233/2011

Raport Badawczy
Research Report

RB/64/2011

Modelowanie przepływów w systemach ekonomiczno-społecznych z wykorzystaniem modelu opóźnienia rozłożonego

J. Gadomski

Instytut Badań Systemowych
Polska Akademia Nauk

Systems Research Institute
Polish Academy of Sciences

POLSKA AKADEMIA NAUK

Instytut Badań Systemowych

ul. Newelska 6

01-447 Warszawa

tel.: (+48) (22) 3810100

fax: (+48) (22) 3810105

Kierownik Zakładu zgłaszający pracę:
dr inż. Lech Kruś

Warszawa 2011

Rozdział III. Modele opóźnienia w systemach przepływów

III.1 Sformułowanie problemu

Odrębną podkategorię modeli opóźnienia stanowią modele systemów przepływów składających się ze strumieni zasilających i wyczerpujących pewne zasoby. W interpretacji kategorii strumieni i zasobów nie zawsze zachodzi daleko idąca analogia do przepływów rzeczowych; zarówno strumienie jak i zasoby mogą nie być skupione w przestrzeni, jak ma to miejsce, na przykład, w wielu systemach fizykalnych, jednak z systemami tymi opóźnienia w systemach przepływów podzielają metodologię pomiaru, którą w pewnym uproszczeniu można przedstawić w postaci dwóch zasad: wielkości zasobów obliczane są w punktach na osi czasu (odległości między tymi punktami są określane przez jednostkę czasu wyznaczającą długość jednostkowego okresu / częstotliwość pomiaru) i wyrażone w jednostkach miary zasobów; wielkości strumieni obliczane są przez zliczanie liczby jednostek miary, które „przepłynęły" w danym okresie w przeliczeniu na przyjętą jednostkę czasu.

Modele opóźnienia w systemach przepływów znajdują zastosowanie w wielu dziedzinach, m. in. służą do opisu kształtowania się populacji (a w tym procesów demograficznych), procesów logistycznych, hydrologicznych, finansowych, ewidencji środków trwałych i in. W omawianiu tych modeli uwaga będzie skupiona na tych, w których natężenie strumieni wypływających może być opisane za pomocą modelu opóźnienia rozłożonego. W celu większej komunikatywności omawiane modele będą oparte na założeniu szczelności, to znaczy, że w systemie przepływów nie są rozważane ubytki (straty, rozkurz, itp.).

Podstawowym elementem systemu przepływów jest układ składający się ze strumienia X zasilającego pewien zasób Z, który jest opróżniany (wyczerpywany) przez strumień Y wypływający z tego zasobu. Analizowany element jest szczelny, nie ma w nim czynników, które byłyby równoważne stratom lub przyrostom ilości pochodzącym spoza systemu; poza strumieniami X i Y nie ma innych strumieni wpływających na poziom zasobu Z.

Równanie zasobu ma następującą postać:

$$z_t = z_{t-1} + x_t - y_t, \tag{3.1}$$

gdzie x_t i y_t to odpowiednio natężenia strumieni: zasilającego (wpływającego do) i wyczerpującego zasób Z (wypływającego z) w okresie t, natomiast przez z_{t-1} i z_t oznaczone zostały odpowiednio wielkości zasobu Z na początku i pod koniec okresu t. O wielkościach x_t, y_t i z_t zakłada się, że dla wszystkich t są nieujemne - strumienie X i Y nie zmieniają kierunku (płyną odpowiednio do i z zasobu; ruch jednokierunkowy), ponadto nie przewiduje się ujemnych stanów zasobu. Równanie (3.1) można również przedstawić w postaci równania bilansu:

$$z_{t-1} + x_t = z_t + y_t,$$

którego lewą stronę interpretuje się w ekonomii jako podaż a prawą stronę jako popyt ex post.

Gdy przedmiotem analizy jest model opóźnienia przepływów, między strumieniem wypływającym Y i strumieniem zasilającym X zachodzi następujący związek:

$$y_t = \sum_{i=0}^{\infty} w_{t\,i}\, x_{t-i}\ , \tag{3.2}$$

gdzie współczynniki $w_{t\,i}$, $i=0,\ 1,\ 2,\dots;$ są zdefiniowane podobnie jak dla zależności (1.11), dla każdego t tworzą rozkład opóźnienia W_t, a ponadto dla każdego okresu t przyjmują wartości zapewniające spełnienie następujących warunków:

$$z_{t-1} + x_t \geq y_t, \tag{3.3}$$

co wiąże się z założeniem o nieujemności zasobu Z i wzoru (3.1).

Z warunku (3.3) wynika, że z zasobu nie może wypłynąć więcej od ilości, która w nim była na początku okresu, powiększonej o to, co w tym okresie wpłynęło.

W zależności (3.2) pominięty został składnik losowy występujący w równaniu (1.1) z dwóch powodów. Pierwszy, to uproszczenie zapisu, drugi zaś, to dopuszczenie możliwości, że współczynniki w_{ti}, $i=0,\ 1,\ 2,\ldots$; są zmiennymi losowymi przyjmującymi wartości nieujemne.

Zasadniczą różnicą między modelami (1.1) a (3.2) jest założona w modelu (3.3) stała i równa jedności wartość mnożnika długookresowego, wzór (1.2). Konsekwencją tego założenia jest to, że w stanie ustalonym dla każdego t zachodzi równość wartości zmiennych niezależnej X i zależnej Y, tj. gdy, $x_{t-i}=x^*$; $i=0,\ 1,\ 2,..$:

$$y_t = x_t = x_{t-1} = x_{t-2} = \ldots = x^*.$$

Element systemu przepływów opisany za pomocą zależności (3.1) i (3.2) ma szczególną interpretację. Zasób Z można nazwać zasobem w opóźnieniu, ponieważ stanowi zasób tych części strumienia X, które „weszły" w opóźnienie, lecz z niego nie „wyszły", zalegają w nim, w postaci części strumienia Y[1].

Model opóźnienia (3.2), spelniający dla każdego t warunki (3.1) i (3.3), ma kilka szczególnych własności.

Wielkość zasobu z_t pod koniec okresu t zależy od wielkości zasobu z_{t-k} sprzed k okresów ($k = 1,\ 2,\ 3,\ldots$) oraz wielkości strumieni X i Y z ostatnich k okresów:

$$z_t = z_{t-k} + \sum_{i=0}^{k-1} (x_{t-i} - y_{t-i}). \tag{3.4}$$

Zależność (3.4) uzyskuje się rekurencyjnie na podstawie wzoru (3.1) przez kolejne zastępowanie wyrażeń z_{t-i} , $i = 1,\ 2,\ldots,\ k-1$; wyrażeniami $z_{t-i-1} + x_{t-i} - y_{t-i}$.

Ponieważ na podstawie (3.1) i (3.2) dla kolejnych j, $j = 1,\ 2,\ 3,..$; zachodzą zależności:

$$y_{t-j} = \sum_{i=0}^{\infty} w_{t-j,i}\, x_{t-j-i}\ ,$$

oraz

$$x_{t-j} - y_{t-j} = (1 - w_{t-j,0})x_{t-j-i} - w_{t-j,1}x_{t-j-1} - w_{t-j,2}x_{t-j-2} - \cdots,$$

[1] Cudzysłów w tym przypadku jest uzasadniony tym, że nie wszystkie w ten sposób opisywane obiekty mają interpretację fizyczną.

których podstawienie do (3.4) daje zależność:

$$\begin{array}{lll}
z_t = z_{t-k} & & \\
+(1-w_{t\,0})\; x_t & -w_{t\,1}\; x_{t-1} - w_{t\,2}\; x_{t-2} - w_{t\,3} x_{t-3} & -\ldots \\
+(1-w_{t-1,0})x_{t-1} & -w_{t-1,1} x_{t-2} - w_{t-1,\,2} x_{t-3} - w_{t-1,\,3} x_{t-4} & -\ldots \\
\multicolumn{3}{l}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\
+(1-w_{t-k+1,0})x_{t-k+1} & -w_{t-k+1,1} x_{t-2} - w_{t-k+1,\,2} x_{t-3} - w_{t-k+1,\,3} x_{t-4} & -\ldots
\end{array}$$

prowadzącą do następującego wzoru

$$z_t = z_{t-k} + \sum_{i=0}^{k-1}(1-\sum_{j=0}^{i} w_{t-i+j,j})x_{t-i} + \sum_{i=k}^{\infty} -(\sum_{j=0}^{k-1} w_{t-i+j,j})x_{t-i} \tag{3.5}$$

ponieważ dla kolejnych k, k=1, 2, 3,..;:

$$z_t = z_{t-1} + (1-w_{t\,0})x_t \; - w_{t\,1}x_{t-1} \; - w_{t\,2}x_{t-2} - w_{t\,3}x_{t-3} \quad -\ldots$$

$$\begin{aligned}
z_t = z_{t-2} &+ (1-w_{t\,,0}\;)\; x_t \; - w_{t\,,1}\; x_{t-1} \; - w_{t\,2} \; x_{t-2} - w_{t\,,3}\; x_{t-3} \quad -\ldots \\
&+ (1-w_{t-1,0}\,)\; x_{t-1} - w_{t-1,1} x_{t-2} \; - w_{t-1,2}\, x_{t-3} - w_{t-1,3} x_{t-4} \quad -\ldots\ldots = \\
= z_{t-2} &+ (1-w_{t\,,0}\;)\; x_t \; -(1-w_{t-1,\,0} - w_{t,\,1}\,)\, x_{t-1} \; - w_{t\,2} \; x_{t-2} - w_{t\,,3}\; x_{t-3} \quad -\ldots \\
&\qquad\qquad - w_{t-1,1} x_{t-2} - w_{t-1,2} x_{t-3} - w_{t-1,3} x_{t-4} - \ldots\ldots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z_t = z_{t-3} &+ (1-w_{t\,,0}\;)\; x_t \quad - w_{t\,,1}\; x_{t-1} \; - w_{t\,2} \; x_{t-2} \; - w_{t\,,3} \; x_{t-3} \quad -\ldots \\
&+ (1-w_{t-1,0}\,)\; x_{t-1} \; - w_{t-1,1}\; x_{t-2} \; - w_{t-1,2}\, x_{t-3} \; - w_{t-1,3} \; x_{t-4} \quad -\ldots \\
&+ (1-w_{t-2,0}\,)\; x_{t-2} \; - w_{t-2,1} x_{t-3} \; - w_{t-2,2}\, x_{t-4} - w_{t-2,3} \; x_{t-5} \quad -\ldots;
\end{aligned}$$

Przez pogrupowanie wyrażeń zawierających to samo x_{t-i}, $i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$; uzyskuje się:

$$z_t = z_{t-1} + (1-w_{t\,0})x_t - \sum_{i=1}^{\infty} w_{t,\,i}\, x_{t-i}$$

$$z_t = z_{t-2} + (1-w_{t\,0})x_t + (1-w_{t-1,0} - w_{t,\,1})x_{t-1} - \sum_{i=2}^{\infty}(w_{t\,,i} + w_{t-1,i-1})x_{t-i}$$

$$\begin{aligned}
z_t = z_{t-3} &+ (1-w_{t\,0})x_t + (1-w_{t-1,0} - w_{t,\,1})x_{t-1} + (1-w_{t-2,0} - w_{t-1,\,1} - w_{t,\,2}\,)x_{t-2} - \\
&- \sum_{i=3}^{\infty}(w_{t-2,i-2} + w_{t-1,i-1} + w_{t\,,i})x_{t-i}
\end{aligned}$$

i ostatecznie

$$z_t = z_{t-k} + \sum_{i=0}^{k-1}(1-\sum_{j=0}^{i} w_{t-i+j,j})x_{t-i} + \sum_{i=k}^{\infty} -(\sum_{j=0}^{k-1} w_{t-i+j,j})x_{t-i}\,.$$

Suma współczynników we wzorze (3.5) jest równa zero, ponieważ w rozwinięciu każdego z wyrażeń $x_{t-j} - y_{t-j}$, $j= 0, 1, 2,\dots$; suma współczynników jest również równa zero:

$$(1 - w_{t-j,0}) - w_{t-j,1} - w_{t-j,2} - \dots = (1 - w_{t-j,0}) - \sum_{i=1}^{\infty} w_{t-j,i} = 1 - \sum_{i=0}^{\infty} w_{t-j,i} = 0.$$

Powyższą własność można ująć w nieco inny sposób: sumy wartości bezwzględnych współczynników dodatnich i ujemnych we wzorze (3.5) są sobie równe.

Obecnie uwaga zostanie skupiona na zbadaniu zależności poziomu zasobu Z od strumieni X w nieskończonej historii. Przejście w zależności (3.5) z k do granicy prowadzi do następującego wzoru:

$$z_t = \sum_{i=0}^{\infty} (1 - \sum_{j=0}^{i} w_{t-i+j,j}) x_{t-i} \qquad (3.6)$$

pod warunkiem, że $z_{t-\infty} = 0$ (powstanie zasobu w opóźnieniu Z jest następstwem pojawienia się niezerowych wartości strumienia X w skończonej historii opisywanego zjawiska albo jest spełniony warunek $\lim_{k\to\infty} \sum_{i=k}^{\infty} -(\sum_{j=0}^{k-1} w_{t-i+j,j}) x_{t-i} = 0$),

oraz

$$\lim_{k\to\infty} \left[\sum_{i=k}^{\infty} -(\sum_{j=0}^{k-1} w_{t-i+j,j}) x_{t-i} \right] = 0 .$$

Zbieżność powyższego wyrażenia nie jest oczywista, z wcześniejszego bowiem wywodu wiadomo, że dla każdego k,

$$\sum_{i=0}^{\infty} (1 - \sum_{j=0}^{k-1} w_{t-i+j,j}) = \sum_{i=k}^{\infty} \sum_{j=0}^{k-1} w_{t-i+j,j} ,$$

zatem zbieżność tę powinna zapewnić odpowiednia zbieżność $\lim_{k\to\infty} x_{t-k} = 0$.

Wzór (3.6) ma znaczenie zasadnicze, pokazuje bowiem strukturę czasową zasobu w opóźnieniu Z; który został zasilony przez strumień wpływający X w okresach t, $t-1$, $t-2$, ...;

oraz który był wyczerpywany przez strumień Y. Każdy współczynnik reprezentowany przez wyrażenie

$$1-\sum_{j=0}^{i} w_{t-i+j,j}$$

we wzorze (3.6) pokazuje, jaka część strumienia X, która wpłynęła do zasobu Z w okresie $t-i$ zalega (pozostaje) w zasobie Z w okresie t:

$1-w_{t\,0}$, część strumienia x_t z okresu t, która pozostała w zasobie Z pod koniec okresu t,

$1-w_{t-1,\,0}-w_{t,\,1}$, część strumienia x_{t-1} z okresu $t-1$, zalegająca w zasobie Z pod koniec okresu t;

$1-w_{t-2,\,0}-w_{t-1,\,1}-w_{t,\,2}$, część strumienia x_{t-2} z okresu $t-2$, zalegająca w zasobie Z pod koniec okresu t; itd.

Przyjmując oznaczenie

$$v_{ti} = 1-\sum_{j=0}^{i} w_{t-i+j,j};\ i=0,1,2,3,...; \tag{3.7}$$

zależność (3.6) można przedstawić w następującej postaci:

$$z_t = \sum_{i=0}^{\infty} v_{ti} x_{t-i}. \tag{3.8}$$

Współczynniki v_{ti} , $i=0,\ 1,\ 2,...;$ wzór (3.7), tworzą strukturę opóźnienia V_t zasobu w opóźnieniu Z względem strumienia zasilającego X. Między współczynnikami struktury V_t zasobu w opóźnieniu Z w dwóch kolejnych okresach zachodzi związek wyrażający się następującym wzorem:

$$v_{t+1,i+1} = v_{t,i} - w_{t+1,i+1};\ i=0,\ 1,\ 2,\ 3,...; \tag{3.9}$$

Prawdziwość zależności (3.9) wynika z tego, że zgodnie ze wzorem (3.7)

$$v_{ti} = 1-\sum_{j=0}^{i} w_{t-i+j,j};\ i=0,1,2,3,...;$$

oraz

$$v_{t+1,i+1} = 1 - \sum_{j=0}^{i+1} w_{t+1-i-1+j,j} = 1 - \sum_{j=0}^{i} w_{t-i+j,j} - w_{t+1,i+1}. = v_{ti} - w_{t+1,i+1}.$$

Poziom z_t zasobu w opóźnieniu Z pod koniec okresu t, wzór (3.8), można interpretować jako sumę zasobów $v_{ti}\ x_{t-i},\ i=0,\ 1,\ 2,...;$ z których każdy jest utworzony przez strumień zasilający ten zasób w okresach $t-i$, $i=0,\ 1,\ 2,..;$ i jest wyczerpywany w kolejnych okresach: $t-i+1,\ t-i+2,\ ..,t$. W świetle tej interpretacji przydatny okazuje się zapis zależności (3.8) w następującej postaci:

$$z_t = \sum_{i=0}^{\infty} z_{ti}; \tag{3.10}$$

gdzie $z_{ti} = v_{ti}\ x_{t-i},\ i=0,\ 1,\ 2,..$; reprezentuje ilość jednostek strumienia X, które wpłynęły do zasobu opóźnionego Z w okresie $t-i$, $i=0,\ 1,\ 2,....$; które pozostają (zalegają) w tym zasobie pod koniec okresu t.

Interpretacja ta pozwala na sformułowanie warunków zapewniających spełnienie założenia o jednokierunkowości przepływów:

$$w_{t+1,0} \leq 1; \quad w_{t+1,i} \leq v_{t,i-1} = 1 - \sum_{j=0}^{i-1} w_{t-i+j,j};\ i = 1,2,3,.... \tag{3.11}$$

których wymowa jest następująca: ilość jednostek strumienia X, które wpłynęły w okresie $t-i$ i zalegają w zasobie w opóźnieniu Z pod koniec okresu t stanowi ograniczenie dla wypływu tych jednostek z zasobu w opóźnieniu Z w okresie $t+1$.

Warunki (3.11) sprawiają, że struktura czasowa strumienia Y wypływającego z zasobu w opóźnieniu Z jest nie sprzeczna ze strukturą czasową zasobu w opóźnieniu z poprzedniego okresu.

III.2 Czas w modelach przepływów

Omówione w Rozdziale I miary opóźnienia, takie jak wartość średnia rozkładu wynikowego opóźnienia $m(U_t)$ oraz mediana rozkładu wynikowego opóźnienia $\eta(U_t)$, znajdują odpowiednie zastosowanie w modelach przepływów. W tej kategorii modeli opóźnienia wartość średnia rozkładu wynikowego $m(U_t)$ zmiennej zależnej Y względem zmiennej X ujmuje średni wiek jednostek tworzących strumień wypływający Y w okresie t, lub przeciętny czas, jaki jednostki strumienia wypływającego Y przebywały (zalegały) w zasobie w opóźnieniu Z. Wartość średnia rozkładu wynikowego $m(Q_t)$ odpowiada średniemu wiekowi jednostek zalegających w zasobie w opóźnieniu Z. W modelach opóźnienia w systemach przepływów klarowność interpretacji średnich rozkładów wynikowych U_t i Q_t daje tym parametrom, jak się wydaje, znaczącą przewagę nad medianami rozkładów jako miar opóźnienia.

Spełnienie warunków (3.11) pozwala na interpretację wzorów (3.6) lub (3.8) jako modelu opóźnienia rozłożonego o zmiennej w czasie strukturze opóźnienia V_t określonej przez współczynniki v_{ti}, $i=0, 1, 2,\ldots$. Podkreślenia wymaga fakt, że struktura opóźnienia V_t określona wzorem (3.10) jest kształtowana w okresach t oraz poprzedzających, ponieważ współczynniki v_{ti} zależą od wartości współczynników rozkładów z okresu t, W_t; i wcześniejszych[2], tj. W_{t-i}, $i=1, 2,..$; wzór (3.7).

Jeśli istnieje skończona dodatnia suma c_t :

$$c_t = \sum_{i=0}^{\infty}\Big(1 - \sum_{j=0}^{i} w_{t-i+j,j}\Big), \tag{3.12}$$

to istnieją unormowane współczynniki v_{ti}, $i=0, 1, 2,\ldots$;

$$s_{ti} = \frac{v_{ti}}{c_t} = \frac{1 - \sum_{j=0}^{i} w_{t-i+j,j}}{\sum_{i=0}^{\infty}\Big(1 - \sum_{j=0}^{i} w_{t-i+j,j}\Big)}, \quad i=0,\ 1,\ 2,\ldots \tag{3.13}$$

---

[2] Istnienie rozkładów $W(t-i)$, $i=0, 1, 2,..$; wynika z przyjętego założenia.

Zbiór S_t współczynników, $S_t = \{ s_{t\,i},\ i = 0,\ 1,\ 2, \ldots \}$ tworzy rozkład opóźnienia zasobu w opóźnieniu Z względem strumienia zasilającego X, natomiast zbiór współczynników $q_{t\,i},\ i = 0,\ 1,\ 2, \ldots$; przyjmujący wartości:

$$q_{ti} = \frac{z_{ti}}{z_t} = \frac{v_{ti} x_{t-i}}{\sum_{i=0}^{\infty} (1 - \sum_{j=0}^{i} w_{t-i+j,j}) x_{t-i}},\ i=0,\ 1,\ 2, \ldots \qquad (3.14)$$

tworzy rozkład wynikowy Q_t, $Q_t = \{ q_{t\,i},\ i = 0,\ 1,\ 2, \ldots \}$, opóźnienia (3.8).

Podkreślenia wymaga, że rozkład Q_t opisuje strukturę czasową zasobu w opóźnieniu Z ze względu na wiek (długość okresu przebywania, zalegania w zasobie w opóźnieniu) tworzących go jednostek pochodzących z różnych okresów. W związku z tym, wyrażenie:

$$\frac{\sum_{i=0}^{\infty} i z_{ti}}{z_t} = m(Q_t) \qquad (3.15)$$

określa średni wiek jednostek tworzących zasób w opóźnieniu Z i – co należy zauważyć - jest równe wartości średniej rozkładu wynikowego Q_t (odpowiadającemu modelowi opóźnienia rozłożonego (3.6) opartego na rozkładzie S_t i wartościach zmiennej niezależnej X).

Z elementem systemu przepływów opisanym za pomocą zależności (3.1) i (3.2) oraz spełniającym warunki (3.3) związane są następujące modele opóźnienia i odpowiednie rozkłady (jeśli istnieją):

- rozkład opóźnienia W_t zmiennej zależnej Y względem zmiennej X
- rozkład wynikowy opóźnienia U_t zmiennej zależnej Y względem zmiennej X
- rozkład opóźnienia S_t zasobu w opóźnieniu Z względem zmiennej X
- rozkład wynikowy opóźnienia Q_t zasobu w opóźnieniu Z względem zmiennej X (struktura czasowa opóźnienia)

W niektórych zastosowaniach wyniki szacowania wielkości opóźnienia zależą nie tylko od wykorzystywanej miary opóźnienia ale również od innych czynników. Istotne znaczenie ma tu wielkość stosowanej jednostki czasu wyznaczającej częstotliwość pomiarów: zliczania wielkości przepływów w poszczególnych okresach oraz pomiaru wielkości zasobów w punktach na osi czasu odpowiadających końcom okresów. Niezależnie od problemu ubytków (nieszczelności, rozkurzu) w systemie przepływów, jeśli takie występują, dokonane pomiary odnoszą się do punktów na osi czasu; bez względu na to, czy stany zasobów są wielkościami pierwotnymi czy wtórnymi, pod koniec okresu średnie opóźnienie informacji o wielkości strumienia wynosi pół okresu. O ile okoliczność ta nie ma w większości zastosowań znaczącego wpływu na wartość średnią i medianę rozkładu W_t, to w przypadku rozkładów S_t i Q_t wielkości te są niedoszacowane o wielkość pół okresu przy założeniu, że przepływ strumienia w okresie dokonuje się równomiernie (ma rozkład równomierny lub monotoniczny). Warto mieć na uwadze, że nierzadkie są przypadki, kiedy przepływy te są dalekie od równomierności; konieczność wprowadzenia poprawek znalazła wyraz, na przykład, w stosowanej w demografii zasadzie Rahtsa (patrz np. Holzer J. Z. (1994), strona 215).

W przypadku rozkładu wynikowego Q_t w stanie ustalonym (tj. wtedy, gdy odpowiednie rozkłady opóźnienia i rozkłady wynikowe są sobie równe) wystarczy, podobnie jak w przypadku rozkładu W_t, poprawka w wysokości połowy okresu (zwiększenie wartości średniej i mediany rozkładu o 1/2 okresu), natomiast przy znaczącej dynamice zmiennej niezależnej wpływającej na pogłębienie nierównomierności przepływu wewnątrz okresowego, jej wysokość powinna być dostosowana, jeśli to możliwe, do specyfiki przypadku.

III.3 Modele opóźnienia w systemach przepływów ze stałym rozkładem opóźnienia

Obecnie przedmiotem rozważań będzie model opóźnienia w systemie przepływów ze stałym rozkładem opóźnienia. Duże znaczenie tej podkategorii modeli wynika, jak się wydaje, z dwóch przyczyn. Pierwsza, to ich dominacja wśród modeli opóźnienia. Druga zaś to fakt, że jako koncepcyjnie i konstrukcyjnie prostsze stanowią punkt odniesienia dla modeli bardziej złożonych – ze zmiennym rozkładem opóźnienia.

Gdy rozkład opóźnienia W_t zmiennej zależnej Y względem zmiennej X jest stały, w podstawowym modelu systemu przepływów rozkład opóźnienia S_t zasobu w opóźnieniu Z względem zmiennej niezależnej X jest również stały, a ponadto - z wyjątkiem opóźnienia prostego mającego rozkład jednopunktowy - jego współczynniki są monotonicznie malejącą funkcją numeru współczynnika.

Własność ta wynika ze wzoru (3.7), który przy założonej stałości współczynników rozkładu można zapisać w następującej postaci:

$$v_{ti} = v_i = 1 - \sum_{j=0}^{i} w_j; \; i = 0, 1, 2, 3, \ldots;$$

z której bezpośrednio wynika, że największą wartość ma współczynnik v_0, ponieważ kolejne powstają przez odjęcie od poprzedniego wartości współczynnika rozkładu W o tym samym indeksie, wzór (3.9):

$$v_{i+1} = v_i - w_{i+1}; \; i = 0, 1, 2, 3, \ldots;$$

a w przypadku stałego rozkładu opóźnienia z założenia

$$\sum_{j=0}^{\infty} w_j = 1.$$

Gdy rozkład opóźnienia W_t zmiennej zależnej Y względem zmiennej niezależnej X jest stały i istnieje wartość średnia tego rozkładu $m(W)$, wtedy suma współczynników struktury opóźnienia V zasobu w opóźnieniu Z względem zmiennej X jest równa:

$$\sum_{i=0}^{\infty} v_i = m(W). \tag{3.16}$$

Dowód zależności (3.10) jest następujący. Wartość współczynników v_i, $i = 0, 1, 2, \ldots;$ można przedstawić na dwa sposoby; z definicji lub korzystając z własności rozkładu:

$$
\begin{aligned}
v_0 &= 1 - w_0 && = w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + \ldots \\
v_1 &= 1 - w_0 - w_1 && = \quad w_2 + w_3 + w_4 + \ldots \\
v_2 &= 1 - w_0 - w_1 - w_2 && = \quad\quad w_3 + w_4 + \ldots
\end{aligned}
$$

....

Z obserwacji prawych stron powyższych zależności wynika, że suma współczynników v_i, $i = 0, 1, 2, \ldots$; jest równa sumie jednego współczynnika w_1, dwóch współczynników w_2, trzech współczynników w_2, itd. Ponieważ:

$$\sum_{i=0}^{\infty} v_i = \sum_{i=0}^{\infty} i w_i = m(W),$$

powyższa równość kończy dowód.

Opóźnioną zależność rozkład opóźnienia zasobu w opóźnieniu Z względem zmiennej niezależnej X można przedstawić w następującej postaci:

$$z_t = \sum_{i=0}^{\infty} v_i x_{t-i} = \sum_{i=0}^{\infty} (1 - \sum_{j=0}^{i} w_j) x_{t-i} = m(W) \sum_{i=0}^{\infty} s_i x_{t-i}, \tag{3.17}$$

gdzie: s_i, $i = 0, 1, 2, \ldots$; współczynniki rozkładu opóźnienia S zasobu w opóźnieniu Z względem zmiennej niezależnej X mające postać wyrażającą się wzorem:

$$s_i = \frac{1 - \sum_{j=0}^{i} w_j}{m(W)}, \quad i = 0, 1, 2 \ldots \tag{3.18}$$

Współczynniki rozkładu S, wzór (3.18), odzwierciedlają strukturę wiekową zasobu w opóźnieniu Z w stanie ustalonym.

Jak wynika ze wzorów (3.17) i (3.18), miedzy rozkładami S i W zachodzi ścisły związek. Znajomość jednego z tych rozkładów pozwala na jednoznaczne wyznaczenie rozkładu drugiego.

Jak wynika z zależności (3.17), w przypadku modelu opóźnienia w systemie przepływów ze stałym rozkładem, w stanie ustalonym, tj. gdy x^*, $x^* = x_t, x_{t-1}, x_{t-2}, \ldots$; następuje ustalenie poziomu zasobu w opóźnieniu na następującym poziomie:

$$z_t = m(W)\, x^*, \tag{3.19}$$

co jest konsekwencją równości: $\sum_{i=0}^{\infty} s_i = 1$.

Ponadto, jeśli istnieje wartość średnia *m(S)* rozkładu *S*, to jest ona określona za pomocą następującej zależności:

$$m(S) = \sum_{i=1}^{\infty} i s_i = \frac{\left[\sum_{i=1}^{\infty} i^2 w_i + \sum_{i=1}^{\infty} i w_i\right]}{2m(W)} = \frac{1}{2}\frac{\left[\sum_{i=1}^{\infty} i^2 w_i + \sum_{i=1}^{\infty} i w_i\right]}{\sum_{i=1}^{\infty} i w_i} = \frac{1}{2}\left[\frac{\sigma^2(W)}{m(W)} + m(W) + 1\right]. \tag{3.20}$$

Dowód zależności (3.20) jest przeprowadzony w następujący sposób. Z definicji

$$\begin{aligned} m(S) = \sum_{i=1}^{\infty} i s_i = \sum_{i=1}^{\infty} i \frac{1 - \sum_{j=0}^{i} w_j}{m(W)} = \\ = \frac{1}{m(W)} [1 \cdot (w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + \ldots\ldots\ldots) + \\ + 2 \cdot (\quad + w_2 + w_3 + w_4 + \ldots\ldots\ldots) + \\ + 3 \cdot (\quad\quad + w_3 + w_4 + \ldots\ldots\ldots) + \\ + 4 \cdot (\quad\quad\quad + w_4 + \ldots\ldots\ldots) + \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots] \end{aligned}$$

Obserwując w powyższym wzorze wyrażenia występujące w nawiasie kwadratowym można zauważyć, że pierwszy współczynnik występuje jeden raz, drugi trzy razy, trzeci sześć razy, itd. Liczbę razy, jaką w wymienionej sumie występuje współczynnik o indeksie *i*, *i=0, 1, 2,..;* ujmuje wzór:

$$i\frac{(i+1)}{2}$$

który po podstawieniu do rozwiniętego powyżej wzoru daje następującą postać zależności:

$$m(S) = \sum_{i=1}^{\infty} i s_i = \frac{1}{m(W)}\left[\sum_{i=1}^{\infty} i \frac{(i+1)}{2} w_i\right] = \frac{1}{2m(W)}\left[\sum_{i=1}^{\infty} i^2 w_i + \sum_{i=1}^{\infty} i w_i\right].$$

Podstawienie do powyższego wzoru zależności

$$\sigma^2(W) = \sum_{i=1}^{\infty} i^2 w_i - \left(\sum_{i=1}^{\infty} i\, w_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{\infty} i^2 w_i - m^2(W)$$

prowadzi do postaci

$$m(S) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sum_{i=1}^{\infty} i^2 w_i}{\sum_{i=1}^{\infty} i\, w_i} + 1\right) = \frac{1}{2}\left[\frac{\sigma^2(W)}{m(W)} + m(W) + 1\right],$$

która kończy dowód.

Z założeniem o stałości rozkładu opóźnienia w modelu opóźnienia rozłożonego wiąże się kolejna istotna własność: jeśli zmienną niezależną X charakteryzuje wzrost ze stałą stopą wzrostu r, to zmienna zależna Y wzrasta z tą samą stopą wzrostu r.

Model opóźnienia rozłożonego ze stałym rozkładem opóźnienia W dla okresu $t+1$ ma postać (w tej podkategorii modeli opóźnienia mnożnik długookresowy a ma z założenia wartość jeden):

$$y_{t+1} = \sum_{i=0}^{\infty} w_i\, x_{t+1-i} \; .$$

Zgodnie z założeniem, ewolucja zmiennej X jest opisana za pomocą wzoru:

$$x_{t-i} = (1+r)^{-i}, \; i=-1,0,1,2,..;$$

po którego podstawieniu uzyskuje się model:

$$y_{t+1} = (1+r)\sum_{i=0}^{\infty} w_i\, x_{t-i} = (1+r)\, y_t,$$

co kończy dowód.

Następstwem powyższej własności jest oparta na tych samych przesłankach (zatem nie wymagająca dowodu) kolejna własność: jeśli model zasobu w opóźnieniu jest zgodny z modelem (3.17), to z faktu, że jest on modelem opóźnienia rozłożonego o stałym rozkładzie opóźnienia, wzrost zmiennej niezależnej X ze stałą stopą wzrostu r powoduje wzrost zasobu w opóźnieniu Z z tą samą stałą stopą wzrostu r:

$$z_{t+1} = (1+r)\, z_t.$$

Powyższe rozważania zostaną teraz zilustrowane przykładami. Dla zapewnienia przejrzystości wywodu przegląd otwierają modele ze stałym rozkładem opóźnienia.

III.4 Podstawowe modele opóźnień w systemach przepływów

III.4.1 Model podstawowy. Stały rozkład I

Rozważany jest element systemu przepływów opisany za pomocą następującego układu dwóch równań.

$$\begin{cases} z_t = z_{t-1} + x_t - y_t \\ y_t = \lambda x_t + \rho z_{t-1} \end{cases} \tag{3.21}$$

gdzie λ jest stałym współczynnikiem przyjmującym wartość z przedziału $[0,1)$, a ρ jest stałym współczynnikiem przyjmującym wartość z przedziału $(0,1]$. Współczynnik λ nie może być równy 1, ponieważ przy tej wartości zależność (3.21) nie byłaby zależnością opóźnioną, a ponadto nie byłyby spełnione warunki (3.11) modelu przepływów. Wartość współczynnika λ określa, jaka część strumienia X nie podlega opóźnieniu wypływając z systemu w tym samym okresie. Z formalnego punktu widzenia dwie interpretacje wartości λx_t są równoważne: a) wielkość „omijająca" zasób w opóźnieniu, b) wielkość, która przepływa przez zasób w opóźnieniu z zerowym opóźnieniem. Niezerowa wartość współczynnika ρ zapewnia zachowanie opóźnionego charakteru zależności zmiennych Y i Z od zmiennej X.

Równanie pierwsze układu równań (3.21) jest równaniem bilansowym: stan pod koniec okresu jest równy stanowi na początku okresu powiększonemu o ilość, która napłynęła w okresie t do zasobu i pomniejszonemu o ilość, która w tym okresie wypłynęła z tego zasobu.

Równanie drugie[3] opisuje kształtowane się natężenia strumienia wypływającego, na który składają się: część λx_t strumienia X, oraz część ρz_t stanu zasobu w opóźnieniu Z z początku okresu.

Interpretacja tego modelu jest następująca. Pewien zasób Z zasilany strumieniem X jest opróżniany przez strumień Y. Natężenie strumienia Y zależy od poziomu zasobu Z na początku okresu oraz ilości jednostek, które w tym okresie przyniósł strumień X (łączna podaż). Zatem w modelu tym natężenie strumienia wypływającego, wyczerpującego zasób w opóźnieniu, zależy od natężenia strumienia napływającego oraz wielkości zasobu w opóźnieniu.

W stanie ustalonym, gdy wszystkie wartości zmiennej niezależnej przyjmują tę samą wartość x^*; $x_t = x_{t-1} = x_{t-2} \ldots = x^*$, a ponadto na podstawie własności stanu ustalonego $y_t = x^*$, zachodzi następująca zależność (na podstawie drugiego równania z układu równań (3.21)):

$$z_t = const. = \frac{1-\lambda}{\rho} x^* .$$

Przedstawienie zależności strumienia wypływającego (opóźnionego) Y od strumienia wpływającego X uzyskujemy przez zastępowanie dla kolejnych k, $k = 1, 2, \ldots$; zmiennej z_{t-k} przez zmienną $z_{t-k} = (1-\rho) z_{t-k-1} + (1-\lambda) x_{t-k}$:

$$y_t = \lambda x_t + \rho z_{t-1} = \lambda x_t + \rho [(1-\lambda) x_{t-1} + (1-\rho) z_{t-2}]$$

$$y_t = \lambda x_t + \rho (1-\lambda) x_t + \rho (1-\rho) z_{t-2} = \lambda x_t + \rho (1-\lambda) x_t + \rho (1-\lambda)^2 x_t + \rho (1-\rho)^2 z_{t-2}$$

……………………………………………………….

[3] W wielu systemach, na przykład fizycznych, uwzględniających ciążenie ziemskie, zakłada się, że natężenie strumienia wypływającego jest funkcją wielkości zasobu w drugiej potędze. Nieliniowość jest niewygodna zarówno ze względu na rozwiązanie równania różnicowego, jak i dlatego, że wymaga wprowadzania ograniczenia na wielkość strumienia wypływającego. Zależność liniowa daje zadowalające rezultaty i jest często stosowana, na przykład jako narzędzie programowe do modelowania przepływów rzeczowych w Systems Dynamics, np. Forrester Jay W. (1961).

$$y_t = \lambda x_t + \sum_{i=1}^{k-1} \rho(1-\lambda)^i x_{t-i} + \rho(1-\rho)^{k-1} z_{t-k}$$

Przechodząc do granicy przy $k \to \infty$ uzyskujmy model opóźnienia strumienia wypływającego Y względem strumienia zasilającego X:

$$y_t = \lambda x_t + (1-\lambda)\sum_{i=1}^{\infty} \rho(1-\rho)^i x_{t-i}.$$

Nietrudno dostrzec, że

$$\sum_{i=0}^{\infty} w_i = 1,$$

oraz że średnia i wariancja rozkładu opóźnienia strumienia wypływającego Y względem strumienia wpływającego X równają się odpowiednio:

$$m(W) = \frac{1-\lambda}{\rho}, \qquad \sigma^2(W) = \frac{(1-\lambda)(1-\rho+\lambda)}{\rho^2}. \tag{3.22}$$

Przedstawiony powyżej rozkład W jest rozkładem geometrycznym zależnym od współczynników λ i ρ.

Podstawienie drugiego z powyższych równań do pierwszego i uporządkowanie wyrazów prowadzi do następującego równania:

$$z_t = (1-\lambda)x_t + (1-\rho)z_{t-1}.$$

Ponieważ dla każdego k, $k=1, 2, \ldots$;

$$z_{t-k} = z_{t-k-1} + x_{t-k} - y_{t-k} = (1-\lambda)x_{t-k} + (1-\rho)z_{t-k-1}$$

rekurencyjne podstawianie doprowadza do następującej postaci:

$$z_t = (1-\lambda)\sum_{i=0}^{k-1}(1-\rho)^i x_{t-i} + (1-\rho)^k z_{t-k}.$$

Przechodząc do granicy przy $k \to \infty$ uzyskujemy model opóźnienia zasobu w opóźnieniu Z względem strumienia zasilającego X:

$$z_t = (1-\lambda)\sum_{i=0}^{\infty}(1-\rho)^i x_{t-i}$$

(ponieważ $\lim_{k\to\infty}(1-\rho)^k z_{t-k} = 0$)

o dodatnich współczynnikach struktury opóźnienia równych:

$$v_i = (1-\lambda)(1-\rho)^i; i = 0,1,2...;$$

o sumie (mnożnik długookresowy) $a = \sum_{i=0}^{\infty} v_i$

równej
$$a = \frac{1-\lambda}{\rho},$$

ze współczynnikami rozkładu opóźnienia zasobu w opóźnieniu Z względem strumienia zasilającego X równymi:

$$s_i = \rho(1-\rho)^i; i = 0,1,2....$$

i wartościami średnią i wariancją rozkładu S równymi odpowiednio:

$$m(S) = \frac{1-\rho}{\rho}, \qquad \sigma^2(S) = \frac{1-\rho}{\rho^2}. \tag{3.23}$$

Z własności rozkładu S wynika, że jest on również rozkładem geometrycznym i ma wartość średnią rozkładu równą wartości średniej rozkładu W. Rozkład S w tym przykładzie zależy tylko od wartości współczynnika ρ.

Pokazana powyżej zależność między rozkładami W i S nie jest własnością ogólną, lecz szczególną, bowiem dotyczy tylko rozkładu geometrycznego opóźnienia strumienia wypływającego Y względem strumienia wpływającego X i związanego z nim rozkładu opóźnienia zasobu w opóźnieniu Z względem strumienia wpływającego X.

W przypadku modeli opóźnienia w systemach przepływów ze stałymi rozkładami, bez względu na kształt rozkładu W, rozkład S jest rozkładem o współczynnikach monotonicznie malejących w funkcji numeru współczynnika/indeksu (dla każdego i, $i = 0, 1, ...; s_i \geq s_{i+1}$).

W analizowanym przykładzie proste przekształcenia pozwalają na zapisanie zależności zasobu w opóźnieniu Z względem strumienia wpływającego X w następujących równoważnych postaciach:

$$z_t = \sum_{i=0}^{\infty} v_i x_{t-i} = (1-\lambda)\sum_{i=0}^{\infty}(1-\rho)^i x_{t-i} = \frac{1-\lambda}{\rho}\sum_{i=0}^{\infty}\rho(1-\rho)^i x_{t-i} = m(W)\sum_{i=0}^{\infty} w_i x_{t-i}.$$

Model analizowany w Przykładzie 3.1 ma kilka wariantów. W wariancie pierwszym współczynniki ρ i λ mają z założenia wartość zero i model przyjmuje postać (wykorzystanego, m. in. przez Kleina (1950), Tinbergena (1959), Solowa (2000)) modelu opóźnienia rozłożonego przedstawionego w Przykładzie 3. W przypadku, gdy współczynniki $\lambda = 0$ i $\rho > 0$, jak w Przykładzie 4[4] - modele m.in. Kleina (1950), Tinbergena (1959), Solowa (2000). Zerowa wartość współczynnika λ powoduje, że współczynnik w_0 w rozkładzie W ma wartość zero.

III.4.2 Model populacji. Stały rozkład

Wariantem modelu opóźnionych przepływów (3.21) jest model populacji opisujący kształtowanie się liczebności populacji w wieku τ okresów (generacji), $\tau = 0, 1, 2,.., \tau_k$; tj. liczby jednostek, których wiek pod koniec danego okresu jest nie mniejszy od τ i mniejszy od $\tau + 1$ okresów, przy czym parametr τ_k oznacza najwyższy wiek, jaki osiągają jednostki badanej populacji. Ten rodzaj analizy nazywany jest analizą kohortową i ma szerokie zastosowanie w demografii i ubezpieczeniach. Przypadek stałych współczynników i braku

---

[4] Różnica między przedstawionymi w Przykładzie 3 i Przykładzie 4 modelami środków trwałych w istocie polega na sposobie radzenia sobie z nieznajomością rozkładu opóźnienia procesu deprecjacji kapitału. W Przykładzie 3 strumieniem zasilającym są inwestycje netto (których obliczenie wymaga znajomości rozkładu deprecjacji/opóźnienia), natomiast w Przykładzie 4 przyjęte zostało założenie, że opóźnienie to ma rozkład geometryczny. Oba założenia mają charakter bardzo mocny a ich podstawową zaletą jest możliwość uzyskania rozwiązania analitycznego.

migracji oraz stałym strumieniu urodzeń jest w istocie analizą stanu ustalonego, nazywanego w demografii modelem ludności zastojowej, patrz Holzer J. Z., Kędelski M., Paradysz J. (2006), str.[redacted], Okólski M (2004).

Przy założonej stałości współczynników i nieuwzględnieniu migracji zewnętrznych, model generacji, liczebności jednostek w grupie wiekowej τ, lub - innymi słowy - jednostek w wieku należącym do przedziału $[\tau,\ \tau+1)$ przyjmuje następującą postać:

$$\begin{cases} z_t^{(\tau)} = z_{t-1}^{(\tau)} + x_t^{(\tau)} - y_t^{(\tau)} \\ y_t^{(\tau)} = \lambda^{(\tau)} x_t^{(\tau)} + z_{t-1}^{(\tau)} \end{cases} \tag{3.24}$$

gdzie:

$z_t^{(\tau)}$ - zasób jednostek w wieku należącym do przedziału $[\tau,\ \tau+1)$ pod koniec okresu t,

$x_t^{(\tau)}$ - liczba jednostek, które w okresie t ukończyły wiek τ okresów,

$y_t^{(\tau)}$ - liczba jednostek, które w okresie t opuściły zasób jednostek w wieku $[\tau, \tau+1)$,

$\lambda^{(\tau)}$ – stopa zgonów; współczynnik określający, jaka część strumienia wpływającego do zasobu jednostek w wieku należącym do przedziału $[\tau,\ \tau+1)$ w okresie t, opuszcza ten zasób w tym samym okresie w następstwie zgonów.

Model (3.24), będący szczególnym przypadkiem modelu (3.21) dla $\rho=1$, jest stosowany w demografii, patrz np. Holzer J. Z. (1994), Okólski M (2004), w której przyjęty został inny system oznaczeń. Dla ujednolicenie użyta konwencja zapisu została dostosowana do przyjętego w niniejszej pracy ujęcia przedmiotu.

Istotnym uzupełnieniem układu równań (3.21) są zależności, które opisują związki między rozważanym elementem (jednostki w wieku należącym do przedziału $[\tau,\ \tau+1)$) a elementem poprzedzającym (jednostki w wieku należącym do przedziału $[\tau-1,\ \tau)$) oraz następnym (jednostki w wieku należącym do przedziału $[\tau+1,\ \tau+2)$) .

W modelu (3.24) zasób tworzą jednostki należące do tego samego przedziału wiekowego. Strumień X zasilający zasób jednostek w wieku z przedziału $[\tau, \tau+1)$ to jednostki, które w okresie t ukończyły wiek τ okresów, a więc przeszły z zasobu jednostek w wieku z przedziału $[\tau-1, \tau)$. (W przypadku, gdy $\tau = 0$, mamy do czynienia z jednostkami należącymi do najmłodszej grupy wiekowej, w demografii zwanymi niemowlętami).

Strumień Y wyczerpujący zasób jednostek w wieku z przedziału $[\tau, \tau+1)$ tworzą te jednostki, które na początku okresu t znajdowały się w zasobie jednostek w przedziale wiekowym $[\tau, \tau+1)$, zatem w okresie tym przeżyły i ukończywszy wiek równy $\tau+1$ okresów przeszły do zasobu jednostek starszych z przedziału $[\tau+1, \tau+2)$, jak i te, które zmarły w okresie t nie osiągnąwszy wieku $\tau+1$ okresów.

Zasób jednostek w wieku należącym do przedziału wiekowego $[\tau, \tau+1)$ jest wyczerpywany przez strumień Y o natężeniu $y_t^{(\tau)}$ w następstwie działania dwóch procesów: wymierania/zgonów, o natężeniu $y_t^{'(\tau)}$, oraz starzenia się (przechodzenia do zasobu wyższej grupy wiekowej), o natężeniu $y_t^{''(\tau)}$:

$$y_t^{(\tau)} = y_t^{'(\tau)} + y_t^{''(\tau)} \tag{3.25}$$

Łączna liczba zgonów $y_t^{'(\tau)}$ jednostek z przedziału wiekowego $[\tau, \tau+1)$ stanowi sumę zgonów jednostek, które napłynęły i zmarły w okresie t w ilości $\lambda^{(\tau)} x_t^{(\tau)}$, jak i tych, które znajdowały się w zasobie jednostek z przedziału wiekowego $[\tau, \tau+1)$ na początku okresu t (co oznacza, że osiągnęły wiek τ okresów w okresie t-1) i w ilości $\gamma^{(\tau)} z_{t-1}^{(\tau)}$ zmarły w tym okresie nie osiągając wieku $\tau+1$ okresów:

$$y_t^{'(\tau)} = \lambda^{(\tau)} x_t^{(\tau)} + \gamma^{(\tau)} z_{t-1}^{(\tau)}, \tag{3.26}$$

gdzie współczynnik $\gamma^{(\tau)}$ oznacza stopę wymieralności (w demografii w zastosowaniu do tablic przeżycia/wymieralności współczynnik ten jest nazywany prawdopodobieństwem zgonu) jednostek z przedziału wiekowego $[\tau, \tau+1)$, które należały do tego zasobu na początku okresu t[5] (innymi słowy współczynnik $\gamma^{(\tau)}$ określa, jaka część jednostek, które w okresie $t-1$ osiągnęły wiek τ okresów zmarła w okresie t nie osiągając wieku $\tau+1$ okresów).

Starzenie się powoduje, że wszystkie jednostki, które w ilości $z_{t-1}^{(\tau)}$ były na początku okresu t w wieku należącym do przedziału $[\tau, \tau+1)$ opuszczają ten zasób w czasie o długości dokładnie jednego okresu; jedna część jednostek w ilości $\gamma^{(\tau)}z_{t-1}^{(\tau)}$, jak wspomniano wyżej, opuszcza w okresie t zasób ten na skutek wymierania, wzór (3.26), a część druga - skupiająca jednostki, które przeżyły i w ilości $y_t^{''(\tau)}$ osiągnęły wiek $\tau+1$ okresów opuszcza zasób jednostek z przedziału wiekowego $[\tau, \tau+1)$:

$$x_t^{(\tau+1)} = y_t^{''(\tau)} = (1-\gamma^{(\tau)})z_{t-1}^{(\tau)}, \qquad \tau=0, 1, 2, \ldots; \quad (3.27)$$

lub:

$$x_t^{(\tau+1)} = y_t^{''(\tau)} = (1-\gamma^{(\tau)})(1-\lambda^{(\tau)})x_{t-1}^{(\tau)}, \qquad \tau=0, 1, 2, \ldots; \quad (3.28)$$

ponieważ:

$$z_t^{(\tau)} = (1-\lambda^{(\tau)})x_t^{(\tau)} \qquad \tau=0, 1, 2, \ldots; \quad (3.29)$$

na podstawie tego, że część jednostek $\lambda^{(\tau)}x_t^{(\tau)}$, które w okresie t zasiliły zasób jednostek w wieku z przedziału $[\tau, \tau+1)$ wymiera w tym samym okresie t nie dożywając wieku $\tau+1$ okresów.

---

[5] Założenie o niejednakowych wartościach współczynników $\lambda^{(\tau)}$ i $\gamma^{(\tau)}$ bierze się stąd, że jednostki, które należały do zasobu jednostek z przedziału wiekowego $[\tau, \tau+1)$ na początku okresu są starsze od tych, które zasiliły ten zasób w okresie t. Wartości te mogą różnić się w istotny sposób w następstwie wielu czynników, między innymi sezonowości, dynamiki urodzeń, długości okresu będącego jednostką pomiaru, wartości parametru τ_k i in.

Zależność (3.29) liczby jednostek $x_t^{(\tau+1)}$, które w okresie t powiększyły stan jednostek z przedziału wiekowego $[\tau+1, \tau+2)$, (osiągnęły wiek $\tau+1$ okresów), od liczby jednostek, które w okresie t-1 powiększyły stan jednostek z przedziału wiekowego $[\tau, \tau+1)$, jest modelem opóźnienia prostego o jeden okres. Oznaczając iloczyn $(1-\alpha^{(t)})=(1-\lambda^{(t)})\ (1-\gamma^{(t)})$ wzór (3.28) można zapisać w sposób skrócony:

$$x_t^{(\tau+1)} = y_t^{''(\tau)} = (1-a^{(\tau)})x_{t-1}^{(\tau)}, \qquad \tau=0,\ 1,\ 2,\ldots; \quad (3.30)$$

W modelu generacji średnia rozkładu opóźnienia jest na podstawie wzoru (3.22) równa wyrażeniu 1-$\lambda^{(\tau)}$ i ma specyficzną związaną z tym modelem interpretację: jest to czas, jaki średnio przebywają jednostki w zasobie jednostek z przedziału wiekowego $[\tau, \tau+1)$. Wielkość ta jest mniejsza od jedności, ponieważ czas ten jest średnią obejmującą zarówno jednostki, które przeżyły pełny jeden okres oraz te, które w okresie t zmarły.

Powyższy model jest elementem składowym modelu opisującego rozwój populacji, w której jednostki należące do poszczególnych przedziałów wiekowych są opisane przez zależności (3.24)-(3.29).

Określenie związku między generacjami, możliwe dzięki wykorzystaniu zależności (3.27), (3.28) i (3.29), pozwala na prowadzenie analizy kohortowej. Wpierw zbadana zostanie zależność między natężeniem strumienia jednostek, które przeżyły od natężenia strumienia jednostek zasilających zasób poprzedzający.

Na podstawie (3.30) w wyniku rekurencyjnego podstawiania otrzymywane są równoważne wzory:

$$y_t^{''(\tau)} = \prod_{i=0}^{k-1}(1-a^{(\tau-i)})x_{t-k-1}^{(\tau-k)}, \qquad \tau=k,\ k+1,\ k+2,\ldots;$$

lub (3.31)

$$y_{t+k}^{''(\tau+k)} = \prod_{i=0}^{k-1}(1-a^{(\tau+i)})x_t^{(\tau)}, \qquad \tau=0,\ 1,\ 2,\ldots\ ;$$

które pokazują zależność liczby jednostek z przedziału wiekowego $[\tau+\kappa, \tau+\kappa+1)$, które w okresie $t+k$ przekroczyły wiek $\tau+\kappa+1$, od liczby jednostek, które w okresie t osiągnęły wiek τ okresów.

Wzory (3.31) oraz uwzględnienie (3.30) po przekształceniu polegającym na przyjęciu $\tau=0$ pozwalają na sformułowanie wzoru określającego ewolucję liczby jednostek urodzonych w okresie t_0 w kolejnych okresach: $t=t_0+1,\ t_0+2,\ t_0+3, \ldots$:

$$x_t^{(t-t_0+1)} = y_t''^{(t-t_0)} = \prod_{i=0}^{t-t_0-1}(1-a^{(i)})x_{t_0}^{(0)},\ t\text{-}t_0 = 1, 2, 3, \ldots \tag{3.32}$$

Na podstawie wzorów (3.24) i (3.29) zgony w poszczególnych generacjach opisują poniższe wzory:

$$y_t'^{(0)} = \lambda^{(0)}x_t^{(0)} + \gamma^{(0)}(1-\lambda^{(0)})x_{t-1}^{(0)}$$

$$y_t'^{(1)} = \lambda^{(1)}(1-\alpha^{(0)})x_{t-1}^{(0)} + \gamma^{(1)}(1-\alpha^{(0)})(1-\lambda^{(0)})x_{t-2}^{(0)}$$

$$y_t'^{(2)} = \lambda^{(2)}(1-\alpha^{(0)})(1-\alpha^{(1)})x_{t-2}^{(0)} + \gamma^{(2)}(1-\alpha^{(0)})(1-\alpha^{(1)})(1-\lambda^{(2)})x_{t-3}^{(0)}$$

....

$$y_t'^{(\tau_k)} = \lambda^{(\tau_k)}x_{t-2}^{(0)}\prod_{\tau=0}^{\tau_k-1}(1-\alpha^{(\tau)}) + \gamma^{(\tau_k)}(1-\lambda^{(\tau_k)})x_{t-3}^{(0)}\prod_{\tau=0}^{\tau_k-1}(1-\alpha^{(\tau)})$$

Łączna wielkość zgonów y'_t w okresie t, jest równa sumie zgonów we wszystkich generacjach w okresie t; przy wyprowadzeniu poniższego wzoru wykorzystano dostrzeżenie tego, że w sąsiadujących równaniach występują wyrażenia zawierające tę samą zmienną $x_{t-\tau}^{(0)}$:

$$y'_t = y_t'^{(0)} + y_t'^{(1)} + y_t'^{(2)} + \ldots y_t'^{(\tau_k)} = \sum_{\tau=0}^{\tau_k} y_t'^{(\tau)}$$

$$y'_t = \lambda^{(0)}x_t^{(0)} + \sum_{\tau=1}^{\tau_k}\left(\lambda^{(\tau)} + \frac{\gamma^{(\tau-1)}}{1-\gamma^{(\tau-1)}}\right)\prod_{i=0}^{\tau_k-1}(1-\alpha^{(i)})x_{t-\tau}^{(0)} \tag{3.33}$$

Wielkość zgonów jest, jak to pokazuje wzór (3.33), modelem skończonego opóźnienia rozłożonego z współczynnikami struktury opóźnienia opisanymi za pomocą następujących wzorów [6]:

$$v_0=\lambda^{(0)},\ v_\tau=\left(\lambda^{(\tau)}+\frac{\gamma^{(\tau-1)}}{1-\gamma^{(\tau-1)}}\right)\prod_{i=0}^{\tau_k-1}(1-\alpha^{(i)}),\ \tau=1,2,\ldots; \quad (3.34)$$

średnią długością trwania życia oszacowywaną za pomocą wartości średniej unormowanej struktury opóźnienia (3.33):

$$\frac{\sum_{\tau=0}^{\tau_k}\tau\, v_\tau}{\sum_{\tau=0}^{\tau_k} v_\tau}. \quad (3.35)$$

dla której ponadto oblicza się przeciętne dalsze trwanie życia jednostek w wieku należącym do przedziału $[\tau_0,\ \tau_0+1]$:

$$\frac{\sum_{\tau=\tau_0}^{\tau_k}(\tau-\tau_0)\, v_\tau}{\sum_{\tau=\tau_0}^{\tau_k} v_\tau}. \quad (3.36)$$

Wartość wyrażenia (3.35) będąc wartością średnią rozkładu opóźnienia mówi o przeciętnej długości trwania życia jednostki w populacji o ustalonych stałych wartościach współczynników $\lambda^{(\tau)}$, $\gamma^{(\tau)}$, $\tau = 0,\ 1,\ 2,..$; wielkości tej nie należy utożsamiać z przeciętnym wiekiem jednostek, które w danym okresie umarły, ponieważ wielkość tę określa średnia rozkładu wynikowego:

[6] Współczynniki we wzorze (3.34) są w istocie współczynnikami rozkładu opóźnienia, na co wskazuje wiele przesłanek, jednak bez podania formalnego dowodu współczynniki te interpretowane są roboczo jako współczynniki struktury opóźnienia.

$$\frac{\sum_{\tau=0}^{\tau_k} \tau\, v_\tau x_{t-\tau}^{(0)}}{\sum_{\tau=0}^{\tau_k} v_\tau x_{t-\tau}^{(0)}}, \tag{3.37}$$

której wartość zależy, jak to pokazano w Rozdziale I, od wartości średniej rozkładu opóźnienia (w tym wypadku (3.36), oraz od dynamiki zmiennej niezależnej[7] (w tym wypadku dynamiki urodzeń w kolejnych latach: $x_t^{(0)}$, $x_{t-1}^{(0)}$, $x_{t-2}^{(0)}$,..).

III.4.3 Model kredytu. Stały rozkład

Makroekonomiczny model kredytu opisuje proces kształtowania się zadłużenia z tytułu kredytu i spłaty kredytu jako funkcji preferencji terminowych kredytobiorców i rozkładu spłat, został zaproponowany w pracy Gadomski J.(2009).

Model został oparty na następujących założeniach. Kredytobiorcy zaciągają kredyty z różnymi okresami spłat. W okresie t w systemie bankowym udzielone są kredyty w wysokości x_t o następującej stałej strukturze: część $\alpha^{(0)}$ jest udzielona z okresem spłaty do jednego miesiąca, część $\alpha^{(1)}$ udzielono na jeden miesiąc itd., część $\alpha^{(i_k)}$ udzielono na i_k miesięcy, przy czym przez i_k (liczba naturalna) oznaczono okres spłat wyrażony liczbą miesięcy. Zbiór współczynników $\alpha^{(i)}$, $i = 0, 1,.., i_k$, określa rozkład terminowy/ strukturę strumienia udzielonych w okresie t kredytów. Struktura strumienia udzielonych kredytów jest kształtowana przez preferencje kredytobiorców, które zależą od względnej wielkości zadania inwestycyjnego w relacji do oczekiwanych zysków kredytobiorcy[8]. Przy ustalonym schemacie spłat kredytów struktura zadłużenia z tytułu kredytów zależy od dynamiki kredytu i rozkładu terminowego strumienia kredytu.

---

[7] Wzrost liczby urodzeń powoduje spadek, a spadek liczby urodzeń powoduje wzrost wartości średniej rozkładu wynikowego.

[8] Model nie opisuje kształtowania się dochodów i kosztów odsetkowych.

Zatem:

$$x_t = \sum_{i=0}^{i_k} x_t^{(i)} := \sum_{i=0}^{i_k} \alpha^{(i)} x_t; \quad \sum_{i=0}^{i_k} \alpha^{(i)} = 1, \tag{3.38}$$

gdzie x_t^i, $i=0,..,i_k$; oznacza kredyt udzielony w miesiącu t z okresem spłaty i miesięcy.

Przy założeniu doskonałej szczelności systemu kredytowego, tzn., że wszystkie kredyty są spłacane w całości i w terminie, strumienie spłat kredytów o poszczególnych terminach opisane są w następujący sposób:

- spłata kredytów o terminie poniżej miesiąca $y_t^{(0)}$ w miesiącu t,

$$y_t^{(0)} = \alpha^{(0)} \left[\alpha'^{(0)} x_t + \left(1 - \alpha'^{(0)}\right) x_{t-1} \right] = \alpha'^{(0)} x_t^{(0)} + \left(1 - \alpha'^{(0)}\right) x_{t-1}^{(0)} \tag{3.39a}$$

- spłaty kredytów $y_t^{(i)}$ z terminem i-miesięcznym, $i = 1,..,i_k$, w miesiącu t;

$$y_t^{(i)} = \alpha^{(i)} \frac{x_{t-1} + x_{t-2} + .. + x_{t-i}}{i} = \alpha^{(i)} \frac{\sum_{j=1}^{i} x_{t-j}}{i} = \frac{\sum_{j=1}^{i} x_{t-j}^{(i)}}{i}. \tag{3.39b}$$

W przypadku spłaty kredytów o terminie spłaty poniżej jednego miesiąca przyjęto, wzór (3.39a), że część $\alpha^{(0)}\alpha'^{(0)}$ kredytów tej kategorii jest spłacana w tym samym miesiącu, a część $\alpha^{(0)}(1-\alpha'^{(0)})$ w następnym. O wartości współczynnika $\alpha'^{(0)}$, z założenia należącej do przedziału $(0,1)$, decyduje dynamika strumienia udzielonego kredytu całkowitego oraz rozkład długości (liczonej w dniach) tych kredytów (w przypadku rozkładu równomiernego i w stanie ustalonym wielkość ta powinna przyjmować w przybliżeniu wartość $\alpha'^{(0)}=1/2$).

W przypadku spłaty kredytów o terminie spłaty powyżej jednego miesiąca przyjęto, wzór (3.39b), że okres spłat jest wyrażany za pomocą liczb całkowitych, oraz że spłaty są równomierne i rozpoczynają się w pierwszym miesiącu następującym po miesiącu, w którym został udzielony kredyt.

Z zależności (3.39a) i (3.39b) wynika, że w stanie ustalonym, gdy zmienna niezależna przyjmuje stałą wartość $x^* = x_t, x_{t-1},..$; spłaty kredytów w poszczególnych terminach $y_t^{(i)}$ są równe kredytom udzielonym z tymi terminami spłat $y_t^{(i)} = x_t^{(i)} = \alpha^{(i)} x_t = \alpha^{(i)} x^*$.

Strumień łącznych spłat kredytów w miesiącu t jest sumą spłat kredytów o różnych terminach spłat:

$$y_t = y_t^{(0)} + y_t^{(1)} + \ldots + y_t^{(i_k)} \qquad (3.40)$$

Powyższe założenia wskazują na to, że strumień spłat y jest opóźnieniem utworzonym przez sumowanie i_k+1 opóźnień, przez co zastosowanie znajdują własności przedstawione w Rozdziale I.

Struktura terminowa strumienia spłat wyrażająca się wartościami udziałów spłat poszczególnych terminów w całości spłat w danym miesiącu jest definiowana w następujący sposób:

$$u^{(i)} = \frac{y_t^{(i)}}{y_t} = \frac{y_t^{(i)}}{\sum_{j=0}^{i_k} y_t^{(j)}},\ i = 1,..,i_k. \qquad (3.41)$$

Ze wzorów (3.40) i (3.41) wynika, że w stanie ustalonym struktura terminowa strumienia spłat jest identyczna ze strukturą terminową strumienia udzielonego kredytu. Na podstawie rozważań przedstawionych w Rozdziale I wiadomo, że rozkład wynikowy opóźnienia ulega zmianie wraz ze zmianami zmiennej niezależnej X; wzrost tej zmiennej odkształca rozkład wynikowy opóźnienia U w ten sposób, że wartości współczynników rozkładu wynikowego o niższych indeksach wzrastają, a wartości współczynników o wyższych indeksach maleją, w czego rezultacie wartość średnia rozkładu wynikowego opóźnienia zmniejsza się.

Ze wzorów (3.39) i (3.40) wynika ponadto, że strumienie spłat kredytów poszczególnych kategorii to zależności będące modelami opóźnienia rozłożonego wielkości łącznego kredytu udzielonego we wcześniejszych miesiącach o rozkładach: skończonych i równomiernych $W^{(i)}$, $i=1,..i_k$; (z wyjątkiem rozkładu $W^{(0)}$ spłaty kredytów z okresem spłaty poniżej miesiąca), o wartościach średnich kształtujących się odpowiednio[9]:

[9] Z uwagi na proste przekształcenia, wzór (3.41) podany jest bez wyprowadzenia.

$$m(W^{(i)}) = \begin{cases} 1-\alpha'^{(0)} & , \quad i=0; \\ \dfrac{\sum_{j=1}^{i} j}{i} = \dfrac{i+1}{2}, & i \geq 1. \end{cases} \tag{3.42}$$

Z zależności (3.42) wynika bezpośrednio, że wartości średnie rozkładów $M(W^{(i)})$ opóźnienia odpowiadające poszczególnym terminom kredytu są rosnącą funkcją długości i, $i=0,1,..,i_k$; okresu spłat:

$$M(W^{(0)}) \leq M(W^{(1)}) \leq ... \leq M(W^{(0)}) \leq M(W^{(i_k)})$$

Strumień spłat kredytu y_t jest sumą strumieni spłat kredytów $y_t^{(i)}$, udzielanych na wszystkie stosowane okresy spłat $i= 0, 1,..,i_k$:

$$\begin{aligned} y_t = \sum_{i=0}^{i_k} y_t^{(i)} = \alpha^{(0)}\alpha'^{(0)} x_t + \alpha^{(0)}(1-\alpha'^{(0)})x_{t-1} & \quad + \\ + \quad \alpha^{(1)} \frac{x_{t-1}}{1} & \quad + \\ + \quad \alpha^{(2)} \frac{x_{t-1}+x_{t-2}}{2} & \quad + \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \quad . \\ + \quad \alpha^{(i)} \frac{x_{t-1}+x_{t-2}+..+x_{t-i}}{i} & \quad + \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ + \quad \alpha^{(i_k)} \frac{x_{t-1}+x_{t-2}+..+x_{t-i_k}}{i_k} & \end{aligned}$$

Uporządkowanie wyrażeń we powyższym wzorze pozwala na zapisanie go w innej formie:

$$
\begin{aligned}
y_t = \sum_{i=0}^{i_k} y_t^{(i)} = \alpha^{(0)}\alpha'^{(0)} x_t + \alpha^{(0)}(1-\alpha'^{(0)})x_{t-1} + & \\
+ x_{t-1}\Big(\frac{\alpha^{(1)}}{1} + \frac{\alpha^{(2)}}{2} + \frac{\alpha^{(3)}}{3} + \ldots + \frac{\alpha^{(i_k)}}{i_k}\Big) + & \\
+ x_{t-2}\Big(\qquad + \frac{\alpha^{(2)}}{2} + \frac{\alpha^{(3)}}{3} + \ldots + \frac{\alpha^{(i_k)}}{i_k}\Big) + & \\
+ x_{t-3}\Big(\qquad\qquad + \frac{\alpha^{(3)}}{3} + \ldots + \frac{\alpha^{(i_k)}}{i_k}\Big) + & \qquad (3.43) \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\
+ x_{t-i}\Big(\qquad\qquad + \frac{\alpha^{(i)}}{i} + \ldots + \frac{\alpha^{(i_k)}}{i_k}\Big) + & \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\
+ x_{t-i_k}\Big(\qquad\qquad\qquad + \frac{\alpha^{(i_k)}}{i_k}\Big), &
\end{aligned}
$$

którą można zapisać w postaci zależności:

$$y_t = \left[\alpha^{(0)}\alpha'^{(0)}\right]x_t + \left[\alpha^{(0)}(1-\alpha'^{(0)}) + \sum_{j=1}^{i_k}\frac{\alpha^{(j)}}{j}\right]x_{t-1} + \left[\sum_{j=2}^{i_k}\frac{\alpha^{(j)}}{j}\right]x_{t-2} + \ldots + \left[\frac{\alpha^{(i_k)}}{i_k}\right]x_{t-i_k}, \tag{3.44}$$

która jest modelem skończonego opóźnienia rozłożonego z rozkładem o współczynnikach:

$$w_0 = \alpha^{(0)}\alpha'^{(0)}, w_1 = \alpha^{(0)}(1-\alpha'^{(0)}) + \sum_{j=1}^{i_k}\frac{\alpha^{(j)}}{j}; \quad w_i = \sum_{j=i}^{i_k}\frac{\alpha^{(j)}}{j}, i = 2,3,..,i_k. \tag{3.45}$$

Współczynniki (3.44) tworzą rozkład opóźnienia, ponieważ zależność (3.43) powstała w wyniku zsumowania zależności (3.39) oraz i_k zależności (3.40), które są modelami znormalizowanego opóźnienia rozłożonego, w których wszystkie mnożniki długookresowe przyjmują wartość 1. Jak pokazano w Rozdziale I, suma i/lub złożenie modeli opóźnienia rozłożonego jest również modelem opóźnienia rozłożonego.

Rozkład opóźnienia dany współczynnikami opisanymi za pomocą wzoru (3.44) ma średnią wartość opóźnienia $m(W)$ równą:

$$m(W) = \alpha^{(0)}(1-\alpha'^{(0)}) + \sum_{i=1}^{i_k}\alpha^{(i)}\frac{(i+1)}{2} = \sum_{i=0}^{i_k}\alpha^{(i)}m(W^{(i)}). \tag{3.45}$$

Wzór (3.45) jest otrzymany przez podstawienie do wzoru definicyjnego (1.12) współczynników określonych przez (3.43):

$$
\begin{aligned}
m(W)=\sum_{i=1}^{i_k} i\,w_i = 1*\alpha^{(0)}(1-\alpha'^{(0)}) + 1*&\left(\frac{\alpha^{(1)}}{1}+\frac{\alpha^{(2)}}{2}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{\alpha^{(i_k)}}{i_k}\right)+\\
+2*&\left(\qquad +\frac{\alpha^{(2)}}{2}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{\alpha^{(i_k)}}{i_k}\right)+\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
+i*&\left(\qquad\qquad +\frac{\alpha^{(i)}}{i}+\ldots\ldots+\frac{\alpha^{(i_k)}}{i_k}\right)+\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
+i_k*&\left(\qquad\qquad\qquad\qquad \frac{\alpha^{(i_k)}}{i_k}\right)
\end{aligned}
$$

Przez pogrupowanie w powyższej zależności wyrazów zawierających te same $\alpha^{(i)}$, $i=1,\ldots,i_k$; uzyskujemy:

$$
\begin{aligned}
m(W)=\sum_{i=1}^{i_k} i\,w_i = 1*\alpha^{(0)}(1-\alpha'^{(0)}) &+ \left(1*\frac{\alpha^{(1)}}{1}\right)+\\
&+\left(1*\frac{\alpha^{(2)}}{2}+2*\frac{\alpha^{(2)}}{2}\right)+\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+\left(1*\frac{\alpha^{(i)}}{i}+2*\frac{\alpha^{(i)}}{i}+\ldots+i*\frac{\alpha^{(i)}}{i}\right)+\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+\left(1*\frac{\alpha^{(i_k)}}{i_k}+2*\frac{\alpha^{(i_k)}}{i_k}+\ldots\ldots+i_k*\frac{\alpha^{(i_k)}}{i_k}\right)=\\
=\alpha^{(0)}(1-\alpha'^{(0)})+\sum_{i=1}^{i_k}\frac{\alpha^{(i)}}{i}\sum_{j=1}^{i} j &= \alpha^{(0)}(1-\alpha'^{(0)})+\sum_{i=1}^{i_k}\alpha^{(i)}\frac{(i+1)}{2}\\
=\sum_{i=0}^{i_k}\alpha^{(i)} m(W^{(i)}).&
\end{aligned}
$$

Zależność (3.40) wskazuje na istotną własność średniego opóźnienia w tym modelu: średnie opóźnienie całości jest ważoną średnią opóźnienia w poszczególnych terminach, przy czym wagami są współczynniki struktury terminowej kredytu.

Ponieważ całość zadłużenia z tytułu kredytu z_t jest sumą zadłużenia we wszystkich terminach udzielonego kredytu, wielkość tę opisuje następująca zależność:

$$z_t = z_t^{(0)} + z_t^{(1)} + \ldots + z_t^{(i_k)}, \qquad (3.46)$$

która – przy uwzględnieniu wzoru (3.11) – przyjmuje postać[10]:

$$z_t = (1 - w_0)x_t + (1 - w_0 - w_1)x_{t-1} + \ldots + (1 - \sum_{i=0}^{i_k - 1} w_i)x_{t-(i_k-1)}, \qquad (3.47)$$

gdzie współczynniki w_i, $i = 0, 1, \ldots, i_k$; są opisane za pomocą wzoru (3.45).

Celowe jest dostrzeżenie różnic między wzorami (3.10) i (3.46). O ile w pierwszym wielkości $z_{t\,i}$ przedstawiają, jaka część strumienia X, który wpłynął w okresie $t-i$ do zasobu w opóźnieniu pozostaje, zalega w nim w okresie t, to w drugim ze wzorów wielkości $z_t^{(i)}$ reprezentują wyróżnione, ze względu na określoną cechę, części zasobu całkowitego w opóźnieniu; w rozważanym modelu kredytu cechą tą jest termin kredytu a w analizowanym wcześniej modelu demograficznym cechą tą jest przedział wiekowy. W związku z tym, o ile najczęściej $z_t^{(i)} \neq z_{t\,i}$, $i = 0, 1, \ldots, i_k$; to zawsze zachodzi relacja:

$$z_t = z_t^{(0)} + z_t^{(1)} + \ldots + z_t^{(i_k)} = z_{t\,0} + z_{t\,1} + \ldots + z_{t\,i_k},$$

pokazująca, że struktury czasowe obu tych kategorii zasobów są z zasady różne (jednak nie można wykluczyć przypadków, gdy są równe dla poszczególnych indeksów). Wyrażenia:

$$z_{t\,i} = (1 - \sum_{j=0}^{i} w_i)x_{t-i},\ i=0,\ 1,..,i_k;$$

we wzorze (3.47) są interpretowane, zgodnie z zależnością (3.17), jako części strumieni X, które wpłynęły w okresach $t-i$, $i=0, 1,..,i_k$; i zalegają w nim tworząc zasób w ilości $z_{t\,i}$ pod koniec okresu t.

---

[10] W tym przypadku mamy do czynienia z modelem skończonym. Na uwagę zasługuje górna granica sumowania, której wartość jest następstwem tego, że dla wszystkich $i_g \geq i_k$ zachodzi równość $\sum_{i=0}^{i_k} w_i = \sum_{i=0}^{i_g} w_i = \sum_{i=0}^{\infty} w_i = 1$.

Wielkość zadłużenia $z_t^{(i)}$ z tytułu kredytów udzielonych na *i* miesięcy pod koniec miesiąca *t* wynosi, gdy $i=0$:

$$z_t^{(0)} = (1-\alpha'^{(0)})x_t^{(0)} = (1-\alpha'^{(0)})\alpha^{(0)}x_t, \qquad (3.48a)$$

(ponieważ część $\alpha'^{(0)}\alpha^{(0)}x_t$ tego kredytu jest spłacana w tym samym miesiącu) oraz dla kredytów udzielonych na *i* miesięcy, $i = 1, \ldots, i_k$:

$$z_t^{(i)} = \frac{i}{i}x_t^{(i)} + \frac{i-1}{i}x_{t-1}^{(i)} + \ldots + \frac{1}{i}x_{t-i+1}^{(i)} = \alpha^{(i)}\sum_{j=0}^{i-1}\left(\frac{i-j}{i}\right)x_{t-j}. \qquad (3.48b)$$

W modelu kredytu współistnieją dwie struktury zasobów w opóźnieniu: pierwsza (związana z rozkładem *S* i rozkładem wynikowym *Q*) odzwierciedla rozkład wieku niespłaconego kredytu, oraz druga, związana ze strukturą terminową w stanie ustalonym, i wynikową terminową strukturą udzielonych kredytów. Analogicznie, jak to miało miejsce w przypadku rozkładów *S* i *Q*, można dla tych dwóch ostatnich struktur zbudować rozkłady, odpowiednio *S'* i Q'_t:

$$s'^{(i)} = \begin{cases} \dfrac{(1-\alpha'^{(0)})\alpha^{(0)}}{(1-\alpha'^{(0)})\alpha^{(0)} + \sum\limits_{i=1}^{i_k}\alpha^{(i)}\sum\limits_{j=0}^{i-1}\left(\dfrac{i-j}{i}\right)}, \text{gdy } i=0; \\[2ex] \dfrac{\alpha^{(i)}\sum\limits_{j=0}^{i-1}\left(\dfrac{i-j}{i}\right)}{(1-\alpha'^{(0)})\alpha^{(0)} + \sum\limits_{i=1}^{i_k}\alpha^{(i)}\sum\limits_{j=0}^{i-1}\left(\dfrac{i-j}{i}\right)s}, \text{gdy } i=1,2,\ldots \end{cases},$$

$$q_t'^{(i)} = \frac{z_t^{(i)}}{z_t} = \begin{cases} \dfrac{(1-\alpha'^{(0)})\alpha^{(0)}x_t}{(1-\alpha'^{(0)})\alpha^{(0)}x_t + \sum\limits_{i=1}^{i_k}\alpha^{(i)}\sum\limits_{j=0}^{i-1}\left(\dfrac{i-j}{i}\right)x_{t-j}}, \text{gdy } i=0; \\[2ex] \dfrac{\alpha^{(i)}\sum\limits_{j=0}^{i-1}\left(\dfrac{i-j}{i}\right)x_{t-j}}{(1-\alpha'^{(0)})\alpha^{(0)}x_t + \sum\limits_{i=1}^{i_k}\alpha^{(i)}\sum\limits_{j=0}^{i-1}\left(\dfrac{i-j}{i}\right)x_{t-j}}, \text{gdy } i>0 \end{cases}.$$

Podsumowując: struktura zadłużenia z tytułu kredytu ze względu na wiek jak i na termin udzielonego kredytu zależy w omawianym modelu od dynamiki strumienia kredytu w miesiącach t, $t\text{-}1,..,t\text{-}i_k$ oraz od kształtowania się współczynników rozkładu/struktury preferencji $\alpha^{(i)}$, $i=0,\ 1,..,i_k$. Z rozważań przedstawionych w Rozdziale I wynika, że wzrost strumienia zmiennej niezależnej X zwiększa wpływ ostatnich wartości tej zmiennej oraz zmniejsza wpływ wcześniejszych wartości tej zmiennej a tym samym wpływa na rozkład wynikowy opóźnienia zmniejszając wartość średnią rozkładu wynikowego opóźnienia.

OZNACZENIA

x_t – wartość zmiennej niezależnej w okresie t,

y_t – wartość zmiennej zależnej w okresie t

$v_{t\,i}$ – współczynniki opóźnienia spełniające warunki: $v_{t\,i} \geq 0,\ i = 0,\ 1,\ \dots,\infty;$

e_t – zmienna losowa, o wartości oczekiwanej równej zero i skończonej wariancji.

V_t, $V_t = \{ v_{t\,i},\ i = 0,\ 1,\ 2,\dots \}$ zbiór współczynników opóźnienia, struktura opóźnienia.

$a_t = \sum_{i=0}^{\infty} v_{t\,i}$ - mnożnik długookresowy opóźnienia, mnożnik skumulowany,

$m(W_t)$ - wartość średnia rozkładu opóźnienia zależności zmiennej Y od zmiennej X

$\sigma^2(W_t)$ - wariancja rozkładu opóźnienia zależności zmiennej Y od zmiennej X

$\eta(W_t)$ - mediana rozkładu opóźnienia zależności zmiennej Y od zmiennej X

U_t - rozkład wynikowy opóźnienia zależności zmiennej Y od zmiennej X

$m(U_t)$ - wartość średnia rozkładu wynikowego zależności zmiennej Y od zmiennej X

$\sigma^2(U_t)$ - wariancja rozkładu wynikowego zależności zmiennej Y od zmiennej X

$\eta(U_t)$ - mediana rozkładu wynikowego opóźnienia zależności zmiennej Y od zmiennej X

LITERATURA

Amman Hans M., Kendrick David A., Rust John (red.): *Handbook of Computational Economics,* Vol.1, North-Holland, Elsevier, Amsterdam, Lousanne, New York, 1996. Str42.

Gadomski J., Nahorski Z. (2006), EMISSION LIMITS AND TECHNOLOGY CHANGE IN A SMALL ECONOMY, w: *MODELING ECONOMIES IN TRANSITION*, AMFET, Łódź.

Klein Lawrence R. (1950): *Economic Fluctuations in the United States*, 1921-41, Cowles Commission Monograph No. 11, John Wiley&Sions, Inc., New York.

Klein, Lawrence R., Welfe Władysław: *Wykłady z ekonometrii*, PWE 1982. Str. Str. 25 i 26

Morishima M., Murata Y., Nosse T., Saito M. (1972): A Dynamic analysis of the American economy, 1902-1952, w: *The Working of Econometric Models*, Cambridge University Press, New York.

Gadomski J., Woroniecka I. et al.: *A DYNAMIC MODEL OF POLISH ECONOMY IN TRANSITION*, Polish Operational and Systems Research Society, Warszawa 1998. Str 130.

Gadomski Jan, Klukowski Leszek: Właściwości opóźnień rozłożonych o parametrach zmiennych w czasie, Ekonomia, Wydawnictwa Uniwersytetu Warszawskiego, Warszawa, 1988, ISSN 0137-3056, zeszyt 52.

Gadomski Jan (2009): Dynamics of Loans in the Polish Banking System, CONTROL AND CYBERNETICS, Wolumin: 38 Numer: 3 Strony: 893 – 911.

Holzer Jerzy Z., Kędelski Mieczysław, Paradysz Jan: *Demografia*. Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Poznaniu, 2006.

Holzer Jerzy Z. (1994), *Demografia*, wyd. IV poprawione, PWE.

Okólski Marek: *Demografia. Podstawowe pojęcia, procesy i teorie w encyklopedycznym zarysie*. Wydawnictwo Naukowe SCHOLAR, WNE UW, Warszawa 2004.

Welfe Władysław: STYLIZED, EMPIRICAL MODEL OF ECONOMIC GROWTH, Acta universitatis lodziensis, Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego, Łódź 2005.

Forrester Jay W. (1961), *Industrial dynamics*. Cambridge, Mass., M.I.T. Press.

Forrester Jay W., Legasto Augusto A., Jr., Lyneis James M. (red) (1980): *System dynamics*, Amsterdam; New York, Elsevier/North-Holland.