Raport Badawczy

Research Report

RB/47/2014

Modele opóźnień w systemach ekonomicznych. Własności i zastosowania. Część I. Wprowadzenie

J. Gadomski

Instytut Badań Systemowych
Polska Akademia Nauk

Systems Research Institute
Polish Academy of Sciences

POLSKA AKADEMIA NAUK

Instytut Badań Systemowych

ul. Newelska 6

01-447 Warszawa

tel.: (+48) (22) 3810100

fax: (+48) (22) 3810105

Kierownik Zakładu zgłaszający pracę:
Dr hab. inż. Lech Kruś, prof. PAN

Warszawa 2014

SPIS TREŚCI

Modele opóźnień w systemach ekonomicznych. Własności i zastosowania.

Wstęp

Z doświadczenia wiemy, że pomiędzy przekręceniem pokrętła gorącej wody a ustaleniem się temperatury wody wypływającej z prysznica mija jakiś czas; wiemy też, że czas ten w różnych prysznicach bywa różny, co może być przyczyną niepożądanych doznań. Również wtedy, gdy dowiadujemy się, że cena ropy naftowej szybko rośnie na światowych giełdach, z dużą pewnością możemy oczekiwać, że ceny paliw na krajowym rynku również odpowiednio wzrosną. W obu przypadkach mamy do czynienia ze zjawiskiem nazywanym opóźnieniem.

Ze zjawiskiem opóźnienia mamy do czynienia, gdy reakcja obserwowanego systemu lub jego części na zmianę pewnego czynnika następuje po jakimś czasie. Opóźnienia są nieodłączne od zjawisk dynamicznych, w których przyczyna zmian poprzedza wystąpienie jej następstw. Jednak nie wszystkie zależności przyczynowo-skutkowe są związane z działaniem mechanizmu opóźnienia; często są to zjawiska złożone, w których działają inne mechanizmy, między innymi sprzężenia zwrotne, które powodują, że to samo zjawisko jest zarazem przyczyną i następstwem powiązanych zjawisk.

Modele opóźnienia stanowią ważny element konstrukcyjny modeli dynamicznych, to jest takich, które objaśniają zmiany pewnych zmiennych zależnych (objaśnianych) za pomocą zmian pewnych innych zmiennych, zwanymi niezależnymi lub objaśniającymi, które nie zależą od zmiennych zależnych. Często przyjmowane jest założenie, że zmienna zależna reprezentuje kategorię, której zmiany są następstwem zmian wartości zmiennych niezależnych reprezentujących kategorie będące przyczynami tych zmian[1].

Hendry et al. (1984), strona 1057, przyczyn zjawiska opóźnienia dopatrują się w takich kosztach dostosowania, jak: koszty transakcyjne, badawcze, optymalizacji oraz gdy podmioty powoli reagują na zmiany w otoczeniu w następstwie bezwładności, utrwalonych przyzwyczajeń, zwłoki w dostrzeganiu/rozpoznaniu zmian. Według tej opinii powolność reakcji wiąże się również z niepewnością oraz niedoskonałością rynków. Do wymienionych czynników można dodać opóźnienie informacji, na których podstawie są analizowane i podejmowane decyzje.

Modele opóźnienia są tworzone dla potrzeb różnych dziedzin nauki i różnych zastosowań. Na gruncie ekonomii zależnościami klasycznymi mającymi postać modelu opóźnienia są między innymi: wpływ nakładów inwestycyjnych na zasób kapitału, transmisja ceny, tj. opóźnienie zmiany ceny krajowej importowanego surowca względem zmiany ceny tego surowca na rynkach międzynarodowych, opóźnienie sprzedaży względem zmiany ceny - lub w skali makroekonomicznej - reakcja popytu konsumpcyjnego na zmianę dochodu dyspozycyjnego, czy wreszcie reakcja gospodarki na zmianę stopy procentowej.

[1] W przypadku modeli stochastycznych trudno mówić o zależnościach przyczynowo-skutkowych.

Celem modelu opóźnienia jest opisanie zależności zmiennej zależnej od zmiennych niezależnych. W wielu przypadkach celem tym jest również oszacowanie, o ile okresów zmiany zmiennej zależnej są opóźnione w stosunku do zmiany zmiennej niezależnej i w jakim stopniu zmiany te są rozłożone, bądź skupione w czasie.

W analizie opóźnień wyodrębnić można dwie podstawowe grupy zagadnień. Grupa pierwsza, to analiza mechanizmów, które decydują o właściwościach badanego opóźnienia. Grupa druga, szczególnie ważna w badaniach empirycznych, to zagadnienia związane z estymacją modeli opóźnień.

W historii badań zaangażowanie w rozwiązywanie problemów z obu tych grup było nierównomierne. W pierwszym okresie uwaga badaczy była skupiona głównie na analizie konstrukcji i własności różnych modeli opóźnienia. Były to przede wszystkim prace: Fishera (1937), Koycka (1954), Solowa (1960), Almon (1965), Griliches (1967). Równolegle prowadzone były prace poświęcone drugiej grupie zagadnień.

W drugim okresie, który - jak się wydaje - trwa nadal, dominują prace poświęcone zagadnieniom należącym do grupy drugiej. Do najwybitniejszych prac tego nurtu należy zaliczyć przede wszystkim następujące: Griliches (1967), Maddala (1977), Dhrymes (1981). Wpłynęły na to następujące czynniki: rozwiązano znaczną część podstawowych problemów grupy pierwszej oraz dostrzeżono wagę i złożoność problemów estymacji. Za cezurę można uznać pojawienie się artykułu Almon (1965) i Jorgensena (1966), w których zaproponowano odpowiednio tak zwane modele wielomianowy i ilorazowy. Modele te z jednej strony charakteryzują się dużą elastycznością w tym sensie, że nie wymagają od stosujących modele opóźnienia zaangażowania a zarazem zwalniają od problemów należących do grupy pierwszej.

Wielką syntezę osiągnięć na polu badania modeli opóźnienia stanowi książka Dhrymesa (1981). Mimo, że od jej pierwszego wydania minęło ponad trzydzieści lat, jest ona wciąż fundamentalnym źródłem wiedzy o modelach opóźnień. Stanowi zarazem wzorzec, do którego należy się odnieść decydując się na pisanie o modelach opóźnień. Autorowi tej pracy wydaje się, że ma tu coś nowego do zaproponowania.

Celem tej pracy jest zaprezentowanie analizy modeli opóźnień, której niektóre wątki stanowią nawiązanie do przedstawionego powyżej okresu pierwszego, jak również korzystającej z rozwiązań zaproponowanych w badaniach późniejszych. Są to następujące grupy problemów.

Pierwsza grupa wiąże się z doborem miernika opóźnienia. Podejmowane tu zagadnienie jest następstwem powszechnego przyjmowania w literaturze przedmiotu jako miernika opóźnienia wartości średniej rozkładu opóźnienia, co w wielu wypadkach może być powodem nieporozumień i błędów interpretacji. Ma to znaczenie zwłaszcza wtedy, gdy celem analizy jest określenie opóźnienia zmiennej zależnej względem zmiennej niezależnej, a nie wyłącznie mechanizm opóźnienia.

Druga grupa zagadnień podjętych w tej pracy jest związana z analizą własności podklasy modeli opóźnienia opisujących zjawiska związane z przepływami. Do tej podklasy zaliczyć można takie modele jak: model kształtowania się kapitału pod wpływem inwestycji i deprecjacji kapitału, model kształtowania się stanu depozytów w systemie bankowym pod wpływem strumieni wpłat oraz wypłat, model kształtowania się poziomu zadłużenia z tytułu kredytu udzielonego przez system bankowy pod wpływem strumienia spłat wcześniej zaciągniętych kredytów oraz strumienia nowoudzielonych kredytów. Do tej podklasy można również zaliczyć model demograficzny, w którym liczba ludności jest kształtowana przez strumienie urodzeń oraz zgonów. Wspólną cechą wymienionych tu modeli jest to, że występują w nich kategorie zasobów oraz strumieni zasilających (wpływających) oraz wyczerpujących te zasoby. W zjawiskach opisywanych za pomocą tych modeli często istotnymi wielkościami są średni czas, jaki jednostki strumienia wyczerpującego zasób przebywały w zasobie oraz średni okres przebywania jednostki w tym zasobie. Wielkości te, poza wyjątkami, nie są równe.

Trzecia grupa problemów wiąże się z analizą własności modeli opóźnienia, w których mechanizm opóźnienia ulega zmianie. Problematyka ta nie jest nowa, np. Tinsley (1967), Pesando (1972), Otto (1985), Gadomski (1986), Dahl, Kulaksizoglu (2005); jej umiarkowany rozwój wynika – jak się wydaje – z dwóch przyczyn. Pierwsza, to niedostatek informacji, powodujący konieczność wyboru modeli uproszczonych, ze stałymi współczynnikami, przysparzającymi mniejsze trudności przy estymacji parametrów. Przyczyna druga, wiąże się z podejściem pragmatycznym, polegającym na daleko idącym – w stosunku do wiedzy o badanym zjawisku – upraszczaniu i w związku z tym na pominięciu analizy mechanizmów opóźnienia. Jest to również wynik osłabienia „czujności badawczej" w następstwie pojawienia się modeli wielomianowego Almon (1965) i ilorazowego Jorgensena (1966) – ich elastyczność często prowadzi do uzyskania zadowalającego wyniku: wszystko to, czego nie udaje się - z jakiegoś powodu - wtłoczyć w część deterministyczną modelu, przypisane zostaje czynnikowi losowemu.

W pracy problematyka estymacji modeli opóźnienia rozłożonego jest całkowicie pominięta, osobom zainteresowanym z czystym sumieniem można polecić prace klasyczne: Griliches (1967), Dhrymes (1981), Hendry et al. (1984). W prezentowanych dalej rozważaniach struktura opóźnienia będzie z założenia dana lub aproksymowana w zadowalający sposób.

Praca składa się z następujących części. W Części I sformułowany jest uogólniony model opóźnienia rozłożonego. Uogólnienie polega na uwzględnieniu, że na zmienną zależną mają wpływ nie tylko zmienna niezależna i zmienna losowa, ale również podlegający zmianom mechanizm opóźnienia, który jest dany przez strukturę i/lub rozkład opóźnienia i mnożnik długookresowy. Zaproponowana będzie nowa kategoria nazwana wynikowym rozkładem opóźnienia. W tej samej Części I omawiane są również podstawowe pojęcia charakteryzujące rozkład opóźnienia, (jeśli istnieje): wartość średnia, wariancja i mediana rozkładu opóźnienia. W dalszej części wprowadzone są pojęcia funkcji tworzącej i operatora wielomianowego jako przydatnych narzędzi analizy modeli opóźnienia.

Część II zawiera omówienie podstawowych własności modeli złożonych modeli opóźnienia. Badana jest suma modeli opóźnienia rozłożonego, która jest również modelem opóźnienia rozłożonego, ze strukturą opóźnienia będącą sumą składowych struktur opóźnienia, z rozkładem opóźnienia będącym średnią ważoną składowych rozkładów opóźnienia. Współczynnikami wagowymi tej średniej są udziały mnożników długookresowych modeli składowych w wartości mnożnika długookresowego modelu-sumy. Te same współczynniki wagowe uczestniczą w wyznaczeniu wartości średniej rozkładu opóźnienia sumy modeli opóźnienia; jest ona równa średniej ważonej wartości średnich składowych rozkładów opóźnienia. Wariancja rozkładu opóźnienia modelu będącego sumą modeli opóźnienia rozłożonego jest nie mniejsza od średniej ważonej (za pomocą tych samych współczynników wagowych) wariancji rozkładów opóźnienia modeli składowych. W przypadku superpozycji, tj. połączenia szeregowego modeli opóźnienia rozłożonego, która zachowuje własności modelu opóźnienia rozłożonego, struktura opóźnienia superpozycji modeli opóźnienia rozłożonego jest splotem struktur opóźnienia modeli składowych, mnożnik długookresowy całości jest iloczynem mnożników długookresowych modeli wchodzących w skład superpozycji, wartość średnia rozkładu superpozycji modeli jest sumą wartości średnich rozkładów opóźnienia modeli składowych oraz wariancja rozkładu opóźnienia superpozycji modeli opóźnienia jest równa sumie wariancji rozkładów opóźnienia modeli składowych.

W Części III omawiane są podstawowe, spotykane w literaturze modele opóźnienia rozłożonego ze stałym rozkładem opóźnienia, ich interpretacja oraz przykłady ich zastosowań. Modele te znajdują zastosowanie wtedy, gdy nie ma podstaw do przyjęcia założenia, że mechanizm opóźnienia ulega zmianie.

Wśród modeli ze stałym mechanizmem opóźnienia ważną rolę w modelowaniu ekonomicznym odgrywają modele oparte na hipotezach oczekiwań adaptacyjnych i dostosowania częściowego. Wśród modeli należących do tej kategorii szczególne znaczenie mają te, które opisują systemy, w których zachodzą związki pomiędzy natężeniami strumieni a wielkościami zasobów, przez które strumienie te przepływają. W modelach opóźnień opisujących przepływy wyróżnić można dwie grupy modeli. Są to modele typu: strumień - strumień oraz modele typu zasób – strumień. Typ pierwszy opisuje zależność natężenia strumienia wypływającego od natężenia strumienia wpływającego. W przypadku drugiego typu opisywany jest wpływ strumienia wpływającego na poziom zasobu. Modele przepływów znajdują wiele zastosowań, między innymi w opisie: kształtowania się kapitału pod wpływem inwestycji, depozytów i kredytów w systemie bankowym, w modelach demograficznych.

Część III jest poświęcona również analizie modeli opóźnienia, w których zmianie ulega sam mechanizm opóźnienia. Następstwem tego są pewne szczególne własności tych modeli. W rozdziale tym analizowane są modele wpływu zapasów na tempo zmian cen, transmisji cen, zmian kształtowania się poziomu depozytów i kredytów pod wpływem zmian preferencji klientów bankowych.

Ta książka jest adresowana głównie do ekonomistów, ale też do przedstawicieli innych nauk społecznych zainteresowanych modelowaniem. Modelowanie nie może obyć się bez matematyki, więc i w tej pracy jest nieunikniona. Aby nie zniechęcić czytelników, których nie interesują wywody matematyczne, dużą część dowodów i przekształceń zamieszczono w Dodatku.

W przygotowaniu tej książki nieocenioną pomoc uzyskałem od wielu pracowników Instytutu badań Systemowych PAN. Szczególną wdzięczność chciałbym wyrazić panom profesorowi Przemysławowi Grzegorzewskiemu i doktorowi Piotrowi Nowakowi; nieuniknione błędy są wyłącznie moim dziełem.

Część I. Wprowadzenie

1.1. Podstawowe pojęcia

W dalszych rozważaniach czas jest z założenia dyskretny, tzn. chwile czasu są numerowane za pomocą liczb należących do zbioru liczb całkowitych a okresy powinny[2] być numerowane za pomocą liczb należących do zbioru liczb całkowitych z pominięciem liczby zero (nie rozważa się okresu o numerze 0).

Model opóźnienia jest przedstawiany w dwóch alternatywnych postaciach. Pierwsza, najczęściej stosowana w modelach ekonometrycznych ma postać (Pesando (1972), Intriligator (1978), Dhrymes (1981)):

$$y_t = f(x_t, x_{t-1}, x_{t-2}, \ldots; v_{t0}, v_{t1}, \ldots; t) = \sum_{i=0}^{\infty} v_{ti}\, x_{t-i} + \varepsilon_t \,, \tag{1.1a}$$

podczas gdy druga ma postać (Hildreth, Houck (1968), Froelich (1973)):

$$y_t = f(x_t, x_{t-1}, x_{t-2}, \ldots; v_{t0}, v_{t1}, \ldots; t) = \sum_{i=0}^{n} v_{ti}\, x_{t-i}, \tag{1.1b}$$

gdzie:

t – zmienna przyjmująca wartości ze zbioru liczb całkowitych oznaczająca czas, numer okresu,

x_t – wartość zmiennej niezależnej w okresie t,

y_t – wartość zmiennej zależnej w okresie t

v_{ti} – współczynniki opóźnienia spełniające warunki: $0 \leq v_{ti} < \infty$, $i = 0, 1, 2, \ldots;$

ε_t – składnik losowy, o wartości oczekiwanej równej zero i skończonej wariancji,

n – skończona liczba naturalna.

Inne ujęcie, które jednak nie znalazło wielu naśladowców, zaproponował P. A.Tinsley, Tinsley (1967):

$$y_t = \eta \sum_{i=0}^{n} w_{(i)}^{t-i}\, x_{t-i},$$

gdzie η stały współczynnik, a współczynniki $w_{(i)}^{t-i}$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n;$ oznaczają współczynniki wagowe (*weight coefficient*) związane ze zmiennymi niezależnymi x_{t-i} z okresów $t-i$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$.

Warianty (1.1a) i (1.1b) różnią się przede wszystkim celem i metodyką modelowania. Wariant pierwszy jest stosowany, gdy chodzi o odseparowanie czynników deterministycznego, reprezentowanego przez zmienną niezależną i współczynniki opóźnienia, oraz czynnika losowego reprezentowanego przez składnik losowy ε_t. Ten ostatni można interpretować jako błąd pomiaru zmiennej zależnej. W niektórych

[2] Ten postulat bywa w praktyce pomijany, ponieważ zmienna zależna może reprezentować wielkości zasobu w chwilach, a zmienna niezależna wielkość strumienia w okresach (lub na odwrót), co wprowadzałoby niejednolitość numerowania zmiennych zależnej i niezależnej.

zastosowaniach, o których będzie mowa w dalszej części, tak ogólne założenia okazują się niewystarczające. Postać (1.1a) ma zalety ujawniające się przy estymacji współczynników. W wariancie (1.1b) aspekt stochastyczny albo nie jest rozpatrywany, albo przyjmowane jest założenie, że współczynniki opóźnienia są zmiennymi losowymi.

Pomiędzy zmiennymi zależną i niezależną powinien zachodzić związek przyczynowo-skutkowy, zatem na wartości zmiennej zależnej w okresie t nie mogą mieć wpływu wartości zmiennej niezależnej z okresów późniejszych, tj. $t+1$, $t+2$,.. . Jest to wystarczający powód, dla którego wyrażenie po prawej stronie zależności (1.1a) i (1.1b) jest sumowane po indeksach nieujemnych. Jednakże w szczególnych przypadkach przydatne okazuje się formalne sumowanie również po indeksach ujemnych, przy założeniu, że dla wszystkich $i < 0$, $v_{ti} = 0$.

Modele (1.1a) i (1.1b) należy odczytywać w następujący sposób. Wpływ wartości zmiennej niezależnej x na wartość zmiennej zależnej y nie dokonuje się w pełni natychmiast, lecz albo jest rozłożony w czasie albo następuje z opóźnieniem po upływie określonej liczby okresów. Prawe strony zależności (1.1a) i (1.1b) mają z reguły postać addytywną lub taką, którą można przekształcić do postaci addytywnej.

Zmienna niezależna x przyjmuje wartości ze zbioru liczb rzeczywistych; w wielu zastosowaniach postulowane jest spełnienie warunku stałego znaku.

Zmienna zależna y przyjmuje skończone wartości ze zbioru liczb rzeczywistych. Suma w równaniu (1.1a) stanowi część deterministyczną modelu opóźnienia.

Wartość zmiennej zależnej y w okresie t zależy od:

- wartości zmiennej niezależnej x w tym samym okresie oraz w okresach wcześniejszych
- mechanizmu opóźnienia kształtującego opóźniony wpływ zmiennej x na zmienną y
- wartości składnika losowego ε_t.

Składnik losowy ε_t ujmuje wpływ, jaki na zmienną zależną mają czynniki nieuwzględnione w części deterministycznej modelu (1.1a) oraz błędy pomiaru zmiennej y. O zmiennej ε_t zakłada się najczęściej, że jej wartość oczekiwana jest równa zero oraz że ma ograniczoną wariancję. Zmienna ta będzie pomijana tam, gdzie nie jest przedmiotem rozważań.

Gdy przedmiotem analizy jest model opóźnienia rozłożonego w postaci (1.1b), współczynniki opóźnienia mogą zostać wyrażone za pomocą wzoru, jak to uczynili Hildreth, Houck (1968) badając własności modeli ze zmiennymi współczynnikami:

$$v_{ti} = v_i + \vartheta_{ti},$$

w którym v_i oznacza wartość oczekiwaną i-tego współczynnika opóźnienia, ϑ_{ti} to składnik losowy zakłócający obserwację i-tego współczynnika opóźnienia. Warto zauważyć, że w omówionym podejściu Hildretha i Houcka zmienność współczynników jest następstwem procesu losowego.

Mechanizmem opóźnienia nazywany jest ogół czynników i okoliczności kształtujący w każdym okresie t wartości współczynników opóźnienia $v_{t\,i}$, $i=0, 1, 2,..$; $0 \leq v_{ti} < \infty$, $i=0, 1, 2,..$; przyjmujących ograniczone wartości, o tym samym znaku.

W wielu zastosowaniach od współczynników opóźnienia oczekuje się ponadto, by ich suma

$$\sum_{i=0}^{\infty} v_{t\,i} \tag{1.2}$$

nazywana dalej mnożnikiem długookresowym, przyjmowała skończoną wartość, co jednak nie jest warunkiem koniecznym.

Uporządkowany zbiór (wektor) współczynników V_t, $V_t = (v_{t\,i}, i = 0, 1, 2,...)$ będzie dalej nazywany strukturą opóźnienia.

Współczynnik v_{t0} jest nazywany mnożnikiem krótkookresowym lub bezpośrednim, ponieważ wskazuje na siłę oddziaływania zmiennej x na zmienną y bezpośrednio w tym samym okresie.

Wyrażenie

$$\sum_{i=1}^{\infty} v_{t\,i} \tag{1.3}$$

jest nazywane mnożnikiem opóźnienia, mnożnikiem skumulowanym, ujmującym siłę, z jaką na wartość zmiennej y_t w okresie t wpływają wartości zmiennej x z okresów wcześniejszych, tzn. z okresów o numerach: t-1, t-2, t-3,..

Wyrażenie (1.2) ujmujące całkowity wpływ, jaki na wartość y_t, którą zmienna y przyjmuje w okresie t, wywierają wartości zmiennej niezależnej z okresu t oraz okresów wcześniejszych, tj. x_t, x_{t-1}, x_{t-2},..; jest nazywane mnożnikiem zupełnym lub długookresowym.

Wartości współczynników opóźnienia $v_{t\,i}$, $i = 0, 1, 2,..$; z równania (1.1a) i (1.1b) mogą ulegać zmianie wraz ze zmianami zachodzącymi w działaniu mechanizmu opóźnienia. Zmiany te mogą być wynikiem występowania określonej tendencji lub działania czynników mających charakter deterministyczny lub losowy; ich przyczynami mogą być zmiany struktury rzeczowej czy funkcjonalnej opisywanego systemu, reguł podejmowania decyzji i innych.

Gdy wszystkie współczynniki są stałe, mamy do czynienia ze modelem opóźnienia rozłożonego, charakteryzującym się stałymi, nieulegającymi zmianie w badanym okresie mechanizmem oraz parametrami charakteryzującymi ten mechanizm:

$$y_t = \sum_{i=0}^{\infty} v_i\, x_{t-i} + \varepsilon_t \ . \tag{1.4}$$

Modele opóźnienia ze stałymi współczynnikami są stosowane, gdy:

* istnieją przesłanki pozwalające na przyjęcie założenia, że mechanizm opóźnienia nie ulega zmianie

* wiedza o badanym zjawisku jest niewystarczająca do posługiwania się modelem bardziej złożonym.

Przedstawione wyżej warunki decydują, że w literaturze zdecydowanie przeważają modele ze stałymi współczynnikami (1.4).

Skończonymi modelami opóźnienia rozłożonego nazywane są modele, w których współczynniki $v_{t\,i}$, $i=0,\ 1,\ 2,..$; mają tę własność, że wartości wszystkich współczynników o numerach większych od pewnej skończonej liczby naturalnej $i_g(V_t)$, $0 < i_g(V_t) < \infty$; która również może być funkcją czasu, $i_g = i_g(t)$ są równe zero:

$$y_t = \sum_{i=0}^{\infty} v_{t\,i}\, x_{t-i} + \varepsilon_t \ = \sum_{i=0}^{i_g(V_t)} v_{t\,i}\, x_{t-i} + \varepsilon_t \ . \tag{1.5}$$

W pewnych przypadkach przydatna jest również następująca forma zapisu modelu (1.5):

$$y_t = \sum_{i=i_d(V_t)}^{i_g(V_t)} v_{t\,i}\, x_{t-i} + \varepsilon_t \ ,$$

gdzie $i_d(V_t)$, liczba naturalna, $0 \le i_d(V_t) < \infty$, oznacza najmniejszy indeks ze zbioru współczynników opóźnienia nierównych zero (numer pierwszego niezerowego); indeks ten również może być funkcją czasu, $i_d = i_d(V_t)$.

W opisie skończonych modeli opóźnienia rozłożonego przydatne bywa pojęcie rozpiętości struktury opóźnienia $R(V_t)$, oznaczające liczbę współczynników zawierających się w przedziale $[i_d(V_t)\ ,\ i_g(V_t)\ ]$. Rozpiętość struktury opóźnienia jest równa:

$$R(V_t) = i_g(V_t) - i_d(V_t) + 1.$$

Różnica pomiędzy modelami nieskończonym (1.1) a skończonym (1.5) nie sprowadza się jedynie do zapisu, ale wiąże się również z pytaniem natury ogólnej: jak bardzo historia wpływa na teraźniejszość. Jeśli istnieją przesłanki wskazujące na skończoność horyzontu czasowego, w którym zmienna niezależna wpływa na badaną zmienną zależną, to stanowi to uzasadnienie do zastosowania modelu skończonego. Jednakże w niektórych przypadkach odpowiedź może nie być jednoznaczna i wtedy jest bezpieczniej– przy spełnieniu pewnych dodatkowych warunków - posługiwanie się modelem nieskończonym. Na rzecz tego ostatniego często przemawiają względy informacyjne - współczynniki opóźnienia w modelach nieskończonych są opisywane za pomocą niedużej liczby parametrów. Jest to istotne przy estymacji, ponieważ zwiększenie liczby współczynników zmniejsza liczbę stopni swobody.

Najprostszym przypadkiem modelu opóźnienia jest model o postaci:

$$y_t = v_{t\,l} x_{t-l} + \varepsilon_t,\ l > 0,\ v_{t\,l} \neq 0, \tag{1.6}$$

nazywany opóźnieniem prostym lub zwłoką. Model (1.6) jest szczególnym przypadkiem modelu (1.1), w którym w każdym z okresów tylko współczynnik o numerze i - który może ulegać zmianie[3] - jest nierówny zero. Jest to model opóźnienia skupionego (nierozłożonego), ponieważ zmiana wartości zmiennej zależnej następuje po upływie dokładnie l okresów po zmianie wartości zmiennej niezależnej.

Przejdziemy do interpretacji współczynników $v_{t\,i}$, $i = 0, 1, 2,...$. Załóżmy, że zmienna niezależna x przyjmuje wartości dodatnie, $x_{t-i} > 0$, $i = 0, 1, 2,..$, współczynniki $v_{t\,i}$, $i = 0, 1,.2,..$, są nieujemne, oraz że przynajmniej jeden współczynnik $v_{t\,i}$ jest niezerowy (z czego wynika, że zawsze zachodzi relacja: $y_t > 0$).

Przy założeniu, że wartość oczekiwana $E(\varepsilon_t) = 0$, wartość oczekiwana $E(y_t)$ zmiennej zależnej y_t wynosi, na podstawie (1.1):

$$E(y_t) = \sum_{i=0}^{\infty} v_{t\,i} x_{t-i} = \sum_{i=0}^{\infty} y_{t\,i}\ . \tag{1.7}$$

gdzie $y_{t\,i} = v_{t\,i}\, x_{t-i}$, $i = 0, 1, 2,..$.

Przy tak poczynionych założeniach każdy iloczyn $y_{t\,i} = v_{t\,i}\, x_{t-i}$; $i = 0, 1,..$; wchodzący w skład sumy w równaniu (1.7) można interpretować jako łączny wkład wartości zmiennej niezależnej x z okresu $t-i$, $i = 0, 1,..$; wraz z odpowiednią wagą $v_{t\,i}$, jaką w okresie t nadał jej mechanizm opóźnienia, w wartość zmiennej zależnej y_t.

Ponieważ z założenia zmienna zależna y przyjmuje skończone wartości, sumy w zależności (1.7) są również skończone, z czego wynika, że $\lim_{i\to\infty} y_{t\,i} = \lim_{i\to\infty} v_{t\,i} x_{t-i} = 0$. Mogą zatem istnieć modele opóźnienia o nieskończonej wartości mnożnika długookresowego (1.2), w których skończone wartości zmiennej zależnej y są wynikiem zbieżności zmiennej niezależnej x (model taki jest omawiany w Przykładzie 1.2).

Model (1.6) oraz zależność (1.7) pozwalają na interpretację modelu (1.1) jako sumy opóźnień prostych tej samej zmiennej niezależnej.

---

[3] Nietrudno wyobrazić sobie model, w którym tylko jeden niezerowy współczynnik zmienia numer (tj. indeks i) wraz ze zmianą okresu t, $i = i(t)$.