272/2005

Raport Badawczy
Research Report

RB/32/2005

Miary opóźnienia w modelach opóźnienia rozłożonego

J. Gadomski

Instytut Badań Systemowych
Polska Akademia Nauk

Systems Research Institute
Polish Academy of Sciences

POLSKA AKADEMIA NAUK

Instytut Badań Systemowych

ul. Newelska 6

01-447 Warszawa

tel.: (+48) (22) 8373578

fax: (+48) (22) 8372772

Kierownik Pracowni zgłaszający pracę:
Prof. dr inż. Roman Kulikowski

Warszawa 2005

Jan Gadomski

Miary opóźnienia w modelach opóźnienia rozłożonego.

Streszczenie

W pracy podjęto problem określenia tzw. średniego opóźnienia w szeroko stosowanych w ekonomii modelach opóźnienia rozłożonego. Przyjęta w literaturze przedmiotu i najczęściej stosowana miarą opóźnienia jest średnia rozkładu opóźnienia. Jednakże stosowanie tej miary jest w niektórych przypadkach wykłuczone (na przykład, gdy rozkład opóźnienia nie istnieje) lub wtedy, gdy zmienna niezależna charakteryzuje się wysoka dynamiką. W pracy zaproponowana miarę opóźnienia, nazwaną średnim opóźnieniem wynikowych, która w ocenie opóźnienia uwzględnia działanie nie tylko mechanizmu opóźnienia, ale również wpływ dynamiki zmiennej niezależnej na wartości zmiennej zależnej.

Wstęp

Zjawisko opóźnienia występuje wtedy, gdy reakcja obserwowanego systemu lub jego części na zmianę pewnego czynnika nie następuje w całości natychmiast, lecz jest rozłożona w czasie. Opóźnienia są nieodłączne od związków przyczynowo skutkowych, w których pojawienie się zmian obserwowanego zjawiska jest następstwem równoczesnych lub poprzedzających je zmian wielkości będących przejawem wystąpienia zjawisk będących przyczynami.

Modele opóźnienia stanowią ważny element konstrukcyjny modeli dynamicznych, objaśniających zmiany pewnych zmiennych zależnych za pomocą zmian pewnych innych zmiennych, zwanymi niezależnymi. Modele te są oparte na założeniu, nie zawsze sformułowanym w sposób jawny, że zmienna zależna reprezentuje kategorię, której zmiany są następstwem zmian wartości zmiennych niezależnych reprezentujących kategorie będące przyczynami tych zmian.

Modele opóźnień spotyka się w modelach tworzonych dla potrzeb różnych dziedzin nauki i różnych zastosowań. Na gruncie ekonomii zależnościami klasycznymi mającymi postać modelu opóźnienia są między innymi: wpływ nakładów inwestycyjnych na zasób kapitału, opóźnienie zmiany ceny krajowej importowanego surowca względem zmiany ceny tego surowca na rynkach międzynarodowych, opóźnienie sprzedaży względem zmiany ceny - lub w skali makroekonomicznej - reakcja popytu konsumpcyjnego na zmianę dochodu dyspozycyjnego, czy wreszcie reakcja gospodarki na zmianę stopy procentowej.

Celem modelu opóźnienia jest opisanie zależności zmiennej zależnej od zmiennych niezależnych. W wielu przypadkach celem jest również ustalenie wielkości opóźnienia zmiennej zależnej względem zmiennych niezależnych oraz w jakim stopniu zmiany te są rozłożone, bądź skupione w czasie.

W analizie opóźnień wyodrębnić można dwa nurty badań. Nurt pierwszy, to analiza mechanizmów, które decydują o właściwościach badanego opóźnienia. Nurt drugi, to zagadnienia związane z estymacją parametrów modelu opóźnienia, często niewymagające znajomości mechanizmu opóźnienia. Podział ten, co wymaga podkreślenia, ma charakter głównie porządkujący; w wielu badaniach posługujących się modelami opóźnienia rozłożonego problemy zaliczone do obu nurtów okazywały się ściśle z sobą związane.

W rozwoju badań nad modelami opóźnienia rozłożonego zaangażowanie w rozwiązywanie problemów z obu tych nurtów było nierównomierne. W pierwszym okresie uwaga badaczy była skupiona głównie na konstrukcji i własnościach różnych modeli opóźnienia. Były to przede wszystkim prace: Fishera (1937), Koycka (1954), Solowa (1960), Almon (1965). Równolegle, chociaż z mniejszą intensywnością prowadzone były prace poświęcone drugiej grupie zagadnień.

W okresie następnym, który - jak się wydaje - trwa do chwili obecnej, dominują prace poświęcone zagadnieniom należącym do nurtu drugiego; są to przede wszystkim prace: Grilichesa (1967), Dhrymesa (1981), Maddali (1977), Kleina (1950). Wielką syntezę osiągnięć na polu badania modeli opóźnienia stanowi książka Dhrymesa (1981). Mimo, że od jej pierwszego wydania minęło ponad trzydzieści lat, jest ona wciąż fundamentalnym źródłem wiedzy o modelach opóźnień.

Na rozwój drugiego kierunku badań wpłynęły głównie następujące czynniki: rozpoznano znaczną część podstawowych problemów grupy pierwszej oraz dostrzeżono wagę i złożoność problemów estymacji. Ważnym wydarzeniem było ukazanie się artykułu Jorgensena (1966), w której zaproponowany został tak zwany model wymierny. Model ten z jednej strony charakteryzuje się dużą elastycznością w tym sensie, że zwalnia od rozwiązywania problemów należących do pierwszego nurtu analizy. Z drugiej strony stanowi zarazem, jak się wydaje, przyczynę zjawiska niekorzystnego: niedocenianie wagi problemów należących do nurtu pierwszego.

Niniejsza praca jest poświęcona problematyce pomiaru opóźnienia i z tego względu nawiązuje do pierwszego nurtu badań. Problematyka ta była podjęta, między innymi w Maddala (1977), gdzie badany został wpływ agregacji czasu na średnie opóźnienie. Celem tej pracy jest dyskusja i interpretacja stosowanych mierników opóźnienia oraz zaproponowanie pewnej miary średniego opóźnienia zmian zmiennej zależnej względem zmian zmiennej niezależnej.

Podejmowany problem wiąże się z tym, że konwencjonalnie stosowaną miarą opóźnienia jest średnia rozkładu opóźnienia. Miara ta ma wiele zalet, ma jednak również i zasadniczą wadę – jest statyczna. Oszacowane za jej pomocą średnie opóźnienie zależy wyłącznie od rozkładu opóźnienia, natomiast nie zależy od kształtowania się wartości zmiennej niezależnej. Jest to, jak zostanie wykazane dalej, pewna ułomność tego miernika, która w określonych okolicznościach może prowadzić do poważnych błędów: przeszacowania lub niedoszacowania wielkości średniego opóźnienia.

Praca składa się z następujących części. W Części 1 przedstawiony jest uogólniony model opóźnienia rozłożonego. W tej części wprowadzone zostają również podstawowe pojęcia charakteryzujące rozkład opóźnienia: wartość średnia, mediana i wariancja rozkładu opóźnienia. W Części 2 zaproponowana zostaje kategoria tzw. średniego łącznego opóźnienia oraz przedstawione niektóre jej własności.

W Części 3 zawarte są wnioski końcowe.

1. Model opóźnienia rozłożonego

Model opóźnienia ze stałymi współczynnikami[1] zapisuje się w postaci następującej zależności, na przykład Griliches (1972):

$$y_t = f(x_t, x_{t-1}, x_{t-2},\ldots; v_0, v_1,\ldots; e_t)$$
$$= \sum_{i=0}^{\infty} v_i\, x_{t-i} + e_t\,, \tag{1}$$

gdzie:

x_t – wartość zmiennej niezależnej w okresie t,

y_t – wartość zmiennej zależnej w okresie t

v_i – $i = 0, 1, \ldots, \infty$, współczynniki opóźnienia spełniające warunki: $v_i \geq 0$, $i = 0, 1, \ldots, \infty$;

e_t – zmienna losowa, o wartości oczekiwanej równej zero i skończonej wariancji.

Pomiędzy zmiennymi zależną y i niezależną x powinien zachodzić związek przyczynowo-skutkowy, zatem na wartości zmiennej zależnej nie powinny mieć wpływu wartości zmiennej niezależnej z okresów późniejszych, tj. $t+1$, $t+2$,... Jest to oczywisty powód, dla którego wyrażenie w zależności (1) jest sumowane po indeksach nieujemnych[2].

Model (1) należy odczytywać w następujący sposób. Wpływ wartości zmiennej niezależnej x na wartość zmiennej zależnej y nie musi dokonywać się w pełni natychmiast, lecz albo jest rozłożony w czasie albo następuje z opóźnieniem po upływie określonej liczby okresów. Prawa strona równania (1) ma z reguły postać addytywną lub taką, którą można przekształcić do postaci addytywnej (na przykład model multiplikatywny).

Wartość zmiennej zależnej y w okresie t zależy od:

* wartości zmiennej niezależnej x z tego samego okresu oraz z okresów wcześniejszych
* działania mechanizmu opóźnienia powodującego opóźniony wpływ zmiennej x na zmienną y
* wartości zmiennej losowej e_t.

[1] Modele ze zmiennymi współczynnikami opóźnienia są przedmiotem badań w wielu pracach, patrz: Gadomski(1986), Otto(1986), Pesando(1972) i in.; stanowią uogólnienie modeli ze stałymi współczynnikami. Postawiony w tej pracy problem odnosi się również do tej klasy modeli, wydaje się jednak, że posługiwanie się nimi nie przyczyniło by się do lepszej klarowności przedstawionego wywodu.

[2] Jednakże w szczególnych przypadkach przydatne bywa formalne sumowanie również po indeksach ujemnych, przy założeniu, że dla wszystkich $i < 0$, $v_i = 0$.

Zmienna niezależna x może przyjmować skończone wartości ze zbioru liczb rzeczywistych; w większości przypadków zakłada się, że przyjmuje wartości dodatnie. Suma w równaniu (1) stanowi tak zwaną część deterministyczną modelu opóźnienia.

Zmienna losowa e_t ujmuje wpływ, jaki na zmienną zależną mają czynniki nieuwzględnione w części deterministycznej modelu (1) oraz błędy pomiaru zmiennych x i y. Zmienna ta stanowi tak zwany składnik losowy modelu opóźnienia. O zmiennej losowej e_t najczęściej zakłada się, że jej wartość oczekiwana jest równa zero. Zmienna losowa e_t będzie dla uproszczenia zapisu pomijana wszędzie tam, gdzie nie jest przedmiotem analizy.

Mechanizmem opóźnienia nazywany będzie ogół czynników i okoliczności kształtujących właściwości tego opóźnienia. Właściwości te wyrażają się wartościami współczynników opóźnienia v_i, $i = 0, 1, 2,...$. O współczynnikach tych najczęściej zakłada się, że są nieujemne, $v_i \geq 0$, $i = 0, 1, 2,..$; a ich suma

$$\sum_{i=0}^{\infty} v_i \tag{2}$$

powinna mieć skończoną wartość. Skończona wartość sumy (2) jest tylko postulatem, który - nie będąc warunkiem koniecznym – jest w większości przypadków spełniony. Będzie o tym mowa w dalszej części.

Współczynnik v_0 jest nazywany mnożnikiem krótkookresowym (*short-run multiplier*) lub bezpośrednim, ponieważ wskazuje na siłę oddziaływania zmiennej x_t na zmienną y_t bezpośrednio w tym samym okresie.

Wyrażenie

$$\sum_{i=1}^{\infty} v_i \tag{3}$$

jest nazywane mnożnikiem opóźnienia, mnożnikiem skumulowanym, (*interim multiplier*) ujmującym wpływ, jaki na wartość zmiennej y_t w okresie t wywierają wartości zmiennej x z okresów wcześniejszych, tzn. okresów o numerach: $t-1$, $t-2$, $t-3$,..

Wyrażenie (2) ujmujące całkowity wpływ, jaki na wartość y_t, którą zmienna y przyjmuje w okresie t, wywierają wartości zmiennej niezależnej z okresu t oraz okresów wcześniejszych, tj. x_t, x_{t-1}, x_{t-2},..; jest nazywane mnożnikiem zupełnym lub długookresowym (*total* albo *long-run multiplier*). Wartości współczynników opóźnienia v_i, $i = 0, 1, 2,..$; z równania (1) są wynikiem działania mechanizmu opóźnienia.

Model opóźnienia ze stałymi współczynnikami jest stosowany, gdy:

* znajomość badanego zjawiska jest niewystarczająca do posługiwania się modelem bardziej złożonym (to jest ze zmiennymi współczynnikami opóźnienia)
* istnieją przesłanki pozwalające na przyjęcie założenia, że mechanizm opóźnienia nie ulega zmianie.

Przedstawione wyżej warunki decydują, że w literaturze zdecydowanie dominują modele ze stałymi współczynnikami.

Skończonymi modelami opóźnienia rozłożonego nazywane są modele, w których współczynniki v_i mają tę własność, że wartości wszystkich współczynników o numerach większych od pewnej liczby naturalnej n są równe zero:

$$y_t = \sum_{i=0}^{\infty} v_i\, x_{t-i} + e_t \;=\; \sum_{i=0}^{n} v_i\, x_{t-i} + e_t \;. \tag{4}$$

Różnica pomiędzy modelem nieskończonym (1) a modelem skończonym nie sprowadza się jedynie do zapisu, ale wiąże się również z pytaniem natury ogólnej: jak bardzo historia wpływa na teraźniejszość. Jeśli istnieją przesłanki wskazujące na skończoność horyzontu czasowego, tzn. istnienie pewnej długości okresu powyżej której zanika wpływ zmiennej niezależnej na zmienną zależną, wtedy stosowanie modelu skończonego jest uzasadnione. Jednakże w niektórych przypadkach odpowiedź na postawione pytanie może nie być jednoznaczna i wówczas bezpieczniejsze jest posługiwanie się modelem nieskończonym. Na rzecz tego ostatniego często przemawiają względy informacyjne. Współczynniki opóźnienia w modelach nieskończonych są opisywane za pomocą niedużej liczby parametrów. Jest to istotne w estymacji, ponieważ zwiększenie liczby współczynników zmniejsza liczbę stopni swobody.

Najprostszym przypadkiem modelu opóźnienia jest model:

$$y_t = v_\tau x_{t-\tau} + e_t\,, \qquad \tau = 1, 2, ..; \qquad v_\tau \neq 0, \tag{5}$$

nazywany opóźnieniem prostym, dyskretnym lub zwłoką. Model (5) jest szczególnym przypadkiem modelu (1), w którym tylko współczynnik o numerze τ jest nierówny zero. Jest to model opóźnienia skupionego (nierozłożonego), ponieważ opóźnienie jest w tym przypadku całkowicie skupione tylko w jednym okresie i równe dokładnie τ. Z oczywistych względów przypadek, gdy τ przyjmuje wartość 0 jest nieinteresujący.

Model (5) daje podstawę do interpretowania modelu (1) jako sumy opóźnień prostych tej samej zmiennej niezależnej.

2. Miary opóźnienia

Znajomość współczynników modelu opóźnienia (1) w wielu przypadkach pozwala odpowiedzieć na pytanie, o ile okresów zmienna zależna jest opóźniona względem zmiennej niezależnej. Odpowiedź na to pytanie jest często celem wykorzystania modelu opóźnienia; zawsze przy tym stanowi cenną informację o badanym zjawisku.

Wypracowana w teorii modeli opóźnień metodologia obliczania średniego opóźnienia wykorzystuje, z racji daleko idących analogii, metody i pojęcia stosowane w statystyce matematycznej. Metodologia ta umożliwiła, między innymi, posługiwanie się omawianym dalej pojęciem rozkładu opóźnienia oraz pozwoliła na skuteczne wykorzystywanie funkcji tworzących w analizie opóźnień. Na tej podstawie wartość średnią rozkładu opóźnienia wykorzystano jako miarę średniego opóźnienia.

Gdy suma (2) ma skończoną wartość, zależność (1) można przedstawić w następującej postaci:

$$y_t = a\sum_{i=0}^{\infty} w_i\, x_{t-i} + e_t, \tag{6}$$

gdzie:

a - współczynnik zdefiniowany jako suma współczynników v_i, $i = 0, 1, 2,..$; w zależności (1):

$$a = \sum_{i=0}^{\infty} v_i\ , \tag{7}$$

w_i - współczynniki uzyskane w wyniku znormalizowania współczynników v_i, $i = 0, 1, 2,..$,;

$$w_i = \frac{v_i}{\sum_{i=0}^{\infty} v_i} = \frac{v_i}{a}. \qquad i = 0, 1, .., \infty; \tag{8}$$

Współczynnik a w równaniu (6) - jeśli istnieje, tzn. ma skończoną wartość - jest z definicji równy mnożnikowi długookresowemu modelu opóźnienia.

Współczynniki w_i, $i = 0, 1, 2,..$; wzór (8), spełniają warunki:

$$\sum_{i=0}^{\infty} w_i = 1 \text{ oraz } w_i \geq 0,\ i = 0, 1, 2,... \tag{9}$$

Zbiór współczynników w_i, $i = 0, 1, 2,..$; (jeśli istnieją) tworzy rozkład opóźnienia W pewnej zmiennej losowej z:

$$Pr(z = i) = w_i. \tag{10}$$

Dla rozkładu W definiowane są:

$m(W)$ - wartość średnia rozkładu opóźnienia:

$$m(W) = \sum_{i=0}^{\infty} i w_i\ , \tag{11}$$

$\sigma^2(W)$ - wariancja rozkładu opóźnienia:

$$\sigma^2(W) = \sum_{i=0}^{\infty} w_i [i - m(W)]^2 = \sum_{i=0}^{\infty} i^2 w_i - m^2(W)\ . \tag{12}$$

Wprowadzenie zmiennej x'_t:

$$x'_t = \sum_{i=0}^{\infty} w_i\, x_{t-i} \tag{13}$$

pozwala na zapisanie zależności (1) w następującej postaci:

$$y_t = a\, x'_t \tag{14}$$

Zdefiniowana w równaniu (13) zmienna x'_t jest średnią ważoną wartości zmiennej niezależnej x_{t-i}, $i=0, 1, 2,..$, której wagami są wspólczynniki opóźnienia w_i, $i = 0, 1, 2,...$.

Równanie (14) pozwala na interpretację modelu opóźnienia rozłożonego (1) jako zależności zmiennej zależnej y od średniej ważonej x' przeszłych wartości zmiennej niezależnej x.

Średnia rozkładu opóźnienia $m(W)$ jest przyjętą w literaturze miarą opóźnienia, na przykład Dhrymes (1971), Griliches (1967), Maddala(1977). Należy pamiętać, że o rozkładzie opóźnienia można mówić jedynie wtedy, gdy suma (2) jest zbieżna; warunek ten nie zawsze jest spełniony – będzie o tym mowa dalej.

Inną, rzadko stosowaną miarą opóźnienia jest mediana $\delta(W)$, patrz Griliches(1967).

$$\delta(W) = arg\left\{\frac{1}{2}=\sum_{i\geq\delta} w_i\right\}. \tag{15}$$

Wariancja rozkładu opóźnienia $\sigma^2(W)$ stanowi miarę rozłożenia opóźnienia (przeciwieństwo skupienia), ma własności podobne do wariancji rozkładu prawdopodobieństwa: jest nieujemna oraz przyjmuje wartość zero wyłącznie w przypadku rozkładu jednopunktowego, który w kategoriach teorii opóźnienia rozłożonego odpowiada przypadkowi modelu zwłoki (opóźnienia dyskretnego), równanie (5).

Dla wyjaśnienia, dlaczego średnia rozkładu opóźnienia $m(W)$ jest stosowana jako miara opóźnienia, przydatne jest wprowadzenia pojęcia stanu ustalonego. W celu uproszczenia zapisu zmienna losowa e_t będzie pomijana.

Stan ustalony występuje wtedy, gdy zmienna niezależna przyjmuje stałą wartość x^*, w czego następstwie, na podstawie warunków (9), zmienne x' i y_t przyjmują odpowiednio wartości:

$$x'_t = x^* \text{ oraz } y_t = y^* , \tag{16}$$

gdzie $y^* = a\,x^*$.

Następująca dalej analiza zmierza do określenia czasu, który jest potrzebny do tego, aby model powrócił do stanu ustalonego po jednorazowym zwiększeniu wartości zmiennej niezależnej w okresie $t = 0$ o wartość Δx:

$$x_t = \begin{cases} x^* & ,t<0 \\ x^* + \Delta x & ,t=0. \\ x^* & ,t>0 \end{cases} \tag{17}$$

Jeśli model opóźnienia jest skończony, równanie (4), to stan ustalony zostaje przywrócony w skończonym czasie n okresów. W przypadku modelu nieskończonego stan ustalony jest przywracany w czasie nieskończonym. Z tego powodu przydatniejsza miarą opóźnienia jest przeciętna długość trwania odchyleń od stanu ustalonego

W okresie $t = 0$ zmienna zależna x' przyjmuje wartość:

$x'_0 = w_0\,(x^* + \Delta x\,) + w_1\,x^* + w_2\,x^* + ... = w_0\,\Delta x + x^*$;

w okresie $t = 1$:

$x'_1 = w_0\,x^* + w_1\,(x^* + \Delta x\,) + w_2\,x^* + ... = w_1\,\Delta x + x^*$;

w okresie $t = 2$:

$x'_2 = w_0 x^* + w_1 x^* + w_2 (x^* + \Delta x) + \ldots = w_2 \Delta x + x^*$;

....

w okresie $t = i$:

$x'_i = w_0 x^* + \ldots\ldots\ldots + w_i (x^* + \Delta x) + \ldots = w_i \Delta x + x^*$.

....

itp.

Z powyższych zależności wynika, że powstałe w okresie $t = 0$ odchylenie wartości zmiennej niezależnej od wartości x^* ze stanu ustalonego o wielkość Δx (zakłócenie, zaburzenie stanu ustalonego) zostaje rozłożone w wartościach zmiennej zależnej x' w kolejnych okresach w ten sposób, że w okresie $t = 0$ wartość tej zmiennej odchyla się od wartości x^* o wartość $w_0 \Delta x$, po upływie jednego okresu o wartość $w_1 \Delta x$, po upływie dwóch okresów o wartość $w_2 \Delta x$ itd. Nietrudno zauważyć, że suma tych odchyleń wynosi

$$\sum_{i=0}^{\infty} w_i \Delta x = \Delta x.$$

W tym kontekście wartość współczynnika w_i, $i = 0, 1, 2, \ldots$; określa, jaka część zakłócenia Δx wpływa na wartość zmiennej x' po upływie i okresów od pojawienia się zakłócenia. Średnie opóźnienie jest obliczane jako średnia ważona długość okresu ukazywania się „echa" tego zakłócenia, w której wagami są współczynniki rozkładu opóźnienia:

$$\sum_{i=0}^{\infty} i w_i .$$

Powyższa suma jest tożsama z wartością średnią rozkładu opóźnienia $m(W)$, wzór (11). Zatem wartość średnią rozkładu opóźnienia $m(W)$ można interpretować jako średnią długość okresu, w którym następuje przywrócenie stanu ustalonego po jednorazowym zakłóceniu w ustalonym okresie. Z uwagi na to, że $m(W)$ zależy od współczynników opóźnienia a zarazem nie zależy od wartości zmiennej niezależnej, jest to wielkość charakteryzująca mechanizm opóźnienia.

W przypadku, gdy model opóźnienia jest modelem opóźnienia prostego, wzór (5), zrozumienie i interpretacja $m(W)$ jako miary wielkości opóźnienia jest najprostsze, nietrudno bowiem zauważyć, że w przypadku rozkładu jednopunktowego zawsze zachodzą zależności: $m(W) = \tau$ oraz $\sigma^2(W) = 0$.

Gdy model opóźnienia jest modelem opóźnienia skończonego, wzór (4), i nie jest modelem opóźnienia prostego, wpływ jednorazowego zaburzenia stanu ustalonego ustaje po upływie n okresów – stan ustalony zostaje w pełni przywrócony po n okresach. W tym przypadku zachodzi zawsze relacja: $m(W) < n$.

W przypadku, gdy model opóźnienia jest modelem opóźnienia nieskończonego (1), o czasie trwania wpływu jednorazowego zaburzenia stanu ustalonego można mówić wyłącznie wtedy, gdy suma (2) ma wartość skończona. Gdy warunek ten jest spełniony, wpływ ten nie zanika w okresie skończonym, lecz w dłuższych okresach staje się pomijalnie mały. Wynika to z warunku zbieżności sumy (2):

$$\lim_{i \to \infty} w_i = 0.$$

W przypadku modelu opóźnienia nieskończonego ze zbieżną sumą (2), dla dowolnie małej wielkości η, $\eta > 0$, istnieje skończona wartość indeksu i', $i' = 1, 2, ..;$ taka, że:

$$\sum_{i=0}^{i'} w_i = 1 - \eta.$$

Istotną własnością modelu (1) jest to, na wartość oczekiwaną $E(y_t)$ zmiennej zależnej y_t w okresie t składa się suma iloczynów $v_i x_{t-i}$, $i = 0, 1, 2, ..;$ które reprezentują łączne/wypadkowe działanie dwóch mechanizmów: mechanizmu opóźnienia oraz mechanizmu kształtującego wartość zmiennej niezależnej x. Iloczyn $v_i x_{t-i}$, $i = 0, 1, 2, ..;$ można interpretować jako wkład wartości zmiennej sprzed i okresów w wartość oczekiwaną zmiennej zależnej.

Wyrażenia:

$$u_{t\,i} = \frac{v_i x_{t-i}}{E(y_t)}, \; i = 0, 1, 2, ..; \tag{18}$$

które będą nazywane udziałami lub współczynnikami udziału, można interpretować jako oczekiwane udziały wartości zmiennej niezależnej sprzed i okresów x_{t-i}, $i = 0, 1, 2, ..;$ w wartości zmiennej zależnej y_t z okresu t. Na podstawie przyjętych założeń, współczynniki te - wzór (18) – spełniają warunki:

$$\sum_{i=0}^{\infty} u_{t\,i} = 1 \text{ oraz } u_{t\,i} \geq 0,=, \; i = 0, 1, 2, ..; \tag{19}$$

Ze względu na powyższe własności można powiedzieć, że współczynniki udziału tworzą rozkład U_t pewnej zmiennej losowej z', takiej, że:

$$Pr(z' = i) = u_{t\,i}.$$

Rozklad U_t, nazywany dalej rozkładem wynikowym, charakteryzują podstawowe parametry:

$m(U_t)$ - wartość średnia:

$$m(U_t) = \sum_{i=0}^{\infty} i u_{t\,i}, \tag{20}$$

$\sigma^2(U_t)$ - wariancja:

$$\sigma^2(U_t) = \sum_{i=0}^{\infty} [i - m(U_t)]^2 u_{t\,i} = \sum_{i=0}^{\infty} i^2 u_{t\,i} - [m(U_t)]^2. \tag{21}$$

Udziały $u_{t\,i}$ są ksztaltowane przez dwa mechanizmy: opóźnienia, wyrażający się poprzez wartości współczynników opóźnienia w_i, i = 0, 1, 2,..; oraz mechanizm generujący wartości zmiennej niezależnej: $x_t, x_{t-1}, x_{t-2}, ...$

Wartość średnia rozkładu opóźnienia $m(W)$, wzór (11), jest dobrą miarą opóźnienia, jeśli zmienność zmiennej niezależnej jest ograniczona, a odchylenia od wartości średniej mieszczą się w określonych granicach. Sytuacja taka występuje na przykład wtedy, gdy zmienność zmiennej niezależnej x można przypisać działaniu czynnika losowego ε_t o zerowej wartości oczekiwanej, $E(\varepsilon_t)=0$, a jej wartości mają ustaloną wartość oczekiwaną $E(x_t)=x^*$ i ograniczoną wariancję σ_ε^2:

$$x_t = x^* + \varepsilon_t \, . \tag{22}$$

Przy tak przyjętym założeniu wartość oczekiwana zmiennej zależnej $E(y_t)$ jest równa:

$$E(y_t) = E\left[\sum_{i=0}^{\infty} v_i\,(x^* + \varepsilon_{t-i}) + e_t\right] = x^* \sum_{i=0}^{\infty} v_i + E\left[\sum_{i=0}^{\infty} v_i\,\varepsilon_{t-i}\right] + E[e_t] = a x^* = y^* , \tag{23}$$

ponieważ:

$$E\left[\sum_{i=0}^{\infty} v_i\,\varepsilon_{t-i}\right] = E[e_t] = 0.$$

Gdy spełnione jest założenie (22), wartością oczekiwaną modelu (1) jest stan ustalony, a udziały u_{ti}, $i = 0, 1, 2,..;$ wzór (18), są równe:

$$u_{t\,i} = w_i \, , \; i = 0, 1, 2,...; \tag{24}$$

Jeśli zmienna niezależna spełnia założenie (22), współczynniki udziału $u_{t\,i}$, $i = 0, 1, 2,....;$ są równe współczynnikom rozkładu opóźnienia, wzór (24), co oznacza identyczność rozkładów W i U_t. Ponadto, z uwagi na to, że ich wartości nie zależą od czasu, indeks czasu t we wzorze (24) może być opuszczony .

Jakościowo inna sytuacja ma miejsce, jeśli zmienną niezależną x charakteryzuje stały wzrost (lub spadek). Niech zmienna niezależna x wzrasta ze stałą stopą wzrostu r, $r>0$. Wtedy wartości zmiennej niezależnej można przedstawić za pomocą następującej zależności:

$$x_{t-i} = x_t\,(1+r)^{-i}, \; x_t > 0, \; i = 0, 1, 2,..; \tag{25}$$

a model (1) przyjmuje postać:

$$E(y_t) = \sum_{i=0}^{\infty} v_i\, x_{t-i} = x_t \sum_{i=0}^{\infty} v_i\,(1 + r)^{-i} = a\, x_t \sum_{i=0}^{\infty} w_i\,(1 + r)^{-i} \; . \tag{26}$$

W tym przypadku udziały $u_{t\,i}$, $i = 0, 1, 2,...;$ obliczone na podstawie wzorów (18) i (25), są równe:

$$u_{t\,i} = \frac{v_i\,(1 + r)^{-i}}{\sum_{j=0}^{\infty} v_j\,(1 + r)^{-j}} = \frac{w_i\,(1 + r)^{-i}}{\sum_{j=0}^{\infty} w_j\,(1 + r)^{-j}} \, , \; i = 0, 1, 2,... \tag{27}$$

W szczególnym przypadku wzrostu ze stałą stopą r, udziały opisane za pomocą wzoru (24) nie zależą od czasu. Zachodzi tu podobieństwo z przypadkiem losowych odchyleń od stanu ustalonego, wzór (24); również w tym przypadku indeks czasu t może być pominięty.

Natomiast podstawowa różnica polega na tym, że w przypadku wzrostu zmiennej niezależnej udziały $u_{t\,i}$, $i = 0, 1, 2,...;$ są funkcją współczynników opóźnienia, ich numeru oraz stopy wzrostu zmiennej niezależnej. Gdy $r = 0$, wtedy $u_{t\,i} = w_i$, $i = 0, 1, 2,...;$ zachodzi równość rozkładów W i U_t. Równość tych rozkładów zachodzi również wtedy, gdy rozkład W jest rozkładem jednopunktowym, czyli wtedy, gdy model jest modelem opóźnienia dyskretnego, wzór (5). Wzrost wartości r powoduje narastanie różnic pomiędzy rozkładami W i U_t.

W przypadku stanu ustalonego lub gdy zmienna niezależna zachowuje się zgodnie z założeniem (22), wartość średnia $m(W)$ jest poprawną miarą opóźnienia w modelu (1). W innych przypadkach, gdy zmienna niezależna podlega złożonym zmianom, bardziej adekwatną miarą średniego opóźnienia jest wielkość $m(U_t)$ będąca średnią ważoną długością okresów opóźnienia, których wagami są współczynniki udziału $u_{t\,i}$, $i = 0, 1, 2,...;$

$$\sum_{i=0}^{\infty} i u_{ti} \, .$$

Teza ta zostanie teraz zilustrowana analizą następującego problemu: jak stopa wzrostu r wpływa na wielkość $m(U_t)$.

Zagadnienie to będzie analizowane przy założeniu, że wartość mnożnika długookresowego a jest skończona oraz istnieje średnia wartość $m(W)$ rozkładu W. Poniżej przedstawiony zostanie dowód tego, że przy dodatnich wartościach stopy wzrostu r zachodzi relacja:

$$m(U) \leq m(W). \tag{28}$$

Dowód powyższej tezy jest przeprowadzony wprost przez zróżniczkowanie wielkości $m(U)$ względem stopy wzrostu r:

$$\frac{d\,m(U)}{dr} = \frac{d}{dr}\left[\sum_{i=0}^{\infty} \frac{i w_i (1+r)^{-i}}{\sum_{j=0}^{\infty} w_j (1+r)^{-j}}\right]$$

$$= \frac{\frac{1}{1+r}\sum_{i=0}^{\infty} -i^2 w_i (1+r)^{-i} \sum_{j=0}^{\infty} w_j (1+r)^{-j} - \frac{1}{1+r}\sum_{i=0}^{\infty} -i w_i (1+r)^{-i} \sum_{j=0}^{\infty} j w_j (1+r)^{-j}}{\left[\sum_{j=0}^{\infty} w_j (1+r)^{-j}\right]^2}$$

$$= \frac{1}{1+r} \frac{\sum_{i=0}^{\infty} -i^2 w_i (1+r)^{-i} - \sum_{i=0}^{\infty} -i w_i (1+r)^{-i} \sum_{j=0}^{\infty} j w_j (1+r)^{-j}}{\left[\sum_{j=0}^{\infty} w_j (1+r)^{-j}\right]^2} = \frac{1}{1+r}\left[-\sum_{i=0}^{\infty} i^2 u_i + \left(\sum_{i=0}^{\infty} i u_i\right)^2\right],$$

i ostatecznie:

$$\frac{d\,m(U)}{dr} = \frac{-\sigma^2(U)}{1+r}. \tag{29}$$

Z tego, że prawa strona zależności (29) jest ujemna wynika, że wartość średniej rozkładu U_t maleje wraz ze wzrostem stopy wzrostu r, z czego wynika prawdziwość relacji (28). Ze wzoru (29) wynika ponadto, że relacja (28) jest prawdziwa wyłącznie dla rozkładów niepunktowych, dla których zawsze zachodzi relacja:

$$\sigma^2(U_t) = \sigma^2(W) = 0.$$

Przydatność stosowania wartości średniej $m(U_t)$ rozkładu wynikowego jako miary średniego opóźnienia w modelu (1) zostanie pokazana w poniższym przykładzie.

Przykład 1.

Niech wszystkie współczynniki opóźnienia będą stałe i równe jeden, $v_{t\,i}=1$; $i = 0, 1, 2,...$; zmienna x w okresie t przyjmuje wartość x_t, którą osiąga w wyniku wzrostu ze stałą stopą r, $r>0$. W tym przypadku wartości zmiennej niezależnej w poprzedzających okresach tworzą ciąg geometryczny o kolejnych wyrazach:

$$x_t = x_t,\ x_{t-1} = x_t(1+r)^{-1},\ x_{t-2} = x_t(1+r)^{-2},...$$

Mimo, że w omawianym przypadku suma wszystkich współczynników jest nieograniczona:

$$\sum_{i=0}^{\infty} v_i = \infty,$$

to zmienna zależna y przyjmuje skończone wartości:

$$y_t = \sum_{i=0}^{\infty} 1 \cdot x_{t-i} = \sum_{i=0}^{\infty} 1 \cdot x_t(1+r)^{-i} = x_t \sum_{i=0}^{\infty}(1+r)^{-i} = x_t(1+r)/r.$$

Ilustracją tego przypadku jest model wykorzystany między innymi przez: Kleina (1950), Tinbergena (1959), Solowa (2000), w którym zasób kapitału K_t pod koniec okresu t jest wynikiem powiększenia kapitału z końca poprzedniego okresu K_{t-1} o inwestycje netto I_t poniesione w okresie t:

$$K_t = K_{t-1} + I_t. \tag{30}$$

Ponieważ zasada kształtowania K jest taka sama we wszystkich okresach:

$$K_{t-i} = K_{t-i-1} + I_{t-i},\ i = 0, 1, 2,...;$$

przez kolejne podstawianie uzyskuje się następujące równanie:

$$K_t = \sum_{i=0}^{\infty} I_t, \tag{31}$$

z którego wynika, że kapitał jest wynikiem skumulowania inwestycji netto poczynionych w całej historii.

Równanie (31) reprezentuje model opóźnienia, w którym wszystkie współczynniki opóźnienia są równe, $v_i=1$, $i = 0, 1, 2,..$; zatem odpowiadająca im suma (2) jest rozbieżna. Jednak kapitał określony równaniem (31) ma skończoną wartość implikującą zbieżność szeregu $\sum_{i=0}^{\infty} I_t$.

W kategoriach ekonomicznych zbieżność tę można uzasadnić na dwa sposoby. Pierwszy wiąże się z faktem, iż rozwój gospodarczy nie ma nieskończonej historii, a niezerowe inwestycje są ponoszone dopiero od pewnego - gorzej lub lepiej - sprecyzowanego okresu początkowego. W takim wariancie mamy do czynienia z modelem skończonym, który jest zawsze zbieżny przy ograniczonych wartościach współczynników i zmiennej niezależnej.

Sposób drugi, nie wymagający założenia o skończoności horyzontu historycznego, opiera się na założeniu, że w całym okresie, w którym czas przyjmował wartości od $-\infty$ do t, inwestycje wzrastały z przeciętną stopą r, $r > 0$. W tym wariancie zbieżność szeregu, którego wyrazami są elementy ciągu geometrycznego, jest zapewniona przez zbieżność tego ciągu przy dodatniej wartości przeciętnej stopy wzrostu r. Założenie to pozwala na przybliżone odtworzenie minionych nakładów inwestycyjnych:

$$I_{t-1} = I_t(1+r)^{-1},\ I_{t-2} = I_t(1+r)^{-2}, \ldots, I_{t-i} = I_t(1+r)^{-i}, \ldots;\ i = 0, 1, 2, \ldots:$$

oraz, po podstawieniu odpowiednich wyrazów do sumy (28), na przedstawienie kapitału K_t za pomocą następującego równania

$$K_t = I_t \sum_{i=0}^{\infty} (1+r)^{-i} = I_t(1+r)/r.$$

Obliczając na podstawie wzoru (18) współczynniki udziału $u_{t\,i}$:

$$u_{t\,i} = \frac{I_t(1+r)^{-i}}{I_t\frac{1+r}{r}} = \frac{r(1+r)^{-i}}{1+r} = r(1+r)^{-(i+1)},\ i = 0, 1, 2, \ldots;,$$

można obliczyć, zgodnie ze wzorem (20), średnie opóźnienie:

$$m(U) = \sum_{i=0}^{\infty} i u_{it} = \sum_{i=0}^{\infty} i \frac{r}{1+r}(1+r)^{-i} = \frac{r}{1+r}\sum_{i=0}^{\infty} i(1+r)^{-i} = \frac{1}{r}.$$

W omawianym przykładzie średnie łączne opóźnienie jest funkcją przeciętnej stopy wzrostu inwestycji: im niższa wartość tej stopy, tym wyższa wartość tej średniej.

Przyjmując, że przeciętna w całej historii stopa wzrostu inwestycji r wyniosła 5% rocznie, uzyskujemy wartość średniego opóźnienia równą 20 lat.

Ponieważ w analizowanym Przykładzie współczynniki udziału u_{ti} pokazują, jaki jest udzial w roku t kapitału w wieku i lat , i = 0, 1, 2,..; w wielkości kapitału K_t pod koniec roku t, wielkość $m(U)$ można interpretować jako przeciętny wiek jednostek kapitału wchodzących w skład skumulowanego kapitału. Korzystając z własności ciągu geometrycznego łatwo wyliczyć, że pod koniec okresu t ok. 64% jednostek zainstalowanego kapitału ma mniej niż 21 lat, natomiast pozostałych 36% składa się z jednostek w wieku zawierającym się w przedziale pomiędzy 21 latami i nieskończonością.

W przedstawionym wyżej Przykładzie 1 zbieżność sumy (31) nie wynikała ze zbieżności sumy (7), lecz ze skończonej wielkości historycznie poniesionych nakładów inwestycyjnych. W przykładzie tym nie istnieje rozkład opóźnienia W, zatem nie jest również określona wartość średnia $m(W)$ tego rozkładu, można jednak określić średnie opóźnienie obliczone za pomocą wielkości $m(U_t)$, wzór (20).

O średnim wieku jednostki kapitału decyduje nie mechanizm opóźnienia, lecz wyłącznie mechanizm kształtowania się inwestycji - zmiennej niezależnej.

Powyższy przykład pokazał, że postulat, aby mnożnik długookresowy, suma (2), miał skończoną wartość, nie jest formalnie niezbędny czy ekonomicznie konieczny.

Obecnie rozważany będzie przykład modelu opóźnienia, w którym istnieją obie wielkości: $m(W)$ i $m(U)$.

Przykład 2.

Niech wartości współczynników opóźnienia tworzą malejący ciąg geometryczny:

$$v_i = (1 - \lambda)^i ,\ 0 \leq \lambda < 1,\ i = 0,\ 1,\ 2,...;$$

którego suma (2) (mnożnik długookresowy) ma skończoną wartość i wynosi:

$$a = \sum_{i=0}^{\infty} v_i = 1 / \lambda ;$$

znormalizowane współczynniki w_i , $i = 0,\ 1,\ 2,..$; mają postać:

$$w_i = \lambda (1 - \lambda)^i ,\ i = 0,\ 1,\ 2,...;$$

a średnia rozkładu opóźnienia $m(W)$ wynosi:

$$m(W) = (1 - \lambda) / \lambda . \tag{29}$$

Analityczne wyznaczenie wartości średniego łącznego opóźnienia wymaga dodatkowych założeń o kształtowaniu się zmiennej niezależnej. Niech zmienna niezależna rośnie z pewnym stałym tempem wzrostu r:

$$x_t = x_t,\ x_{t-1} = x_t (1+ r)^{-1},\ x_{t-2} = x_t (1 + r)^{-2},...$$

tym razem jednak nie precyzując z góry przedziału zmienności r.

Uwzględnienie ostatniego założenia pozwala na wyrażenie zmiennej zależnej jako sumy postępu geometrycznego:

$$y_t = \sum_{i=0}^{\infty} v_i \cdot x_{t-i} = \sum_{i=0}^{\infty} (1-\lambda)^i \cdot x_t (1+r)^{-i} = x_t \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1-\lambda}{1+r} \right)^i = x_t \frac{1+r}{\lambda + r} . \tag{30}$$

Współczynniki udziału, $u_{t\,i}$, $i = 0,\ 1,\ 2,..;$ obliczone na podstawie wzoru (18), można wyrazić za pomocą następującej formuły:

$$u_{t\,i} = \frac{v_i x_{t-i}}{E(y_t)} = \frac{x_t \left(\frac{1-\lambda}{1+r} \right)^i}{x_t \frac{1+r}{\lambda + r}} = \frac{\lambda + r}{1+r} \left(\frac{1-\lambda}{1+r} \right)^i ,\ i = 0,\ 1,\ 2,..; \tag{31}$$

na podstawie której - po nieskomplikowanych przekształceniach - uzyskuje się wartość średnią $m(U)$:

$$m(U) = \frac{1-\lambda}{\lambda + r} . \tag{32}$$

Mianownik po prawej stronie równania (32) różni się od mianownika parametru $m(W)$, wzór (29), o wartość współczynnika r. Warunkiem na to, aby zmienna zależna y_t miała skończoną i dodatnią wartość jest zbieżność sumy,

$$\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1-\lambda}{1+r}\right)^{i}$$

która ma miejsce wtedy, gdy r spełnia następującą relację: $-\lambda \leq r$.

Z powyższego wywodu wynika, że dla zapewnienia zbieżności powyższej sumy stopa wzrostu wartości zmiennej niezależnej nie musi być dodatnia, musi być jednak większa od wartości współczynnika λ ze znakiem ujemnym.

Ze wzorów (31) i (32) wynika, że w omawianym przykładzie udziały u_i, $i = 0, 1, 2,..;$ a co za tym idzie, również średnie opóźnienie $m(U)$, nie zależą od czasu.

Ponieważ w rozpatrywanym przykładzie wartości zmiennej niezależnej wzrastają, znacznie większą wagę w kształtowaniu wartości zmiennej zależnej mają najwyższe, najpóźniejsze wartości zmiennej zależnej. Zmniejsza to w efekcie udział wcześniejszych wartości zmiennej niezależnej w kształtowaniu wartości zmiennej zależnej.

W sensie formalnym analizowany tu model jest ogólniejszy od modelu z Przykładu 1, który jest jego szczególnym przypadkiem przy wartości parametru $\lambda = 0$.

Ekonomiczną ilustracją rozważanego modelu jest model kształtowania się kapitału pod wpływem ponoszonych nakładów inwestycyjnych oraz uwzględnionego *explicite* procesu deprecjacji kapitału. Przy założeniu stałej wartości współczynnika deprecjacji d i mechanizmu deprecjacji kapitału, w którym wielkość deprecjacji jest proporcjonalna do wielkości kapitału, równanie kapitału przyjmuje następującą postać:

$$K_t = K_{t-1} - d\,K_{t-1} + I'_t = (1-d)\,K_{t-1} + I'_t. \tag{33}$$

Współczynnik deprecjacji d wraz z kapitałem K_{t-1} z początku okresu t, określa w okresie t wielkość deprecjacji tego kapitału $d\,K_{t-1}$, tzn. tę część kapitału K_{t-1}, która w tym okresie ubywa z zasobu tego kapitału. Zmienna I'_t oznacza wielkość inwestycji brutto, której związek z inwestycjami netto I_t z Przykładu 1 opisuje zależność:

$$I_t = I'_t - d\,K_{t-1}.$$

Zakładając, że zależność (33) zachodzi dla wszystkich okresów poprzedzających okres t, uzyskuje się:

$$K_{t-i} = (1-d)\,K_{t-i-1} + I'_t \quad i = 0, 1, 2,... \tag{34}$$

Przez rekurencyjne podstawianie otrzymuje się następującą postać zależności (33):

$$K_t = I'_t + (1-d)^1 I'_{t-1} + (1-d)^2 I'_{t-2} + ... = \sum_{i=0}^{\infty}(1-d)^i I'_{t-i}. \tag{35}$$

Podobnie jak w Przykładzie 1, również w omawianym przykładzie współczynniki udziału:

$$u_{ti} = \frac{(1-d)^i I'_{t-i}}{K_t},\; i = 0, 1, 2,..;$$

reprezentują udziały jednostek kapitału pochodzących z inwestycji sprzed i lat $(1-d)I'_{t-i}$ (corocznie pomniejszanych przez deprecjację) w wielkości K_t kapitału pod koniec roku t. Pozwala to na interpretowanie wielkości $m(U_t)$ jako przeciętnego wieku zainstalowanego kapitału.

Zakładając podobnie jak w Przykładzie 1, że:

$$I'_{t-i} = I'_t(1+r)^{-i}, \ i = 0, 1, 2, \ldots;$$

wielkość kapitału K_t pod koniec okresu t można wyznaczyć na podstawie następującej zależności:

$$K_t = I'_t \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1-d}{1+r} \right)^i . \tag{36}$$

Równanie (35) można interpretować jako model opóźnienia, w którym inwestycje są zmienną niezależną, współczynniki opóźnienia v_i, $i = 0, 1, 2, \ldots$; są wyrażone za pomocą wzoru:

$$v_i = (1-d)^i, \ i = 0, 1, 2, \ldots$$

Mnożnik długookresowy jest równy $1/d$, a znormalizowane współczynniki są opisane za pomocą następującego wzoru:

$$w_i = d(1-d)^i, \ i = 0, 1, 2, \ldots$$

Analizując przypadek dodatnich wartości stopy wzrostu inwestycji r nietrudno zauważyć, że średnia rozkładu opóźnienia $m(W)$, wzór (29), jest większa od wartości średniego łącznego opóźnienia $m(U)$, wzór (32).

Przyjmując, podobnie jak w Przykładzie 1, że stopa wzrostu $r = 5\%$ oraz współczynnik $d = 0{,}075$ (oznacza to średni okres zużycia kapitału równy 13⅓ roku), uzyskujemy:

$$m(W) = 12⅓ \text{ oraz } m(U)_{r=5\%} = 7{,}4.$$

Różnica pomiędzy $m(W)$ oraz $m(U)$ jest znacząca: przy pięcioprocentowej 5% stopie wzrostu średnie opóźnienie obliczone na podstawie $m(W)$ przeszacowuje wartość średniego opóźnienia obliczonego na podstawie $m(U)$ o ok. 66%.

Wielkości $m(W)$ i $m(U_t)$ mają skończone wartości tak długo, jak spełniony jest warunek $-\delta \leq r$. Jeśliby założyć, że inwestycje historyczne nie rosły, lecz spadały w tempie 2,5% rocznie, wówczas ma miejsce sytuacja przeciwna:

$$m(W) = 12⅓ \text{ oraz } m(U)_{r=-2,5\%} = 18 ½.$$

W Przykładzie 2 różnica pomiędzy $m(W)$ i $m(U)$ jest dodatnia przy inwestycjach rosnących oraz malejąca przy inwestycjach spadających. Zależność pomiędzy wartościami średniego opóźnienia $m(U)$ a stopą wzrostu r w omawianym Przykładzie przedstawiona została na rys. 1.

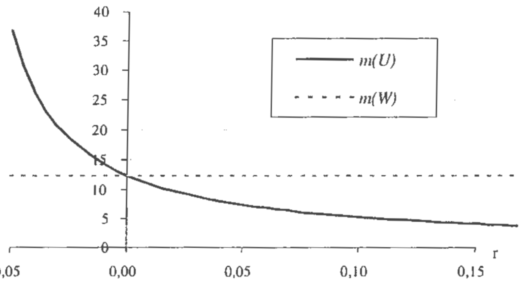
Przed przystąpieniem do podsumowania warto zbadać różnicę pomiędzy wielkościami $m(U_t)$ i $m(W)$. Analiza będzie polegać na porównaniu tych wielkości w przypadku zakłócenia stanu ustalonego określonego w Części 2. Zakłada się, że istnieje skończona suma (2) oraz wartość średnia $m(W)$ rozkładu W.

Na podstawie wzoru (17) wkłady $v_i x_{t-i}$ $i = 0, 1, 2, ..$; są określone przez następującą zależność (dla $t \geq 0$):

$$v_i x_{t-i} = \begin{cases} v_i x^*, & i \neq t; \\ v_i(x^* + \Delta x), & i = t; \end{cases}$$

a wartość zmiennej zależnej jest określona za pomocą następującego wzoru:

$$y_t = y^* + v_t \Delta x.$$



Rys. 1. Przykład 1. Zależność średniego łącznego opóźnienia $m(U)$ od stopy wzrostu r przy założonej wartości średniej rozkładu opóźnienia $m(W)$ równej 12⅓.

Na podstawie powyższych wzorów, wartość średnia $m(U_t)$ rozkładu U_t równa się (dla $t \geq 0$):

$$m(U_t) = \frac{\sum_{i=0}^{t-i} i v_i x_{t-i} + t v_t \Delta x + \sum_{i=t+1}^{\infty} i v_i x_{t-i}}{y^* + v_t \Delta x} = \frac{t v_t \Delta x + \sum_{i=0}^{\infty} i v_i x^*}{y^* + v_t \Delta x} = \frac{t v_t \Delta x + y^* m(W)}{y^* + v_t \Delta x}.$$

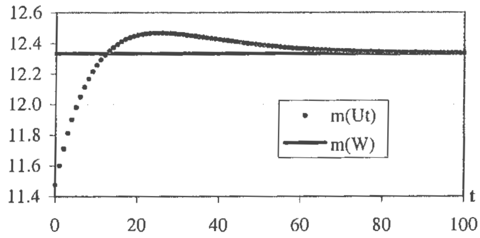
Dzieląc licznik i mianownik ułamka po prawej stronie powyższej zależności przez wartość y^* uzyskuje się:

$$m(U_t) = \frac{m(W) + t v_t \frac{\Delta x}{y^*}}{1 + v_t \frac{\Delta x}{y^*}}. \tag{37}$$

Z założenia, dla $t < 0$, $m(U_t) = m(W)$, a ponadto, przy $t \to \infty$, $m(U_t) \to m(W)$, oraz dla $t = 0$:

$$m(U_0) = \frac{m(W)}{1 + v_0 \frac{\Delta x}{y^*}}.$$

Zależność wartości $m(U_t)$ od czasu w przypadku zgodnego ze wzorem (18) zakłócenia stanu ustalonego od czasu jest uwarunkowany rozkładem W. Przy założeniu identycznego rozkładu jak w Przykładzie 2, przebieg tej zależności przedstawiono na rys.2.



rys.2. Przykładowy przebieg w czasie wartości średniej $m(U_t)$ rozkładu wynikowego U_t przy jednostkowym zakłóceniu w $t = 0$; rozkład geometryczny, $m(W) = 12\frac{1}{3}$.

3. Wnioski

Model opóźnienia rozłożonego (1) opisuje kształtowanie się wartości zmiennej zależnej pod wpływem działania: mechanizmu opóźnienia, reprezentowanego przez współczynniki opóźnienia, mechanizmu kształtującego wartości zmiennej niezależnej oraz czynnika losowego reprezentującego zarówno błędy pomiaru, jak i wpływ czynników nieuwzględnionych lub nierozpoznanych.

Gdy chodzi o określanie opóźnienia klasyczna teoria modeli opóźnienia rozłożonego oferuje następujące miary: wartość średnią rozkładu opóźnienia (jeśli istnieje) lub medianę tego rozkładu. Zaproponowana w tej pracy miara opóźnienia jest oparta na wartości średniej rozkładu wynikowego utworzonego ze współczynników udziału. Miara ta ma charakter dynamiczny; uwzględnia łączny wpływ wywierany na zmienną zależną zarówno mechanizmu opóźnienia jak i wartości zmiennej niezależnej; wzrost zmiennej niezależnej obniża wartość tej miary opóźnienia względem wartości średniej rozkładu opóźnienia, podczas gdy spadek zmiennej niezależnej powoduje zwiększenie jej wartości względem wartości średniej rozkładu opóźnienia.

Własności zaproponowanej miary opóźnienia mają czytelną interpretację w modelach przepływów, gdzie opisywany związek pomiędzy zmiennymi opisuje zjawiska mające interpretację fizykalna – występują w nich związki typu: zasób- strumień lub strumień-strumień. Na gruncie ekonomii przykładami takich związków są, na przykład, zależności:

- wielkości zasobu kapitału od strumienia nakładów inwestycyjnych
- strumienia deprecjacji kapitału od strumienia nakładów inwestycyjnych.

W typie pierwszym wartość średnia rozkładu wynikowego reprezentuje średni wiek jednostek wchodzących w skład zainstalowanego kapitału a w typie drugim średni wiek jednostek tworzących strumień zdeprecjonowanego kapitału.

Almon S. (1965): The Distributed Lag Between Capital Appropriations and Net Expenditures, *Econometrica*.

Dahl C. M., Kulaksizoglu T. (2005): Nonlinear Modeling of Changing Lag Structure in U.S. Housing Construction, Purdue University, April.

Dhrymes P. J. (1981): *Distributed Lags. Problems of Estimation and Formulation*, 2^{nd} edition. North Holland Publishing Company, Amsterdam, New York, Oxford.

Fisher I. (1937): Note on a Short-Cut Method for Calculating Distributed Lag, *International Statistical Institute Bulletin*.

Gadomski J. (1986): Modele opóźnienia rozłożonego ze zmiennymi współczynnikami opóźnienia, Prace IBS PAN Nr 130, Polska Akademia Nauk, Instytut Badań Systemowych, Warszawa.

Griliches Z. (1967): Distributed Lags, A Survey, *Econometrica*, No 35, January.

Jorgenson D. W. (1966): Rational Distributed Lag Functions, *Econometrica*, January.

Klein L. R. (1950): Economic Fluctuation in the United States, 1921-1941. The Cowles Commission Monograph No.11, New York, John Wiley & Sons, Inc.

Koyck L. M. (1954): *Distributed Lags and Investment Analysis*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam.

Maddala G. S. (1977): Econometrics, McGraw-Hill Book Company, New York.

Otto W. (1985): Wahania długości opóźnień inwestycyjnych. Próba pomiaru i wyjaśnienia. Rozprawa doktorska, Wydział Nauk Ekonomicznych, Uniwersytet Warszawski.

Pesando, J. S. (1972): Seasonal Variability in Distributed Lag Models, Journal of the American Statistical Association, June.

Solow R. M. (1960): On a Family of Lag Distributions, *Econometrica*, April.

Solow R. M. (2000):

Tinbergen J. (1959): On the Theory of Trend Movements, w: *Jan Tinbergen Selected Papers*, Amsterdam.