + \frac{a_t^{[n]}W_t^{[n]}(L)}{a_t^{[2]}W_t^{[2]}(L)}e_t^{(2)} + \ldots + \frac{a_t^{[n]}W_t^{[n]}(L)}{a_t^{[n-1]}W_t^{[n-1]}(L)}e_t^{(n-1)} + e_t^{(n)}$$

lub ,

$$y_t^{[n]} = a_t^{[n]}W_t^{[n]}(L)x_t + e_t^{\{n\}}$$

gdzie mnożnik długookresowy $a_t^{[j]}$ jest iloczynem mnożników długookresowych składowych modeli opóźnienia rozłożonego $a_t^{(i)}$, $i= 1, 2,..,j$:

$$a_t^{[j]} = \prod_{i=1}^{j} a_t^{(i)},$$

a składnik losowy może być przedstawiony w następującej postaci:

$$e_t^{\{n\}} = \sum_{j=1}^{n} \frac{a_t^{[n]}W_t^{[n]}(L)}{a_t^{[j]}W_t^{[j]}(L)}e_t^{(j)}.$$

Każdemu iloczynowi operatorów wielomianowych $W_t^{[j]}(L)$, $W_t^{[j]}(L) = \prod_{i=1}^{j} W_t^{(i)}(L)$, $j=1, 2, \ldots$; odpowiada rozkład opóźnienia $W_t^{[j]}$; którego współczynniki są nieujemne, a których suma jest równa 1, co wynika z faktu, że wartość funkcji tworzącej $W_t^{[j]}(\theta)$ w punkcie $\theta=1$ jest równa 1, ponieważ na podstawie (2.13):

$$W_t^{(i)}(1) = 1,\ i=1, 2, \ldots, j;$$

zatem:

$$W_t^{[j]}(1) = \prod_{i=1}^{j} W_t^{(i)}(1) = 1.$$

Wartość średnia $M(W_t^{[n]})$ rozkładu $W_t^{[n]}$ powstałego z superpozycji n modeli opóźnienia rozłożonego jest sumą wartości średnich $M(W_t^{(i)})$, $i = 1, 2, .. , n$; rozkładów opóźnienia modeli będących elementami superpozycji:

$$M(W_t^{[n]}) = M(W_t^{(1)}) + M(W_t^{(2)}) + \ldots + M(W_t^{(n)}). \tag{2.13}$$

Dowód zależności (2.13) zamieszony został w Dodatku.

Jak wiadomo z wcześniej przeprowadzonych rozważań, w przypadku sumy modeli opóźnienia rozłożonego wynikowy model opóźnienia rozłożonego charakteryzuje średnia rozkładu opóźnienia będąca średnią ważoną wartości średnich rozkładów wchodzących w skład sumy. W przypadku superpozycji modeli opóźnienia rozłożonego średnia rozkładu modelu wynikowego jest równa sumie wartości średnich rozkładów modeli wchodzących w skład superpozycji.

Wariancja $D^2(W_t^{[n]})$ rozkładu powstałego z superpozycji n modeli opóźnienia rozłożonego jest sumą wariancji $D^2(W_t^{(i)})$, $i = 1, 2, .., n$; modeli będących elementami superpozycji:

$$D^2(W_t^{[n]}) = D^2(W_t^{(1)}) + D^2(W_t^{(2)}) + \ldots + D^2(W_t^{(n)}). \qquad (2.14)$$

Dowód zależności (2.14) zamieszony został w Dodatku.

Wariancja rozkładu opóźnienia modelu będącego superpozycją modeli opóźnienia rozłożonego jest sumą wariancji rozkładów modeli opóźnienia rozłożonego wschodzących w skład superpozycji. Jej wartość nie zależy od stopnia zróżnicowania wartości średnich modeli składowych.

Współczynniki rozkładu opóźnienia uzyskanego z sumowania modeli opóźnienia rozłożonego są ważonymi średnimi współczynników rozkładów opóźnienia sumowanych modeli. Współczynniki rozkładu opóźnienia powstałego w wyniku superpozycji modeli opóźnienia rozłożonego mają bardziej złożone własności.

Wartość oczekiwana składnika losowego $e_t^{[n]}$, wzór (2.12), jest równa:

$$E(e_t^{[n]}) = 0,$$

ponieważ z założenia:

$$E(\varepsilon_t^{(j)}) = 0,\ D^2(\varepsilon_t^{(j)}) = \left(\sigma^{(j)}\right)^2 < \infty,\ D^2(\varepsilon_t^{(j)}\varepsilon_{t-k}^{(j)}) = 0,\ k = 1,2,..\ ; j = 1, 2, .., n;$$

co bezpośrednio wynika z założenia, natomiast wariancja składnika losowego $e_t^{[n]}$, wzór (D17), jest równa:

$$D^2(e^{[n]}) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=0}^{\infty} a_t^{\{j\}} w_t^{\{j\}} D^2(e_{t-i}^{(n)}) = \sum_{j=1}^{n} a_t^{\{j\}}(\sigma^{(j)})^2 = \sum_{j=1}^{n-1} a_t^{\{j\}}(\sigma^{(j)})^2 + (\sigma^{(n)})^2,$$

ponieważ:

$$a_t^{\{n\}} = 1.$$

W przypadku superpozycji n skończonych modeli opóźnienia rozłożonego mających postać:

$$y_t^{(j)} = \sum_{i=i_d(V_t^{(j)})}^{i_g(V_t^{(j)})} v_{ti}^{(j)} y_{t-i}^{(j-1)} + \varepsilon_t^{(j)},\quad y_t^{(0)} = x_t,\ j = 1, 2, .., n;$$

gdzie $i_g(V_t^{(j)})$ i $i_d(V_t^{(j)})$, $j = 1, 2, \ldots, n$; odpowiednio największy indeks współczynnika struktury opóźnienia $V_t^{(j)}$ nierównego zeru oraz najmniejszy indeks współczynnika struktury opóźnienia $V_t^{(j)}$ nierównego zeru, największy indeks nierównego zeru współczynnika struktury opóźnienia $V_t^{[n]}$ jest równy:

$$i_g(V_t^{[n]}) = \sum_{j=1}^{n} i_g(V_t^{(j)}),$$

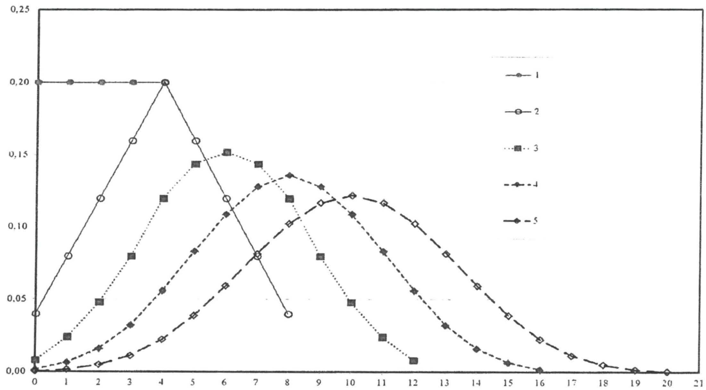
a najmniejszy indeks nierównego zeru współczynnika struktury opóźnienia $V_t^{[n]}$ jest równy:

$$i_d(V_t^{[n]}) = \sum_{j=1}^{n} i_d(V_t^{(j)}).$$

Zgodnie z podaną w Rozdziale I definicją rozpiętości struktury opóźnienia, rozpiętość struktury opóźnienia $V_t^{[n]}$ jest równa:

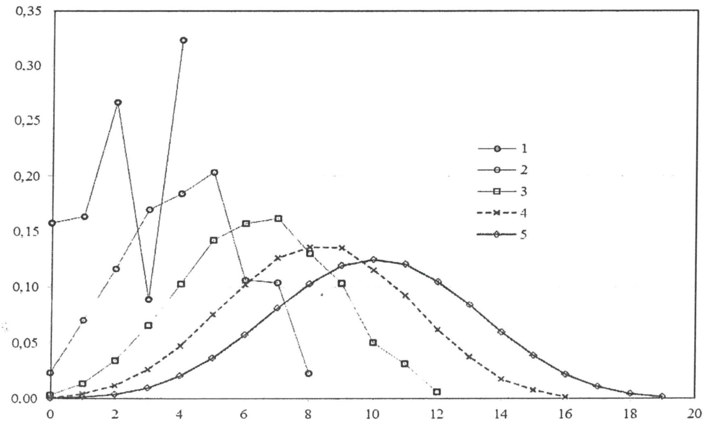
$$R(V_t^{[n]}) = \sum_{j=1}^{n} i_g(V_t^{(j)}) - \sum_{j=1}^{n} i_d(V_t^{(j)}) + 1.$$

Na rys. 2.3 przedstawiono wykresy wartości współczynników rozkładów: monotonicznego o niezerowych wartościach dla indeksów od 0 do 4, oraz superpozycji odpowiednio: dwóch, trzech, czterech i pięciu modeli opóźnienia rozłożonego, z których każdy ma ten sam monotoniczny rozkład opóźnienia rozłożonego. Wyjściowy rozkład opóźnienia, opatrzony numerem 1 jest rozkładem monotonicznym, superpozycja dwóch modeli o monotonicznych rozkładach opóźnienia daje omówiony w Rozdziale I przesunięty w lewo jednostkę rozkład opóźnienia DeLeeuwa, DeLeeuw Frank (1962). Superpozycja wzrastającej liczby modeli z monotonicznym rozkładem opóźnienia daje model opóźnienia z rozkładem coraz bardziej podobnym się do rozkładu Pascala-Solowa.



rys. 2.3 Współczynniki rozkładów opóźnienia uzyskane w wyniku superpozycji odpowiednio jednego, dwóch, trzech, czterech i pięciu jednakowych modeli opóźnienia rozłożonego o skończonym monotonicznym rozkładzie opóźnienia z niezerowymi współczynnikami dla indeksów od 0 do 4.

Na rys. 2.4 przedstawiono superpozycje jednego, dwóch, trzech, czterech i pięciu modeli opóźnienia rozłożonego, w których niezerowe współczynniki rozkładu opóźnienia (o numerach 0, 1, 2, 3, 4) zostały uzyskane przez normalizację współczynników struktury opóźnienia otrzymanych za pomocą generatora liczb pseudolosowych o rozkładzie monotonicznym z przedziału [1,5].



rys. 2.4 Superpozycja jednego, dwóch, trzech, czterech i pięciu modeli opóźnienia rozłożonego o współczynnikach rozkładu opóźnienia generowanych za pomocą generatora liczb pseudolosowych o rozkładzie monotonicznym z wartościami z przedziału [1, 4].

Z analizy rys. 2.3 i rys. 2.4 wynika, że niezależnie od tego, jaki rozkład opóźnienia mają modele wchodzące w skład superpozycji, wraz z narastającą ich liczbą rozkłady opóźnienia kolejnych superpozycji upodobniają się. To nie przypadek; w pracy Nowak, Gadomski (2014) wykazano, że rozkład opóźnienia superpozycji składowych modeli opóźnienia rozłożonego o dowolnych niejednopunktowych rozkładach opóźnienia wraz ze wzrostem liczby modeli wchodzących w skład superpozycji dąży do rozkładu normalnego.

Podsumowanie Części II

W tej części analizowano różne rodzaje połączeń modeli opóźnienia rozłożonego. Pokazano, że suma modeli opóźnienia rozłożonego jest również modelem opóźnienia rozłożonego, ze strukturą opóźnienia będącą sumą składowych struktur opóźnienia, z rozkładem opóźnienia będącym średnią ważoną składowych rozkładów opóźnienia. Współczynnikami wagowymi tej średniej są udziały mnożników długookresowych modeli składowych w wartości mnożnika długookresowego modelu-sumy. Te same współczynniki wagowe uczestniczą w wyznaczeniu wartości średniej rozkładu opóźnienia sumy modeli opóźnienia; jest ona równa średniej ważonej wartości średnich składowych rozkładów opóźnienia. Wariancja rozkładu opóźnienia modelu będącego sumą modeli opóźnienia rozłożonego jest nie mniejsza od średniej ważonej (za pomocą tych samych współczynników wagowych) wariancji rozkładów opóźnienia modeli składowych. W przypadku superpozycji, tj. połączenia szeregowego modeli opóźnienia rozłożonego, które jest również modelem opóźnienia rozłożonego, struktura opóźnienia superpozycji modeli opóźnienia rozłożonego jest splotem struktur opóźnienia modeli składowych, mnożnik długookresowy całości jest iloczynem mnożników długookresowych modeli wchodzących w skład superpozycji, wartość średnia rozkładu superpozycji modeli jest sumą wartości średnich rozkładów opóźnienia modeli składowych oraz wariancja rozkładu opóźnienia superpozycji modeli opóźnienia jest równa sumie wariancji rozkładów opóźnienia modeli składowych.