

- 3.4.1. — fale w ciałach sprężystych
- 3.4.3. — ośrodki warstwowe i niejednorodne
- 1.1.7. — metody stochastyczne

Zbigniew Kotulski

ANALIZA FAL  
W STOCHASTYCZNYCH OŚRODKACH  
WARSTWOWYCH  
METODĄ MACIERZY PRZEJŚCIA

10/1993

PRACA HABILITACYJNA

P.269

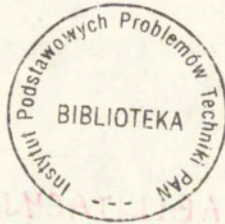


WARSZAWA 1993

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 4 stycznia 1993 r.

P r a c a   h a b i l i t a c y j n a

recenzent                    -                    Prof.dr hab.Kazimierz Sobczyk



56680



---

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN  
Nakład 100 egz. Ark.wyd. 10,0 Ark.druk.12,5  
Oddano do drukarni w marcu 1993 r.

---

Wydawnictwo Spółdzielcze sp. z o.o.  
Warszawa, ul.Jasna 1

## Spis treści

1. Wstęp - 5
2. Podstawy matematyczne - 7
  - 2.1. Wstęp - 7
  - 2.2. Metoda macierzy przejścia - 7
  - 2.3. Homogenizacja i efektywne własności ośrodka - 9
  - 2.4. Prawo wielkich liczb dla iloczynów macierzy - 12
3. Przegląd istniejących wyników dotyczących fal w stochastycznych ośrodkach warstwowych - 19
  - 3.1. Wstęp - 19
  - 3.2. Główne metody analizy fal stochastycznych - 20
  - 3.3. Determistyczne zagadnienia propagacji fal w ośrodkach warstwowych - 25
  - 3.4. Fale w stochastycznych ośrodkach warstwowych - 30
  - 3.5. Cel i zakres pracy - 33
4. Jednowymiarowe fale harmoniczne - 35
  - 4.1. Wstęp - 35
  - 4.2. Sformułowanie zagadnienia w przypadku jednowymiarowym. Konstrukcja macierzy przejścia - 36
  - 4.3. Zagadnienie w okresowym ośrodku stochastycznym - 40
  - 4.4. Zagadnienie w okresowym ośrodku stochastycznym; przypadek graniczny - 42
  - 4.5. Przykład numeryczny - 45
  - 4.6. Przykłady modeli stochastycznych ośrodków warstwowych - 55
  - 4.7. Przypadek graniczny modeli ośrodków warstwowych - 65
  - 4.8. Numeryczne badanie zbieżności modeli ośrodków warstwowych - 68

5. Dwuwymiarowe fale harmoniczne w ośrodku sprężystym - 76
  - 5.1. Wstęp - 76
  - 5.2. Sformułowanie zagadnienia - 77
  - 5.3. Konstrukcja macierzy przejścia w przypadku dwuwymiarowym - 81
  - 5.4. Rzeczywista postać macierzy przejścia - 91
  - 5.5. Ośrodek efektywny; efektywna macierz przejścia - 95
  - 5.6. Fale dwuwymiarowe w ośrodku o budowie okresowej; przypadek graniczny - 96
  - 5.7. Fale sprężyste w ośrodku zhomogenizowanym - 102
  - 5.8. Fale dwuwymiarowe w ośrodku stochastycznym; przypadek graniczny - 104
  - 5.9. Przypadek większej liczby warstw w panelu - 106
  - 5.10. Zasada zachowania energii przy odbiciu fali sprężystej na granicy ośrodków - 110
  - 5.11. Przykład numeryczny - 115
6. Zagadnienie propagacji impulsów falowych w wielosegmentowym pręcie - 127
  - 6.1. Wstęp - 127
  - 6.2. Sformułowanie zagadnienia - 129
  - 6.3. Konstrukcja macierzy przejścia - 133
  - 6.4. Fale w pręcie o strukturze okresowej; przypadek graniczny - 137
  - 6.5. Fale w pręcie o strukturze losowej; przypadek graniczny - 143
  - 6.6. Zastosowanie szybkiej transformaty Fouriera do numerycznego rozwiązania zagadnienia - 148
  - 6.7. Przykład numeryczny - 153
7. Podsumowanie - 167
8. Bibliografia - 171
9. Dodatek - 194

Zbigniew Kotulski  
Ośrodek Mechaniki  
Samodzielna Pracownia  
Dynamiki Stochastycznej

**Analiza fal w stochastycznych ośrodkach warstwowych  
metodą macierzy przejścia**

**1. Wstęp**

Rozprawa jest rezultatem kilku ostatnich lat pracy autora. Składa się na nią siedem publikacji powstałych w latach 1989-1992, dotyczących propagacji fal w ośrodkach warstwowych o losowej strukturze. W tym czasie autor był zatrudniony w Instytucie Podstawowych Problemów Techniki Polskiej Akademii Nauk w Warszawie, gdzie pracował w zespole kierowanym przez prof. Kazimierza Sobczyka. Przez ponad rok przebywał również na stypendium naukowym Fundacji im. Humboldta w Instytucie Matematyki Stosowanej Uniwersytetu w Heidelbergu, gdzie współpracował z prof. Hermanem Rostem. Przy pisaniu ostatniej z wykorzystanych w rozprawie prac korzystał też z finansowego wsparcia Komitetu Badań Naukowych realizując badania w ramach indywidualnego grantu 3 0941 91 01 zatytułowanego "Impulsy falowe w elementach konstrukcji o losowych właściwościach".

Praca poświęcona jest propagacji fal w stochastycznych ośrodkach warstwowych metodą macierzy przejścia. Zamierzeniem autora było takie sformułowanie zagadnienia i przeprowadzenie analizy, by można było w sposób konsystentny połączyć teorię rozważanych zagadnień z możliwością jej zastosowania w zagadnieniach praktycznych. W przedstawionej pracy wszystkie rozważane zagadnienia kończą się obliczeniami numerycznymi. Stanowią one również podbudowę do przeprowadzania łatwych do zaplanowania eksperymentów jako ich teoretyczny model.

Praca składa się z ośmiu części. Po krótkim wstępie, w rozdziale drugim, omówione zostają pewne fakty matematyczne mające istotny wpływ na rozważania niniejszej pracy. Rozdział trzeci zawiera wybrane zagadnienia dotyczące propagacji

fal. Celem tego omówienia jest zaprezentowanie istniejącego stanu wiedzy w dziedzinach pokrewnych tematowi pracy. Rozdziały od czwartego do szóstego stanowią oryginalny wkład autora i poświęcone są analizie fal w stochastycznych ośrodkach warstwowych metodą macierzy przejścia. Rozdział czwarty zawiera materiał opublikowany w trzech pracach: *Wave propagation in a randomly stratified medium* (Journal of Sound Vibration, vol.128, no.2, pp.195-208, 1989), *On the effective reflection properties of the randomly stratified elastic slab* (ZAMM, vol.70, pp. T211-T213, 1990) oraz *Wave propagation in randomly stratified media and the law of large numbers* (Journal of Sound and Vibration, vol.158, no.1, pp.93-104, 1992) i dotyczy fal harmoniczných jednowymiarowych. Rozdział piąty również stanowi zestawienie wyników zaprezentowanych wcześniej w trzech pracach. Są to: *Elastic waves in randomly stratified medium, Part 1: Analytical results* (Acta Mechanica, vol.83, pp.61-75, 1990), *Part 2, Numerical calculations* (Acta Mechanica, vol.85, pp.111-222, 1992) i *Law of large numbers as a method of homogenization of stratified elastic media* (ZAMM, vol.72, no.4, pp.T267-T269, 1992). Treścią tego rozdziału są zagadnienia propagacji dwuwymiarowych harmoniczných fal sprężystych w ośrodku warstwowym. Nieco odmienna jest tematyka rozdziału szóstego i dotyczy ona problemu propagacji impulsów w wielosegmentowym pręcie. Rozdział ten opracowany został na podstawie pracy: *On the effective reflection properties of the randomly segmented elastic bar*, (Prace IPPT, no.31, 1992). W rozdziale siódmym przedstawiono perspektywy dalszego wykorzystania omówionej w pracy metody macierzy przejścia w innych problemach falowych. Pracę zamyka bibliografia zawierająca zarówno wykaz publikacji mających wpływ na powstanie tej rozprawy, jak i takich, które (jak się wydaje) będą miały wpływ na dalsze badania autora dotyczące ośrodków warstwowych.

## 2. Podstawy matematyczne

### 2.1. Wstęp

Próbując sklasyfikować zakres tematyczny tej pracy można uznać, że w szerokim zakresie należy ona do dziedziny matematyki stosowanej czy też zastosowań matematyki w mechanice. Metoda analizy zagadnienia propagacji fal w ośrodkach warstwowych zaproponowana w tej pracy stanowi połączenie kilku metod matematycznych znanych w literaturze. Za najważniejsze z nich uznać można: metodę macierzy przejścia, procedurę homogenizacyjną i prawo wielkich liczb dla iloczynów macierzy. Każda z tych metod istnieje w literaturze naukowej zarówno jako metoda matematyczna, której podstawy teoretyczne są intensywnie badane, jaki i metoda stosowana do analizy konkretnych zjawisk fizycznych. W rozdziale tym przedstawiemy pewne fakty dotyczące historycznego rozwoju tych metod, stan wiedzy w obecnej chwili i przykłady najważniejszych zastosowań związanych z mechaniką czy propagacją fal.

### 2.2. Metoda macierzy przejścia

Praca ta poświęcona jest badaniu fal liniowych czyli pól fizycznych opisanych liniowymi równaniami różniczkowymi. Nieodłączną cechą układów liniowych jest liniowa zależność rozwiązań tych układów od warunków początkowych. Zależność ta ma miejsce również dla dowolnych dwóch chwil czasu. Jeżeli  $t$  i  $s$  są dwiema chwilami czasu,  $t > s$ , to wówczas rozwiązanie układu liniowego w chwili  $t$  jest liniową funkcją wartości tego rozwiązania w chwili  $s$ . Znaczy to, że rozwiązanie takie tworzy półgrupę z czasem jako parametrem tej półgrupy. W szczególnym przypadku, gdy układ liniowy opisany jest równaniami (równaniem) różniczkowymi zwyczajnymi, wówczas warunek początkowy układu  $v_0$  i wartość jego rozwiązania w dowolnej chwili  $t$ ,  $v_t$  są wektorami w  $\mathbb{R}^n$ . Wartości tego rozwiązania w dwóch chwilach  $t$  i  $s$  są ze sobą powiązane przy pomocy macierzy  $T(t-s)$  którą będziemy nazywali macierzą przejścia:

$$v_t = T(t-s) v_s, \quad (2.1)$$

Nasz układ liniowy będziemy nazywali losowym gdy warunek początkowy  $v_0$  i macierze przejścia  $T(\tau)$  dla  $\tau \in \mathbb{R}^+$  są wielkościami losowymi o wartościach odpowiednio w przestrzeni wektorów o wymiarze  $n$  i macierzy  $n \times n$ . Gdy warunek początkowy  $v_0$  i macierze przejścia  $T(t_1 - s_1)$  i  $T(t_2 - s_2)$  dla  $t_1 \geq s_1 \geq t_2 \geq s_2 \geq 0$  są niezależne, to układ liniowy  $v_t$  tworzy proces Markowa z parametrami  $t$ .

Zastosowanie macierzy przejścia do opisu układu liniowego nie wymaga koniecznie zależności tego układu od czasu. Równie dobrze inna zmienna może odgrywać jego rolę o ile tylko możliwe jest sformułowanie zadania zapewniające spełnienie zależności (2.1). Takim parametrem odpowiadającym czasowi w zapisie tego typu może być czas dojścia fali do punktu lub droga przebyta przez falę. Wybór odpowiedniego parametru zależy od konkretnego problemu.

Zastosowanie metody macierzy przejścia umożliwia dyskretyzację zagadnienia opisanego pierwotnie przez model ciągły. Jeżeli układ liniowy dany jest wyrażeniem:

$$v_t = T(t) v_0, \quad (2.2)$$

wówczas wybierając odpowiednie chwile czasu  $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_{k-2} < t_{k-1} < t_k < t$  możemy zapisać go w równoważny sposób jako:

$$v_t = T(t - t_k) T(t_k - t_{k-1}) \dots T(t_2 - t_1) T(t_1) v_0, \quad (2.3)$$

lub po wprowadzeniu nowych oznaczeń:

$$v_t = T_k T_{k-1} \dots T_2 T_1 v_0. \quad (2.4)$$

Takie przeformułowanie zagadnienia umożliwia zastosowanie nowych technik do jego analizy, jak choćby analizy spektralnej macierzy, metod równań rekurencyjnych czy metod numerycznych. Metodologia taka znalazła szerokie zastosowanie w literaturze.

Podstawową pozycją literatury w dziedzinie zastosowania metody macierzy przejścia w układach fizycznych jest monografia [Hori], gdzie stosując macierze przejścia badano przejścia fazowe w skomplikowanych materiałach modelowanych przy pomocy krat.

Metoda macierzy przejścia była stosowana do badania fal w ośrodkach warstwowych.



Pierwsze badania w których zastosowano tę metodę dotyczyły fal w ośrodku w warstwowym w którym na przemian występuje ciecz i materiał stały (por. [Lindsay], [Smyth,Lindsay], [Reissner]). W kolejnych pracach zastosowano tę metodę do badania fal w uwarstwionej płycie otoczonej cieczą (por. [Thomson]). Fale powierzchniowe Rayleigha (a także Stonleya i Love'a) były analizowane tą metodą w pracy [Haskell 1953]. W późniejszych pracach Haskell zastosował metodę macierzy przejścia do badania sprężystych fal objętościowych: SH w [Haskell 1960] oraz P i SV w [Haskell 1962]. Zagadnienia propagacji fal sprężystych metodą macierzy przejścia były badane także w innych pracach, na przykład [Haskell 1964], [Hannon 1964], [Knopoff 1964] [Gilbert,Backus], [Richards 1971]. Posłużono się nią także do badania występowania fal Floquet'a w ośrodkach okresowych [Mead]. W przypadku fal w stochastycznych ośrodkach warstwowych posłużono się nią w pracach [Ziegler 1977] i [Becus 1978] badając fale typu Floquet'a w ośrodku nieograniczonym. W pracy [Gopinath] metoda macierzy przejścia została zastosowana w zagadnieniu identyfikacji parametrów warstwowego ośrodka dielektrycznego.

W niniejszej pracy stosujemy tę metodę dla ograniczonego stochastycznego ośrodka warstwowego, badając zagadnienie odbicia i przechodzenia fal przez ten ośrodek. Wykorzystujemy ją również jako metodę homogenizacji ośrodka warstwowego w zagadnieniu propagacji fal harmonicznym (skalarnym i dwuwymiarowym) oraz impulsów falowych.

### 2.3. Homogenizacja i efektywne własności ośrodka

Badając zjawisko fizyczne zachodzące w ośrodku niejednorodnym często zastanawiamy się, czy nie można byłoby go przedstawić w ośrodku jednorodnym w pewnym sensie równoważnym wyjściowemu ośrodkowi niejednorodnemu. Powstają w tym miejscu dwa problemy. Pierwszy to znalezienie pewnego globalnego opisu zjawiska fizycznego, takiego który gwarantuje nam, że globalnie (w ściśle zdefiniowanym sensie) zjawisko zachodzące w ośrodku ujednorodnionym aproksymuje pierwotne zjawisko odbywające się w ośrodku niejednorodnym. Drugim z problemów jest znalezienie pewnych uśrednionych parametrów materiału niejednorodnego, zwanych efektywnymi stałymi materiałowymi, które podstawione do równania opisującego nasze zjawisko fizyczne, pierwotnie posiadającego zmienne współczynniki, dają w efekcie problem jednorodny w przestrzeni. Jego rozwiązanie jest przybliżeniem rozwiązania oryginalnego zagadnienia fizycznego. Często zagadnienia te łączą się ze sobą, są

jednak sytuację, gdy prowadzą do całkiem odmiennych problemów matematycznych. Wynika to z faktu, że typ równania opisującego dane zjawisko makroskopowo często nie jest znany. Poszukiwanie natomiast efektywnych parametrów ośrodka jest prowadzone przy ukrytym założeniu, że takie parametry rzeczywiście występują w równaniu opisującym globalnie dane zjawisko fizyczne. Typowym przykładem takiej "niezgodności" tych dwóch problemów jest próba znalezienia efektywnej macierzy dyfuzji w ośrodku turbulentnym z losowo zmiennym w przestrzeni członem konwekcyjnym. Ogólne równanie dla średniej koncentracji domieszki dane jest szeregiem operatorowym (cf.[Oelschleger]), w którym występują operatory różniczkowo-całkowe rzędu od jeden do nieskończoności. W pierwszym przybliżeniu, dla małej konwekcji równanie efektywne dla wartości średniej jest różniczkowo-całkowe drugiego rzędu ([Kotulski,Sobczyk.1992]). Dopiero założenie słabego skorelowania w czasie pola prędkości w członie konwekcyjnym pozwala aproksymować równanie dla średniej koncentracji przez równanie dyfuzji o pewnej efektywnej macierzy dyfuzyjności (cf.[Kotulski.1986]). Jak z tego wynika, w zagadnieniach badania efektywnych własności materiałów i globalnego (uśrednionego) opisywania zjawisk w ośrodkach niejednorodnych ważne jest dokładne postawienie zagadnienia, określenie obiektu i celu aproksymacji oraz jasne ustalenie kryterium zbieżności (miary dokładności) wielkości aproksymowanej do dokładnej.

Zagadnienia znajdowania efektywnego globalnego opisu zjawisk lokalnie niejednorodnych są przedmiotem badań uczonych od wielu lat. Wiązą się z tym nazwiska Poissona, Maxwella, Rayleigha i de Vriesa. Współczesny rozwój tych zagadnień w świecie nastąpił wraz z pracami Babuški i Sanchez-Palencii i wprowadzeni pojęcia homogenizacji. Technika homogenizacji która pozwala zdefiniować efektywne własności procesów w ośrodkach periodycznie niejednorodnych okazała się bardzo efektywna w analizowaniu wielu zjawisk z mechaniki ośrodków ciągłych, teorii konstrukcji, przewodnictwa cieplnego, zagadnień transportu w ośrodkach niejednorodnych itd. Pierwszą monografią systematyzującą stan wiedzy na ten temat (jak również dostarczającą wielu nowych wyników) była książka [Bensoussan, Lions, Papanicolaou]. Od tej pory pojawiło się w literaturze wiele prac wprowadzających nowe pojęcia zbieżności w homogenizacji, formułujące występujące w niej zagadnienia w języku analizy funkcjonalnej (na przykład [Telega], [Bosse,Showalter]) czy uogólniające wyniki na zagadnienia nieliniowe (por. na przykład [Negro], [DalMaso,Modica]). Pojawiło się też wiele prac w których badano zagadnienia homogenizacji stochastycznej (por. na przykład [Eriksen...], [Papanicolaou.1987]), w tym również wspomaganą komputerowo (por. [Sab]). Podejście

ujednolicające homogenizację deterministyczną (periodyczną) i stochastyczną przedstawione zostało w pracy [Papanicolaou, Varadan].

Godny odnotowania jest fakt, że w Instytucie Podstawowych Problemów Techniki badania tego rodzaju zostały podjęte już na przełomie lat sześćdziesiątych i siedemdziesiątych (por. [Orłowska]). Są one tu również i obecnie intensywnie prowadzone (por. na przykład [Lewiński, Telega], [Gambin, Kröner], [Gałka, Telega, Wojnar]).

Jak już wspomnieliśmy, drugim zagadnieniem, związanym z zagadnieniem globalizacji zjawiska fizycznego jest znajdowanie stałych efektywnych ośrodka. Problem ten pojawił się po raz pierwszy w pracy Voigta w 1887 roku przy okazji znajdowania modułu sprężystości polikryształu uśrednionego względem orientacji. Wiele lat później Reuss (w 1929 roku) dokonał uśrednienia podatności (compliance) sprężystej uzyskując odmienny wynik. Dopiero Hill w 1952 roku wykazał, że wartości uśrednionych modułów sprężystości uzyskane przez Voigta i Reussa są wielkościami ograniczającymi z dołu i z góry rzeczywiste efektywne wartości modułu sprężystości polikryształu, będące składowymi tensora czwartego rzędu wiążącego uśrednione tensory naprężenia i odkształcenia w tym samym punkcie przestrzeni  $r$ :

$$\langle \sigma(r) \rangle = \mathcal{C}_{\text{eff}} \langle \epsilon(r) \rangle. \quad (2.5)$$

gdzie  $\langle \rangle$  oznacza obliczanie objętościowej wartości średniej po niewielkim otoczeniu punktu  $r$ .

Ośrodek, w którym stałe sprężyste opisane są przez tensor  $\mathcal{C}_{\text{eff}}^r$  nazywany jest ośrodkiem efektywnym. Ograniczenia na tensor  $\mathcal{C}_{\text{eff}}^r$  dane przez Voigta i Reussa mają postać:

$$\langle \mathcal{C} \rangle \leq \mathcal{C}_{\text{eff}}^r \leq \langle \mathcal{C}^{-1} \rangle^{-1} \quad (2.6)$$

gdzie znak większości oznacza porządek w przestrzeni funkcjonalów dwuliniowych a wartość odwrotna operatora rozumiana jest jako odwrotność operatora liniowego.

Możliwość znalezienia stałych efektywnych zależy od ilości informacji jaką mamy o ośrodku niejednorodnym. Na przykład, przy znajomości jedynie procentowego udziału orientacji w kryształach, ograniczenia Voigta-Reussa są najlepsze z możliwych do uzyskania (ograniczenia pierwszego rzędu). Przy założeniu dodatkowych faktów o materiale niejednorodnym można otrzymać węższe ograniczenia na stałe materiałowe. Zagadnienie to było przedmiotem prac wielu autorów, na przykład [Hashin, Shtrikman],

[Kröner], bibliografia w pracy [Markov,Zvyatkov]. Współczesne prace poświęcone zagadnieniu znajdowania stałych efektywnych używają bogatego aparatu matematycznego, na przykład analizy funkcjonalnej (por. [Milton]).

Istnieją także pewne szczególne przykłady ośrodków i problemów kiedy możliwe jest znalezienie dokładnych wartości stałych efektywnych. Należą do nich na ogół ośrodki warstwowe i ośrodki zawierające kulki zatopione w jednorodnej macierzy. Pozwoliły one na pokazanie, że przy przyjętych założeniach dotyczących informacji statystycznej o ośrodku, uzyskane ograniczenia rzeczywiście są osiągalne a więc nie mogą być poprawione.

Wśród wielu konkretnych zagadnień mechaniki które były homogenizowane nie zabrakło również zagadnień teorii sprężystości i to dotyczących zarówno ośrodków (por. na przykład [Oleinik,...], [Berlyand,Kozlov]) jak i elementów konstrukcji, czyli problemów w których istotne znaczenie mają warunki brzegowe (por. na przykład [Lewiński,Telega], [Telega]). Homogenizacji podlegały również problemy dynamiczne, w tym również zagadnienia falowe (por. na przykład [Negro]). W niedawno opublikowanej pracy [Norris, Santosa] uzyskano parametry efektywne dla sprężystego okresowego ośrodka warstwowego w którym propaguje się fala typu SH. W tym wypadku ośrodek efektywny jest anizotropowy a jego własności są opisane przez trzy stałe: gęstość średnią i dwie stałe sprężyste. (Przypadek fali P i SV jest rozważony w rozdziale 5 tej pracy).

Na zakończenie zauważmy, że istnieje związek koncepcji homogenizacji i znajdowania parametrów efektywnych ośrodka dla problemów periodycznych z występującym w problemach stochastycznych zagadnieniem znajdowania wartości oczekiwanej procesu stochastycznego i równań dla wartości średnich procesu (pola losowego) a w niektórych przypadkach mogą być dwoma aspektami tego samego zagadnienia.

#### 2.4. Prawo wielkich liczb dla iloczynów macierzy

Prawo wielkich liczb, będące jednym z rodzajów twierdzenia granicznego rachunku prawdopodobieństwa, należy, obok centralnego twierdzenia granicznego, do najstarszych zagadnień badanych w tej teorii i zarazem najszerszej opisanych w literaturze. Sformułowano ogromną liczbę twierdzeń tego rodzaju, począwszy od tradycyjnych twierdzeń dla sum niezależnych rzeczywistych zmiennych losowych, poprzez twierdzenia dla zmiennych (słabo) zależnych, losowej liczby zmiennych losowych, zmiennych o wartościach w przestrzeniach funkcyjnych (np. Banacha) itd.

Oprócz aspektu teoretycznego tych twierdzeń istotny jest ich praktyczny aspekt - zastosowanie w szeregu zagadnień statystyki matematycznej lub fizyki. Łatwa jest również interpretacja tego twierdzenia: efekt prawa wielkich liczb w danym układzie fizycznym jest wynikiem sumarycznego działania na układ wielu niezależnych czynników. W tej pracy przedstawiamy właśnie przykład działania prawa wielkich liczb w konkretnych układach fizycznych: ośrodkach warstwowych przewodzących fale.

W tradycyjnym ujęciu prawo wielkich liczb mówi, że uśredniona suma niezależnych zmiennych losowych o jednakowych rozkładach dąży do ich wspólnej wartości średniej gdy liczba tych zmiennych dąży do nieskończoności. Na przykład twierdzenie Kołmogorowa [Fisz] ma następującą postać:

*Niech  $\{Y_i\}$ , ( $i=1,2,\dots$ ) będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowej dystrybuancie  $F(y)$ . Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby dla pewnej stałej  $c$  było:*

$$P \left[ \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i - c \right] = 0 \right], \quad (2.7)$$

jest istnienie wartości przeciętnej  $E\{Y\}$  zmiennej  $Y$  o dystrybuancie  $F(y)$ , przy czym  $c=E\{Y\}$ .

Nasuwa się teraz pytanie: jak będzie się zachowywał iloczyn takich zmiennych losowych:  $Y_1 * Y_2 * \dots * Y_{n-1} * Y_n$  przy  $n$  dążącym do nieskończoności? Po zlogarytmowaniu tego iloczynu otrzymujemy:

$$\log \left( Y_1 * Y_2 * \dots * Y_{n-1} * Y_n \right) = \sum_{i=1}^n \log Y_i, \quad (2.8)$$

i możemy zastosować klasyczne prawo wielkich liczb dla sum niezależnych zmiennych losowych do logarytmów naszych zmiennych losowych.

Odmienne przedstawia się sytuacja dla iloczynów nieprzemiennej, a takimi są iloczyny macierzy. Uzyskanie prawa wielkich liczb dla iloczynów niezależnych zmiennych losowych o wartościach macierzowych nie jest zatem prostym uogólnieniem takiego prawa dla sumy macierzy i wymaga odmiennego podejścia.

Pierwsze prawo wielkich liczb dla iloczynów macierzy losowych było uzyskane przez Bellmana (cf.[Bellman 1954]). Było to tak zwane słabe prawo wielkich liczb, to znaczy miała w nim miejsce zbieżność według prawdopodobieństwa (w mocnym prawie wielkich liczb wymagana jest zbieżność z prawdopodobieństwem 1). W celu sformułowania prawa wielkich liczb wprowadźmy następujące oznaczenia. Niech do końca tego paragrafu  $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$  oznaczają kwadratowe rzeczywiste macierze losowe o jednakowych rozkładach, wzajemnie niezależne. Oznaczmy przez  $P_n$  iloczyn  $n$  takich macierzy:

$$P_n = X_n * X_{n-1} * \dots * X_2 * X_1. \quad (2.9)$$

Twierdzenie udowodnione przez Bellmana ma następującą postać:

Niech  $X_i$  będą macierzami  $m \times m$  których wszystkie elementy są dodatnimi zmiennymi losowymi o wartościach rzeczywistych. Wówczas dla  $i, j=1, \dots, m$  istnieją granice:

$$\lim_n \frac{1}{n} E \left\{ \log \left( P_n \right)_{ij} \right\}, \quad (2.10)$$

gdzie symbol  $E\{\cdot\}$  oznacza wartość oczekiwaną a  $\left( P_n \right)_{ij}$   $i, j$ -ty element macierzy  $P_n$ .

Twierdzenie to zostało wzmocnione przez Furstenberga i Kestena w 1960 roku. Udowodnili oni następujące mocne prawo wielkich liczb:

Przy założeniach takich jak w poprzednim twierdzeniu z prawdopodobieństwem 1 istnieje granica:

$$\lim_n \frac{1}{n} \log \left( P_n \right)_{ij}, \quad (2.11)$$

dla wszystkich  $i, j$ , przy czym jest ona niezależna od wartości  $i$  oraz  $j$ . Oznacza to, że asymptotycznie macierz  $P_n$  możemy przedstawić jako:

$$P_n \cong e^{\frac{kn}{n}} J \quad (2.12)$$

gdzie  $J$  jest macierzą której wszystkie elementy są równe jedności ( $k$  jest liczbą rzeczywistą, równą granicy zdefiniowanej w (2.11)).

W tej samej pracy Furstenberg i Kesten otrzymali również centralne twierdzenie graniczne dla iloczynów macierzy. Jest to jednak przykład twierdzenia w słabym sensie. Ma ono następującą postać:

*Przy założeniach poprzednich twierdzeń, zmienna losowa postaci:*

$$\sqrt{n} \left( \frac{1}{n} \log \left( P_n \right)_{ij} - k \right) \quad (2.13)$$

dla wszystkich  $i, j$  gdy  $n \rightarrow \infty$  zbiega do zmiennej losowej o rozkładzie normalnym, przy czym jest to zbieżność według rozkładu prawdopodobieństwa.

W powyższych twierdzeniach istotnym założeniem była dodatniość elementów maciezy które były mnożone. W przypadku próby zastosowania takich twierdzeń w problemach praktycznych jest to założenie silnie ograniczające. Na szczęście w późniejszych pracach udało się pozbyć tego założenia.

Przełomową pracą w tej dziedzinie był artykuł Furstenberga z 1963 roku. Uzyskano w niej silne prawo wielkich liczb dla obiektów tak ogólnych jak elementy niezwrtej, półprostej grupy Lie i ich funkcjonałów wieloliniowych. Zaprezentowano tam również, jako szczególny przypadek ogólnej teorii, twierdzenia graniczne dla iloczynów macierzy losowych. Te właśnie twierdzenia przedstawimy tutaj.

W grupie twierdzeń uzyskanych przez Furstenberga zakłada się, że macierze  $X_i$  występujące w iloczynie (2.9) są rzeczywiste i unimodularne, to znaczy ich wyznaczniki są równe jedności. Twierdzenia te podają różne aspekty asymptotycznego zachowania się macierzy zdefiniowanych we wzorze (2.9). Pierwsze z nich mówi o wzajemnych związkach wektorów stanowiących wiersze (lub kolumny) takich macierzy.

*Przy powyższych założeniach, w macierzy  $P_n$  kąty pomiędzy wektorami stanowiącymi*

*{ różn jej wiersze  
różn jej kolumny } dążą do zera z prawdopodobieństwem 1 gdy  $n$  dąży do nieskończoności.*

Sformułowanie drugiego twierdzenia wymaga zdefiniowania przestrzeni rzutowej  $\mathbb{P}^{m-1}$ . Będziemy mówili, że  $\mathbb{P}^{m-1}$  jest  $(m-1)$ -wymiarową przestrzenią rzutową, gdy jest to przestrzeń liniowa uzyskana z  $\mathbb{R}^m - \{0\}$  przez utożsamienie każdego dwóch wektorów, gdy jeden powstał z drugiego w wyniku pomnożenia go przez skalar. Drugie z twierdzeń Furstenberga mówi, że:

*Przy powyższych założeniach, jeżeli  $u$  jest dowolnym elementem przestrzeni rzutowej  $\mathbb{P}^{m-1}$ , wówczas z prawdopodobieństwem 1*

$$u^T P_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} w^T \quad (2.14)$$

gdzie  $w$  jest zmienną losową o wartościach w  $\mathbb{P}^{m-1}$ , niezależną od wyboru elementu  $u$ .

Z punktu widzenia naszych zastosowań bardziej interesująca byłaby informacja o zachowaniu prawostronnego iloczynu wektora przez macierz  $P_n$ . Niestety, przy przyjętych do tej pory założeniach granica  $P_n u$  nie istnieje. Pewną informację o asymptotycznym zachowaniu się takiego iloczynu możemy uzyskać z następującego twierdzenia, również podanego w pracy Furstenberga:

*Przy powyższych założeniach, dla dowolnego  $u \in \mathbb{P}^{m-1}$ , iloczyn  $P_n u$  oscyluje w  $\mathbb{P}^{m-1}$  gdy  $n$  dąży do nieskończoności. Oznacza to, że gdy  $u \in \mathbb{R}^m$  wówczas pewne współrzędne wektora  $P_n u$  dążą do nieskończoności z prawdopodobieństwem 1:*

$$\forall u \neq 0, \quad \frac{1}{n} \log \left\| P_n u \right\| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \alpha, \quad (2.15)$$

gdzie  $\alpha$  jest pewną stałą dodatnią.

Uzyskanie wyniku, który mógłby być przydatny do naszych celów wymaga zatem poczynienia dodatkowych założeń odnośnie macierzy  $X_i$ .

Twierdzenie, które może być z powodzeniem zastosowane do badania fal w ośrodkach warstwowych zostało uzyskane przez Bergera w 1984 roku. Oprócz przyjętego przez Furstenberga warunku unimodularności macierzy przyjął on dodatkowo założenie dotyczące szczególnej postaci macierzy mnożonych w prawie wielkich liczb. Prawo



wielkich liczb zaproponowane przez Bergera ma następującą postać:

Załóżmy, że macierze losowe  $X_{i,n}$ ,  $i=1,2,\dots,n$  są całkowalne (względem miary probabilistycznej) i ponadto macierze te można przedstawić w następującej postaci:

$$X_{i,n} = \text{Id} + \frac{1}{n} B_{i,n} + C_i(n), \quad (2.16)$$

gdzie  $\text{Id}$  oznacza macierz jednostkową,  $B_{i,n}$  są niezależnymi macierzami losowymi o jednakowych rozkładach dla  $i=1, 2, \dots, n$ , natomiast macierze  $C_i(n)$  spełniają warunek:

$$E \left[ C_i(n) \right] = o \left( \frac{1}{n} \right). \quad (2.17)$$

Wówczas zachodzi zbieżność iloczynu macierzy losowych

$$P_n = \prod_{i=1}^n X_{i,n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \exp \{ E(B) \} \quad (2.18)$$

słabo z prawdopodobieństwem 1, to znaczy że dla każdego wektora  $u \in \mathbb{R}^n$

$$P_n u \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \exp \{ E(B) \} u \quad (2.19)$$

z prawdopodobieństwem 1.

W pracy Bergera podano również centralne twierdzenie graniczne dla iloczynów zmiennych losowych. Przy szczególnych założeniach dotyczących macierzy  $X_{i,n}$  ma ono następującą postać:

Załóżmy, że macierze  $X_{i,n}$  mogą być przedstawione w następujący sposób:

$$X_{i,n} = \text{Id} + \frac{1}{\sqrt{n}} A_{i,n} + \frac{1}{n} B_{i,n} + C_i(n), \quad (2.20)$$

gdzie pary macierzy  $\left( A_{i,n}, B_{i,n} \right)$  mają jednakowe rozkłady, są niezależne i całkowalne z kwadratem. Zakładamy również, że  $E\left\{ A_{i,n} \right\} = 0$  a macierze  $C_i(n)$ , spełniają następujący warunek:

$$E \left\| C_i(n) \right\|^2 = o \left( \frac{1}{n^2} \right). \quad (2.21)$$

Wówczas iloczyn macierzy  $\prod_{i=1}^n X_{i,n}$  zbiega do macierzy mającej rozkład normalny, przy czym można przedstawić tę macierz w postaci rozwiązania pewnego równania stochastycznego (por. [Berger]).

W literaturze istnieją również inne prace dotyczące twierdzeń granicznych dla macierzy stochastycznych (na przykład [Tutubalin], [Hu,...]). Nie omawiamy ich tu jednak ponieważ wyniki w nich zawarte nie są wykorzystywane w tej pracy.

Przedstawione w tym paragrafie prawa wielkich liczb dla iloczynów macierzy znalazły zastosowanie do badania błędzenia przypadkowego i ruchu Browna w przestrzeniach symetrycznych [Furstenberg 1963] oraz w analizie stochastycznych macierzowych równań różnicowych [Kesten 1973].

### 3. Przegląd istniejących wyników dotyczących fal w stochastycznych ośrodkach warstwowych

#### 3.1. Wstęp

Zjawiska falowe należą do najczęściej występujących w przyrodzie. Wymienienie wszystkich rodzajów fal i wszystkich miejsc gdzie mogą one występować jest niemalże niemożliwe. Fale można klasyfikować w różnorodny sposób. Na przykład ze względu na ich naturę fizyczną możemy wyróżnić fale sprężyste lub elektromagnetyczne, ze względu na stopień ich określoności - fale deterministyczne i stochastyczne, ze względu na zachowanie w czasie - fale harmoniczne i zmienne nieregularnie w czasie, ze względu na formę równań które opisują te fale - fale liniowe i nieliniowe. Można wreszcie sklasyfikować fale uwzględniając miejsce w którym się one propagują - jako fale w ośrodkach (nieograniczonych) i fale w konstrukcjach (elementach konstrukcji, o określonym kształcie i skończonych wymiarach). Nie są to oczywiście wszystkie uznawane kryteria klasyfikacji fal, wystarczą one jednak do określenia zakresu niniejszej pracy.

Praca ta dotyczy zagadnień propagacji fal liniowych w ośrodkach lub elementach konstrukcji mających strukturę warstwową. Badane są fale zarówno w ośrodkach deterministycznych jak i stochastycznych. W pracy koncentrujemy się na analizie fal sprężystych, chociaż rozważane modele jednowymiarowe równie dobrze mogą opisywać na przykład fale elektromagnetyczne.

W pracy rozważono dwa rodzaje zagadnień. Pierwsze z nich to propagacja fal harmonicznnych w nieograniczonej płycie uwarstwionej. Drugim badanym zagadnieniem jest propagacja impulsów falowych w pręcie zbudowanym z segmentów. Tak więc badane są fale zarówno w ośrodkach jak i w konstrukcjach oraz fale harmoniczne i zmienne w czasie w sposób inny niż sinusoidalny. Te różne fizycznie zagadnienia mogły znaleźć się w jednej pracy dzięki wspólnej metodzie ich analizy - metodzie macierzy przejścia.

Literatura dotycząca zagadnienia propagacji fal jest ogromna; dziedzina ta jest dobrze zmatematyzowana. Istnieje wiele monografii dotyczących zagadnień ogólnych (na przykład [Whitham], [Coulson,Jeffrey], [Bland]), jak i szczególnych rodzajów fal (na przykład fal sprężystych [Kaliski 1966, 1986], fal akustycznych [Wesołowski 1989] czy elektromagnetycznych [Wainstein]). Istnieją również monografie dotyczące

fal stochastycznych (na przykład [Sobczyk 1982, 1984], [Klyatskin]), fal w ośrodkach warstwowych i fal sejsmicznych ([Kennett], [Brekhovskikh], [Ewing...], [Brillouin], [Tygel,Hubral], [Pilant], [Bath,Berkhout], [Ben-Menahem,Singh]) i fal w konstrukcjach ([Doyle]).

Praca ta dotyczy fal stochastycznych w ośrodkach warstwowych, znajduje się więc na styku kilku dziedzin związanych z propagacją fal. W tym rozdziale omówimy najważniejsze wyniki istniejące w literaturze a dotyczące zagadnień związanych z rozpatrywanymi w tej pracy. Pozwoli to umiejscowić nasze wyniki na tle głównego nurtu badań fal w ośrodkach warstwowych.

W paragrafie 3.2 przedstawimy najważniejsze sposoby opisu fal stochastycznych i najpopularniejsze metody ich badania. Punkt 3.3 poświęcony jest przeglądowi prac dotyczących fal w deterministycznych ośrodkach warstwowych a ostatni w tym rozdziale punkt 3.4 - analogicznym wynikiem dotyczącym fal stochastycznych.

### 3.2. Główne metody analizy fal stochastycznych

Stochastyczne pole falowe jest w ogólnym wypadku funkcją trzech argumentów:  $\mathbf{r}$ ,  $t$  i  $\gamma$ ,

$$\Psi = \Psi(\mathbf{r}, t, \gamma) \quad (3.1)$$

gdzie  $\mathbf{r} \in \mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}^3$  jest zmienną przestrzenną,  $t \in \mathbb{T} \subseteq \mathbb{R}^+$  oznacza czas, natomiast  $\gamma \in \Gamma$  jest zdarzeniem elementarnym ( $(\Gamma, F, P)$  jest przestrzenią probabilistyczną,  $F$  jest  $\sigma$ -ciałem zdarzeń a  $P$  - miarą probabilistyczną, por.[Sobczyk.1973a,1991]), opisującym losowy charakter zjawiska. Jak widać losowe pole falowe jest obiektem bardziej skomplikowanym niż pole deterministyczne. Bardziej skomplikowany jest też jego opis matematyczny, w tym również równania przez nie spełniane. Losowy charakter pola losowego może być spowodowany przez losowe właściwości ośrodka w którym fala się przemieszcza, przez losowy charakter wymuszenia generującego falę lub przez losowe warunki początkowe (brzegowe) propagacji. Dlatego też równanie falowe może być zapisane w następującej ogólnej postaci:

$$L(\mathbf{r}, t, \gamma) \Psi(\mathbf{r}, t, \gamma) = f(\mathbf{r}, t, \gamma), \quad \mathbf{r} \in \mathbb{D}, t \in \mathbb{T}, \quad (3.2)$$

z warunkiem początkowym:

$$\Psi(r, 0, \gamma) = \Psi_0(r, \gamma), \quad r \in \mathbb{D}, \quad (3.3)$$

i warunkiem brzegowym:

$$\Psi(r, t, \gamma) = \psi(r, t, \gamma), \quad r \in \partial\mathbb{D}, \quad t \in \mathbb{T}, \quad (3.4)$$

gdzie  $\mathbf{L}(r, t, \gamma)$  jest liniowym operatorem różniczkowym cząstkowym o współczynnikach w ogólnym przypadku zależnych od trzech zmiennych  $r, t, \gamma$ , uwzględniającym losowe własności ośrodka natomiast funkcje  $\mathbf{f}(r, t, \gamma)$ ,  $\Psi_0(r, \gamma)$  i  $\psi(r, t, \gamma)$  opisują odpowiednio wymuszenie generujące falę, jej warunki początkowe i brzegowe i również mogą być losowe. Przy ustalonym  $\gamma \in \Gamma$  równanie (3.2) jest równaniem falowym dla fali deterministycznej. Jak więc widać, równanie falowe dla fal stochastycznych jest w istocie rodziną równań o pewnych właściwościach (mierzalność względem trzeciego argumentu). Zdefiniowania wymaga zatem rozumienie znaku równości w równaniu (3.2). W tej pracy równość tę będziemy interpretowali w sensie "równości z prawdopodobieństwem 1" (por.[Sobczyk.1973a]). Oznacza to, że wymagać będziemy, by równanie (3.2) spełnione było dla wszystkich  $\gamma \in \Gamma'$ , gdzie  $\Gamma' \in F$  i  $P(\Gamma') = 0$ . Możliwe są również inne definicje równości w (3.2), na przykład równość średniowadratowa, według miary itd. (por.[Wentzel]), jednak równość "z prawdopodobieństwem 1" jest najsilniejsza; wynikają z niej pozostałe rodzaje równości. Dlatego też w sytuacji gdy możliwe jest przyjęcie takiej interpretacji symboli równości, jest to najkorzystniejsze.

Należy także powiedzieć co rozumiemy przez znajomość rozwiązania równania falowego (3.2). Jak wiemy, jest ono polem losowym (por.[Sobczyk.1982]), a zatem pełna informacja o nim oznacza znajomość miary probabilistycznej określonej na przestrzeni jego realizacji (czyli na przestrzeni pewnej klasy funkcji dwóch zmiennych  $\Psi(r, t)$ ). Zwykle jednak satysfakcjonuje nas częściowa informacja o rozwiązaniu równania falowego: znajomość jego jednowymiarowego rozkładu lub rozkładów wielowymiarowych, znajomość wartości średniej lub momentów wyższego rzędu a nawiązek dyspersyjny dla fali średniej. Stosunkowo wiele informacji o fali uzyskujemy mogąc przedstawić rozwiązanie równania (3.2) jako deterministyczną funkcję parametrów będących znanymi zmiennymi lub polami losowymi, występującymi w tym równaniu. Można wówczas, znając ich rozkłady, wyznaczyć dowolne charakterystyki probabilistyczne pola falowego. W takim przypadku będziemy mówili, że równanie falowe (3.2) zostało rozwiązane.

Powższe uwagi dotyczące rozumienia stochastycznego równania falowego i jego

rozwiązania pokazują, że już na tym początkowym etapie istnieje wiele sposobów potraktowania zagadnienia. Dlatego też literatura dotycząca fal stochastycznych zawiera wiele szczególnych problemów i metod ich rozwiązania, nie ma w niej jednak teorii uniwersalnych, pozwalających objąć całokształt zagadnienia. Istnieją jednak pewne metody pozwalające w sposób w miarę jednolity i poprawny matematycznie sformułować i następnie przeanalizować szersze klasy problemów dotyczących propagacji fal stochastycznych.

W chwili obecnej istnieje już kilka monografii dotyczących fal stochastycznych i tam można znaleźć omówienie większości ważnych rezultatów z tej dziedziny (por. na przykład [Sobczyk.1982,1984], [Klyatskin], [Tatarski], [Ishimaru]). W tym paragrafie podamy jedynie przykłady metod stosowanych w tych badaniach.

Jak wiemy, opis procesu stochastycznego lub pola losowego wymaga znajomości jego gęstości prawdopodobieństwa (jedno- lub wielowymiarowego). W wielu pracach próbowano znaleźć taką gęstość dla pola falowego lub pewnych wielkości je charakteryzujących (amplituda, liczba falowa itp.). Jest to stosunkowo łatwe gdy wielkościami losowymi są jedynie warunki początkowe lub funkcja wymuszająca. Wówczas rozwiązanie równania falowego jest liniową funkcją parametrów losowych i gęstość prawdopodobieństwa rozwiązania jest funkcją gęstości prawdopodobieństwa warunków początkowych lub wymuszenia. Postać tej funkcji zależy od postaci rozwiązania równania i jej skonstruowanie jest warunkowane przez możliwość rozwiązania odpowiedniego deterministycznego równania falowego (powstającego przy ustaleniu zdarzenia elementarnego  $\omega$ ). Bardziej skomplikowana sytuacja występuje, gdy współczynniki równania falowego są procesami (polami) losowymi. Wtedy rozwiązanie równania falowego jest nieliniową funkcją tych współczynników i skonstruowanie gęstości prawdopodobieństwa w ten sposób jest niemożliwe. Jednak w szczególnym przypadku gdy proces falowy jest dyfuzyjnym procesem Markowa (co wymaga modelowania go przy pomocy procesu stochastycznego a nie pola losowego), można uzyskać równanie różniczkowe dla jednowymiarowej gęstości prawdopodobieństwa jego rozkładu (równanie Fokkera-Plancka-Kołmogorowa).

Znajomość gęstości prawdopodobieństwa pozwala znaleźć między innymi takie wielkości charakteryzujące pole falowe jak jego wartość oczekiwana i momenty wyższych rzędów. Nie jest to jednak warunkiem koniecznym aby otrzymać wyrażenia dla momentów. W wielu sytuacjach możliwe jest znalezienie równań dla momentów bez znajomości gęstości prawdopodobieństwa rozwiązania równania falowego. Najczęściej jednak są to równania w których występują również łączne momenty poszukiwanej funkcji i losowych współczynników równania falowego. Ich wyeliminowanie wymaga

tworzenia nowych równań dla momentów wyższych rzędów co prowadzi do nieskończonych hierarchii równań dla momentów. Próba rozwiązania takiego układu równań wymaga obciążenia go przy zastosowaniu pewnej hipotezy zamykającej (por. na przykład [Adomian]).

Szczególnie korzystną sytuację mamy gdy współczynniki w liniowym równaniu falowym mają, ze względu na zmienną czasową, postać białego szumu. Wówczas możliwe jest otrzymanie dokładnych równań dla momentów dowolnego rzędu w postaci zamkniętej (por. [Kotulski.1984a,b]).

W wielu przypadkach operator falowy w równaniu (3.2) może być przedstawiony w postaci sumy operatora deterministycznego (będącego wartością oczekiwaną operatora  $L(r,t,\gamma)$ ) oraz losowej fluktuacji  $L_1(r,t,\gamma)$  o zerowej średniej:

$$L(r,t,\gamma) = L(r,t) + L_1(r,t,\gamma). \quad (3.5)$$

W takim przypadku możliwe jest znalezienie równań dla wartości oczekiwanej pola falowego oraz jego momentu rzędu drugiego (por. [Sobczyk.1982]). Równania takie zawierają szeregi operatorowe w których skład wchodzi funkcje momentowe współczynników operatora różniczkowego  $L_1(r,t,\gamma)$ . Pociąga to za sobą nałożenie pewnych warunków na fluktuacyjną część operatora stochastycznego które gwarantowałyby zbieżność występujących w tych równaniach szeregów. Równanie dla wartości średniej nosi nazwę równania Dysona a równanie dla funkcji kowariancji - Bethe-Salpetera. Były one zastosowane do badania fal stochastycznych i zagadnień statycznych w stochastycznych ośrodkach sprężystych na przykład w pracach [Beran,McCoy.1970] (wartość średnia) i [McCoy.1972] (drugi moment).

Szczególnie efektywna w zastosowaniu do zagadnień propagacji fal stochastycznych okazała się przybliżona wersja równania dla wartości średniej otrzymana przez Kellera. Jego metoda, nazwana metodą wygładzania, przy założeniu małej fluktuacji operatora falowego, pozwala ograniczyć liczbę wyrazów w szeregu Neumanna występującym w równaniu Dysona do kilku i przez to uzyskać proste równanie dla średnie pola falowego. Przykłady zastosowania tej metody można znaleźć w pracach [Keller,Karal].

Pojęciami które wiążą się z momentami są gęstość widmowa procesu stochastycznego (czyli transformata Fouriera funkcji korelacyjnej) oraz kumulanty procesu (pewne algebraiczne funkcje momentów). Również te wielkości znalazły zastosowanie przy badaniu fal w ośrodkach stochastycznych, w szczególności fal sejsmicznych (por. na

przykład [Pilant]), elektromagnetycznych (por. [Rytov], [Rytov,...]), akustycznych (por. [Tatarskii]) i falowania morskiego (por. [Swiesznikow]).

Jak wiadomo, pełen opis procesu stochastycznego lub pola falowego zawarty jest w mierze probabilistycznej określonej na przestrzeni funkcyjnej realizacji. Oczywiście, poza nielicznymi wyjątkami (np. miara Wienera) przedstawienie takiej miary w sposób analityczny jest niemożliwe. Często wygodniejszy do przedstawienia jest tak zwany funkcjonal charakterystyczny czyli transformata Fouriera miary probabilistycznej opisującej proces losowy lub pole losowe (por. [Skorochod]). W literaturze były podejmowane próby skonstruowania takiego funkcjonułu dla procesów falowych opisanych równaniami w których współczynniki są regularnymi procesami stochastycznymi (por. [Demienin,Koroliuk], [Kotulski,Sobczyk.1984]). W przypadku współczynników będących białym szumem ze względu na zmienną czasową możliwe jest skonstruowanie równania dla funkcjonułu charakterystycznego będącego równaniem różniczkowym w pochodnych funkcjonalnych (por. [Hopf], [Chow], [Kotulski.1984a,1989a]). Z równań takich otrzymać można komplet równań dla momentów rozwiązania dowolnego rzędu będących równaniami różniczkowymi cząstkowymi (por. [Kotulski.1984a, 1989a]).

Równaniem które odgrywa ważną rolę w analizie fal stochastycznych jest następujące równanie Helmholtza:

$$\nabla^2 \Psi(\mathbf{r},\gamma) + k^2(\mathbf{r},\gamma) \Psi(\mathbf{r},\gamma) = f(\mathbf{r},\gamma), \quad (3.6)$$

gdzie  $\nabla$  jest gradientem w  $\mathbb{R}^3$  a  $k^2(\mathbf{r},\gamma)$  oznacza liczbę falową która jest polem losowym, opisujące propagację harmonicznch fal skalarnych. Było ono przedmiotem wielu prac, w których podejmowano próby znalezienia jego rozwiązania perturbacyjnymi metodami przybliżonymi. Stosowano je przy założeniu słabej niejednorodności ośrodka, rozwijając rozwiązanie w szereg względem małego parametru. Są to między innymi: przybliżenie Borna, metoda optyki geometrycznej, metoda Rytowa, przybliżenie dyfuzyjne i szereg innych. Zostały one szczegółowo omówione w monografii [Sobczyk.1982]. Metody te z fizycznego punktu widzenia uwzględniają jedynie jednokrotne rozpraszanie fal na jednorodnościach. W literaturze są również prace w których wzięto pod uwagę także efekt wielokrotnego rozpraszania fali na niejednorodnościach (por. na przykład [Sobczyk.1976], [Kravcov,Saichev], [Abramovich,Gurbatov]). Powstały także prace w których badano rozpraszanie fal w dyskretnym ośrodku stochastycznym, gdzie czynnikiem rozpraszającym fale są inkluzje umieszczone w sposób stochastycznie nieregularny w



jednorodnym ośrodku (por. na przykład [Sobczyk.1976], [Liu], [Saatchi,Lang]). Oprócz rozpraszania fal wewnątrz ośrodka stochastycznego badano również odbicie fali od powierzchni stochastycznie niejednorodnej (por. [Sobczyk.1973b,1982]) lub półprzestrzeni wypełnionej ośrodkiem stochastycznym o nieregularnej strukturze (por. na przykład [Gambin]). Opracowano także stochastyczną metodę promieni, użyteczną w przypadku ośrodka słabo niejednorodnego (por. [Nair,White]).

Innym podejściem ułatwiającym analizę procesu falowego jest sprowadzenie różniczkowego równania różniczkowego do postaci całkowej i zastosowanie do jego badania metod stochastycznych równań całkowych (por. [Bharucha-Reid]). Ma to szczególne znaczenie w sytuacji problemów brzegowych z losowym warunkiem brzegowym. Problemy takie sprowadzone być mogą do postaci stochastycznego zagadnienia własnego (por. [vom Scheidt]).

Oprócz przedsięwzięć zmierzających do uzyskania rozwiązań równań falowych opisujących fale stochastyczne, podejmowano prace mające na celu dostarczenie o nich pewnych informacji jakościowych. Należą do nich badanie stabilności rozwiązań takich równań (por. na przykład [Skalmierski,Tylikowski], [Tylikowski], [Lindermann], [Kotulski.1991]), ich wrażliwości na zmiany parametrów [Socha] oraz poszukiwanie wykładników Lapunowa [Arnold,Wihstutz].

W literaturze dotyczącej fal stochastycznych dominują zagadnienia propagacji fal liniowych w ośrodkach stochastycznych. Nie wyczerpują one jednak całej rozważanej problematyki, co więcej, na znaczeniu zaczynają zyskiwać bardziej skomplikowane zagadnienia. Nie będziemy ich tu szczegółowo omawiać, wspomnijmy jednak, że pojawiły się już prace dotyczące nieliniowych fal stochastycznych (solitonów) - na przykład [Sobczyk.1992] i fal stochastycznych w ośrodkach aktywnych (por. [Kurylev]), to znaczy takich, których własności w sposób istotny zmieniają się w czasie (na przykład w turbulentnej atmosferze). Zagadnienia te będą musiały być uwzględnione w naszych przyszłych badaniach.

### 3.3. Determistyczne zagadnienia propagacji fal w ośrodkach warstwowych

Wśród ośrodków niejednorodnych występujących w przyrodzie do najprostszych pod względem sposobu ich matematycznego opisu należą ośrodki warstwowe. Są to takie ośrodki w których istnieje pewien wyróżniony kierunek, wzdłuż którego własności tego ośrodka zmieniają się w sposób istotny a równocześnie zmiany tych własności w kierunkach do niego prostopadłych są pomijalnie małe. Kierunek ten jest prostopadły do powierzchni (płaszczyzn) rozdzielających warstwy lub płaszczyzn w których te

własności są stałe. Oznacza to, że w równaniu opisującym fale w takim ośrodku, współczynniki zależą od jednej zmiennej przestrzennej. Jeżeli współczynniki te są funkcjami ciągłymi tej zmiennej to w literaturze nazywany jest on ciągłym ośrodkiem warstwowym. Z dyskretnym ośrodkiem warstwowym mamy do czynienia gdy współczynniki równań są kawałkami stałymi funkcjami wyróżnionej zmiennej przestrzennej. Oznacza to, że własności ośrodka, w przeciwieństwie do poprzedniego przypadku, mogą się zmieniać w sposób skokowy (występują nieciągłości stałych materiałowych). W obu przypadkach współczynniki w równaniu falowym mogą być funkcjami losowymi (odpowiednio: zminiającymi się w sposób ciągły lub kawałkami stałymi i posiadającymi nieciągłości typu skokowego).

Realne ośrodki fizyczne które można opisywać przy pomocy zdefiniowanych powyżej modeli ośrodków warstwowych występują w wielu sytuacjach. Szerokie zastosowanie znalazły modele ośrodków warstwowych do opisu skał i gruntów w geotechnice. Zarówno skały osadowe jak i wulkaniczne (często nasycone cieczą) na dużych obszarach ułożone są warstwami i modele ośrodków warstwowych doskonale je opisują. Również w atmosferze warstwy powietrza o różnych właściwościach (w odpowiednio dużej skali) mają strukturę laminarną. Podobnie jest w oceanach w których zasolenie i temperatura wody w sposób istotny zależy od głębokości. Również wytwory działalności ludzkiej jak płyty laminowane, niektóre elementy maszyn roboczych i narzędzi czy drobne piezoelektryczne układy drgające mają budowę warstwową. Można nawet powiedzieć, że wszelkie jednowymiarowe modele układów drgających lub przewodzących fale mają mniej lub bardziej naturalną strukturę ośrodka warstwowego. Dlatego też falom w ośrodkach warstwowych poświęcono w literaturze bardzo wiele uwagi. W tym punkcie omówimy na podstawie literatury najważniejsze wyniki dotyczące propagacji fal w deterministycznych ośrodkach warstwowych.

W przypadku zagadnień deterministycznych ogromna większość prac poświęconych falom w ośrodkach warstwowych dotyczy modeli dyskretnych (czyli fal w ośrodkach składających się z pewnej liczby warstw jednorodnych), chociaż istnieją też prace dotyczące ciągłych ośrodków warstwowych (por.np. [Richards.1974], [Ewing...]). Wiele zagadnień z tej dziedziny rozważano przy założeniu, że fale są płaskie w przestrzeni i harmoniczne w czasie. Dużą rolę odegrała tu metoda macierzy przejścia, którą zastosowano w badaniu zarówno fal powierzchniowych jak i objętościowych w dyskretnych ośrodkach warstwowych. Macierze przejścia uzyskiwano wypisując warunki ciągłości na powierzchni połączenia warstw. Liczba i forma tych warunków zależy od rodzaju materiałów z jakich wykonane są warstwy w ośrodku. I tak na powierzchni swobodnej ośrodka stałego spełnione muszą być dwa warunki zerowania

się składowych naprężenia. Na powierzchni rozdzielającej dwie warstwy ciała stałego mamy cztery warunki ciągłości: dwóch składowych przemieszczenia i dwóch składowych naprężenia. Na granicy cieczy i ciała stałego ciągle muszą być składowe normalne przemieszczenia i naprężenia. Od liczby warunków ciągłości zależy wymiar macierzy przejścia  $i$ , w wypadku różnych rodzajów materiału w ośrodku warstwowym, jej określoność.

W ośrodku warstwowym o warstwach położonych równolegle możliwe są dwie sytuacje: pierwsza, gdy fale propagują się w kierunku równoległym do warstw i druga, gdy kierunek propagacji fal jest prostopadły do ich powierzchni. W pierwszej sytuacji mamy do czynienia z falami powierzchniowymi, w drugiej - z falami objętościowymi. Pominiemy tutaj omawianie fal powierzchniowych (są one dokładnie przedstawione w wielu monografiach, na przykład [Bath,Berkhout], [Pilant], [Ewing,...]) a zajmiemy się falami objętościowymi w ośrodkach warstwowym, w których warstwy wykonane są z ciała stałego. Obraz fal w ośrodku warstwowym w tym przypadku zależy od dwóch czynników: rodzaju fali wymuszającej i kąta jej padania. Dla zerowego kąta padania fali zarówno fale podłużne (P) jak i poprzeczne (S) wywołują w warstwach ośrodka fale odbite i przechodzące jedynie tego samego typu co fala wymuszająca - zagadnienie jest jednowymiarowe a macierz przejścia ma wymiar  $2 \times 2$ . W przypadku niezerowego kąta padania mamy dwie sytuacje, nazwijmy je P i SV oraz SH. W sytuacji gdy kąt padania jest niezerowy a fala wymuszająca jest spolaryzowana podłużnie lub poprzecznie w płaszczyźnie symetrii ośrodka warstwowego zawierającej kierunek propagacji fali (P+SV), wówczas zarówno fale odbite jak i przechodzące są dwojakiego rodzaju: podłużnie i poprzecznie spolaryzowane a macierze przejścia mają wymiar  $4 \times 4$ . Jeżeli natomiast fala wymuszająca jest poprzecznie spolaryzowana w płaszczyźnie prostopadłej do wspomnianej płaszczyzny symetrii (SH), wówczas nie są generowane podłużne fale odbite i przechodzące a zadanie może być opisane dwuwymiarowymi macierzami przejścia (por. [Pilant]).

Rozwiązania problemów falowych otrzymane metodą macierzy przejścia stanowią podstawę analizy bardziej złożonych zagadnień. Przykładem może tu być badanie rozprzestrzeniania się fal sferycznych w ośrodku warstwowym, gdzie przeprowadza się rozwinięcie fali sferycznej na fale płaskie przy pomocy tzw. całki Sommerfelda (por. [Bath,Berkhout]). Za pomocą tej metody rozważano również propagację fal w ośrodkach warstwowym generowanych przez różnego rodzaju źródła (por. na przykład [Haskell.1964]).

W chwili obecnej zagadnienia falowe w których uwzględnia się rodzaj źródła generującego fale analizowane są jedną z dwóch metod: metodą modów normalnych lub

uogólnioną metodą promieni. Pozwalają one przedstawić rozwiązanie problemu w postaci analitycznej, jednak jego forma jest bardzo skomplikowana - zawiera ono całki i szeregi nieskończone. Mało jest problemów dla których uzyskanie wyników liczbowych nie wymaga obliczeń numerycznych.

Metoda modów normalnych korzysta z faktu, że rozwiązanie ogólne problemu falowego w ośrodku warstwowym może być przedstawione jako pewna kombinacja fal płaskich odpowiadających wszystkim modom mogącym propagować się w ośrodku. Odpowiednie częstości własne i liczby falowe można uzyskać rozwiązując odpowiednie zagadnienie własne, skonstruowane z wykorzystaniem warunków ciągłości na połączeniu warstw. Rozwiązanie przedstawiane jest w postaci transformaty Fouriera pewnego szeregu zawierającego częstotliwości modów (por. np. [Harkrider], [Newlands]).

Druga z metod korzysta z pojęcia promienia. W optyce geometrycznej promień światła jest zdefiniowany jako trajektoria prostopadła do frontu falowego. Podobnie można zdefiniować promień dla fali sprężystej. W metodzie promieni bada się przebieg promieni w ośrodku warstwowym a rozwiązanie zagadnienia w dowolnym punkcie przedstawia jako sumę wszystkich promieni docierających do tego punktu od źródła fali. Również w tym przypadku rozwiązanie przedstawione jest w postaci całek i szeregów (por. na przykład [Pao,Gajewski]). Metoda ta okazała się efektywna w analizie fal w ośrodkach warstwowym, w szczególności w bardziej skomplikowanym przypadku warstw zwiężających się (por. prace Pao, Zieglera, Borejki i ich współpracowników).

Odmienne problemy występują przy badaniu fal w nieskończonych ośrodkach warstwowym. W ośrodkach takich mogą istnieć pewne rodzaje fal (propagujących się lub stojących), nazywanych falami Floqueta lub Blocha, jeżeli ośrodek warstwowym jest periodyczny a jego parametry spełniają pewne warunki. Ma on wówczas własność filtrowania fal przepuszczając fale o określonych częstotliwościach a zatrzymując pozostałe. Zagadnienie wyznaczenia granic przepuszczalności takiego ośrodka dla fal harmonicznym i charakteryzacji propagujących się fal były badane między innymi w pracach: [Brillouin], [Mead], [Lee], [Silva], [Norris,Santosa], [Tassilly].

Zagadnieniem zbliżonym w swej istocie do propagacji fal w ośrodkach warstwowym, będącym pewnym jego uogólnieniem, są fale w ośrodkach zbudowanych z upakowanych kostek sześciennych. Ośrodek taki odpowiada ośrodkowi warstwowemu z warstwami niejednorodnymi, w których jednorodne podobszary są kostkami. Fale w takim ośrodku były badane między innymi w pracach [Aboudi] i [Berlyand,Kozlov].

Oprócz prac w których systematycznie rozwinięto teorię fal w ośrodkach warstwowym, stanowiących podstawę treści szeregu monografii (por. na przykład

[Ewing,...], [Pilant] i innych), istnieje wiele prac w których badane są pewne szczególne, często bardzo interesujące zagadnienia dotyczące propagacji fal w ośrodkach warstwowych (por. na przykład [Wesołowski]). Należą do nich również prace w których fale badane są w sposób eksperymentalny lub numeryczny. Na uwagę zasługuje tu komputerowa wizualizacja fal w ośrodku warstwowym [Borejko, Rossmanith, Wei], pokazująca powstające na granicy ośrodków sprężystych fale odbite i przechodzące.

Odrębną klasę zagadnień stanowią fale w konstrukcjach (por. na przykład [Doyle]). Dziedzina ta jest stosunkowo nowa i, w porównaniu z falami w ośrodkach warstwowych, mało zbadana, zwłaszcza że struktura warstwowa nie jest typowa dla elementów konstrukcji. Można ją jednak wyodrębnić w niektórych elementach narzędzi i maszyn roboczych a także w torze kolejowym (ma on strukturę okresową). Istotne jest tu również, że fale w takich elementach konstrukcji na ogół nie są harmoniczne - wywołane są bowiem impulsami lub wymuszeniami ruchomymi.

Propagacja impulsów falowych w elementach konstrukcji była analizowana w kontekście zastosowań technicznych: optymalizacji konstrukcji i planowania badań eksperymentalnych. Zagadnienia dotyczące impulsów falowych w wielosegmentowych prętach można prześledzić na przykładzie prac Lundberga i jego współpracowników. Badano własność przewodzenia impulsów przez taki pręt i optymalizowano te własności ze względu na kształt impulsu wymuszającego i własności segmentów pręta ([Lundberg, Gupta, Andersson], [Andersson, Lundberg]). Opracowano metodę określania własności materiału pręta ([Lundberg, Blanc]) i przebiegu impulsu w pręcie ([Lundberg, Carlsson, Sundin]) na podstawie dwupunktowych pomiarów naprężenia w pręcie. Przeprowadzono bilans energii w procesie przechodzenia impulsu przez pręt ([Beccu, Lundberg, 1987, 1990]). W modelu pręta przewodzącego impulsy falowe uwzględniono również tarcie ([Nordlund, Lundberg]). Wszystkie te badania przeprowadzono jednak przy założeniu jednowymiarowości i "prostoliniowości" modelu, co oznacza, że na spójności segmentów przyjęto warunek ciągłości przemieszczeń i naprężeń. Zaproponowany model opisuje jedynie propagację fal podłużnych; uwzględnienie fal poprzecznych wymagałoby zastosowania bardziej złożonego modelu (np. belki) jako elementu przewodzącego impuls falowy, co jednak znacznie skomplikowałoby analizę zagadnienia, szczególnie przy "krzywoliniowych" połączeniach segmentów (por. [Horner, White], [Tassilly], [Gopalakrishnan,...]).

### 3.4. Fale w stochastycznych ośrodkach warstwowych

Jak wiadomo, zagadnienia propagacji fal stochastycznych pojawiły się w literaturze stosunkowo niedawno. Również fale stochastyczne w ośrodkach warstwowych w porównaniu do zagadnień deterministycznych są dziedziną nową i nie usystematyzowaną. Powstało już jednak szereg prac dotyczących tych zagadnień.

W przeciwieństwie do ośrodka deterministycznego, w stochastycznym ośrodku warstwowym istnieje duże podobieństwo między modelem dyskretnym i ciągłym. O ile dla ustalonej realizacji ośrodka warstwowego różnią się one bardzo, o tyle w ustalonym punkcie ich opis probabilistyczny może być identyczny (znajdowanie się tam materiału o danych własnościach z zadaniem prawdopodobieństwem). Dlatego też w pracach dotyczących fal stochastycznych w ośrodkach warstwowych ośrodki uwarstwione w sposób ciągły są licznie reprezentowane. Przegląd wyników uzyskanych dla fal w stochastycznych ośrodkach warstwowych rozpoczniemy jednak od modeli dyskretnych.

Ośrodkiem warstwowym, który ma szczególną własność: albo fale stochastyczne mogą się w nim propagować bez przeszkód, albo w ogóle nie mogą się propagować, jest półprzeźroczysty o budowie okresowej. Fale w takim ośrodku noszą nazwę fal Floquet'a i mają szczególną postać:

$$u(x) = v(x) e^{iqx}, \quad (3.7)$$

gdzie  $v(x)$  jest funkcją okresową:

$$v(x) = v(x + a); \quad (3.8)$$

$a$  jest okresem funkcji  $v(\cdot)$  natomiast  $q$  jest liczbą falową Floquet'a. W pracach [Ziegler.1977] i [Krumhansl] przeanalizowano warunki wystąpienia fali Floquet'a i własności tej fali w przypadku ośrodka periodycznego w którym własności materiałów w warstwach mogą być zmiennymi losowymi. W pracy [Becus.1970] również struktura geometryczna ośrodka warstwowego (grubości warstw) mogła być losowa - założono, że uśrednione warstwy mają charakter periodyczny. Posługując się teorią procesów Markowa (proces telegraficzny) uzyskano równania dla fali średniej w takim ośrodku i następnie zbadano warunki istnienia jego rozwiązania typu Floquet'a.

W pracy [Ziegler.1969] przeprowadzono uśrednienie własności sprężystego ośrodka warstwowego metodą wygładzania Kellera otrzymując pewien (przybliżony) ośrodek efektywny a następnie zbadano propagację fal sprężystych typu P i S w takim ośrodku

w kierunku prostopadłym i równoległym do uwarstwienia, a więc w sytuacji gdy nie ma wzajemnego oddziaływania tych fal.

W dyskretnych ośrodkach warstwowych występuje zjawisko wielokrotnego odbijania fal na powierzchniach nieciągłości. Takiemu problemowi poświęcone są prace [Zolotukhina], [Zolotukhina,...] i [Robinson]. Przedstawiono w nich stochastyczne modele ośrodków warstwowych i następnie zbadano statystyczne własności obserwowanego pola falowego, powstałego w wyniku zsumowania się efektów odbicia fali początkowej na połączeniach warstw. W pracach [Zolotukhina], [Zolotukhina,...] założono, że w ośrodku warstwowym na spójności warstw występują ograniczone powierzchnie całkowicie odbijające fale; poza nimi fale przechodzą między warstwami bez przeszkód. Uzyskane charakterystyki probabilistyczne pola rozproszonego w takim ośrodku, mimo wielu założeń upraszczających model, miały bardzo skomplikowaną postać. W pracy [Robinson] rozważono model jednowymiarowy ośrodka stochastycznego, w którym punkty (chwile) odbicia fali tworzą pewien szereg czasowy a odbierany sygnał - sumę impulsów indeksowanych tym szeregiem. Metoda ta pozwoliła opisać transport energii impulsu w takim ośrodku.

W literaturze rozważano wiele innych zagadnień poświęconych falom w dyskretnych stochastycznych ośrodkach warstwowych. W większości poświęcone one były falom skalarnym lub zagadnieniom jednowymiarowym. Nie będziemy ich tu szczegółowo omawiać. Wymienimy jedynie kilka problemów analizowanych w literaturze aby zaprezentować możliwe kierunki badań. I tak na przykład w pracach [Hodges] i [McKenna,Morrison] badano współczynniki odbicia (przejsicia) a w pracy [Menke] - współczynnik tłumienia dla fal w stochastycznych ośrodkach warstwowych. Z kolei prace [Gerzenshtein, Vasiljev], [McKenna,Morrison] zawierają rozważania dotyczące wyrażeni dla momentów fal w takich ośrodkach. Praca [Gopinath] poświęcona jest identyfikacji parametrów warstwowego ośrodka dielektrycznego - średniej grubości warstwy i wartości średniej stałej dielektrycznej. W kilku pracach zbadano też zjawisko lokalizacji Andersona (por. na przykład [Ishii], [Hodges], [Scott]) czyli obserwowanego również w stochastycznych ośrodkach warstwowych zatrzymywania części energii fali na skutek wielokrotnych jej odbić.

Jak pokazują powyższe przykłady, zagadnienia analizowane w teorii fal stochastycznych w ośrodkach warstwowych daleko wykraczają poza tradycyjnie badane w zastosowaniach metod stochastycznych wartość oczekiwaną i wariancję.

W odróżnieniu od zagadnień deterministycznych, w przypadku stochastycznych ośrodków warstwowych powstaje również wiele prac w których rozważa się ośrodki uwarstwione w sposób ciągły. Omówimy teraz niektóre typowe problemy rozwiązywane w

literaturze dla takich ośrodków.

Sporo prac poświęconych zostało zagadnieniu przejścia fali harmonicznej przez stochastycznie niejednorodną warstwę w której niejednorodności ośrodka zmieniają się w sposób ciągły (lub odbicia fali od takiej warstwy). Zbadano w nich wiele szczególnych problemów dotyczących tego zagadnienia. Na przykład w pracy [Papanicolaou,1971] znaleziono wyrażenie dla gęstości prawdopodobieństwa współczynnika odbicia  $a$  w pracy [Keller,Papanicolaou] - przybliżoną wartość średniokwadratowego współczynnika odbicia (przejścia) fali przez warstwę w zależności od jej grubości. W pracy [Abramovich,Gurbatov] zbadano własności probabilistyczne fali odbitej od takiej płyty i wpływ zjawiska wielokrotnego odbicia na jej intensywność. Z kolei w pracy [Babkin,Klyatskin] znaleziono równanie spełniane przez gęstość prawdopodobieństwa intensywności fali wewnątrz warstwy gdy jej grubość dąży do nieskończoności.

W pracach [Kohler,Papanicolaou,1973,1974] rozważono zagadnienie wypromieniowania fali harmonicznej generowanej przez punktowe źródło znajdujące się wewnątrz stochastycznie niejednorodnej warstwy. Znaleziono wyrażenia dla wartości oczekiwanej i wariancji energii całkowitej i strumienia energii w zależności od grubości warstwy, położenia źródła fali i punktu obserwacji.

Wiele prac poświęcono badaniu zagadnienia propagacji impulsów falowych w stochastycznych ośrodkach warstwowych. Dotyczą one fal akustycznych, głównie w ośrodkach w których niejednorodności opisane są ciągłymi funkcjami losowymi. Rozróżnić tu należy dwa przypadki: półprzestrzeni stochastycznej i warstwy (płyty). W przypadku półprzestrzeni zawsze następuje całkowite odbicie fali (nie ma fali biegnącej do nieskończoności w stochastycznej półprzestrzeni - poza wyjątkiem ośrodka okresowego, gdzie może wystąpić fala Floquet'a), dlatego też badana jest głównie fala odbita. Przykładem mogą tu być prace [Burridge,Papanicolaou,White] oraz [Burridge,Papanicolaou,Sheng,White] gdzie badane są statystyczne własności odbitego impulsu akustycznego. Pokazano, że dla takiej fali ma miejsce twierdzenie graniczne i, przy pewnych warunkach nałożonych na szerokość impulsu oraz korelację niejednorodności w warstwie, fala odbita ma asymptotycznie rozkład Gaussa.

Odmienne wygląda sytuacja w przypadku skończonej warstwy, gdy z obu jej stron znajduje się ośrodek jednorodny. Wówczas może nastąpić również przejście fali przez warstwę o losowych własnościach. Zagadnienie odbicia impulsu akustycznego (fala płaska) od warstwy o losowych własnościach leżącej na jednorodnej półprzestrzeni badane było w pracy [Kohler,1986]. Otrzymano w niej równanie typu Fokkera-Plancka dla współczynnika odbicia impulsu. Podobne zagadnienie lecz dla impulsu



pochodzącego ze źródła punktowego (fala kulista) badane było w pracy [Asch,Kohler, Papanicolaou,Postel,White]. Rozważono w niej dodatkowo pewne zagadnienia odwrotne które umożliwiają określanie własności ośrodka na podstawie znajomości własności statystycznych odbitej fali.

Wartym podkreślenia jest fakt, że wszystkie wymienione prace dotyczące fal w ciągłych ośrodkach warstwowych korzystają z twierdzeń granicznych, głównie z różnych wersji twierdzenia Hasminskiego (por. [Hasminski]), dotyczącego asymptotycznej zbieżności rozwiązań pewnej klasy równań stochastycznych do dyfuzyjnego procesu Markowa. Istotną rolę odgrywają w nich również obliczenia komputerowe, zarówno jako metoda numerycznego rozwiązywania równań różniczkowych lub obliczania całek jak i sposób symulacyjnego znajdowania rozwiązań zagadnień stochastycznych.

### 3.5. Cel i zakres pracy

Powyższy przegląd istniejących wyników w dziedzinie fal w ośrodkach warstwowych pokazuje, że o ile stan badań zagadnień deterministycznych jest zaawansowany i usystematyzowany, o tyle w zagadnieniach stochastycznych brak jest jeszcze systematycznego podejścia, szczególnie w przypadku dyskretnych ośrodków warstwowych.

Celem tej rozprawy jest uogólnienie na przypadek stochastyczny i systematyczne przedstawienie metody macierzy przejścia jako narzędzia analizy fal w ośrodkach warstwowych. W naszym ujęciu metoda ta ma zastosowanie zarówno do zagadnień stacjonarnych (fal harmoniczných) jak i niestacjonarnych (impulsy falowe). Staje się też naturalnym sposobem homogenizowania (z użyciem odpowiednich twierdzeń granicznych) ośrodka warstwowego w procesie propagacji fal. Jest to przy tym jednolite, precyzyjne matematycznie ujęcie problemu, pozwalające w analogiczny sposób traktować zagadnienia deterministyczne i stochastyczne. Pozwala ono nie tylko znaleźć parametry efektywne ośrodka lecz także zidentyfikować ten ośrodek, to znaczy ustalić, jakie parametry efektywne są niezbędne do opisu zagadnienia i jaka jest ich rola w równaniach efektywnych (np. określić rodzaj izotropii ośrodka efektywnego). Zarówno schemat metody jak i dobór rozważanych konkretnych zagadnień jest taki, by możliwe było przeprowadzenie trzech etapów rozumowania: sformułowanie zagadnienia z wyszczególnieniem założeń dotyczących modelu problemu mechanicznego oraz własności probabilistycznych występujących w nim parametrów losowych, przeprowadzenie jego analizy matematycznej oraz przedyskutowanie uzyskanych wyników

z użyciem metod numerycznych, w tym również symulacji komputerowej.

Metoda macierzy przejścia została wprowadzona na przykładzie trzech konkretnych zagadnień z dziedziny propagacji fal. Są to: fale harmoniczne w jednowymiarowym ośrodku warstwowym (płyce nieskończonej), płaskie fale sprężyste w dwuwymiarowym ośrodku warstwowym (fale P i SV w płycie nieskończonej) oraz impulsy falowe w pręcie (jednowymiarowym ośrodku warstwowym). We wszystkich tych wypadkach sformułowano problem w terminach macierzy przejścia, uzyskując postać macierzy przejścia dla pojedynczej warstwy oraz, w przypadku okresowym, dla pary warstw wykonanych z dwóch różnych materiałów. Znalaziono wyrażenia dla parametrów efektywnych w deterministycznym przypadku okresowym (dwie warstwy w panelu powtarzającym się okresowo lub dowolna ich liczba) oraz w przypadku stochastycznym. Zbadano numerycznie szybkość zbieżności ośrodka warstwowego do ośrodka zhomogenizowanego posługując się odpowiednią dla danego przypadku miarą zbieżności. Ponadto w każdym z rozważanych przypadków uzyskano, na podstawie rozważań teoretycznych i obliczeń numerycznych, szereg interesujących wniosków. Oto kilka najważniejszych z nich.

W przypadku harmonicznej fali jednowymiarowej zbadano szybkość zbieżności ośrodka stochastycznego do zhomogenizowanego w zależności od losowych własności uwarstwienia materiału. Wykazano, że współczynnik odbicia fali zależy od stopnia losowości ośrodka. Podobny wniosek uzyskano w niestacjonarnym przypadku impulsów, falowych. Dla fali jednowymiarowej pokazano, jak w ośrodku warstwowym powstaje lokalizacja fali: w przypadku całkowitego odbicia od półprzestrzeni - w warstwie przy brzegu a w przypadku przechodzenia fali (impulsu falowego) przez układ warstw - wewnątrz ośrodka.

W przypadku dwuwymiarowym wyprowadzono (metodą dokładną, zarówno dla ośrodka stochastycznego jak i okresowego deterministycznego) wyrażenia dla stałych efektywnych niezbędnych do opisu fal sprężystych w tym ośrodku oraz zbadano fale jakie propagują się w ośrodku zhomogenizowanym. Porównano też szybkości zbieżności ośrodka okresowego i losowego do ośrodka zhomogenizowanego przy rosnącej gęstości uwarstwienia w płycie. Zbadano własności ośrodka zhomogenizowanego w zależności od wartości parametrów składników kompozytu występujących w modelu.

Wyniki obliczeń numerycznych przeprowadzonych w pracy zilustrowano na 56 rysunkach.

## 4. Jednowymiarowe fale harmoniczne.

### 4.1. Wstęp

W rozdziale tym zajmiemy się analizą jednowymiarowych fal harmonicznych w dyskretnym ośrodku warstwowym, to znaczy takim, w którym własności materiału zależą tylko od jednej zmiennej przestrzennej i są odcinkami stałe. W obszarach jednorodności ośrodka fale harmoniczne opisane są równaniem Helmholtza, w którym to równaniu jedynym parametrem charakteryzującym falę jest liczba falowa  $k$ . Rozważając falę w większym obszarze, obejmującym kilka warstw (a więc zawierającym nieciągłości materiału), musimy założyć dodatkowe warunki ciągłości fali na powierzchniach połączenia materii. Zakładamy mianowicie, że rozwiązanie równania Helmholtza  $\Psi(x)$  jest ciągle przy przejściu od warstwy do warstwy (to znaczy sklejamy rozwiązania równań Helmholtza z różnymi liczbami falowymi  $k$ ) i ponadto ciągle jest gradient tego rozwiązania pomnożony przez pewną wagę (oznaczymy ją  $\eta$ ), również zależną od warstwy (to znaczy będącą funkcją kawałkami stałą).

Tak postawione zagadnienie można oczywiście sformułować w następujący sposób. Założmy mianowicie, że rozważamy równanie Helmholtza w którym liczba falowa jest funkcją kawałkami stałą,  $k = k(x)$ , przy czym punkty skoków tej funkcji odpowiadają punktom połączenia warstw. Poszukujemy rozwiązania takiego równania w klasie funkcji ciągłych, dla których ciągle jest również ważony gradient rozwiązania  $\eta(x)\frac{d\Psi(x)}{dx}$ . Sformułowanie takie jest równoważne pierwotnemu postawieniu zadania w którym dokonywaliśmy sklejania rozwiązań równań Helmholtza o stałej liczbie falowej. W tej pracy zajmiemy się jednak problemem w pierwszym ujęciu, które aczkolwiek mniej eleganckie, jest bardziej efektywne w zastosowaniach.

Równanie falowe Helmholtza może stanowić model kilku rodzajów fal skalarnych. Zależy to od doboru definicji wagi  $\eta$  i rozwiązania  $\Psi$  ( $k$  jest zawsze zdefiniowane jako iloraz częstotliwości fali  $\omega$  i prędkości fali w ośrodku  $c$ ). I tak na przykład dla fal akustycznych pole  $\Psi$  jest ciśnieniem a waga  $\eta$  - odwrotnością gęstości ośrodka. Analogicznie dla fal elektromagnetycznych pole  $\Psi$  odpowiada natężeniu pola elektrycznego ( $E$ ) a wadze  $\eta$  - prędkość fali dzielona przez przenikalność magnetyczną ośrodka.

W tej pracy przedmiotem naszego zainteresowania są fale sprężyste w ośrodku

stałym. W przypadku takich fal pole  $\Psi$  oznacza przemieszczenie ośrodka a waga  $\eta$  - moduł Younga tego ośrodka. Falami takimi zajmujemy się bardziej szczegółowo w dalszej części tego rozdziału.

W następnym paragrafie przedstawimy dokładne sformułowanie zagadnienia propagacji harmonicznycch fal skalarnych w stochastycznym ośrodku warstwowym i uzyskamy postać macierzy przejścia dla tak postawionego zagadnienia. W paragrafach 4.3 i 4.4 omówimy wpływ okresowości losowego ośrodka warstwowego na zachowanie się fali i uzyskamy wzory dla efektywnych parametrów ośrodka używając prawa wielkich liczb dla iloczynów macierzy jako metody homogenizacyjnej. W paragrafie 4.5 przedstawimy przykład numeryczny ilustrujący zbieżność procedury homogenizacyjnej dla fal sprężystych. Kolejny paragraf 4.6 poświęcony jest zaprezentowaniu kilku bardziej skomplikowanych modeli stochastycznych ośrodków warstwowych a paragrafy 4.7 i 4.8 analitycznemu i numerycznemu zbadaniu ich zbieżności do ośrodka jednorodnego w przypadku nieograniczonego zagęszczenia warstw w badanym ośrodku.

## 4.2. Sformułowanie zagadnienia w przypadku jednowymiarowym.

### Konstrukcja macierzy przejścia.

Rozważmy harmoniczną skalarną falę propagującą się przez nieskończoną płytę zbudowaną periodycznie z dwóch rodzajów materiału. Zakładamy, że kierunek propagacji fali, zgodny z osią współrzędnych  $x$ , jest prostopadły do powierzchni płyty i do powierzchni połączenia warstw wewnątrz tej płyty. Parametry charakteryzujące własności każdego z materiałów (fali w każdym z materiałów) będą oznaczone indeksami 0 (materiał otaczający płytę), 1 i 2 (pierwszy i drugi materiał płyty). (rysunek D1 w Dodatku).

Fala w otoczeniu płyty i w każdej z warstw wewnątrz płyty jest opisana przez następujące równanie Helmholtza:

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} + k_m^2\Psi = 0, \quad m = 0, 1, 2, \quad (4.1)$$

gdzie  $k_m$  są liczbami falowymi w odpowiednim ośrodku. Na powierzchniach połączenia warstw są spełnione następujące dwa warunki ciągłości:

$$[\Psi] = 0, \quad \left[ \eta \frac{d\Psi}{dx} \right] = 0, \quad (4.2)$$

to znaczy przemieszczenie i ważony gradient przemieszczenia (naprężenie w przypadku fal sprężystych) nie mogą mieć skoku wartości ( $\eta$  jest parametrem przyjmującym wartości  $\eta_0, \eta_1, \eta_2$  w odpowiednim ośrodku). Pole falowe w każdym obszarze wewnątrz płyty jest sumą fali biegnącej w lewo i fali biegnącej w prawo; w ośrodku otaczającym występuje fala wymuszająca i odbita (w obszarze  $x < 0$ ) i fala przechodząca (w obszarze  $x > d$ , gdzie  $d = L + l$  jest grubością płyty). Załóżmy w końcu, że płyta jest zbudowana z  $N$  par warstw, każda o grubości  $\Delta_j$  (materiał 1) i  $\delta_j$  (materiał 2),  $j = 1, 2, \dots, N$ , zakończonych dodatkową warstwą wykonaną z materiału 1 o grubości  $\Delta_{N+1}$ , w ten sposób, że  $\sum_1^{N+1} \Delta_j = L$ ,  $\sum_1^N \delta_j = l$ . Wówczas pole falowe w płycie (pole przemieszczeń) może być przedstawione w następującej postaci:

$$\Psi(x) = A_m^j e^{ik_m x} + B_m^j e^{-ik_m x}, \quad (4.3)$$

gdzie

$$m = 0, \quad j = 0 \quad \text{dla } x < 0,$$

$$m = 1 \quad \text{dla } \sum_{k=1}^j (\Delta_k + \delta_k) < x < \sum_{k=1}^{j+1} \Delta_k + \sum_{k=1}^j \delta_k, \quad j=0, 1, \dots, N,$$

$$m = 2 \quad \text{dla } \sum_{k=1}^j \Delta_k + \sum_{k=1}^{j-1} \delta_k < x < \sum_{k=1}^j (\Delta_k + \delta_k), \quad j=1, \dots, N,$$

$$m = 0, \quad j = f \quad \text{dla } x > L + l; \quad B_0^f \equiv 0,$$

oraz z definicji przyjmujemy w zapisie:

$$\sum_{k=1}^0 \Delta_k = 0, \quad \sum_{k=1}^0 \delta_k = 0. \quad (4.4)$$

Analizując propagację fal przez płytę znajdujemy związek między amplitudą  $A_0^0$  fali padającej (wymuszającej) i amplitudami  $B_0^0$  i  $A_0^f$  fali odbitej i fali przechodzącej. W tym celu używamy warunków ciągłości (4.2) kolejno dla wszystkich połączeń warstw. W wyniku otrzymujemy zbiór równań algebraicznych które można zapisać w postaci macierzowej jako:

$$\mathbf{T}_0(0) \mathcal{A}_0 = \mathbf{T}_1(0) \mathcal{A}_{1,1}, \quad (4.5)$$

$$\mathbf{T}_1 \left( \sum_{k=1}^j \Delta_k + \sum_{k=1}^{j-1} \delta_k \right) \mathcal{A}_{j,1} = \mathbf{T}_2 \left( \sum_{k=1}^j \Delta_k + \sum_{k=1}^{j-1} \delta_k \right) \mathcal{A}_{j,2}, \quad j=1, \dots, N, \quad (4.6)$$

$$\mathbf{T}_2 \left( \sum_{k=1}^j \Delta_k + \sum_{k=1}^j \delta_k \right) \mathcal{A}_{j,2} = \mathbf{T}_1 \left( \sum_{k=1}^j \Delta_k + \sum_{k=1}^j \delta_k \right) \mathcal{A}_{j+1,1}, \quad j=1, \dots, N, \quad (4.7)$$

$$\mathbf{T}_1(L+l) \mathcal{A}_{N+1,1} = \mathbf{T}_0(L+l) \mathcal{A}_f \quad (4.8)$$

gdzie

$$\mathbf{T}_m(x) = \begin{bmatrix} e^{ik_m x} & e^{-ik_m x} \\ ip_m e^{ik_m x} & -ip_m e^{-ik_m x} \end{bmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{T}_m(0) \mathbf{Q}_m(x), \quad (4.9)$$

$$\mathbf{T}_m(0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ ip_m & -ip_m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_m(x) = \begin{bmatrix} e^{ik_m x} & 0 \\ 0 & e^{-ik_m x} \end{bmatrix}, \quad (4.10)$$

$$p_m = \eta_{\omega, k_m}, \quad m = 0, 1, 2. \quad (4.11)$$

$$\mathcal{A}_{j,m} = \begin{bmatrix} A_m^j \\ B_m^j \end{bmatrix}, \quad j=1,\dots,N, \quad m=1,2, \quad \mathcal{A}_0 = \begin{bmatrix} A_0^0 \\ B_0^0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{A}_f = \begin{bmatrix} A_0^f \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (4.12)$$

Możemy teraz wyeliminować wektory  $\mathcal{A}_{j,m}$ ,  $j=1,2,\dots,N$ ,  $m=1,2$  z powyższego układu równań. Uzyskujemy wówczas równanie wiążące  $A_0^0$ ,  $B_0^0$  i  $A_0^f$  w następującej postaci:

$$\mathcal{A}_0 = T_0^{-1}(0) \prod_{j=1}^N \mathcal{E}_j T_1(-\Delta_{N+1}) T_1^{-1}(0) T_0(L+l) \mathcal{A}_f, \quad (4.13)$$

gdzie

$$\mathcal{E}_j = T_1(-\Delta_j) T_1^{-1}(0) T_2(0) T_2^{-1}(\delta_j). \quad (4.14)$$

Ponieważ

$$T_m^{-1}(x) = Q_m(-x) T_m^{-1}(0), \quad m=1,2, \quad (4.15)$$

macierz przejścia (4.14) może być zapisana jako:

$$\mathcal{E}_j = T_1(0) Q_1(-\Delta_j) T_1^{-1}(0) T_2(0) Q_2(-\delta_j) T_2^{-1}(0). \quad (4.16)$$

Używając jawnej postaci macierzy odwrotnej  $T_m^{-1}(0)$ ,  $m=0,1,2$ , otrzymujemy następującą postać macierzy przejścia dla pojedynczej warstwy:

$$T_m(0) Q_m(-x) T_m^{-1}(0) = \begin{bmatrix} \cos k_m x, & \frac{1}{p_m} \sin k_m x \\ -p_m \sin k_m x, & \cos k_m x \end{bmatrix}, \quad (4.17)$$

i dla pary warstw:

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_j^e &= \begin{bmatrix} \cos k_1 \Delta_j & \frac{1}{p_1} \sin k_1 \Delta_j \\ -p_1 \sin k_1 \Delta_j & \cos k_1 \Delta_j \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \cos k_2 \delta_j & \frac{1}{p_2} \sin k_2 \delta_j \\ -p_2 \sin k_2 \delta_j & \cos k_2 \delta_j \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} \cos k_1 \Delta_j * \cos k_2 \delta_j - \frac{p_2}{p_1} \sin k_1 \Delta_j * \sin k_2 \delta_j, \\ -p_1 \sin k_1 \Delta_j * \cos k_2 \delta_j - p_2 \cos k_1 \Delta_j * \sin k_2 \delta_j, \\ \frac{1}{p_2} \cos k_1 \Delta_j * \sin k_2 \delta_j + \frac{1}{p_1} \sin k_1 \Delta_j * \cos k_2 \delta_j \\ -\frac{p_1}{p_2} \sin k_1 \Delta_j * \sin k_2 \delta_j + \cos k_1 \Delta_j * \cos k_2 \delta_j \end{bmatrix} \quad (4.18)
\end{aligned}$$

Równanie (4.13) pozwala obliczyć amplitudy fal również wówczas, gdy parametry  $k$ ,  $\eta$  i  $p$  są różne dla każdej warstwy (na przykład, stałe materiałowe w każdej z warstw są zmiennymi losowymi). W takim wypadku w wyrażeniu (4.18) dla  $\mathcal{E}_j^e$  zamiast  $k_m, p_m$ ,  $m=1,2$ , powinniśmy napisać  $k_m^j, p_m^j$ ,  $m = 1,2$ , dla  $j=1,2,\dots,N$ .

Równanie (4.13) jest w istocie rozwiązaniem analitycznym problemu propagacji fal w ośrodku warstwowym. Znając je oraz własności statystyczne (rozkłady) występujących w macierzach przejścia zmiennych losowych, można wyrazić w sposób analityczny rozkłady fali odbitej i przechodzącej przez płytę a także znaleźć ich momenty dowolnego rzędu. Niestety, w ogólnym przypadku jest to zadanie bardzo trudne rachunkowo.

### 4.3. Zagadnienie w okresowym ośrodku stochastycznym

W wielu pracach z dziedziny fizyki i matematyki zaobserwowano, że ośrodek uwarstwiony (stochastyczny lub deterministyczny) ma własność uśredniania propagujących się w nim fal (lub, bardziej precyzyjnie: pewnych parametrów tych fal). Zaprezentowane w tej pracy sformułowanie zagadnienia propagacji fal w ośrodku warstwowym w języku macierzy przejścia umożliwia sprecyzowanie tej intuicyjnej koncepcji uśredniania w sposób matematyczny. Można to zrobić zarówno w przypadku ośrodków deterministycznych jak i stochastycznych (tj. takich w których grubości warstw, liczby falowe lub wagi  $\eta$  są deterministyczne lub losowe).



We wzorze (4.13) macierze  $\mathcal{L}_j^{\xi}$  opisują przejście (i zmiany) fali przez jedną ( $j$ -tą) parą warstw; przejście fali przez całą płytę  $i$ , co za tym idzie, uśrednienie fali, jest opisane przez iloczyn macierzy przejścia. Jak widać z wzoru (4.18), macierze  $\mathcal{L}_j^{\xi}$  są unimodularne, to znaczy ich wyznaczniki są równe jedności nawet gdy zawarte w nich parametry są zmiennymi losowymi.

Pewne wiadomości dotyczące asymptotycznego zachowania się iloczynu macierzy przejścia  $\prod_{j=1}^N \mathcal{L}_j^{\xi}$  gdy  $N \rightarrow \infty$  mogą być uzyskane na podstawie [Furstenberg].

Przy założeniu, że  $m$ -wymiarowe macierze  $X_1, \dots, X_N$  są unimodularne, niezależne i o jednakowych rozkładach, Furstenberg uzyskał pewne wyniki ich dotyczące. Przy dodatkowym założeniu całkowalności rozkładów macierzy  $X_j$ ,  $j=1, 2, \dots$ , uzyskał kilka wersji prawa wielkich liczb dla ich iloczynów. Pokazał, że w macierzy będącej iloczynem  $X_N * X_{N-1} * \dots * X_1$ , kąty między, wektorami stanowiącymi odpowiednio jej wiersze lub kolumny zbiegają do zera eksponencjalnie z prawdopodobieństwem 1 gdy  $N \rightarrow \infty$ . Ponadto, gdy  $u \in \mathbb{P}^{m-1}$  wówczas iloczyn  $u^T * X_N * X_{N-1} * \dots * X_1 \xrightarrow{N \rightarrow \infty} w^T$  z prawdopodobieństwem 1, gdzie  $w \in \mathbb{P}^{m-1}$  jest wektorem zmienną losową, niezależną od  $u$ . ( $\mathbb{P}^{m-1}$  jest  $(m-1)$ -wymiarową przestrzenią rzutową uzyskaną z  $\mathbb{R}^m - \{0\}$  przez utożsamienie dwóch wektorów gdy jeden powstał z drugiego w wyniku mnożenia przez skalar). W naszym przypadku równania (4.13) interesuje nas zachowanie w granicy iloczynu  $X_N * X_{N-1} * \dots * X_1 * u$ , gdzie wektor  $u$  jest zdefiniowany jako:

Ponieważ  $p=1$  dla  $i=2$ , oraz  $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} = 0$ , przedstawienie macierzy  $\mathcal{L}_j^{\xi}$  w postaci (4.13)

$$u = \lim_{N \rightarrow \infty} T_1(-\Delta_{N+1}) T_1^{-1}(0) T_0(L+1) \mathcal{L}_1^{\xi} = T_0(L+1) \mathcal{L}_1^{\xi} \quad (4.19)$$

a  $X_j$  odpowiada macierzy  $\mathcal{L}_j^{\xi}$  dla  $j = 1, 2, \dots, N$ .

W ogólnym przypadku taki iloczyn nie zbiega; dla  $u \in \mathbb{P}^{m-1}$ , ciąg wektorów  $X_N * X_{N-1} * \dots * X_1 * u$ ,  $n=1, 2, \dots$  oscyluje w  $\mathbb{P}^{m-1}$  dla  $n \rightarrow \infty$ . Zakładając, że  $u \in \mathbb{R}^m$  otrzymujemy, że pewne współrzędne otrzymanych wektorów rosną eksponencjalnie. Mówiąc bardziej precyzyjnie: dla każdego niezerowego wektora  $u \in \mathbb{R}^m$

$$N^{-1} \log \left\| X_N * X_{N-1} * \dots * X_1 * u \right\| \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \alpha \quad (4.20)$$

gdzie  $\|\cdot\|$  jest normą w  $\mathbb{R}^m$  a  $\alpha$  jest pewną stałą dodatnią (por. [Furstenberg]). Oznacza to, że jeśli w równaniu (4.13) założymy, że norma amplitudy fali wymuszającej  $\mathcal{A}_0$  jest skończona, wówczas otrzymamy w wyniku, że  $\mathcal{A}_j \rightarrow 0$  dla  $N \rightarrow \infty$ . Innymi słowy, jeżeli w modelu stochastycznym liczba warstw w płycie nieskończenie rośnie w taki sposób, że grubość tej płyty zmierza do nieskończoności, wówczas fala przechodząca zanika i mamy do czynienia z całkowitym odbiciem fali. W asymptotycznym przypadku problem przechodzi w zagadnienie odbicia fali od półprzestrzeni stochastycznie uwarstwionej. Równocześnie przedstawiony wynik pokazuje mechanizm tego odbicia: stopniowe odbijanie fali na kolejnych warstwach z intensywnością eksponencjalnie malejącą wraz ze wzrostem odległości od powierzchni półprzestrzeni i lokalizacją energii fali w obszarze przy powierzchni.

#### 4.4. Zagadnienie w okresowym ośrodku stochastycznym; przypadek graniczny

Z bardziej interesującym przypadkiem mamy do czynienia, gdy liczba warstw w płycie dąży do nieskończoności lecz całkowita grubość płyty pozostaje ograniczona. W celu przeanalizowania takiego przypadku zastosujemy prawo wielkich liczb (2.18) dla iloczynu macierzy całkowalnych  $X_{1,N}, X_{2,N}, \dots, X_{N,N}$ .

Ażeby wykorzystać ten wynik musimy w naszym równaniu (4.13) poczynić szereg założeń. Założmy w pierwszej kolejności, że grubości warstw (dla ustalonego  $N$ ) spełniają następujący warunek:

$$\Delta_j = \frac{L_j}{N+1}, \quad \delta_j = \frac{l_j}{N}, \quad (4.21)$$

gdzie  $L_j, j=1,2,\dots,N+1$  i  $l_j, j=1,2,\dots,N$  są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowych rozkładach i o danej wartości średniej:

$$E\{L_j\} = L, \quad E\{l_j\} = l. \quad (4.22)$$

Wynika z tego, że dla dowolnego  $N$ , średnia grubość płyty jest stała, równa  $d = L+l$ .

Podstawiając grubości warstw  $\Delta_j$  i  $\delta_j$  szczególnej postaci (4.21) w wyrażeniu (4.18) dla macierzy przejścia, otrzymujemy następujące asymptotyczne przedstawienie macierzy  $\mathcal{C}_j^0$ :

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_j &= \begin{bmatrix} \cos k_1 \frac{L_j}{N+1} * \cos k_2 \frac{l_j}{N} - \frac{p_2}{p_1} \sin k_1 \frac{L_j}{N+1} * \sin k_2 \frac{l_j}{N}, \\ -p_1 \sin k_1 \frac{L_j}{N+1} * \cos k_2 \frac{l_j}{N} - p_2 \cos k_1 \frac{L_j}{N+1} * \sin k_2 \frac{l_j}{N}, \\ \frac{1}{p_2} \cos k_1 \frac{L_j}{N+1} * \sin k_2 \frac{l_j}{N} + \frac{1}{p_1} \sin k_1 \frac{L_j}{N+1} * \cos k_2 \frac{l_j}{N} \\ - \frac{p_1}{p_2} \sin k_1 \frac{L_j}{N+1} * \sin k_2 \frac{l_j}{N} + \cos k_1 \frac{L_j}{N+1} * \cos k_2 \frac{l_j}{N} \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} 1 + o(N^{-1}) & \frac{k_1}{p_1} L_j \frac{1}{N+1} + \frac{k_2}{p_2} l_j \frac{1}{N} + o(N^{-1}) \\ -p_1 k_1 L_j \frac{1}{N+1} - p_2 k_2 l_j \frac{1}{N} + o(N^{-1}) & 1 + o(N^{-1}) \end{bmatrix} = \\
\mathbf{Id} + \frac{1}{N} &\begin{bmatrix} 0 & \frac{k_1}{p_1} L_j \frac{N}{N+1} + \frac{k_2}{p_2} l_j \\ -p_1 k_1 L_j \frac{N}{N+1} - p_2 k_2 l_j & 0 \end{bmatrix} + o(N^{-1}). \quad (4.23)
\end{aligned}$$

gdzie  $\mathbf{Id}$  jest macierzą identycznościową  $2 \times 2$ .

Ponieważ  $p_i = k_i \eta_i$  dla  $i=1,2$ , oraz  $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N}{N+1} = 1$ , przedstawienie macierzy  $\mathcal{G}_j$  w postaci (4.23) jest asymptotycznie równoważne:

$$\mathcal{G}_j = \mathbf{Id} + \frac{1}{N} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\eta_1} L_j + \frac{1}{\eta_2} l_j \\ -\eta_1 k_1^2 L_j - \eta_2 k_2^2 l_j & 0 \end{bmatrix} + o(N^{-1}). \quad (4.24)$$

Oznacza to że macierz  $E\{B\}$  ma następującą postać:

gdzie  $E\{B\}$  jest normą w  $\mathbb{R}^m$  a  $\frac{1}{\eta_1}L + \frac{1}{\eta_2}l$  jest liczbą dodatnią (Furcaciński) (4.25)  
 Oznacza to, że jeśli w równaniu (4.13) założymy, że norma amplitudy fali wymuszającej  $\eta$  jest skończona, wówczas otrzymamy  $\eta k^2 d$ ,  $0$  dla  $N \rightarrow \infty$ .

Innymi słowy, jeżeli w modelu stochastycznym liczba warstw w płycie  $N \rightarrow \infty$  to oznacza, że grubość tej płyty zmierza do nieskończoności, wówczas fala przechodząca zanika i mamy do czynienia z całkowitym odbiciem fali. W asymptotycznym przypadku problem przechodzi w zagadnienie odbicia fali od półprzestrzeni stochastycznej dwiwej. Równocześnie przedstawiony wynik pokazuje mechanizm tego odbicia: stopniowe odbijanie fali na kolejnych i warstwach z intensywnością eksponencjalnie malejącą wraz ze wzrostem odległości od powierzchni półprzestrzeni i lokalizacją energii fali w obszarze przy powierzchni.

$$4.4. \text{ Zagadnienie w obszarze środku stochastycznym; przypadek graniczny} \quad \frac{d \eta_1 \eta_2}{\eta k^2} = \frac{\eta_1 k_1^2 L + \eta_2 k_2^2 l}{d} \quad (4.27)$$

Z bardziej interesującym przypadkiem mamy do czynienia, gdy liczba warstw w a to oznacza, że efektywne własności materiału w zhomogenizowanej płycie zależą od W celu przeanalizowania takiego przypadku zastosujemy prawo wielkich liczb (2.18) dwóch niezależnych parametrów:  $\bar{\eta}$  i  $\eta k^2$ . Ten wynik jest zgodny z wynikami uzyskanymi w homogenizacji periodycznych laminatów występującymi w literaturze.

Aby wykorzystać ten wynik musimy w naszym równaniu (4.13) poczynić szereg założeń. W przypadku, gdy  $\eta = \eta_j^i$  i  $k = k_j^i$ ,  $i=1,2$ ,  $j=1,2,\dots$ , są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowych rozkładach dla  $j=1,2,\dots$ , macierz efektywna  $E\{B\}$  ma również postać (4.25) lecz z parametrami zdefiniowanymi jako:

$$\bar{\eta} = \frac{L}{N+1} \quad \delta = \frac{l}{N} \quad (4.28)$$

gdzie  $L_j$ ,  $j=1,2,\dots,N+1$  i  $E\left\{\frac{L_j}{\eta_j^i}\right\} + E\left\{\frac{l_j}{\eta_j^i}\right\}$  są zmiennymi losowymi o jednakowych rozkładach i o danej wartości średniej.

$$\frac{1}{\eta k^2} = \frac{E\left\{\eta_1^i (k_1^i)^2 L_j\right\} + E\left\{\eta_2^i (k_2^i)^2 l_j\right\}}{d} \quad (4.29)$$

Wynika z tego, że dla dowolnego  $N$ , średnia  $d$  grubość płyty jest stała, równa  $d = L + l$ .

Podstawiając grubości warstw  $\Delta$  i  $\delta$  szczególnej postaci (4.21) w wyrażeniu (zmiennie losowe z tymi samymi indeksami  $j$  mogą być zależne).

Podstawiając do macierzy przejścia, uzyskujemy następujące asymptotyczne przedstawienie macierzy

#### 4.5. Przykład numeryczny

Dla zilustrowania przedstawionych rozważań teoretycznych rozważmy fale sprężyste w laminacie. Zakładamy, że fala padająca propaguje się w kierunku prostopadłym do płyty. Możemy rozpatrywać dwie sytuacje, kiedy przedstawiony model może być zastosowany: fali spolaryzowanej podłużnie, o danej częstotliwości  $\omega$  i fali spolaryzowanej poprzecznie (też o częstotliwości  $\omega$ ). W obu przypadkach podczas procesu odbijania fal na powierzchniach nieciągłości i przechodzenia fal przez te powierzchnie, nie zachodzi zjawisko zmiany typu polaryzacji fali; wygenerowane fale pozostają tego samego rodzaju co fale wymuszające. Dlatego też fale mogą być opisane przez równanie (4.1) z odpowiednimi parametrami i rozważania poprzednich paragrafów pozostają w mocy dla naszego szczególnego przykładu. Parametry potrzebne w równaniu (4.1) i warunkach ciągłości (4.2), to znaczy liczby falowe  $k$  i wagi  $\eta$  są następującej postaci:

- dla fali podłużnej:

$$k = k^{\text{lon}} = \frac{\omega}{c^{\text{lon}}}, \quad \eta = \eta^{\text{lon}} = \lambda + 2\mu, \quad (4.30)$$

( $c^{\text{lon}}$  jest prędkością podłużnej fali sprężystej),

$$\left( c^{\text{lon}} \right)^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, \quad (4.31)$$

- dla fali poprzecznej:

$$k = k^{\text{tr}} = \frac{\omega}{c^{\text{tr}}}, \quad \eta = \eta^{\text{tr}} = \mu, \quad (4.32)$$

( $c^{\text{tr}}$  jest prędkością poprzecznej fali sprężystej),

$$\left( c^{\text{tr}} \right)^2 = \frac{\mu}{\rho}, \quad (4.33)$$

gdzie  $\lambda$  i  $\mu$  są stałymi sprężystymi Lamé,  $\rho$  jest gęstością ośrodka. Widzimy, że zawsze  $c^{\text{lon}} > c^{\text{tr}}$  i co z tego wynika długość (zdefiniowana jako  $\frac{2\pi}{k}$ ) fali podłużnej jest zawsze większa niż długość fali poprzecznej.

Celem naszych rozważań w tym paragrafie jest odpowiedź na następujące pytania: Jaka jest prędkość zbieżności (w ustalonym sensie) procesu falowego w uwarstwionej płycie do procesu w płycie zhomogenizowanej? W jaki sposób zależą efektywne własności zhomogenizowanego materiału od własności jego składników? Jak bardzo są wrażliwe własności materiału zhomogenizowanego od zmian parametrów składników płyty uwarstwionej? W celu odpowiedzi na te pytania posłużymy się koncepcją własności odbijania energii przez płytę. Wprowadzimy pojęcie współczynnika odbicia energii przez płytę jako stosunek energii fali odbitej do energii fali padającej na płytę. Ponieważ energia jest proporcjonalna do kwadratu amplitudy fali, współczynnik odbicia dla fali deterministycznej zdefiniujemy jako:

$$R = \frac{\left| B_0^0 \right|^2}{\left| A_0^0 \right|^2}, \quad (4.34)$$

gdzie  $|\cdot|$  oznacza wartość bezwzględną liczby zespolonej. W przypadku fal stochastycznych współczynnik  $R$  jest zmienną losową i dlatego wygodniej jest rozważać jego wartość oczekiwaną  $E[R]$ . Dla ośrodka zhomogenizowanego mamy do czynienia z efektem prawa wielkich liczb: amplitudy stają się skoncentrowanymi zmiennymi losowymi (to znaczy równymi stałej z prawdopodobieństwem 1) i dlatego współczynnik odbicia z prawdopodobieństwem 1 dąży do stałej, równej jej wartości oczekiwanej.

Obliczenia będziemy prowadzili dla modelu deterministycznego w którym losowe grubości warstw zastąpiono ich wartościami oczekiwanymi. Taki model jest równoważny modelowi stochastycznemu przy gęstości uwarstwienia dążącej do nieskończoności (w praktyce -  $N > 40$ ); dla małych  $N$  uśrednienie stochastyczne wygładza wyniki lecz ich natura jest podobna do modelu deterministycznego. (Bardziej szczegółowemu omówieniu tego zagadnienia poświęcone są następne paragrafy tego rozdziału.)

Załóżmy w naszym modelu, że półprzestrzenie otaczające płytę są wypełnione aluminium (materiał oznaczony indeksem 0) a płyta zbudowana jest z warstw wykonanych ze stali i tytanu (oznaczonych odpowiednio indeksami 1 i 2). W takim

wypadku wartości liczbowe stałych materiałowych potrzebnych w obliczeniach mają następujące wartości (zaczepnięte z poradnika [Tuma]):

$$\lambda_0 = 5.44 \times 10^{10} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}, \mu_0 = 2.75 \times 10^{10} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}, \rho_0 = 2750 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3},$$

$$\lambda_1 = 10.71 \times 10^{10} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}, \mu_1 = 8.14 \times 10^{10} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}, \rho_1 = 8670 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3},$$

$$\lambda_2 = 7.08 \times 10^{10} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}, \mu_2 = 4.31 \times 10^{10} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}, \rho_2 = 4300 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}.$$

W obliczeniach założono równy udział obu materiałów w płycie,  $L=10$ ,  $l=10$ .

Wyniki obliczeń numerycznych przedstawiono na wykresach. Rysunki 4.1 i 4.2 pokazują współczynnik odbicia dla trzech próbek tej samej grubości ( $d=20$ ) wykonanych ze stali, tytanu i materiału zhomogenizowanego dla, odpowiednio, fal podłużnych i poprzecznych. Widzimy, że procedura homogenizacji globalnie powoduje uśrednienie współczynnika odbicia, jednakże dla szczególnych wartości częstotliwości  $\omega$  propagującej się fali współczynnik odbicia od zhomogenizowanej płyty może być całkowicie różny od współczynników odbicia obliczonych dla płyt wykonanych z materiałów składników kompozytu. Na przykład, współczynnik odbicia dla zhomogenizowanej płyty jest równy zero dla niezerowych współczynników poszczególnych składników lub też większy od każdego z nich. Rysunek 4.3 pokazuje, że współczynnik odbicia dla zhomogenizowanej płyty jest okresową funkcją  $\omega$ , przy czym okres dla fali podłużnej jest mniejszy niż dla fali poprzecznej (co jest konsekwencją długości fali, większej dla fali podłużnej przy jednakowej częstotliwości  $\omega$ ).

Prędkość zbieżności ośrodka uwarstwionego do zhomogenizowanego przedstawiono na rysunkach 4.4-4.7. Wykresy przedstawiają zależność współczynnika odbicia od częstotliwości  $\omega$  dla wybranych wartości  $N$  i jego zależność od  $N$  dla ustalonego  $\omega$ . Widać, że ta zbieżność jest raczej szybka; dla  $N=200$  można uważać płytę za zhomogenizowaną dla wszystkich rozważanych wartości  $\omega$ . Dla małych częstotliwości ta zbieżność jest nawet szybsza. Z drugiej strony, dla małych  $N$  współczynnik odbicia zachowuje się dość nieregularnie i z zachowania się ośrodka zhomogenizowanego niewiele można wynioskować o zachowaniu się ośrodka uwarstwionego. Widzimy także, że w przypadku fal podłużnych zbieżność jest znacznie szybsza niż w przypadku fal poprzecznych. Jest to również konsekwencją większej długości fali.

Obliczenia przedstawione na rysunkach 4.8-4.11 wskazują na wrażliwość współczynnika odbicia ośrodka zhomogenizowanego od zmian wartości liczbowych stałych Lamé  $\lambda$  i  $\mu$  i gęstości  $\rho$  składników kompozytu. Założono w nich, że wszystkie

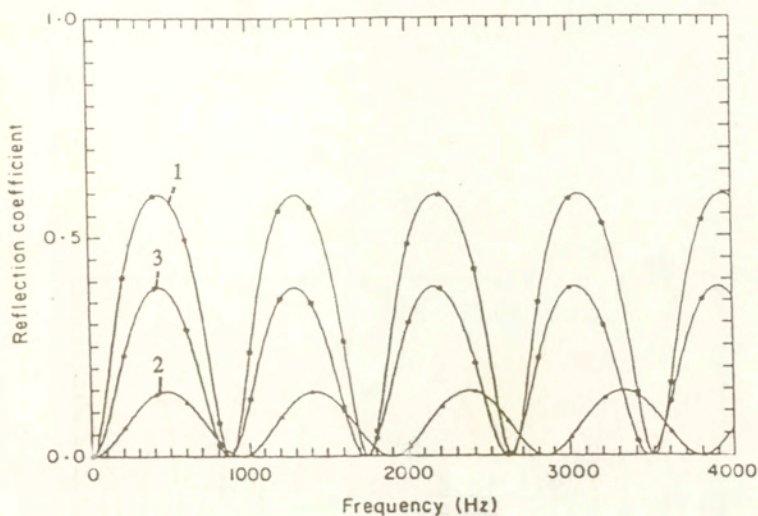
stałe w obliczeniach, oprócz jednej, wskazanej na osi rzędnych, są takie jak przyjęto w tym paragrafie. Wyróżniona stała ( $\mu_2$  lub  $\rho_2$ ) zmienia się od wartości równej połowie swojej oryginalnej wielkości do jej podwójnej wartości. Widać, że zmiany współczynnika odbicia są bardzo duże - jest on wrażliwy na zmiany stałych materiałowych składników kompozytu. Dla pewnych wartości  $\omega$  zależność ta jest bardzo ostra. Fale poprzeczne są mniej stabilne na zmiany stałych materiałowych, co jest kolejną konsekwencją ich mniejszej długości.

Zależność współczynnika odbicia od stałej  $\lambda_2$  jest bardzo podobna do zależności od  $\mu_2$ .

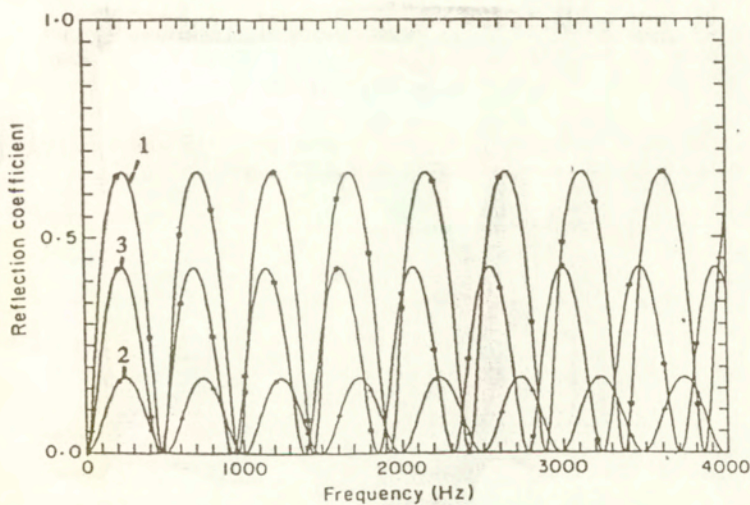
Na zakończenie tego paragrafu przypomnijmy jeszcze raz płynące z nich wnioski:

- własności odbijania fal przez kompozyt mogą znacznie odbiegać od analogicznych własności jego składników;
- o zachowaniu się uwarstwionej płyty o małej gęstości uwarstwienia  $N$  nie można wyciągać wniosków z zachowania płyty zhomogenizowanej;
- prędkość homogenizacji rośnie razem z długością fali i zależy od typu fali i jej częstotliwości;
- własności odbijania fali przez ośrodek zhomogenizowany są bardzo wrażliwe na zmiany parametrów składników kompozytu.

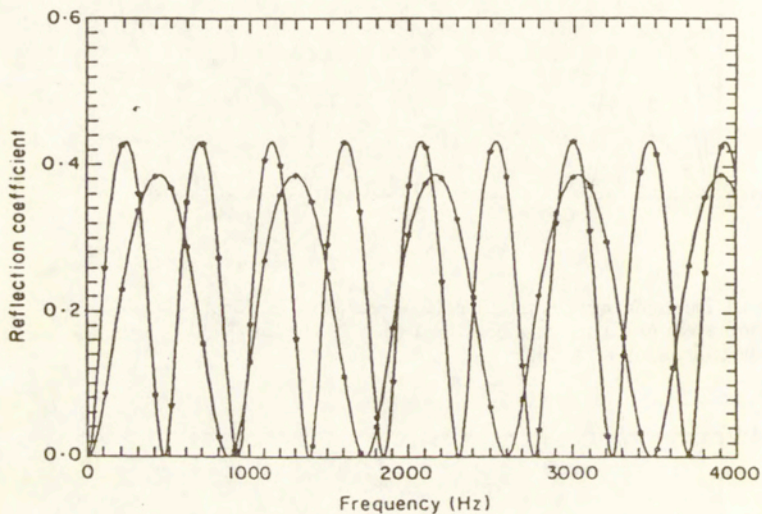




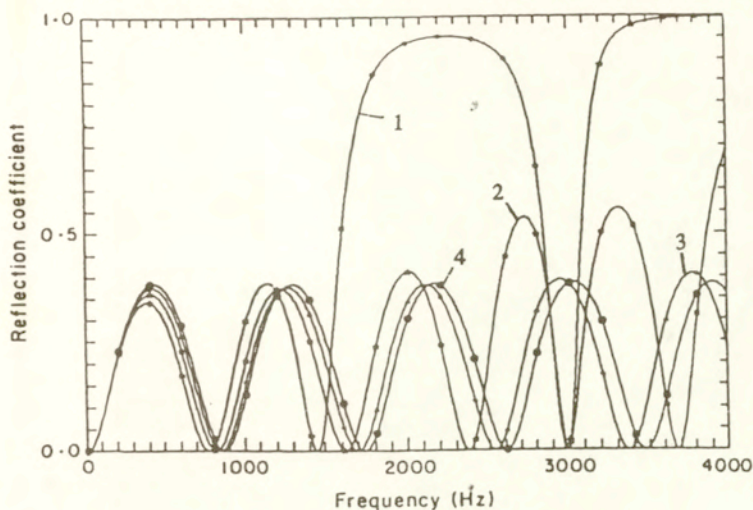
Rys.4.1 Zależność współczynnika odbicia podłużnej fali wymuszającej od częstotliwości  $\omega$  dla trzech próbek: stal ( 1 ), tytan ( 2 ), materiał zhomogenizowany ( 3 ).



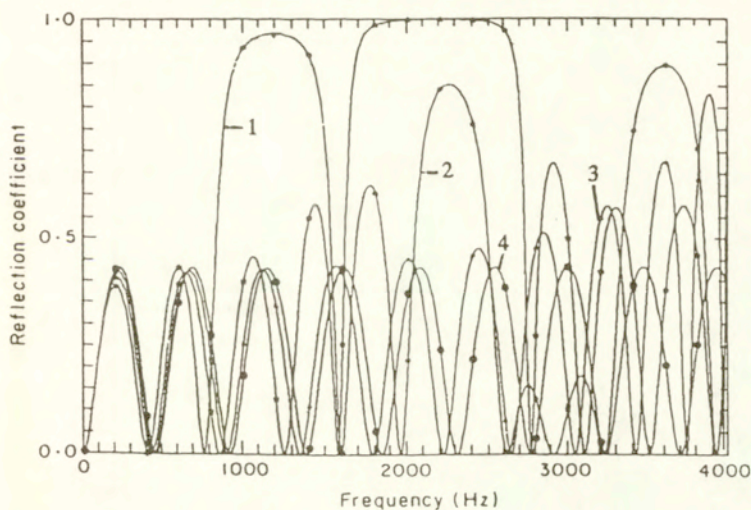
Rys.4.2 Tak jak Rys.4.1 lecz dla poprzecznej fali wymuszającej.



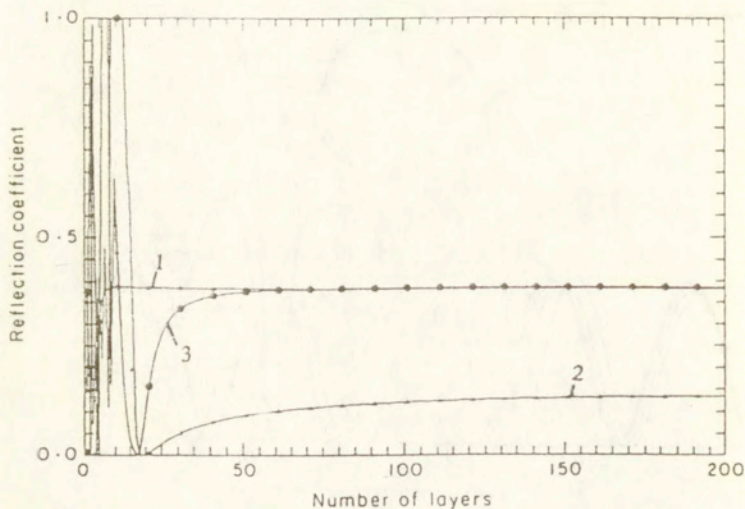
Rys.4.3 Zależność współczynnika odbicia podłużnej (\*--\*) i poprzecznej (★--★) fali wymuszającej od częstotliwości  $\omega$  (materiał zhomogenizowany).



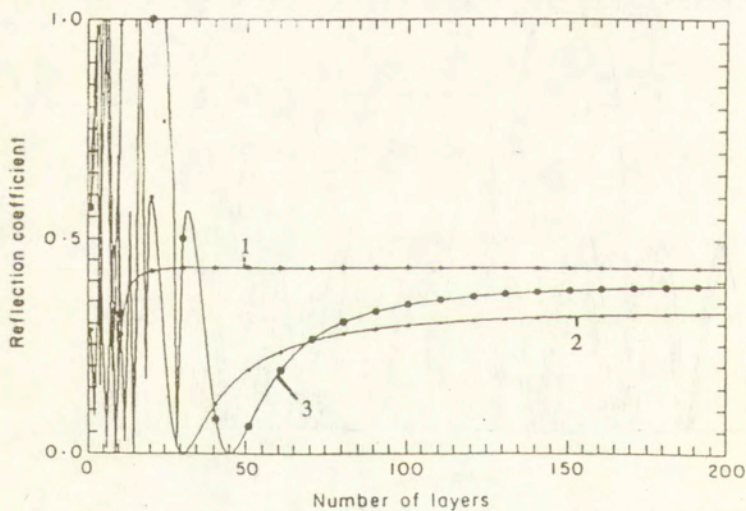
Rys.4.4 Zależność współczynnika odbicia podłużnej fali wymuszającej od częstotliwości  $\omega$  dla: dwóch warstw ( 1 ), czterech warstw ( 2 ), dziesięciu warstw ( 3 ), ośrodka zhomogenizowanego ( 4 ).



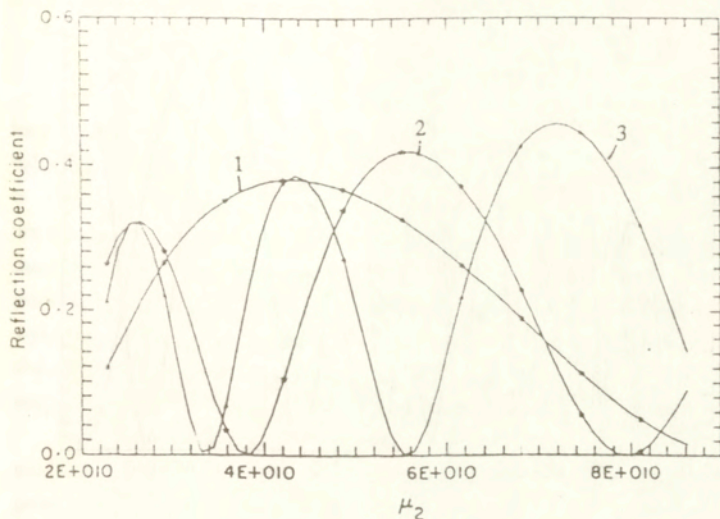
Rys.4.5 Tak jak Rys.4.4 lecz dla poprzecznej fali wymuszającej.



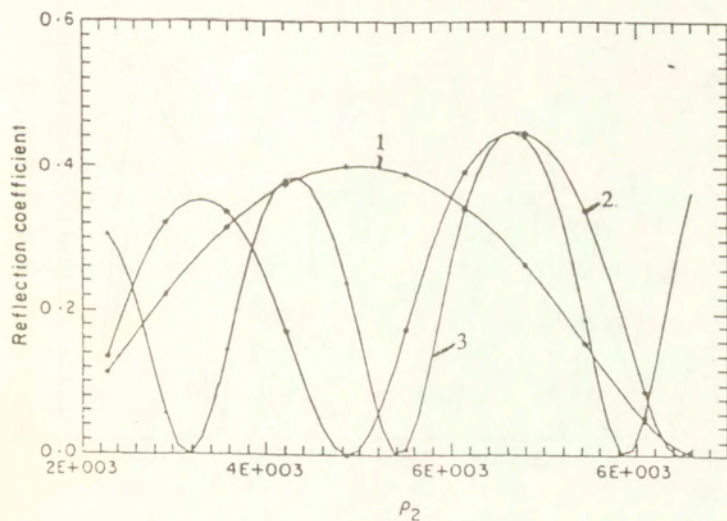
Rys.4.6 Zależność współczynnika odbicia podłużnej fali wymuszającej od liczby warstw w płycie dla wybranych częstotliwości: ( 1  $\omega = 3000$  Hz), ( 2  $\omega = 6800$  Hz), ( 3  $\omega = 10000$  Hz).



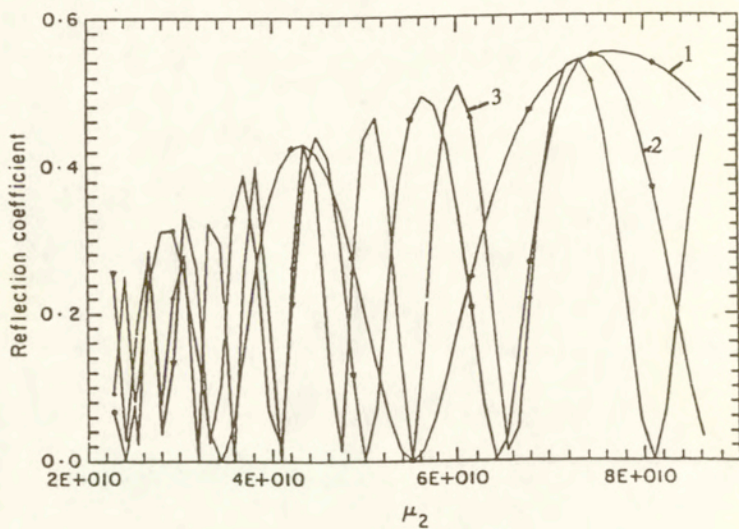
Rys.4.7 Tak jak Rys.4.6 lecz dla poprzecznej fali wymuszającej.



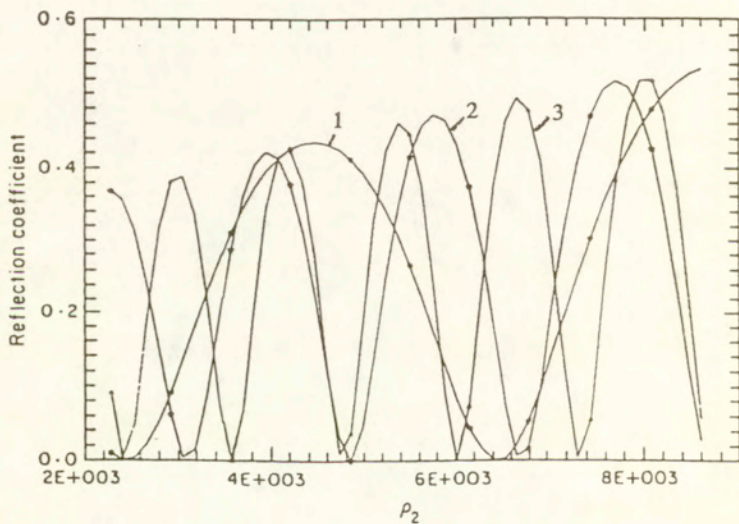
Rys.4.8 Zależność współczynnika odbicia podłużnej fali wymuszającej od  $\mu^2$  w płycie zhomogenizowanej dla wybranych częstotliwości: ( 1  $\omega = 3000$  Hz), ( 2  $\omega = 6800$  Hz), ( 3  $\omega = 10000$  Hz).



Rys.4.9 Tak jak Rys.4.8 lecz zależność od  $\rho^2$ .



Rys.4.10 Tak jak Rys.4.8 lecz dla poprzecznej fali wymuszającej.



Rys.4.11 Tak jak Rys.4.9 lecz dla poprzecznej fali wymuszającej.

#### 4.6. Przykłady modeli stochastycznych ośrodków warstwowych

Rozważmy teraz szczególny model płyty uwarstwionej i propagację fal harmonicznycch przez taką płytę. Załóżmy, że powstała ona przez rozcięcie jednorodnej płyty na kilka warstw i włożenie w rozcięcia warstewek innego materiału w taki sposób, by zbudowana w ten sposób płyta uwarstwiona spełniała kilka warunków. Zakładamy mianowicie, że zewnętrzne warstwy płyty wykonane są z macierzystego materiału, oba materiały płyty występują w niej naprzemiennie, średnia łączna grubość warstw wykonanych z materiału macierzystego wynosi  $L$  a wykonanych z materiału wstawionego -  $l$ . Zatem łączna średnia grubość płyty wynosi  $d=L+l$ . Ponadto zakładamy, że w płycie wartość oczekiwana liczby warstw materiału macierzystego wynosi  $N+1$  a warstw materiału wstawionego -  $N$ .

Takie ogólne założenia dotyczące budowy płyty pozostawiają pewną swobodę w modelowaniu ośrodka. Przedstawimy teraz kilka modeli płyty uwarstwionej spełniające powyższe założenia i porównamy, jaki wpływ wywierają te różnice w modelach na odbijanie fali harmonicznycch przez płytę.

##### Model 1.

Założmy, że mamy daną płytę o grubości  $L$  wykonaną z materiału 1. Dzielimy ją na  $N(L)+1$  warstw przy pomocy punkowego procesu Poissona  $\{x_i\}_{i=1,2,\dots,N(L)}$  takiego, że  $E\{N(L)\}=m$  (to znaczy, jego intensywność jest równa  $l=m/L$ ). Pomiędzy te warstwy wstawiamy warstewki materiału 2 o stałej grubości  $h$ . Oznacza to, że grubość tak zbudowanej płyty jest zmienną losową, dla zdarzenia elementarnego  $\gamma \in \Gamma$  ( $\Gamma, \mathcal{F}, \mathcal{G}$  jest przestrzenią probabilistyczną) grubość płyty jest równa  $d(\gamma) = L+N(L)h$ . Zatem średnia grubość płyty jest równa

$$E\{d(\gamma)\} = L + E\{N(L)\}h = L + mh. \quad (4.35)$$

Zatem nasz warunek dotyczący średniej grubości płyty jest spełniony, gdy proces Poissona spełnia następujący warunek:

$$m = l/h \quad (4.36)$$

Tak zbudowana płyta może być opisana w sposób bardzo podobny do opisu zaprezentowanego w paragrafie 4.2 pod warunkiem, że w występujących tam oznaczeniach przyjmujemy:

$$N = N(L) \quad (4.37)$$

$$\Delta_j = x_j - x_{j-1}, \quad j=1,2,\dots,N(L), \quad (4.38)$$

gdzie

$$x_0 = 0, \quad (4.39)$$

$$\Delta_{N(L)+1} = L - \sum_{k=1}^{N(L)} \Delta_k \quad (4.40)$$

ora:

$$\delta_j = h, \quad j=1,2,\dots,N(L). \quad (4.41)$$

Załóżmy teraz, że do płyty dociera fala harmoniczna; po ustabilizowaniu się procesu falowego w ośrodku zostają wygenerowane dwie fale: fala przechodząca, propagująca się w obszarze za płytą ( $x > d(\gamma)$ ) i fala odbita, w obszarze przed płytą ( $x < 0$ ). Amplitudy tych fal spełniają równanie analogiczne do równania (4.13), mające postać:

$$\mathcal{A}_0 = \mathbf{T}_0^{-1}(0) \prod_{j=1}^{N(L)} \mathcal{E}_j \mathbf{T}_1(-\Delta_{N+1}) \mathbf{T}_1^{-1}(0) \mathbf{T}_0(L+N(L)h) \mathcal{A}_1 \quad (4.42)$$

gdzie macierze przejścia  $\mathcal{E}_j$  są obecnie zdefiniowane jako:

$$\mathcal{E}_j = \mathbf{T}_1(-\Delta_j) \mathbf{T}_1^{-1}(0) \mathbf{T}_2(0) \mathbf{T}_2^{-1}(h). \quad (4.43)$$

(Macierze przejścia przez pojedynczą warstwę  $\mathbf{T}_i$  są takie same jak w (4.9).)



W celu wyznaczenia charakterystyk probabilistycznych poszukiwanych w równaniu (4.42) amplitud musimy znać funkcję gęstości prawdopodobieństwa występujących w nim wielkości losowych, to znaczy wektorowej zmiennej losowej  $(\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{N(L)})$ . Pamiętając o tym, że punkty podziału pierwotnej płyty były generowane przez punktowy proces Poissona (co oznacza, że nie zaburzone przez skończoność grubości płyty  $L$ , grubości warstewek  $\Delta_j, j=1,2,\dots$  mają rozkład wykładniczy z gęstością prawdopodobieństwa  $f(\Delta) = l \exp\{-l\Delta\} = 1/b \exp\{-\Delta/b\}$ , gdzie w naszym modelu  $l = \frac{l}{Lh}$ ), otrzymujemy warunkową gęstość prawdopodobieństwa dla wektora  $(\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n)$  jako

$$f(\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n | N(L)=n) = l^n \exp \left\{ -l \sum_{k=1}^n \Delta_k \right\} \chi \left( \sum_{k=1}^n \Delta_k \leq L \right) (\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n) \frac{P \left( \Delta_{n+1} > L - \sum_{k=1}^n \Delta_k \right)}{P(N(L) = n)} \quad (4.44)$$

gdzie funkcja  $\chi$  jest zdefiniowana jako:

$$\chi \left( \sum_{k=1}^n \Delta_k \leq L \right) (\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } \sum_{k=1}^n \Delta_k \leq L \\ 0 & \text{w przeciwnym razie} \end{cases} \quad (4.45)$$

Ponieważ:

$$P \left( \Delta_{n+1} > L - \sum_{k=1}^n \Delta_k \right) = \exp \left\{ -l \left( L - \sum_{k=1}^n \Delta_k \right) \right\} \quad (4.46)$$

i

$$P(N(L) = n) = \exp\{-L\} \left( \frac{L}{n!} \right)^n, \quad (4.47)$$

otrzymujemy w końcu:

$$f(\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n | N(L) = n) = \chi \left[ \sum_{k=1}^n \Delta_k \leq L \right] (\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n) \frac{n!}{L^n} \quad (4.48)$$

dla  $n = 1, 2, \dots$  (rozkład wektorowej zmiennej losowej  $(\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n)$  pod warunkiem że  $N(L) = n$  jest rozkładem równomiernym na sympleksie  $\sum_{k=1}^n \Delta_k \leq L$ ).

Przy wykorzystaniu warunku (4.47) możemy teraz zapisać gęstość prawdopodobieństwa wektora  $(\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{N(L)})$  o losowej długości jako:

$$\begin{aligned} f(\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{N(L)} | n) = \\ = \delta_{n,0} e^{-L} + \sum_{i=1}^{\infty} \delta_{n,i} \chi \left[ \sum_{k=1}^i \Delta_k \leq L \right] (\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_i) e^{-L} / i! \end{aligned} \quad (4.49)$$

gdzie  $\delta_{n,i}$  jest deltą Kroneckera.

Dysponujemy zatem teraz gęstością prawdopodobieństwa parametrów losowych występujących w równaniu dla amplitud fal (4.42), możemy zatem obliczyć na przykład wszystkie momenty tych wielkości. Niestety, ze względu na skomplikowaną postać zależności funkcyjnej amplitud od parametrów losowych, jest to raczej możliwość teoretyczna.

Jako ilustrację rozważmy sytuację, gdy zakładamy, iż amplituda fali przechodzącej jest znana i jest równa jedności. Wówczas zmiennymi losowymi są amplitudy fali padającej i odbitej. Korzystając z gęstości (4.49) możemy teraz zapisać wyrażenie dla wartości średnich tych amplitud. Ma ono następującą postać (z założenia  $\mathcal{A}_i = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ):

$$E\{\mathcal{A}_f\} = \mathbf{T}_0^{-1}(0) \mathbf{T}_1(-L) \mathbf{T}_1^{-1}(0) \mathbf{T}_0(L) \mathcal{A}_f + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{A}_n} \mathbf{T}_0^{-1}(0) \prod_{j=1}^n \mathcal{G}_j(-\Delta_j) \mathbf{T}_1 \left[ -L + \sum_{k=1}^n \Delta_k \right] \mathbf{T}_1^{-1}(0) \mathbf{T}_0(L+nh) \mathcal{A}_f d\Delta_1 \dots d\Delta_n. \quad (4.50)$$

gdzie zbiór całkowania jest zdefiniowany jako  $\mathbb{A}_n = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; \sum_{k=1}^n x_k \leq L \right\}$ .

(We wzorze (4.50) oznaczono eksplicite zależność macierzy przejścia  $\mathcal{G}_j^2$  od zmiennej losowej  $\Delta_j$ .) Widzimy, że wyrażenie dla amplitud ma postać bardzo skomplikowaną i analityczne obliczenie występujących w nim całek nie jest możliwe.

W celu kontynuowania obliczeń analitycznych proponujemy kilka modeli uproszczonych w stosunku do Modelu 1, jednak również spełniających założone warunki.

## Model 2.

Załóżmy teraz, że płyta zbudowana jest ze stałej liczby warstw materiału macierzystego 1 (tzn.  $N+1$ ), o grubościach  $\Delta_j$  będących niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie wykładniczym, rozdzielonych warstewkami materiału 2 o stałej grubości  $h$ . Zakładamy, że wartości średnie zmiennych  $\Delta_j$  są jednakowe, równe:

$$E\{\Delta_j\} = \frac{L}{N+1} \stackrel{\text{ozn}}{=} \bar{L}. \quad (4.51)$$

W takiej sytuacji równania dla amplitud fal mają również postać zbliżoną do (4.13), z odpowiednimi modyfikacjami:

$$-\zeta_0 = \mathbf{T}_0^{-1}(0) \prod_{j=1}^N \mathcal{G}_j \mathbf{T}_1(-\Delta_{N+1}) \mathbf{T}_1^{-1}(0) \mathbf{T}_0 \left[ \sum_{k=1}^{N+1} \Delta_k + Nh \right] \mathcal{A}_f. \quad (4.52)$$

gdzie macierze przejścia  $\mathcal{G}_j^2$  mają tutaj postać identyczną jak w (4.43) (przy czym pamiętamy, że rozkłady występujących w nich parametrów  $\Delta_j$  są różne). Zwróćmy uwagę

że we wzorze (4.52) musimy przyjąć  $h=l/N$ .

W przypadku Modelu 2 łączna gęstość prawdopodobieństwa rozkładu parametrów losowych występujących w równaniu (4.52) ma postać:

$$f(\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{N+1}) = \frac{1}{b^{N+1}} \exp \left\{ - \sum_{k=1}^{N+1} \frac{\Delta_k}{b} \right\}, \quad N=1, 2, \dots \quad (4.53)$$

Taka prosta postać gęstości prawdopodobieństwa pozwala łatwo obliczyć wartość oczekiwaną wyrażenia (4.52) dla amplitud fal (również przy założeniu, że znana jest fala przechodząca i jej amplituda jest równa jedności). W celu dokonania obliczeń musimy napisać występujące w wyrażeniu (4.52) macierze w jawnej postaci, dokonać pogrupowania wyrazów ze względu na zmienne  $\Delta_j$  i wykonać całkowania. W wyniku otrzymujemy następujące wyrażenia dla średnich amplitud fal:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} E\{A_0^0\} \\ E\{B_0^0\} \end{bmatrix} &= \frac{e^{ik_0 N h}}{4p_1} \begin{bmatrix} 1 + \frac{p_1}{p_0} & 1 - \frac{p_1}{p_0} \\ 1 - \frac{p_1}{p_0} & 1 + \frac{p_1}{p_0} \end{bmatrix} \times \\ &\times \begin{bmatrix} \frac{A_{11}}{1 + i(p_1 - p_0)h} & \frac{A_{12}}{1 + i(p_1 - p_0)h} \\ \frac{A_{21}}{1 - i(p_1 + p_0)h} & \frac{A_{22}}{1 - i(p_1 + p_0)h} \end{bmatrix}^N \times \begin{bmatrix} \frac{(p_1 + p_0)}{1 + i(p_1 - p_0)h} \\ (p_1 - p_0) \\ \frac{(p_1 - p_0)}{1 - i(p_1 + p_0)h} \end{bmatrix}, \quad (4.54) \end{aligned}$$

gdzie wprowadzono następujące oznaczenia:

$$A_{11} = \frac{1}{4} \left( 1 + \frac{p_2}{p_1} \right) \left( 1 + \frac{p_1}{p_2} \right) e^{-ik_2 h} + \frac{1}{4} \left( 1 - \frac{p_2}{p_1} \right) \left( 1 - \frac{p_1}{p_2} \right) e^{ik_2 h}, \quad (4.55)$$

$$A_{12} = \frac{1}{4} \left( 1 + \frac{p_2}{p_1} \right) \left( 1 - \frac{p_1}{p_2} \right) e^{-ik_2 h} + \frac{1}{4} \left( 1 - \frac{p_2}{p_1} \right) \left( 1 + \frac{p_1}{p_2} \right) e^{ik_2 h}, \quad (4.56)$$

$$A_{21} = \frac{1}{4} \left( 1 - \frac{p_2}{p_1} \right) \left( 1 + \frac{p_1}{p_2} \right) e^{-ik_2 h} + \frac{1}{4} \left( 1 + \frac{p_2}{p_1} \right) \left( 1 - \frac{p_1}{p_2} \right) e^{ik_2 h}, \quad (4.57)$$

$$A_{22} = \frac{1}{4} \left( 1 - \frac{p_2}{p_1} \right) \left( 1 - \frac{p_1}{p_2} \right) e^{-ik_2 h} + \frac{1}{4} \left( 1 + \frac{p_2}{p_1} \right) \left( 1 + \frac{p_1}{p_2} \right) e^{ik_2 h}, \quad (4.58)$$

Widzimy zatem, że Model 2 pozwala przeprowadzić analityczne obliczenia wielkości charakteryzujących falę w bardziej efektywny sposób niż Model 1.

### Model 3

Zauważmy, że w Modelu 1 wielkości losowe miały następujące własności:

- punkty podziału pierwotnej płyty były generowane przez punktowy proces Poissona, to znaczy odległości między nimi miały rozkład wykładniczy;
- liczba punktów podziału (tzn. liczba punktów tego procesu na odcinku  $(0, L)$ ) miała rozkład Poissona).

Cała komplikacja tego modelu brała się stąd, że oba te procesy były zależne statystycznie, co w sposób oczywisty wynika ze sposobu konstrukcji modelu. W modelu proponowanym teraz zakładamy również, że liczba warstw ośrodka macierzystego ma rozkład Poissona a ich grubości mają rozkłady wykładnicze, jednak w tym przypadku postulujemy niezależność wszystkich tych wielkości. W tym wypadku równania dla amplitud mają również postać zbliżoną do (4.13):

$$\mathcal{A}_0 = T_0^{-1}(0) \prod_{j=1}^{N(\gamma)} \mathcal{E}_j T_1^{-1}(\Delta_{N(\gamma)+1}) T_1^{-1}(0) T_0 \left( \sum_{k=1}^{N(\gamma)+1} \Delta_k + N(\gamma)h \right) \mathcal{A}_1 \quad (4.59)$$

gdzie jednak musimy pamiętać, że teraz liczba warstw  $N(\gamma)$  jest zmienną losową o rozkładzie Poissona, statystycznie niezależną od grubości tych warstw  $\Delta_j$ . Ażeby

zachować średnie wymiary płyty postulujemy, by spełnione były następujące warunki:

$$E(N(\gamma)) = N, \quad E(\Delta_j) = b = \frac{L}{N+1}, \quad h = \frac{l}{N}. \quad (4.60)$$

Możemy wówczas zapisać łączną gęstość prawdopodobieństwa wszystkich wielkości losowych występujących we wzorze (4.59) jako

$$f(\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{N(\gamma)+1}, k) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{N^n}{n!} \frac{1}{b^{n+1}} \exp \left\{ - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\Delta_k}{b} \right\} \delta_{n,k}. \quad (4.61)$$

Również w tym wypadku możemy obliczyć eksplicite wyrażenia dla średnich amplitud fal. Mają one następującą postać:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} E(A_0^0) \\ E(B_0^0) \end{bmatrix} &= \frac{e^{-N}}{4p_1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{ik_0nh} N^n}{n!} \begin{bmatrix} 1 + \frac{p_1}{p_0} & 1 - \frac{p_1}{p_0} \\ 1 - \frac{p_1}{p_0} & 1 + \frac{p_1}{p_0} \end{bmatrix} \times \\ &\times \begin{bmatrix} \frac{A_{11}}{1 + i(p_1 - p_0)b} & \frac{A_{12}}{1 + i(p_1 - p_0)b} \\ \frac{A_{21}}{1 - i(p_1 + p_0)b} & \frac{A_{22}}{1 - i(p_1 + p_0)b} \end{bmatrix}^n \times \begin{bmatrix} (p_1 + p_0) \\ \frac{(p_1 - p_0)}{1 + i(p_1 - p_0)b} \\ \frac{(p_1 - p_0)}{1 - i(p_1 + p_0)b} \end{bmatrix} = \\ &= \frac{e^{-N}}{4p_1} \begin{bmatrix} 1 + \frac{p_1}{p_0} & 1 - \frac{p_1}{p_0} \\ 1 - \frac{p_1}{p_0} & 1 + \frac{p_1}{p_0} \end{bmatrix} \exp \begin{bmatrix} \frac{A_{11} e^{ik_0h} N}{1 + i(p_1 - p_0)b} & \frac{A_{12} e^{ik_0h} N}{1 + i(p_1 - p_0)b} \\ \frac{A_{21} e^{ik_0h} N}{1 - i(p_1 + p_0)b} & \frac{A_{22} e^{ik_0h} N}{1 - i(p_1 + p_0)b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (p_1 + p_0) \\ \frac{(p_1 - p_0)}{1 + i(p_1 - p_0)b} \\ \frac{(p_1 - p_0)}{1 - i(p_1 + p_0)b} \end{bmatrix}. \quad (4.62) \end{aligned}$$

#### Model 4

Modelem prostszym od poprzedniego, lecz także spełniającym nasze założenia odnośnie wymiarów płyty, jest deterministyczny model warstwowy. Równanie dla amplitud, będące równocześnie równaniem dla średnich, ma w nim postać:

$$\mathcal{A}_0 = \mathbf{T}_0^{-1}(0) \mathcal{E}^N \mathbf{T}_1(-b) \mathbf{T}_1^{-1}(0) \mathbf{T}_0(L+l) \mathcal{A}_l \quad (4.63)$$

gdzie macierz przejścia  $\mathcal{E}$  ma postać

$$\mathcal{E} = \mathbf{T}_1(-b) \mathbf{T}_1^{-1}(0) \mathbf{T}_2(0) \mathbf{T}_2^{-1}(h). \quad (4.64)$$

a stałe opisujące grubości warstw są równe odpowiednio:

$$b = \frac{L}{N+1}, \quad h = \frac{l}{N}. \quad (4.65)$$

Równanie (4.63) możemy zapisać z użyciem stałych  $A_{ij}$  (przy założeniu, że amplituda fali przechodzącej jest jednostkowa):

$$\begin{bmatrix} A_0^0 \\ B_0^0 \end{bmatrix} = \frac{e^{ik_0(L+l)}}{4p_1} \begin{bmatrix} 1 + \frac{p_1}{p_0} & 1 - \frac{p_1}{p_0} \\ \frac{p_1}{p_0} & 1 + \frac{p_1}{p_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} e^{-ik_1 b} & A_{12} e^{-ik_1 b} \\ A_{21} e^{ik_1 b} & A_{22} e^{ik_1 b} \end{bmatrix}^N \begin{bmatrix} (p_1 + p_0) e^{-ik_1 b} \\ (p_1 - p_0) e^{ik_1 b} \end{bmatrix} \quad (4.66)$$

Wyrażenie dla amplitud zapisane w (4.66) można przedstawić w prostszej postaci używając spektralnego przedstawienia potęgi macierzy przejścia. Ma ono wówczas postać:

$$\begin{bmatrix} A_0^0 \\ B_0^0 \end{bmatrix} = \frac{e^{ik_0(L+l)}}{4p_1} \begin{bmatrix} 1 + \frac{p_1}{p_0} & 1 - \frac{p_1}{p_0} \\ \frac{p_1}{p_0} & 1 + \frac{p_1}{p_0} \end{bmatrix} Q(N) \begin{bmatrix} (p_1 + p_0) e^{-ik_1 b} \\ (p_1 - p_0) e^{ik_1 b} \end{bmatrix} \quad (4.67)$$

w którym macierz przejścia przez  $N$  warstw można przedstawić jako:

$$Q(N) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{(a_4 - a_1)}{\sqrt{\Delta}} \left[ \lambda_1^N - \lambda_2^N \right] + \left[ \lambda_1^N + \lambda_2^N \right] & \frac{-2a_2}{\sqrt{\Delta}} \left[ \lambda_1^N - \lambda_2^N \right] \\ \frac{-2a_3}{\sqrt{\Delta}} \left[ \lambda_1^N - \lambda_2^N \right] & \frac{(a_1 - a_4)}{\sqrt{\Delta}} \left[ \lambda_1^N - \lambda_2^N \right] + \left[ \lambda_1^N + \lambda_2^N \right] \end{bmatrix} \quad (4.68)$$

We wzorze (4.68) wprowadzono następujące oznaczenia:

$$\lambda_1 = \frac{a_1 + a_2 - \sqrt{\Delta}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{a_1 + a_2 + \sqrt{\Delta}}{2}, \quad (4.69)$$

$$\Delta = \left( a_1 - a_4 \right)^2 + 4a_2a_3, \quad (4.70)$$

$$a_1 = A_{11} e^{-ik_1 l}, \quad a_2 = A_{12} e^{ik_1 l}, \quad (4.71)$$

$$a_3 = A_{21} e^{-ik_1 l}, \quad a_4 = A_{22} e^{ik_1 l}. \quad (4.72)$$

## Model 5

Najprostszy możliwy model płyty uwarstwionej otrzymujemy przyjmując założenie, że mamy do czynienia z płytą jednorodną o pewnych efektywnych własnościach. W takiej sytuacji amplitudy fal są dane następującym wzorem:

$$\begin{bmatrix} A_0^0 \\ B_0^0 \end{bmatrix} = \frac{e^{ik_0(L+l)}}{4} \times$$



$$\times \begin{bmatrix} \left(1 + \frac{p_{\text{eff}}}{p_0}\right) \left(1 + \frac{p_0}{p_{\text{eff}}}\right) e^{-ik_{\text{eff}}(L+l)} + \left(1 - \frac{p_{\text{eff}}}{p_0}\right) \left(1 - \frac{p_0}{p_{\text{eff}}}\right) e^{ik_{\text{eff}}(L+l)} \\ \left(1 - \frac{p_{\text{eff}}}{p_0}\right) \left(1 + \frac{p_0}{p_{\text{eff}}}\right) e^{-ik_{\text{eff}}(L+l)} + \left(1 + \frac{p_{\text{eff}}}{p_0}\right) \left(1 - \frac{p_0}{p_{\text{eff}}}\right) e^{ik_{\text{eff}}(L+l)} \end{bmatrix} \quad (4.73)$$

Całkowity opis zjawiska wymaga jeszcze wyznaczenia parametrów efektywnych płyty, to znaczy  $p_{\text{eff}}$  i  $k_{\text{eff}}$ .

#### 4.7. Przypadek graniczny modeli ośrodków warstwowych

Rozważmy teraz dla naszych modeli płyty uwarstwionej przypadek graniczny, gdy, podobnie jak w paragrafie 4.4, gęstość uwarstwienia w płycie dąży do nieskończoności, co w wypadku równania dla średnich oznacza:

$$N \rightarrow \infty, \quad b \rightarrow 0, \quad (N+1)b = L, \quad Nh = l. \quad (4.74)$$

Rozważmy na początku równania dla wartości średniej amplitud uzyskane w deterministycznym Modelu 4. W tym przypadku macierz przejścia przez parę warstw ma postać:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} A_{11} e^{-ik_1 b} & A_{12} e^{-ik_1 b} \\ A_{21} e^{ik_1 b} & A_{22} e^{ik_1 b} \end{bmatrix}. \quad (4.75)$$

Można ją przedstawić asymptotycznie jako wyrażenie:

$$\mathbf{M} = \text{Id} + \frac{1}{N} \mathbf{R} + o\left(\frac{1}{N}\right), \quad (4.76)$$

w którym macierz  $\mathbf{R}$  jest zdefiniowana jako:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} -ik_1L - \frac{1}{2} iPk_2l & -\frac{1}{2} iQk_2l \\ \frac{1}{2} iQk_2l & +ik_1L + \frac{1}{2} iPk_2l \end{bmatrix} \quad (4.77)$$

i gdzie wprowadzono następujące oznaczenia:

$$P = \frac{p_2}{p_1} + \frac{p_1}{p_2}, \quad Q = \frac{p_2}{p_1} - \frac{p_1}{p_2}. \quad (4.78)$$

Widzimy zatem, że przy  $N$  dążącym do nieskończoności otrzymujemy dla  $N$ -tej potęgi macierzy przejścia wyrażenie:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbf{M}^N = e^{\mathbf{R}}. \quad (4.79)$$

Możemy teraz użyć spektralnego przedstawienia eksponentu macierzy:

$$e^{\mathbf{R}} = \frac{\mathbf{R} - \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \exp\{\lambda_1\} + \frac{\mathbf{R} - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \exp\{\lambda_2\}, \quad (4.80)$$

gdzie  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$  są wartościami własnymi macierzy  $\mathbf{R}$  i zapisać równanie dla amplitud w przypadku asymptotycznym. Ma ono postać równania (4.73) w którym, jako efektywne parametry, podstawiono następujące wyrażenia:

$$k_{eff} = \frac{1}{d} \sqrt{k_1^2 L^2 + k_2^2 l^2 + \left( \frac{p_2}{p_1} + \frac{p_1}{p_2} \right) k_1 k_2 l L} \quad (4.81)$$

$$p_{\text{eff}} = \frac{\left( k_1 L + \frac{p_2}{p_1} k_2 l \right) p_1}{\sqrt{k_1^2 L^2 + k_2^2 l^2 + \left( \frac{p_2}{p_1} + \frac{p_1}{p_2} \right) k_1 k_2 l L}} \quad (4.82)$$

Jeżeli dodatkowo przyjmiemy, że

$$p_{\text{eff}} = k_{\text{eff}} \eta_{\text{eff}} \quad (4.83)$$

wówczas otrzymujemy efektywną wartość współczynnika  $\eta$ :

$$\eta_{\text{eff}} = \frac{\eta_1 \eta_2 d}{L \eta_2 + l \eta_1} \quad (4.84)$$

Znaleźliśmy zatem efektywne parametry materiałowe potrzebne w Modelu 5 do opisu płyty uwarstwionej.

Możemy również rozpatrzyć graniczne zachowanie równań dla średnich amplitud w modelach losowych noszących numery 2 i 3. Zaczniemy od Modelu 2. Podobnie jak w poprzednim przypadku, na wartość granicy ma wpływ jedynie potęga macierzy przejścia; przedstawimy tę macierz w postaci asymptotycznej:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \frac{A_{11}}{1 + i(p_1 - p_0)l} & \frac{A_{12}}{1 + i(p_1 - p_0)l} \\ \frac{A_{21}}{1 - i(p_1 + p_0)l} & \frac{A_{22}}{1 - i(p_1 + p_0)l} \end{bmatrix} = \mathbf{Id} + \\ & + \frac{1}{N} \begin{bmatrix} -ik_1 L - \frac{1}{2} iPk_2 l + ik_0 L & -\frac{1}{2} iQk_2 l \\ \frac{1}{2} iQk_2 l & + ik_1 L + \frac{1}{2} iPk_2 l + ik_0 L \end{bmatrix} + o\left(\frac{1}{N}\right). \quad (4.85) \end{aligned}$$

Przeprowadzając postępowanie analogiczne do przeprowadzonego w Modelu 4 znajdujemy, że również w tym wypadku równanie dla ośrodka efektywnego zawiera parametry postaci (4.81-4.82).

Podobnie w Modelu 3, obliczając graniczne równanie powstałe z (4.62) przy przejściu granicznym  $N \rightarrow \infty$  znajdujemy efektywne parametry w postaci (4.81-4.82). Widzimy zatem, że wszystkie zaproponowane modele w granicy dają ten sam ośrodek efektywny. Wniosek ten może być, w przypadku Modeli 2 i 4 wysnuty z rozważań paragrafu 4.4, jako jego szczególny przypadek. W tym paragrafie stwierdziliśmy również, że modele badane w paragrafie 4.4 można uogólnić również na przypadki losowej liczby warstw w płycie. Pytaniem pozostaje jednak, jak szybko zbiegają te modele do ośrodka zhomogenizowanego. Próba odpowiedzi na to pytanie zostanie podjęta w następnym paragrafie.

#### 4.8. Numeryczne badanie zbieżności modeli ośrodków warstwowych

W celu zbadania, jak szybko ośrodek uwarstwiony zbiega do ośrodka jednorodnego o efektywnych własnościach (to znaczy: dla jakiej liczby warstw w płycie można już uznać, że płyta zhomogenizowana dobrze ją aproksymuje), posłużymy się metodą symulacji komputerowej. Należy jednak najpierw zdefiniować, jak będziemy rozumieli zbieżność ośrodków.

Podobnie jak w przypadku ośrodka deterministycznego, również tutaj posłużymy się pojęciem współczynnika odbicia fali. Ponieważ jednak taki współczynnik jest w przypadku ośrodka stochastycznego zmienną losową, badać będziemy średnie współczynniki odbicia fali.

W literaturze najczęściej bada się dwa rodzaje współczynników odbicia: dla amplitudy ( $r_a$ ) i dla energii ( $r_e$ ). Jeżeli  $A$  jest amplitudą fali padającej a  $B$  amplitudą fali odbitej, wówczas są one zdefiniowane jako:

$$r_a = E \left\{ \frac{B}{A} \right\}, \quad r_e = E \left\{ \frac{B^2}{A^2} \right\}. \quad (4.86)$$

Zauważmy, że tak zdefiniowany współczynnik odbicia dla energii jest drugim momentem współczynnika odbicia dla amplitudy.

Często łatwiejsze do obliczenia są współczynniki zdefiniowane jako iloraz wartości oczekiwanych które można traktować jako przybliżenie średnich

współczynników odbicia:

$$r'_a = \frac{E\{B\}}{E\{A\}}, \quad r'_c = \frac{E\{B^2\}}{E\{A^2\}}. \quad (4.87)$$

W przypadku Modeli 2-5 współczynnik  $r'_a$  można obliczyć analitycznie; ponadto dla Modeli 4 i 5 obliczyć można współczynnik  $r'_c$ .

Zanim przystąpimy do obliczania współczynników odbicia zauważmy, że zależą one od czterech wielkości:  $k_1L$ ,  $k_2l$ ,  $p_1/p_2$  i  $p_0/p_1$ . Konkretnie liczby podstawione jako parametry w wyrażeniach dla amplitud odpowiadają całym rodzinom zagadnień; na przykład: ponieważ  $k_1 = \omega/c_1$  i  $k_2 = \omega/c_2$  to wzrost częstotliwości fali nie ma wpływu na współczynnik odbicia o ile grubości tych warstw rosną proporcjonalnie do wzrostu  $\omega$ .

W celu obliczenia współczynników odbicia posłużymy się metodą symulacji komputerowej. Jako przykład rozważać będziemy płytę, w której parametry modeli spełniają następujące warunki:  $k_1L=5$ ,  $k_2l=1$ ,  $p_1/p_2=2$  i  $p_0/p_1=9.25$ . W procesie symulacji używamy generatora liczb losowych  $\hat{x}_n$ ,  $n=1,2,\dots$ , opartego na algorytmie przedstawionym w książce [Zieliński], zgodnie z wzorem:

$$x_{n+1} = ax_n + b, \quad \hat{x}_n = x_n/X, \quad (4.88)$$

gdzie stałe wybrano jako:  $a=877$ ,  $b=16611$ ,  $X=32768$ . Liczby losowe uzyskane w ten sposób spełniały wszystkie wymagane testy statystyczne (test zgodności momentów, test serii, test niezależności i test losowości). Zmienne losowe o rozkładach wykładniczych  $\Delta_n$  zostały uzyskane ze zmiennych losowych o rozkładzie równomiernym  $\hat{x}_n$  przy pomocy odwrócenia dystrybucyjnego rozkładu wykładniczego.

Symulacja składa się z kilku kroków. Najpierw generowane są ciągi zmiennych losowych  $\Delta_1, \Delta_2, \dots$ , niezbędne w Modelach 1-3, a następnie obliczane są amplitudy fali padającej i odbitej, zgodnie z odpowiednimi wzorami (w ostatnim przypadku również liczba  $N(\gamma)$  jest wygenerowana w sposób niezależny od grubości warstw). Następnie procedura ta jest powtarzana wielokrotnie (w prezentowanych przykładach - 1000 razy), w celu obliczenia wartości oczekiwanych odpowiednich zmiennych losowych (tzn. momentów i współczynników odbicia  $r'_a$  i  $r'_c$ ).

Wyniki symulacji zostały przedstawione na rysunkach 4.12-4.15. Współczynniki

odbicia są wykreślone jako funkcje liczby warstw  $N$ . Założono, że suma grubości warstw każdego materiału jest stała (równa, odpowiednio,  $L$  i  $l$ ) natomiast gęstość uwarstwienia (reprezentowana przez  $N$ ) rośnie. Taki wzrost parametru  $N$  reprezentuje (realistyczną - fizyczną) homogenizację dwuskładnikowego ośrodka warstwowego; zmiany jego własności w miarę "homogenizacji" są reprezentowane przez zmiany współczynnika odbicia. Matematyczna procedura homogenizacji daje wynik jedynie w przypadku granicznym, wyidealizowanym gdy liczba warstw jest nieskończona (lub, jak to zwykle mówimy - "dostatecznie duża"). Model 5 może być przykładem takiej wyidealizowanej sytuacji granicznej; inne przykłady ośrodków zhomogenizowanych występują w literaturze. Na podstawie rysunków 4.12-4.15 można porównać własności naszych pięciu modeli, w szczególności stwierdzić, co w przypadku modelu uwarstwionej płyty oznacza "dostatecznie duża gęstość uwarstwienia" w procesie homogenizacji.

Z założenia Model 5 nie zależy od gęstości uwarstwienia  $N$  - współczynnik odbicia jest w nim stały.

Inaczej zachowuje się Model 4: współczynniki odbicia maleją od około 1 (dla  $N=1$ ) do około 0 (dla  $N=8$ ; ten fakt jest spowodowany wybranym układem parametrów) a następnie rośnie dla  $N$  dążącego do nieskończoności do odpowiedniego współczynnika odbicia takiego jak w Modelu 5 (ośrodku zhomogenizowanym).

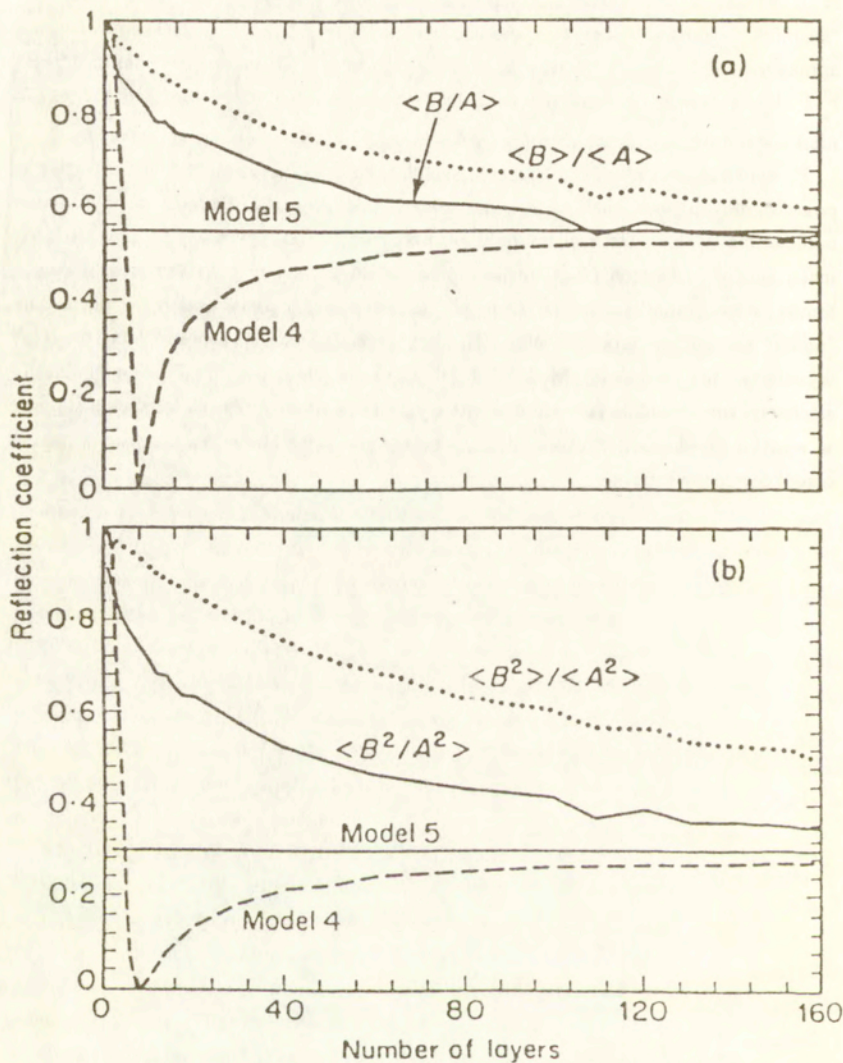
Oba współczynniki odbicia dla Modelu 1 (dokładne i przybliżone) maleją od około jedynki dla  $N=1$  do odpowiedniego współczynnika odbicia Modelu 5. Widać, że, w przeciwieństwie do Modelu 4, nie mają one minimum dla żadnej gęstości uwarstwienia. Ponadto dokładne współczynniki odbicia maleją (zbiegają) szybciej niż współczynniki przybliżone. (Wzajemne związki dokładnych i przybliżonych współczynników odbicia w Modelach 2 i 3 są bardzo podobne).

Możemy ponadto zauważyć, że te współczynniki w Modelu 2 zbiegają szybciej do swoich granic niż w Modelu 3 (sprawdzono, że dla  $N=500$  te współczynniki w Modelu 3 są również bliskie swym granicznym wartościom).

Jako wniosek z zaprezentowanych wykresów możemy przyjąć, że wszystkie zaproponowane modele w granicy (tzn. dla dużych  $N$ ) dają takie same współczynniki odbicia (podlegają homogenizacji). Inaczej przedstawia się sytuacja dla małych i średnich  $N$ . Dla małych  $N$  Model 4 daje wyniki całkowicie odmienne od uzyskanych dla modeli losowych; należy być bardzo ostrożnym stosując procedurę homogenizacyjną do ośrodków deterministycznych przy niewielkiej gęstości uwarstwienia (z racji właśnie takich szczególnych efektów jak całkowite odbicie lub całkowite przepuszczenie fali przez ośrodek warstwowy dla szczególnej kombinacji grubości warstw i długości

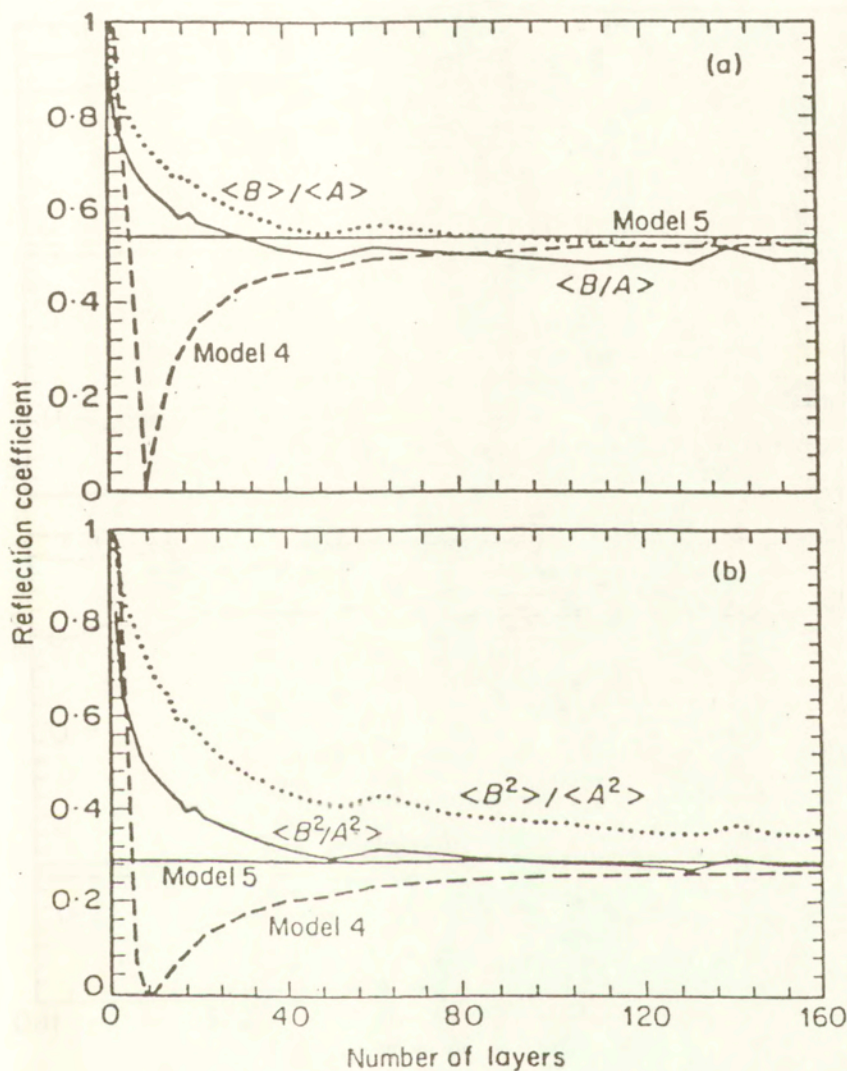
fali). Model 2 jest wśród naszych modeli najlepszą aproksymacją Modelu 1. Dla "średnich" wartości  $N$  wszystkie modele oprócz Modelu 3 możemy zaakceptować jako aproksymację Modelu 1. Należy także pamiętać, że przybliżone współczynniki odbicia  $r'_a$  i  $r'_c$  są zawsze większe niż dokładne współczynniki  $r_a$  i  $r_c$ ; dla  $N$  dążącego do nieskończoności wielkości te zbiegają do tej samej granicy.

Przeprowadzono również obliczenia symulacyjne przy założeniu, że liczby falowe w poszczególnych warstwach są również zmiennymi losowymi. Wartości współczynnika odbicia dla  $N=1, \dots, 160$  zawarte były w przedziale  $(0.95, 1)$ . Niestety, z powodu zbyt małej liczby powtórzeń (1000 realizacji) nie udało się w tym wypadku zaobserwować trendu współczynnika odbicia. Daje się zaobserwować ogólna tendencja, że modele "mniej losowe" w procesie symulacji dają szybciej zbieżne wyniki. Jako przykład wystarczy tu porównać Modele 2 i 3 na wykresie 4.15. Z drugiej strony stochastyczność modelu powoduje pewne wygładzenie wyników (zanik lokalnych efektów w wyniku uśrednienia). Tu dla odmiany można porównać Model 4 z którymś z modeli ośrodków losowych.

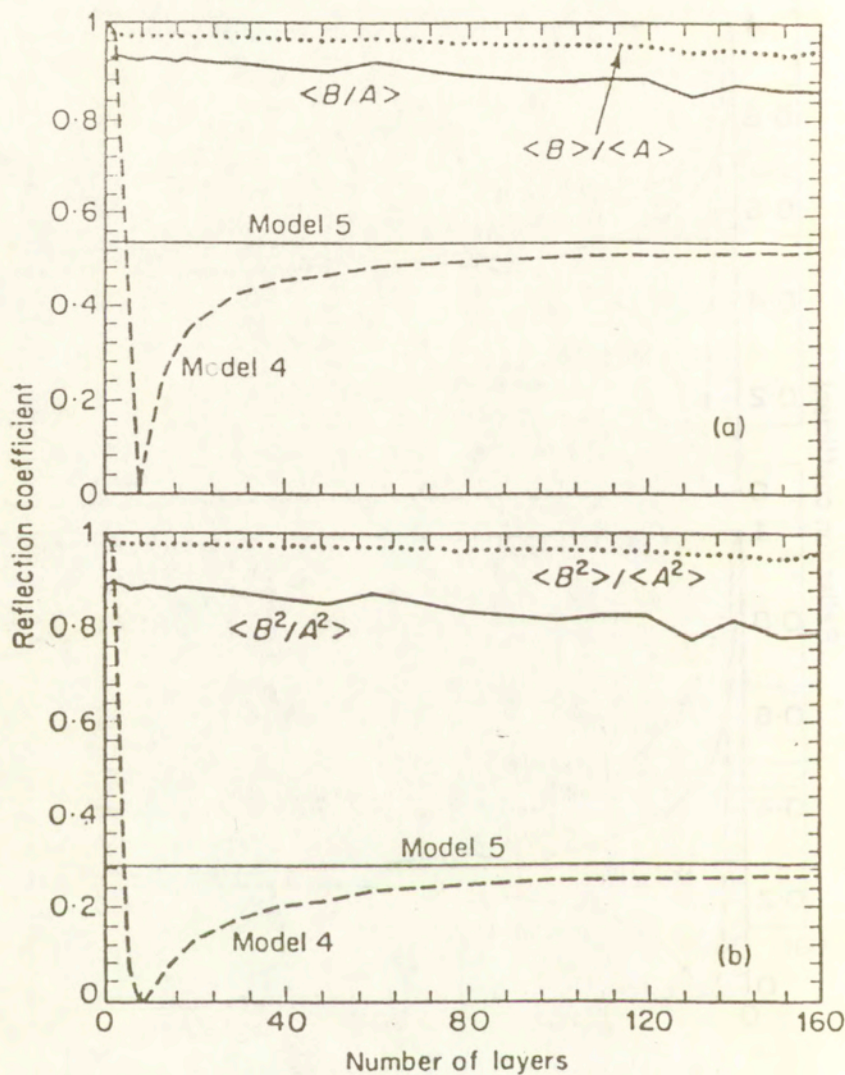


Rys.4.12 Porównanie współczynnika odbicia dla (a) amplitud i (b) energii dla Modelu 1, Modelu 4 i Modelu 5 (deterministycznego).

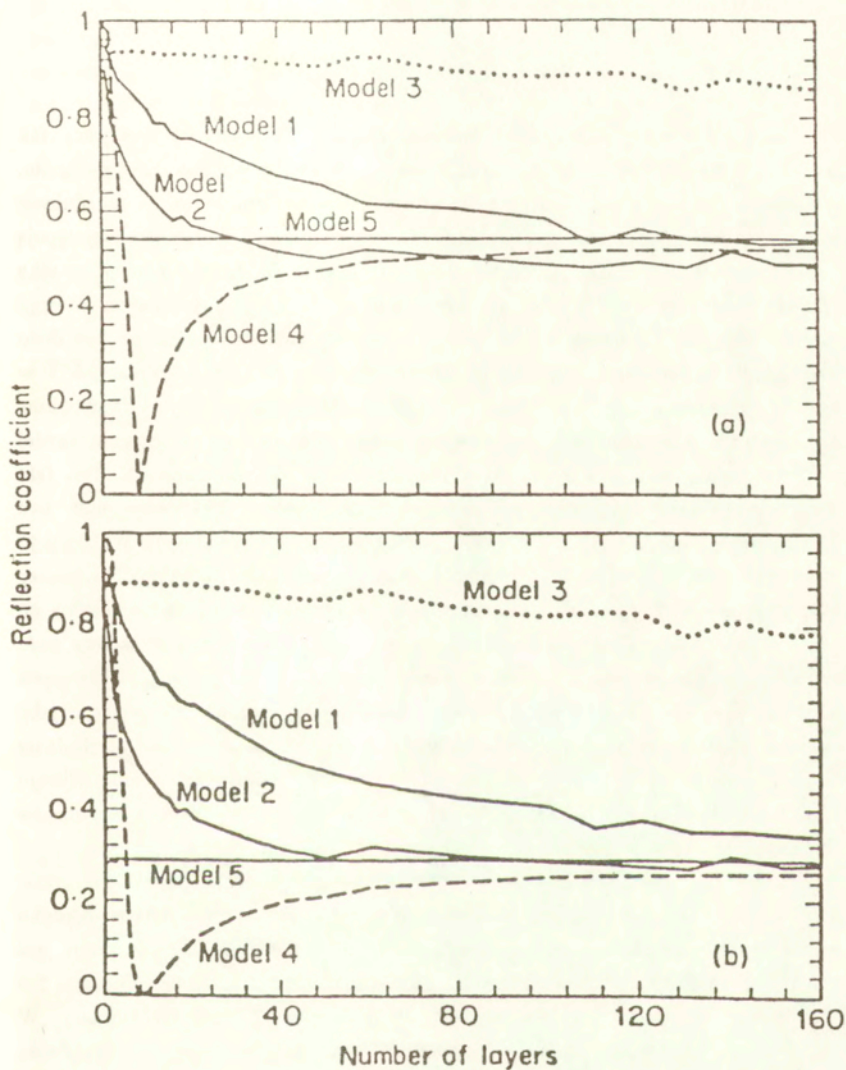




Rys.4.13 Porównanie współczynnika odbicia dla (a) amplitud i (b) energii dla Modelu 2, Modelu 4 i Modelu 5 (deterministycznego).



Rys.4.14 Porównanie współczynnika odbicia dla (a) amplitud i (b) energii dla Modelu 3, Modelu 4 i Modelu 5 (deterministycznego).



Rys.4.15 Zależność współczynnika odbicia dla (a) amplitudy i (b) energii od liczby warstw w płycie.

## 5. Dwuwymiarowe fale harmoniczne w ośrodku sprężystym.

### 5.1. Wstęp

Rozdział ten poświęcony jest badaniu przejścia harmonicznej sprężystej fali płaskiej (P lub SV) przez nieskończoną płytę zbudowaną z wielu warstw materiału. Zakładamy, że kąt padania fali może być różny od zera. Oznacza to, że zagadnienie jest dwuwymiarowe; niezależnie od typu fali wymuszającej w ośrodku występują równocześnie fale podłużnie i poprzecznie spolaryzowane. W szczególnym przypadku zerowego kąta padania zagadnienie sprowadza się do modelu jednowymiarowego analizowanego w Rozdziale 4. Dla niezerowego kąta padania zagadnienie jest dużo bardziej skomplikowane, zarówno dla skończonej liczby warstw w płycie jak i w sytuacji granicznej, gdy ich liczba dąży do nieskończoności. Płyta uwarstwiona zbudowana z jednorodnych i izotropowych warstw jest lokalnie (w obrębie każdej warstwy) izotropowa, jednak potraktowana jako całość jest anizotropowa. Ten fakt musi się odzwierciedlić w trakcie homogenizacji: materiał efektywny musi być anizotropowy (będąc, zgodnie z zasadami homogenizacji - jednorodnym). Widzimy tu zatem, że w takim przypadku, stawiając zagadnienie w sposób tradycyjny, to znaczy poszukując efektywnych stałych materiałowych, otrzymujemy może nie tyle błędny co niepełny wynik. Każdy ze składników płyty scharakteryzowany jest przez trzy stałe materiałowe: stałe Lamé  $\mu$  i  $\lambda$  oraz gęstość  $\rho$ . Poszukiwanie jedynie efektywnych odpowiedników tych stałych nie daje pełnej charakterystyki ośrodka efektywnego jako miejsca gdzie propaguje się fala sprężysta. Wynika z tego zatem, że badanie efektywnych własności ośrodków sprężystych wymaga odmiennego, precyzyjnego sformułowania i dokładnej analizy. Zagadnienie to jest właśnie jednym z tematów Rozdziału 4.

Szczegółowa zawartość tego rozdziału przedstawia się następująco. W paragrafie 5.2 podano podstawowe fakty dotyczące propagacji fal sprężystych w ośrodku jednorodnym i na granicy półprzestrzeni jednorodnych. Paragraf 5.3 poświęcony jest konstrukcji macierzy przejścia dla ośrodka dwuwymiarowego a następujący po nim 5.4 - uproszczeniu postaci tej macierzy i zapisaniu jej w postaci rzeczywistej. W kolejnym punkcie 5.5 podajemy naszą definicję ośrodka efektywnego i efektywnej macierzy przejścia. Następnie (paragraf 5.6) znajdujemy taką macierz dla deterministycznego ośrodka okresowego zbudowanego z dwóch rodzajów materiału. Punkt

5.7 poświęcony jest analizie fal sprężystych w ośrodku zhomogenizowanym. W punkcie 5.8 rozważamy okresowe zagadnienie losowe i efektywne parametry ośrodka w takim przypadku. Ośrodek okresowy zbudowany z większej liczby materiałów omówiony jest w paragrafie 5.9. Zamykające rozdział punkty 5.10 i 5.11 poświęcone są znalezieniu sposobu mierzenia zbieżności ośrodka warstwowego do zhomogenizowanego i przebadaniu tej zbieżności dla przykładu konkretnego ośrodka warstwowego.

## 5.2. Sformułowanie zagadnienia

Rozważmy falę sprężystą w ośrodku jednorodnym i izotropowym. Niech  $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t) = (U_1(\mathbf{r}, t), U_2(\mathbf{r}, t), U_3(\mathbf{r}, t))^T$  oznacza przemieszczenie ośrodka w punkcie  $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ . Jej ewolucja (pod nieobecność wymuszeń zewnętrznych) jest opisana przez następujące równanie falowe:

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{U} = \mu \Delta \mathbf{U} + (\lambda + \mu) \text{grad div } \mathbf{U} \quad (5.1)$$

gdzie

$\rho$  - jest gęstością ośrodka,  
 $\mu$  i  $\lambda$  - są stałymi Lamé ośrodka.

Rozwiązanie równania (5.1) może być rozłożone na dwie części:  $\mathbf{U}_1$  i  $\mathbf{U}_2$ :

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_1 + \mathbf{U}_2 \quad (5.2)$$

w taki sposób, że

$$\text{rot } \mathbf{U}_1 = 0, \quad \text{div } \mathbf{U}_2 = 0. \quad (5.3)$$

Fala  $\mathbf{U}_1$  jest nazywana poprzeczną (poprzecznie spolaryzowaną), ponieważ przemieszczenia ośrodka są w niej prostopadłe do kierunku propagacji. Uzupełniająca fala  $\mathbf{U}_2$  jest nazywana podłużną (podłużnie spolaryzowaną), ponieważ przemieszczenia ośrodka są w niej równoległe do kierunku propagacji fali. Z równania (5.1) wynika,

że w jednorodnym ośrodku izotropowym fale te nie oddziałują ze sobą; spełniają one następujące równania różniczkowe:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{U}_l - (c_l)^2 \Delta \mathbf{U}_l = 0, \quad (5.4)$$

oraz

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{U}_t - (c_t)^2 \Delta \mathbf{U}_t = 0, \quad (5.5)$$

gdzie

$$(c_l)^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, \quad (5.6)$$

$$(c_t)^2 = \frac{\mu}{\rho}, \quad (5.7)$$

są prędkościami propagacji, odpowiednio, fali podłużnej i poprzecznej. Zakładając, że fale te są harmoniczne w czasie:

$$\mathbf{U}(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \left\{ \mathbf{u}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} \right\}, \quad t \in \mathbb{R}^+ \quad (5.8)$$

czyli

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_l + \mathbf{u}_t \quad (5.9)$$

otrzymujemy dwa następujące "zamrożone w czasie" równania dla fali podłużnej i poprzecznej:

$$\Delta \mathbf{u}_l + (k_l)^2 \mathbf{u}_l = 0 \quad (5.10)$$

$$\Delta \mathbf{u}_t + (k_t)^2 \mathbf{u}_t = 0 \quad (5.11)$$

gdzie

$$k_1 = \frac{\omega}{c_1}, \quad (5.12)$$

$$k_1 = \frac{\omega}{c_1}, \quad (5.13)$$

są liczbami falowymi, odpowiednio, dla fali podłużnej i poprzecznej. Rozwiązania równań (5.10) i (5.11) mogą być przedstawione w następującej postaci:

$$\mathbf{u}_1(\mathbf{r}) = A \mathbf{n} \exp[ik_1 \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}], \quad (5.14)$$

$$\mathbf{u}_1(\mathbf{r}) = C \mathbf{a} \times \mathbf{g} \exp[ik_1 \mathbf{g} \cdot \mathbf{r}] \quad (5.15)$$

gdzie

$A$  ( $C$ ) jest amplitudą fali podłużnej (odpowiednio: poprzecznej),

$\mathbf{n}$  ( $\mathbf{g}$ ) jest wektorem jednostkowym w kierunku propagacji fali podłużnej (poprzecznej),

$\mathbf{a}$  jest wektorem jednostkowym prostopadłym do kierunku propagacji fali poprzecznej. Przemieszczenia ośrodka są wówczas opisane przez rzeczywiste części wyrażań (5.14) i (5.15) (w dalszych rozważaniach harmoniczny składnik czasowy pola falowego będzie konsekwentnie pomijany).

Powyższy prosty model komplikuje się gdy fala sprężysta osiąga powierzchnię nieciągłości ośrodka (granicę między dwoma różnymi jednorodnymi i izotropowymi ośrodkami). W takim wypadku każda z propagujących się fal (podłużna i poprzeczna) częściowo odbija się i częściowo przechodzi przez powierzchnię nieciągłości generując zarówno falę podłużną jak i poprzeczną. W celu dokładnego opisanie tego zjawiska musimy znać kierunki propagacji i amplitudę każdej z tych fal.

Załóżmy, że płaszczyzna  $x_1 = c = \text{const.}$  jest płaszczyzną połączenia dwóch półprzestrzeni wypełnionych materiałem sprężystym. W obszarze  $x_1 < c$  znajduje się materiał w którym prędkości falowe są równe:  $c_1 = c^1$ ,  $c_1 = v^1$ ; w obszarze  $x_1 > c$  te wielkości są odpowiednio:  $c_1 = c^2$ ,  $c_1 = v^2$ . Załóżmy, że w obszarze  $x_1 < c$  propaguje się

fala podłużna  $A^1 \mathbf{n}^1 \exp(ik_1^1 \mathbf{n}^1 \mathbf{r})$ . Dochodząc do powierzchni nieciągłości generuje ona cztery nowe fale: odbitą podłużną  $B^1 \mathbf{m}^1 \exp(ik_1^1 \mathbf{m}^1 \mathbf{r})$  i odbitą poprzeczną  $D^1 \mathbf{a} \times \mathbf{h}^1 \exp(ik_1^1 \mathbf{h}^1 \mathbf{r})$ , propagujące się w obszarze  $x_1 < c$  oraz dwie przechodzące - podłużną  $A^2 \mathbf{n}^2 \exp(ik_1^2 \mathbf{n}^2 \mathbf{r})$  i poprzeczną  $C^2 \mathbf{a} \times \mathbf{g}^2 \exp(ik_1^2 \mathbf{g}^2 \mathbf{r})$ , w obszarze  $x_1 > c$ . (W powyższych wyrażeniach  $A^1, A^2, B^1, C^2, D^1$  są amplitudami,  $k_1^1, k_1^2, k_1^1, k_1^2$  liczbami falowymi a  $\mathbf{n}^1, \mathbf{n}^2, \mathbf{m}^1, \mathbf{g}^2, \mathbf{h}^1$  wektorami jednostkowymi w kierunku propagacji odpowiednich fal; wektor  $\mathbf{a}$  jest prostopadły do płaszczyzny zawierającej wektory  $\mathbf{h}^1$  i  $\mathbf{N}$  - wektor normalny do powierzchni nieciągłości). W celu określenia wartości kątów wektorów kierunków posłużymy się prawem Sneliusa. Jeżeli  $\vartheta^1$  jest kątem pomiędzy wektorami  $\mathbf{n}^1$  a  $\mathbf{N}$ ,  $\kappa^1$  - pomiędzy  $\mathbf{h}^1$  a  $\mathbf{N}$ ,  $\vartheta^2$  - pomiędzy  $\mathbf{n}^2$  a  $\mathbf{N}$ ,  $\kappa^2$  - pomiędzy  $\mathbf{g}^2$  a  $\mathbf{N}$ , wówczas kąty te spełniają następujące związki:

$$\frac{\sin \vartheta^1}{\sin \kappa^1} = \frac{c^1}{v^1}, \quad (5.16)$$

$$\frac{\sin \vartheta^1}{\sin \vartheta^2} = \frac{c^1}{c^2}, \quad (5.17)$$

$$\frac{\sin \vartheta^1}{\sin \kappa^2} = \frac{c^1}{v^2}. \quad (5.18)$$

Kąt między wektorami  $\mathbf{m}^1$  i  $\mathbf{N}$  jest równy  $\vartheta^1$ . Wyrażenia (5.16-5.18) jednoznacznie określają kierunki propagacji fali o ile kąt  $\vartheta^1$  jest znany. Jeżeli fala wymuszająca jest poprzecznie spolaryzowana, wówczas wyrażenia dla kątów fal generowanych są analogiczne, z tym, że kątem znanym jest  $\kappa^1$  a pozostałe kąty muszą być wyznaczone z wzorów (5.16-5.18)).

Wartości amplitud mogą być uzyskane z warunków ciągłości które musi spełniać pole falowe  $\mathbf{u}(x)$  na powierzchni połączenia materiałów. Wiadomo, że wewnątrz każdego z jednorodnych i izotropowych materiałów pole falowe, jako suma funkcji eksponencjalnych, jest funkcją ciągłą; na powierzchni nieciągłości ciągle musi być przemieszczenie ośrodka  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$  i naprężenie normalne  $\mathbf{t}$ :



$$t_i = \sum_j \sigma_{ij} N_j \quad (5.19)$$

gdzie

$$\sigma_{ij} = \lambda \sum_k \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} + \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (5.20)$$

Wyrażenia dla amplitud fal w szczególnym rozważanym przypadku będą przedstawione w następnym paragrafie.

### 5.3. Konstrukcja macierzy przejścia w przypadku dwuwymiarowym.

Rozważmy nieskończoną płytę sprężystą, podzieloną na  $N$  równoległych warstw, wykonanych z materiału izotropowego i jednorodnego, o grubościach  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_N$ . Łączna grubość płyty wynosi  $d$ , gdzie

$$d = \sum_{j=1}^N \Delta_j \quad (5.21)$$

Wprowadzamy taki układ współrzędnych, w którym płyta zajmuje obszar  $\{r: 0 \leq x_1 \leq d\}$ , (to znaczy, powierzchniami połączenia warstw są płaszczyzny  $x_1 = \text{const.}$ ) a kierunek propagacji płaskiej fali harmoniczej w półprzestrzeni  $x_1 < 0$  (padającej na płytę pod kątem  $\vartheta^0$ ) jest równoległy do płaszczyzny  $x_1 x_2$ . Wówczas również pozostałe kierunki propagacji fal odbitych i przechodzących są równoległe do płaszczyzny  $x_1 x_2$  i zagadnienie staje się dwuwymiarowe. Zakładamy również, że otoczenie płyty jest materiałem sprężystym. W końcu zakładamy, że następujące wielkości są znane:

$\lambda^j, \mu^j$  - stałe Lamego,  $j=0,1,2,\dots,N$ ,

$c^j, v^j$  - prędkości fali podłużnej i poprzecznej,  $j=0,1,2,\dots,N$ ,

$k_1^j, k_t^j$  - liczby falowe dla fali podłużnej i poprzecznej,  $j=0,1,2,\dots,N$ ,

gdzie  $j=0$  oznacza ośrodek otaczający płytę z lewej i prawej strony, natomiast

pozostałe wartości indeksu  $j$  oznaczają materiał  $j$ -tej warstwy wewnątrz płyty (warstwy o grubości  $\Delta_j$ ). (por. rysunek D2 w Dodatku).

Zakładamy, że fala padająca (wymuszająca) jest podłużna i że ma ona postać:

$$\Psi_1^{\text{inc}}(\mathbf{r}) = A^0 \mathbf{n} \exp\left\{ ik_1^0 \mathbf{n}^0 \mathbf{r} \right\}, \quad (5.22)$$

gdzie

$A^0$  jest daną amplitudą fali,

$\mathbf{r} = (x_1, x_2)$  jest wektorem współrzędnej punktu,

oraz  $\mathbf{n} = (\cos\theta^0, \sin\theta^0)$  jest wektorem jednostkowym na płaszczyźnie  $x_1, x_2$  wzdłuż którego fala biegnie.

Fala wymuszająca generuje; w obszarze  $x_1 < 0$  fale odbite - podłużną i poprzeczną:

$$\Psi_1^{\text{ref}}(\mathbf{r}) = B^0 \mathbf{m}^0 \exp\left\{ ik_1^0 \mathbf{m}^0 \mathbf{r} \right\}, \quad (5.23)$$

$$\Psi_1^{\text{ref}}(\mathbf{r}) = D^0 \mathbf{a} \times \mathbf{h}^0 \exp\left\{ ik_1^0 \mathbf{h}^0 \mathbf{r} \right\}; \quad (5.24)$$

w każdej  $j$ -tej warstwie płyty: biegnące w prawo i w lewo fale podłużne i poprzeczne:

$$\Psi_j^{\text{r}}(\mathbf{r}) = A_j \mathbf{n}_j \exp\left\{ ik_1^j \mathbf{n}_j \mathbf{r} \right\}, \quad (5.25)$$

$$\Psi_j^{\text{l}}(\mathbf{r}) = B_j \mathbf{m}_j \exp\left\{ ik_1^j \mathbf{m}_j \mathbf{r} \right\}, \quad (5.26)$$

$$\Psi_j^{\text{r}}(\mathbf{r}) = C_j \mathbf{a} \times \mathbf{g}_j \exp\left\{ ik_1^j \mathbf{g}_j \mathbf{r} \right\}, \quad (5.27)$$

$$\Psi_j^{\text{l}}(\mathbf{r}) = D_j \mathbf{a} \times \mathbf{h}_j \exp\left\{ ik_1^j \mathbf{h}_j \mathbf{r} \right\}, \quad (5.28)$$

a w obszarze otoczenia  $x_1 > d$  fale przechodzące podłużnie i poprzeczne:

$$\Psi_1^{tr}(\mathbf{r}) = A^f n^0 \exp\left\{ i k_1^0 n^0 \cdot \mathbf{r} \right\}, \quad (5.29)$$

$$\Psi_1^{tr}(\mathbf{r}) = C^f \mathbf{a} \times \mathbf{g}^0 \exp\left\{ i k_1^0 \mathbf{g}^0 \cdot \mathbf{r} \right\}, \quad (5.30)$$

gdzie wektory  $\mathbf{n}^j$ ,  $\mathbf{m}^j$ ,  $\mathbf{g}^j$ ,  $\mathbf{h}^j$ ,  $j=0,1,2,\dots,N$  są identyfikowane z wektorami w  $\mathbb{R}^3$  mającymi trzecią współrzędną równą zero, wektor  $\mathbf{a}$  ma postać  $\mathbf{a} = (0,0,1)$ , natomiast

$$\mathbf{n}^j = (\cos\vartheta^j, \sin\vartheta^j), \quad (5.31)$$

$$\mathbf{m}^j = (-\cos\vartheta^j, \sin\vartheta^j), \quad (5.32)$$

$$\mathbf{g}^j = (\cos\kappa^j, \sin\kappa^j), \quad (5.33)$$

$$\mathbf{h}^j = (-\cos\kappa^j, \sin\kappa^j), \quad (5.34)$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{g}^j = (-\sin\kappa^j, \cos\kappa^j), \quad (5.35)$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{h}^j = (-\sin\kappa^j, -\cos\kappa^j), \quad (5.36)$$

gdzie kąty  $\vartheta^j$ ,  $\kappa^j$ ,  $j=0,1,2,\dots,N$  są obliczone z następujących związków analogicznych do (5.16-5.18):

$$\sin\vartheta^j = \frac{c^j}{c^0} \sin\vartheta^0, \quad (5.37)$$

$$\sin\kappa^j = \frac{v^j}{c^0} \sin\vartheta^0, \quad (5.38)$$

Całkowite pole falowe (przesunięcie ośrodka) w danej warstwie jest sumą fal biegnących w lewo i w prawo; ma ono następującą postać:

$$u(\mathbf{r}) = \Psi(\mathbf{r}) = A_j n^j \exp\{ik_1^j n^j \mathbf{r}\} + B_j m^j \exp\{ik_1^j m^j \mathbf{r}\} + \\ C_j a \times g^j \exp\{ik_1^j g^j \mathbf{r}\} + D_j a \times h^j \exp\{ik_1^j h^j \mathbf{r}\} \quad (5.39)$$

dla wszystkich  $\mathbf{r}=(x_1, x_2)$  takich że  $0 < x_1 < d$ , gdzie we wzorze (5.39)  $j$  jest numerem warstwy w płycie. Dla uproszczenia zapisu zakładamy, że fala w ośrodku otaczającym płytę ma również postać (5.39) (z odpowiednimi oznaczeniami:  $o$  przed płytą i  $f$  za płytą), z tym, że  $C_0^o=0$  i  $B_0^f=0$ ,  $D_0^f=0$ .

Jak zauważyliśmy w rozdziale 5.2, fala wewnątrz każdej warstwy jest funkcją gładką natomiast na połączeniu warstw spełnia dwa warunki ciągłości:

$$\left[ u_i \right] = 0, \quad (5.40)$$

$$\left[ t_i \right] = 0, \quad (5.41)$$

$i=1,2$ , gdzie  $[.]$  oznacza skok funkcji (różnicę jej wartości w dwóch punktach leżących po przeciwnych stronach powierzchni nieciągłości gdy ich odległość zmierza do zera). Wielkości które powinny zachować ciągłość, wyrażone przy użyciu wzorów (5.19), (5.20), (5.31-5.36) i (5.39) mają następującą postać ( $\mathbf{N} = (1,0,0)$ ):

$$u_1(\mathbf{r}) = A_j \cos \vartheta^j \exp\{ik_1^j n^j \mathbf{r}\} - B_j \cos \vartheta^j \exp\{ik_1^j m^j \mathbf{r}\} - \\ - C_j \sin \kappa^j \exp\{ik_1^j g^j \mathbf{r}\} - D_j \sin \kappa^j \exp\{ik_1^j h^j \mathbf{r}\}, \quad (5.42)$$

$$u_2(\mathbf{r}) = A_j \sin \vartheta^j \exp\{ik_1^j n^j \mathbf{r}\} + B_j \sin \vartheta^j \exp\{ik_1^j m^j \mathbf{r}\} + \\ + C_j \cos \kappa^j \exp\{ik_1^j g^j \mathbf{r}\} - D_j \cos \kappa^j \exp\{ik_1^j h^j \mathbf{r}\}, \quad (5.43)$$

$$\begin{aligned}
t_1(\mathbf{r}) &= (\lambda^j + 2\mu^j) \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \lambda^j \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = \\
&= A_j k_1^j (\lambda^j + 2\mu^j \cos^2 \vartheta^j) \exp\{ik_1^j \mathbf{n}^j \cdot \mathbf{r}\} + \\
&+ B_j k_1^j (\lambda^j + 2\mu^j \cos^2 \vartheta^j) \exp\{ik_1^j \mathbf{m}^j \cdot \mathbf{r}\} - \\
&- 2\mu^j C_j k_1^j \sin \kappa^j \cos \kappa^j \exp\{ik_1^j \mathbf{g}^j \cdot \mathbf{r}\} + \\
&+ 2\mu^j D_j k_1^j \sin \kappa^j \cos \kappa^j \exp\{ik_1^j \mathbf{h}^j \cdot \mathbf{r}\}
\end{aligned} \tag{5.44}$$

$$\begin{aligned}
2t_2(\mathbf{r}) &= \mu^j \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) = \\
&= 2\mu^j A_j k_1^j \sin \vartheta^j \cos \vartheta^j \exp\{ik_1^j \mathbf{n}^j \cdot \mathbf{r}\} + \\
&+ 2\mu^j B_j k_1^j \sin \vartheta^j \cos \vartheta^j \exp\{ik_1^j \mathbf{m}^j \cdot \mathbf{r}\} + \\
&+ \mu^j C_j k_1^j (1 - 2\sin^2 \kappa^j) \exp\{ik_1^j \mathbf{g}^j \cdot \mathbf{r}\} + \\
&+ \mu^j D_j k_1^j (1 - 2\sin^2 \kappa^j) \exp\{ik_1^j \mathbf{h}^j \cdot \mathbf{r}\}.
\end{aligned} \tag{5.45}$$

Wyrażenia (5.44-5.45) mogą być zapisane w następującej postaci macierzowej:

$$\mathfrak{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{T}_j(\mathbf{r}) \cdot \zeta \tag{5.46}$$

gdzie:

$$\mathbb{H}(\mathbf{r}) = \left[ u_1(\mathbf{r}), u_2(\mathbf{r}), t_1(\mathbf{r}), 2t_2(\mathbf{r}) \right]^T, \quad (5.47)$$

$$\mathcal{A}_j = \left[ A_j, B_j, C_j, D_j \right]^T, \quad j=1,2,\dots,N, \quad (5.48)$$

$$\mathbf{T}_j(\mathbf{r}) = \mathbf{T}_j(0) \mathbf{Q}_j(\mathbf{r}) \quad (5.49)$$

i

$$\mathbf{Q}_j(\mathbf{r}) = \text{diag} \left[ \exp(ik_1^j \mathbf{n}^j \cdot \mathbf{r}), \exp(ik_1^j \mathbf{m}^j \cdot \mathbf{r}), \exp(ik_1^j \mathbf{g}^j \cdot \mathbf{r}), \exp(ik_1^j \mathbf{h}^j \cdot \mathbf{r}) \right]. \quad (5.50)$$

W szczególnym przypadku gdy  $\mathbf{r}=(x_1,0)$ , macierz  $\mathbf{Q}_j(\mathbf{r})$  może być przedstawiona w następującej postaci:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_j(x_1) = & \text{diag} \left[ \cos(k_1^j \cos\vartheta^j x_1) + i \sin(k_1^j \cos\vartheta^j x_1), \right. \\ & \cos(k_1^j \cos\vartheta^j x_1) - i \sin(k_1^j \cos\vartheta^j x_1), \\ & \cos(k_1^j \cos\kappa^j x_1) + i \sin(k_1^j \cos\kappa^j x_1), \\ & \left. \cos(k_1^j \cos\kappa^j x_1) - i \sin(k_1^j \cos\kappa^j x_1) \right] \quad (5.51) \end{aligned}$$

i

$$\mathbf{T}_j(0) = \begin{bmatrix} \cos\vartheta^j & -\cos\vartheta^j & -\sin\kappa^j & -\sin\kappa^j \\ \sin\vartheta^j & \sin\vartheta^j & \cos\kappa^j & -\cos\kappa^j \\ p_1^j + 2q_1^j \cos^2\vartheta^j & p_1^j + 2q_1^j \cos^2\vartheta^j & -2q_1^j \sin\kappa^j \cos\kappa^j & -2q_1^j \sin\kappa^j \cos\kappa^j \\ 2q_1^j \sin\vartheta^j \cos\vartheta^j & -2q_1^j \sin\vartheta^j \cos\vartheta^j & q_1^j (1-2\sin^2\kappa^j) & q_1^j (1-2\sin^2\kappa^j) \end{bmatrix}, \quad (5.52)$$

gdzie, dla uproszczenia zapisu, w powyższej macierzy wprowadzono następujące oznaczenia:

$$p_1^j = k_1^j \lambda^j, \quad q_1^j = k_1^j \mu^j, \quad q_1^j = k_1^j \mu^j. \quad (5.53)$$

Teraz możemy zapisać warunki ciągłości (5.40-5.41) na powierzchniach połączenia warstw oraz pomiędzy płytą i ośrodkiem ją otaczającym w następującej wektorowej postaci:

$$\mathbf{T}_0(0) \mathcal{A}_0 = \mathbf{T}_1(0) \mathcal{A}_1, \quad (5.54)$$

$$\mathbf{T}_j \left( \sum_{k=1}^j \Delta_k \right) \mathcal{A}_j = \mathbf{T}_{j+1} \left( \sum_{k=1}^j \Delta_k \right) \mathcal{A}_{j+1}, \quad j=1,2,\dots,N-1, \quad (5.55)$$

$$\mathbf{T}_N \left( \sum_{k=1}^N \Delta_k \right) \mathcal{A}_N = \mathbf{T}_0 \left( \sum_{k=1}^N \Delta_k \right) \mathcal{A}_0 \quad (5.56)$$

gdzie wektory  $\mathcal{A}_j$  w powyższych równaniach są zdefiniowane w (5.48), natomiast wektory opisujące falę w materiale otaczającym płytę mają następującą postać:

$$\mathcal{A}_0 = \left[ A^0, B^0, 0, D^0 \right]^T, \quad (5.57)$$

$$\mathcal{A}_1 = \left[ A^1, 0, C^1, 0 \right]^T. \quad (5.58)$$

Pełny przebieg procesu falowego w płycie wymaga znajomości wszystkich wektorów amplitud  $\mathcal{A}_j$ . Można wówczas określić falę w każdym punkcie ośrodka. Rozwiązanie tego zagadnienia jest jednak skomplikowane, wymaga rozwiązania wielkiego układu równań dla wektora niewiadomych zawierającego wszystkie amplitudy występujące w (5.54-5.56). Jeżeli jednak znamy jeden z wektorów  $\mathcal{A}_0$  lub  $\mathcal{A}_1$ , wówczas możemy uzyskać wszystkie niewiadome wektory amplitud korzystając z wzorów (5.54-5.56).

Celem naszych rozważań jest wyprowadzenie związku między  $\mathcal{A}_0$  i  $\mathcal{A}_1$ ; w tym celu wystarczy rozważyć równania ciągłości (5.40-5.41) dla ustalonej wartości  $x_2$ , na

przykład  $x_2=0$ . Dlatego też macierze  $T_i$  w (5.54-5.56) są traktowane jako funkcje jednej tylko zmiennej  $x_1$ .

W celu uproszczenia równań (5.54-5.56) wprowadźmy nowe zmienne  $\mathcal{G}_j$  w następującej postaci:

$$\mathcal{G}_j = Q_j \left[ \sum_{k=1}^j \Delta_k \right] \mathcal{A}_j, \quad j=1, \dots, N. \quad (5.59)$$

Używając tych nowych zmiennych możemy przepisać hierarchię równań (5.54-5.56) w następującej postaci:

$$T_0(0) \mathcal{A}_0 = T_1(-\Delta_1) \mathcal{G}_1, \quad (5.60)$$

$$T_j(0) \mathcal{G}_j = T_{j+1}(-\Delta_{j+1}) \mathcal{G}_{j+1}, \quad j=1, 2, \dots, N-1 \quad (5.61)$$

$$T_N(0) \mathcal{G}_N = T_0 \left[ \sum_{k=1}^N \Delta_k \right] \mathcal{A}_T \quad (5.62)$$

Z (5.61) otrzymujemy:

$$\mathcal{G}_j = T_j^{-1}(0) T_{j+1}(-\Delta_{j+1}) \mathcal{G}_{j+1}, \quad j=1, 2, \dots, N, \quad (5.63)$$

a po kolejnym podstawianiu zmiennych  $\mathcal{G}_j$  w (5.63) dla  $j=1, 2, \dots, N$  dochodzimy w końcu do równań dla  $\mathcal{A}_0$  i  $\mathcal{A}_T$  następującej postaci:

$$\mathcal{A}_0 = T_0^{-1}(0) T_1(-\Delta_1) \prod_{j=1}^{N-1} \mathcal{F}_j T_N^{-1}(0) T_0 \left[ \sum_{k=1}^N \Delta_k \right] \mathcal{A}_T \quad (5.64)$$

gdzie

$$\mathcal{F}_j = T_j^{-1}(0) T_{j+1}(-\Delta_{j+1}), \quad j=1, 2, \dots, N-1, \quad (5.65)$$



jest macierzą przejścia "przez powierzchnię nieciągłości", lub po innym pogrupowaniu wyrażeni w równaniu (5.64):

$$- \xi_0 = \mathbf{T}_0^{-1}(0) \prod_{j=1}^N \xi_j \mathbf{T}_0 \left( \sum_{k=1}^N \Delta_k \right) - \xi_1 \quad (5.66)$$

$$\xi_j = \mathbf{T}_j(-\Delta_j) \mathbf{T}_j^{-1}(0), \quad j=1,2,\dots,N, \quad (5.67)$$

którą można interpretować jako macierz przejścia "przez warstwę". Korzystając ze związku (5.49) można macierz przejścia  $\xi_j$  przedstawić w jako:

$$\xi_j = \mathbf{T}_j^{-1}(0) \mathbf{Q}_j(-\Delta_j) \mathbf{T}_j^{-1}(0). \quad (5.69)$$

Macierz odwrotna  $\mathbf{T}_j^{-1}(0)$  jest zdefiniowana jako:

$$\mathbf{T}_j^{-1}(0) = \frac{\text{adj}\mathbf{T}_j(0)}{\text{det}\mathbf{T}_j(0)}; \quad (5.70)$$

istnieje ona gdy  $\text{det}\mathbf{T}_j(0) \neq 0$ . Wyznacznik macierzy  $\mathbf{T}_j(0)$ , (zdefiniowanej w (5.52)) ma następującą postać:

$$\begin{aligned} \text{det}\mathbf{T}_j(0) = & -4\cos\vartheta^j \cos\kappa^j \left[ 2q_1^j \sin\vartheta^j \sin\kappa^j + p_1^j + 2q_1^j \cos^2\vartheta^j \right] \times \\ & \times \left[ q_1^j (1 - \sin^2\kappa^j) + 2q_1^j \sin\vartheta^j \sin\kappa^j \right]. \end{aligned} \quad (5.71)$$

Z równania (5.71), używając wzorów (5.37-5.38) otrzymujemy warunek dla  $\vartheta^0$  który gwarantuje przejście fali przez uwarstwowaną płytę (to znaczy: istnieje takie  $\vartheta^*$  że dla  $j=1,2,\dots,N$  znak wyznacznika (5.71) nie ulega zmianie dla  $\vartheta^0 \in (0, \vartheta^*)$ ).

Macierz odwrotna może być rozłożona na następujący iloczyn dwóch macierzy:

$$T_j^{-1}(0) = S_j \text{diag}\{a_j, b_j, b_j, a_j\}, \quad (5.72)$$

gdzie

$$a_j = \left\{ 2\cos\vartheta^j \left[ q_1^j(1-2\sin^2\kappa^j) + 2q_1^j\sin\vartheta^j\sin\kappa^j \right] \right\}^{-1}, \quad (5.73)$$

$$b_j = \left\{ 2\cos\kappa^j \left[ 2q_1^j\sin\vartheta^j\sin\kappa^j + p_1^j + 2q_1^j\cos^2\vartheta^j \right] \right\}^{-1} \quad (5.74)$$

i

$$S_j = \begin{bmatrix} q_1^j(1-2\sin^2\kappa^j) & 2q_1^j\sin\kappa^j\cos\kappa^j & \cos\kappa^j & \sin\kappa^j \\ -q_1^j(1-2\sin^2\kappa^j) & 2q_1^j\sin\kappa^j\cos\kappa^j & \cos\kappa^j & -\sin\kappa^j \\ -2q_1^j\sin\vartheta^j\cos\vartheta^j & p_1^j + 2q_1^j\cos^2\vartheta^j & -\sin\vartheta^j & \cos\vartheta^j \\ -2q_1^j\sin\vartheta^j\cos\vartheta^j & -(p_1^j + 2q_1^j\cos^2\vartheta^j) & \sin\vartheta^j & \cos\vartheta^j \end{bmatrix}. \quad (5.75)$$

Równanie (5.66) dla amplitud fal odbitych i przechodzących pozostaje w mocy również gdy fala wymuszająca jest poprzecznie spolaryzowana. W takim wypadku wektor  $\mathcal{A}_0$  w (5.66) ma postać:

$$\mathcal{A}_0 = \left[ 0, B^0, C^0, D^0 \right]^T, \quad (5.76)$$

gdzie obecnie  $C^0$  jest amplitudą fali wymuszającej. Również obecnie kąt  $\kappa^0$  jest uważany za dany a pozostałe kąty obliczane są z wzorów:

$$\sin\vartheta^j = \frac{c^j}{v^0} \sin\kappa^0, \quad (5.77)$$

$$\sin\kappa^j = \frac{v^j}{v^0} \sin\kappa^0. \quad (5.78)$$

#### 5.4. Rzeczywista postać macierzy przejścia

Wzory otrzymane w rozdziale 5.3 dla macierzy przejścia pozwalają obliczać amplitudy fali odbitej i przechodzącej zarówno w przypadku gdy fala wymuszająca jest podłużna jak i poprzeczna, dla dowolnej liczby warstw  $N$ . Jednakże widać, że macierze przejścia  $\mathcal{E}_j^0$  we wzorze (5.67) są zespolone i ten fakt może skomplikować obliczenia numeryczne dla dużych  $N$ . Ponadto, prawo wielkich liczb dla iloczynów macierzy (2.18) wymaga, by w iloczynie występowały macierze rzeczywiste. Dokonując pewnych zabiegów można jednak problem przekształcić do postaci w której macierz przejścia jest rzeczywista. Zdefiniujmy dwie nowe macierze:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.79)$$

Mnożąc  $\mathcal{E}_j^0 = \mathbf{T}_j(0)\mathbf{Q}_j(x_1)\mathbf{T}_j^{-1}(0)$  przez  $\mathbf{N}$  i  $\mathbf{N}^{-1}$  z lewej i prawej strony otrzymujemy rzeczywistą macierz przejścia dla fali przez pojedynczą warstwę:

$$\mathbf{M}^j(x_1) = \mathbf{N} \mathbf{T}_j(0) \mathbf{Q}_j(x_1) \mathbf{T}_j^{-1}(0) \mathbf{N}^{-1}, \quad j=1,2, \dots, N. \quad (5.80)$$

Elementy macierzy  $\mathbf{M}^j$  mają następującą postać:

$$\mathbf{M}_{11}^j(x_1) = 2 \left[ \cos(k_1^j \cos \vartheta^j x_1) C_j \sin \kappa^j + \cos(k_1^j \cos \vartheta^j x_1) D_j \cos \vartheta^j \right] / a_j,$$

$$\mathbf{M}_{12}^j(x_1) = 2 \left[ \sin(k_1^j \cos \kappa^j x_1) A_j \sin \kappa^j - \sin(k_1^j \cos \vartheta^j x_1) B_j \cos \vartheta^j \right] / b_j,$$

$$\mathbf{M}_{13}^j(x_1) = 2 \left[ \sin(k_1^j \cos \vartheta^j x_1) \cos \vartheta^j \cos \kappa^j + \sin(k_1^j \cos \kappa^j x_1) \sin \kappa^j \sin \vartheta^j \right] / b_j,$$

$$\mathbf{M}_{14}^j(x_1) = 2 \sin \kappa^j \cos \vartheta^j \left[ -\cos(k_1^j \cos \kappa^j x_1) + \cos(k_1^j \cos \vartheta^j x_1) \right] / a_j,$$

$$\mathbf{M}_{21}^j(x_1) = 2 \left[ -\sin(k_1^j \cos \kappa^j x_1) C_j \cos \kappa^j + \sin(k_1^j \cos \vartheta^j x_1) D_j \sin \vartheta^j \right] / a_j,$$

$$M_{22}^j(x_1) = 2 \left[ \cos(k_1^j \cos \kappa^j x_1) A_j \cos \kappa^j + \cos(k_1^j \cos \vartheta^j x_1) B_j \sin \vartheta^j \right] / b_j,$$

$$M_{23}^j(x_1) = 2 \cos \kappa^j \sin \vartheta^j \left[ \cos(k_1^j \cos \kappa^j x_1) - \cos(k_1^j \cos \vartheta^j x_1) \right] / b_j, \quad (5.81)$$

$$M_{24}^j(x_1) = 2 \left[ \sin(k_1^j \cos \vartheta^j x_1) \sin \kappa^j \sin \vartheta^j + \sin(k_1^j \cos \kappa^j x_1) \cos \kappa^j \cos \vartheta^j \right] / a_j,$$

$$M_{31}^j(x_1) = -2 \left[ \sin(k_1^j \cos \vartheta^j x_1) A_j D_j + \sin(k_1^j \cos \kappa^j x_1) B_j C_j \right] / a_j,$$

$$M_{32}^j(x_1) = 2 A_j B_j \left[ \cos(k_1^j \cos \kappa^j x_1) - \cos(k_1^j \cos \vartheta^j x_1) \right] / b_j,$$

$$M_{33}^j(x_1) = 2 \left[ \cos(k_1^j \cos \kappa^j x_1) B_j \sin \vartheta^j + \cos(k_1^j \cos \vartheta^j x_1) A_j \cos \kappa^j \right] / b_j,$$

$$M_{34}^j(x_1) = 2 \left[ -\sin(k_1^j \cos \vartheta^j x_1) A_j \sin \kappa^j + \sin(k_1^j \cos \kappa^j x_1) B_j \cos \vartheta^j \right] / a_j,$$

$$M_{41}^j(x_1) = 2 C_j D_j \left[ -\cos(k_1^j \cos \kappa^j x_1) + \cos(k_1^j \cos \vartheta^j x_1) \right] / a_j,$$

$$M_{42}^j(x_1) = -2 \left[ \sin(k_1^j \cos \kappa^j x_1) A_j D_j + \sin(k_1^j \cos \vartheta^j x_1) B_j C_j \right] / b_j,$$

$$M_{43}^j(x_1) = 2 \left[ \sin(k_1^j \cos \vartheta^j x_1) C_j \cos \kappa^j - \sin(k_1^j \cos \kappa^j x_1) D_j \sin \vartheta^j \right] / b_j,$$

$$M_{44}^j(x_1) = 2 \left[ \cos(k_1^j \cos \kappa^j x_1) D_j \cos \vartheta^j + \cos(k_1^j \cos \vartheta^j x_1) C_j \sin \kappa^j \right] / a_j,$$

gdzie oznaczono:

$$A_j = p_1^j + 2q_1^j \cos^2 \vartheta^j, \quad (5.82)$$

$$B_j = 2q_1^j \sin \kappa^j \cos \kappa^j, \quad (5.83)$$

$$C_j = 2q_1^j \sin \vartheta^j \cos \vartheta^j, \quad (5.84)$$

$$D_j = q_1^j (1 - 2 \sin^2 \kappa^j), \quad (5.86)$$

natomiast  $a_j$  i  $b_j$ , zdefiniowane w (5.73-5.74), można teraz zapisać jako:

$$a_j = \left\{ 2 \sin \kappa^j C_j + 2 \cos \vartheta^j D_j \right\}^{-1}, \quad (5.87)$$

$$b_j = \left\{ 2 \cos \kappa^j A_j + 2 \sin \vartheta^j B_j \right\}^{-1}. \quad (5.88)$$

Używając tak zdefiniowanych macierzy  $M^j$  możemy przedstawić równanie dla amplitud (5.66) w następującej postaci:

$$\mathcal{A}_0 = T_0^{-1}(0) N^{-1} \prod_{j=1}^N M_j(-\Delta_j) N T_0 \left[ \sum_{k=1}^N \Delta_k \right] \mathcal{A}_f \quad (5.89)$$

gdzie jedynie dwie zewnętrzne macierze są zespolone.

Równanie (5.89) może być zapisane w uproszczonej postaci jako:

$$\mathcal{A}_0 = \mathcal{F} \mathcal{A}_f \quad (5.90)$$

gdzie macierz  $\mathcal{F}$  oznacza symbolicznie iloczyn wszystkich macierzy z prawej strony równania (5.89). Zapisane w jawnej postaci, równanie (5.90) ma następującą formę:

$$\begin{bmatrix} \mathcal{F}_{11} & \mathcal{F}_{12} & \mathcal{F}_{13} & \mathcal{F}_{14} \\ \mathcal{F}_{21} & \mathcal{F}_{22} & \mathcal{F}_{23} & \mathcal{F}_{24} \\ \mathcal{F}_{31} & \mathcal{F}_{32} & \mathcal{F}_{33} & \mathcal{F}_{34} \\ \mathcal{F}_{41} & \mathcal{F}_{42} & \mathcal{F}_{43} & \mathcal{F}_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^f \\ 0 \\ C^f \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^0 \\ B^0 \\ 0 \\ D^0 \end{bmatrix}. \quad (5.91)$$

W równaniu (5.91) jedynie  $A^0$  jest znaną amplitudą fali. W celu wyznaczenia pozostałych amplitud, tj. amplitud fal odbitych oraz fal przechodzących przez ośrodek, przekształcamy to równanie do następującej postaci:

$$\begin{bmatrix} \mathcal{F}_{11} & 0 & \mathcal{F}_{13} & 0 \\ \mathcal{F}_{21} & -1 & \mathcal{F}_{23} & 0 \\ \mathcal{F}_{31} & 0 & \mathcal{F}_{33} & 0 \\ \mathcal{F}_{41} & 0 & \mathcal{F}_{43} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^f \\ B^0 \\ C^f \\ D^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5.92)$$

Rozwiązując równanie (5.92) znajdujemy poszukiwane amplitudy:

$$A^f = \frac{\mathcal{F}_{33} A^0}{\mathcal{F}_{11} \mathcal{F}_{33} - \mathcal{F}_{13} \mathcal{F}_{31}}, \quad (5.93)$$

$$B^0 = \frac{(\mathcal{F}_{21} \mathcal{F}_{33} - \mathcal{F}_{23} \mathcal{F}_{31}) A^0}{\mathcal{F}_{11} \mathcal{F}_{33} - \mathcal{F}_{13} \mathcal{F}_{31}}, \quad (5.94)$$

$$C^f = \frac{-\mathcal{F}_{31} A^0}{\mathcal{F}_{11} \mathcal{F}_{33} - \mathcal{F}_{13} \mathcal{F}_{31}}, \quad (5.95)$$

$$D^0 = \frac{(\mathcal{F}_{41} \mathcal{F}_{33} - \mathcal{F}_{43} \mathcal{F}_{31}) A^0}{\mathcal{F}_{11} \mathcal{F}_{33} - \mathcal{F}_{13} \mathcal{F}_{31}}. \quad (5.96)$$

Analogicznie postępując w przypadku, gdy fala padająca jest poprzecznie spolaryzowana, tj. znaną amplitudą jest  $C^0$ , otrzymujemy następujące wyrażenia dla nieznanych amplitud fal:

$$A^f = \frac{-\mathcal{F}_{13} C^0}{\mathcal{F}_{11} \mathcal{F}_{33} - \mathcal{F}_{13} \mathcal{F}_{31}}, \quad (5.97)$$

$$B^0 = \frac{(\mathcal{F}_{23} \mathcal{F}_{11} - \mathcal{F}_{21} \mathcal{F}_{13}) C^0}{\mathcal{F}_{11} \mathcal{F}_{33} - \mathcal{F}_{13} \mathcal{F}_{31}}, \quad (5.98)$$

$$C^d = \frac{\mathcal{F}_{11} C^0}{\mathcal{F}_{11} \mathcal{F}_{33} - \mathcal{F}_{13} \mathcal{F}_{31}}, \quad (5.99)$$

$$D^0 = \frac{(\mathcal{F}_{11} \mathcal{F}_{43} - \mathcal{F}_{41} \mathcal{F}_{13}) C^0}{\mathcal{F}_{11} \mathcal{F}_{33} - \mathcal{F}_{13} \mathcal{F}_{31}}. \quad (5.100)$$

Uzyskane równania dla amplitud stanowią analityczne rozwiązanie zagadnienia propagacji fal sprężystych w ośrodku warstwowym.

### 5.5. Ośrodek efektywny; efektywna macierz przejścia

Rozważmy płytę o grubości  $d$  wykonaną z jednorodnego materiału. Zakładamy, że płyta ma takie własności odbijania fal jak płyta uwarstwiona, opisana w poprzednim rozdziale. Parametry opisujące te własności będą oznaczone przez symbol  $eff$ , na przykład  $\lambda^{eff}$ ,  $k_1^{eff}$ ,  $\vartheta^{eff}$ , itd. Załóżmy, tak jak w poprzednim rozdziale, że przychodząca z obszaru  $x_1 < 0$  płaska fala podłużna dociera do płyty pod kątem  $\vartheta^0$ . Kierunki propagacji fal wygenerowanych wewnątrz płyty (oznaczone symbolem  $eff$ ) spełniają następujące związki:

$$\sin \vartheta^{eff} = \frac{c^{eff}}{c^0} \sin \vartheta^0, \quad (5.101)$$

$$\sin \kappa^{eff} = \frac{v^{eff}}{c^0} \sin \vartheta^0. \quad (5.102)$$

Amplitudy są wyliczone z warunków ciągłości mających postać:

$$\mathbf{T}_0(0) \mathcal{A}_0 = \mathbf{T}_{eff}(0) \mathcal{A}_{eff}, \quad (5.103)$$

$$\mathbf{T}_{eff}(d) \mathcal{A}_{eff} = \mathbf{T}_0(d) \mathcal{A}_f. \quad (5.104)$$

Związek pomiędzy  $\mathcal{A}_0$  i  $\mathcal{A}_f$  wyprowadzony z (5.102-5.103) ma postać:

$$-\zeta_0 = \mathbf{T}_0^{-1}(0)\mathbf{T}_{\text{eff}}^{-1}(0)\mathbf{T}_{\text{eff}}^{-1}(d)\mathbf{T}_0(d) - \zeta_1 \quad (5.105)$$

Porównując równanie (5.105), otrzymane dla ośrodka efektywnego, z równaniem (5.66) dla ośrodka uwarstwionego widzimy odpowiedniość między macierzami  $\mathbf{T}_{\text{eff}}^{-1}(0)\mathbf{T}_{\text{eff}}^{-1}(d)$  i  $\prod_{j=1}^N \mathbf{C}_j^{-1} \mathbf{T}_1(-\Delta_{N+1})\mathbf{T}_1^{-1}(0)$ . Równoważność ośrodka uwarstwionego i ośrodka jednorodnego (zhomogenizowanego) w zagadnieniu propagacji fal sprężystych jest właśnie równoważnością tych macierzy.

## 5.6. Fale dwuwymiarowe w ośrodku o budowie okresowej; przypadek graniczny

Załóżmy obecnie, że rozważana płyta została zbudowana w taki sposób, iż podzielono jednorodną płytę na  $N+1$  równoległych warstw o grubościach  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{N+1}$  wstawiając między nie warstewki materiału wykonanego z innego materiału, o grubościach, kolejno,  $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_N$ . Całkowita grubość płyty jest równa  $d$ ,

$$d = L + l, \quad (5.106)$$

gdzie

$$L = \sum_{j=1}^{N+1} \Delta_j, \quad l = \sum_{j=1}^N \delta_j \quad (5.107)$$

Obecnie w naszym modelu występują jedynie trzy zestawy wielkości charakteryzujących fale w trzech rodzajach materiału:

$\lambda^i, \mu^i$  - stałe Lamé,  $i=0,1,2$ ,

$c^i, v^i$  - prędkości fal podłużnych i poprzecznych,  $i=0,1,2$ ,

$k_p^i, k_t^i$  - liczby falowe dla fal podłużnych i poprzecznych,  $i=0,1,2$ ,

w, odpowiednio, ośrodka otaczającym płytę ( $i=0$ ), głównym materiale płyty ( $i=1$ ) i materiale wstawek ( $i=2$ ).

Powtarzając procedurę analogiczną do zaprezentowanej w poprzednim rozdziale i traktując parę warstw o grubościach  $\Delta_j$  i  $\delta_j$  jako jedną "podwójną" warstwę,



otrzymujemy równania dla amplitud fal odbitych i przechodzących. Odpowiednikiem równania (5.64) jest teraz:

$$\xi_0 = \mathbf{T}_0^{-1}(0) \mathbf{T}_1(-\Delta_1) \prod_{j=1}^N \mathcal{F}_j \mathbf{T}_1^{-1}(0) \mathbf{T}_0 \left( \sum_{k=1}^{N+1} \Delta_k + \sum_{k=1}^N \delta_k \right) \xi_1 \quad (5.108)$$

gdzie obecnie macierz przejścia (5.65) przez parę warstw ma postać:

$$\mathcal{F}_j = \mathbf{T}_1^{-1}(0) \mathbf{T}_2(0) \mathbf{T}_2^{-1}(\delta_j) \mathbf{T}_1(-\Delta_{j+1}), \quad j=1,2,\dots,N, \quad (5.109)$$

a odpowiednik równań (5.66-5.67):

$$\mathcal{A}_0 = \mathbf{T}_0^{-1}(0) \prod_{j=1}^N \mathcal{E}_j \mathbf{T}_1(-\Delta_{N+1}) \mathbf{T}_1^{-1}(0) \mathbf{T}_0 \left( \sum_{k=1}^{N+1} \Delta_k + \sum_{k=1}^N \delta_k \right) \mathcal{A}_1 \quad (5.110)$$

$$\mathcal{E}_j = \mathbf{T}_1(-\Delta_j) \mathbf{T}_1^{-1}(0) \mathbf{T}_2(0) \mathbf{T}_2^{-1}(\delta_j), \quad j=1,2,\dots,N. \quad (5.111)$$

W celu zbadania asymptotycznego zachowania się fal w płycie gdy gęstość uwarstwienia dąży w niej do nieskończoności zastosujemy procedurę analogiczną do użytej w rozdziale 4.

Załóżmy, że grubości warstw spełniają warunki:  $\Delta_j = \frac{L}{N+1} = \Delta$  dla  $j=1,2,\dots,N+1$  oraz  $\delta_j = \frac{l}{N} = \delta$  for  $j=1,2,\dots,N$ . Zakładamy, że liczba warstw  $N$  dąży do nieskończoności, ich grubości  $\Delta$  i  $\delta$  zmiierają do zera natomiast iloczyny  $(N+1)\Delta=L$  i  $N\delta=l$  pozostają stałe. Badając iloczyn macierzy  $\prod_{j=1}^N \mathcal{E}_j \mathbf{T}_1(-\Delta_{N+1}) \mathbf{T}_1^{-1}(0)$  w tym przypadku granicznym zauważamy, że jedynie  $\prod_{j=1}^N \mathcal{E}_j$  ma wpływ na wartość granicy ponieważ  $\mathbf{T}_1(-\Delta_{N+1}) \mathbf{T}_1^{-1}(0)$  dąży do identyczności gdy  $\Delta$  zmierza do zera. W celu zbadania granicy rozwinieśmy macierze przejścia  $\mathcal{E}_j$  w iloczynie w szereg potęgowy

względem  $\frac{1}{N}$ . Otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
 \prod_{j=1}^N \mathcal{C}_j^1 &= \left( \mathbf{T}_1(-\Delta_j) \mathbf{T}_1^{-1}(0) \mathbf{T}_2(0) \mathbf{T}_2^{-1}(\delta_j) \right)^N = \\
 &= \left( \mathbf{T}_1(0) \mathbf{Q}_1 \left( \frac{L}{N+1} \right) \mathbf{T}_1^{-1}(0) \mathbf{T}_2(0) \mathbf{Q}_2 \left( \frac{1}{N} \right) \mathbf{T}_2^{-1}(0) \right)^N = \\
 &= \left( \mathbf{T}_1(0) \left[ \mathbf{Id} - \mathbf{H}_1 \frac{L}{N+1} + \mathbf{O}\left(\frac{1}{N^2}\right) \right] \mathbf{T}_1^{-1}(0) \mathbf{T}_2(0) \left[ \mathbf{Id} - \mathbf{H}_2 \frac{1}{N} + \mathbf{O}\left(\frac{1}{N^2}\right) \right] \mathbf{T}_2^{-1}(0) \right)^N = \\
 &= \left( \mathbf{Id} - \frac{L}{N+1} \mathbf{T}_1(0) \mathbf{H}_1 \mathbf{T}_1^{-1}(0) - \frac{1}{N} \mathbf{T}_2(0) \mathbf{H}_2 \mathbf{T}_2^{-1}(0) + \mathbf{O}\left(\frac{1}{N^2}\right) \right)^N \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \\
 &= \exp \left\{ -L \mathbf{T}_1(0) \mathbf{H}_1 \mathbf{T}_1^{-1}(0) - \mathbf{T}_2(0) \mathbf{H}_2 \mathbf{T}_2^{-1}(0) \right\}, \tag{5.112}
 \end{aligned}$$

gdzie

$$\mathbf{H}_i = \text{diag} \left[ ik_1^i \cos \vartheta^i, -ik_1^i \cos \vartheta^i, ik_1^i \cos \kappa^i, -ik_1^i \cos \kappa^i \right]. \tag{5.113}$$

Zatem, jeżeli  $\mathbf{T}_{\text{eff}}(x)$  oznaczać będzie macierz przejścia dla płyty składającej się z pojedynczej warstwy, otrzymanej metodą homogenizacji, to powinna ona spełniać następujący związek:

$$\mathbf{T}_{\text{eff}}(0) \mathbf{T}_{\text{eff}}^{-1}(L+l) = \exp \left\{ -L \mathbf{T}_1(0) \mathbf{H}_1 \mathbf{T}_1^{-1}(0) - \mathbf{T}_2(0) \mathbf{H}_2 \mathbf{T}_2^{-1}(0) \right\}. \tag{5.114}$$

Macierz  $\mathbf{T}_i(0) \mathbf{H}_i \mathbf{T}_i^{-1}(0)$  może być zapisana w następującej formie:

$$\mathbf{T}_i(0) \mathbf{H}_i \mathbf{T}_i^{-1}(0) = i \mathbf{P}_i \text{diag} \left[ \tilde{a}_i, \tilde{b}_i, \tilde{c}_i, \tilde{a}_i \right], \tag{5.115}$$

gdzie

$$\tilde{a}_i = \left\{ \mu^i \left[ k_i^i (1 - 2 \sin^2 \kappa^i) + 2 k_i^i \sin \vartheta^i \sin \kappa^i \right] \right\}^{-1} \quad (5.116)$$

$$\tilde{b}_i = \left\{ 2 \mu^i k_i^i \sin \vartheta^i \sin \kappa^i + k_i^i \left[ \lambda^i + 2 \mu^i (1 - \sin^2 \vartheta^i) \right] \right\}^{-1} \quad (5.117)$$

a macierz  $\mathbf{P}_i$  ma elementy następującej postaci:

$$(\mathbf{P}_i)_{11} = (\mathbf{P}_i)_{14} = (\mathbf{P}_i)_{22} = (\mathbf{P}_i)_{23} = (\mathbf{P}_i)_{32} = (\mathbf{P}_i)_{33} = (\mathbf{P}_i)_{41} = (\mathbf{P}_i)_{44} = 0,$$

$$(\mathbf{P}_i)_{12} = -k_i^i k_1^i \lambda^i \sin \kappa^i,$$

$$(\mathbf{P}_i)_{13} = k_i^i (1 - \sin^2 \vartheta^i) + k_1^i \sin \kappa^i \sin \vartheta^i,$$

$$(\mathbf{P}_i)_{21} = -k_i^i k_1^i \mu^i \sin \vartheta^i,$$

$$(\mathbf{P}_i)_{24} = k_i^i (1 - \sin^2 \kappa^i) + k_1^i \sin \kappa^i \sin \vartheta^i,$$

$$(\mathbf{P}_i)_{31} = k_1^i k_i^i \mu^i \left[ k_i^i \left[ \lambda^i + 2 \mu^i (1 - \sin^2 \vartheta^i) \right] (1 - 2 \sin^2 \kappa^i) + \right. \quad (5.118)$$

$$\left. + 4 \mu^i k_1^i \sin \vartheta^i \sin \kappa^i (1 - \sin^2 \kappa^i) \right],$$

$$(\mathbf{P}_i)_{34} = \sin \kappa^i \left[ (k_1^i)^2 \left[ \lambda^i + 2 \mu^i (1 - \sin^2 \vartheta^i) - 2 (k_1^i)^2 \mu^i (1 - 2 \sin^2 \kappa^i) \right] \right],$$

$$(\mathbf{P}_i)_{42} = k_1^i k_i^i \mu^i \left[ k_1^i \left[ \lambda^i + 2 \mu^i (1 - \sin^2 \vartheta^i) \right] (1 - 2 \sin^2 \kappa^i) + \right.$$

$$\left. + 4 \mu^i k_1^i \sin \vartheta^i \sin \kappa^i (1 - \sin^2 \vartheta^i) \right],$$

$$(P)_{i,43} = \sin\vartheta^i \mu^i \left[ 2(k_1^i)^2 (1 - \sin^2\vartheta^i) - (k_1^i)^2 (1 - 2\sin^2\kappa^i) \right],$$

W celu uproszczenia wyrażeń (5.114-5.118) przedstawiamy funkcje  $\sin\vartheta^i$  i  $\sin\kappa^i$  w terminach funkcji  $\sin\vartheta^0$  zgodnie z (5.37-5.38), (pamiętając, że  $\frac{c^i}{c^0} = \frac{k_1^0}{k_1^i}$ ,  $\frac{v^i}{c^0} = \frac{k_1^0}{k_1^i}$  - wskutek (5.12-5.13)) i następnie podstawiamy wartości  $k_1^i$ ,  $k_1^i$  wyrażone w terminach stałych materiałowych i częstotliwości  $\omega$  (por. (5.6-5.7), (5.12-5.13)). Wynik końcowy ma postać:

$$T_i(0) H_i T_i^{-1}(0) = iR_i, \quad (5.119)$$

gdzie

$$(R)_{i,11} = (R)_{i,14} = (R)_{i,22} = (R)_{i,23} = (R)_{i,32} = (R)_{i,33} = (R)_{i,41} = (R)_{i,44} = 0,$$

$$(R)_{i,12} = -\frac{\lambda^i}{\lambda^i + 2\mu^i} k_1^0 \sin\vartheta^0,$$

$$(R)_{i,13} = \frac{1}{\lambda^i + 2\mu^i},$$

$$(R)_{i,21} = -k_1^0 \sin\vartheta^0 \quad (5.120)$$

$$(R)_{i,24} = \frac{1}{\mu^i},$$

$$(R)_{i,31} = \omega^2 \rho^i,$$

$$(R)_{i,34} = -k_1^0 \sin\vartheta^0,$$

$$(\mathbf{R}_1)_{42} = \omega^2 \bar{\rho}^1 - 4 \frac{\mu^1 (\lambda^1 + \mu^1)}{\lambda^1 + 2\mu^1} \left( k_1^0 \sin \vartheta^0 \right)^2,$$

$$(\mathbf{R}_1)_{43} = - \frac{\lambda^1}{\lambda^1 + 2\mu^1} k_1^0 \sin \vartheta^0.$$

Macierz  $i(LR_1 + IR_2)$ , wymagana w wyrażeniach dla amplitud, w przypadku ośrodka zhomogenizowanego może być zapisana w następującej postaci:

$$i \mathbf{R} d := i(LR_1 + IR_2) =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -\bar{\alpha} k_1^0 \sin \vartheta^0 & \bar{\gamma} & 0 \\ -k_1^0 \sin \vartheta^0 & 0 & 0 & \bar{\eta} \\ \omega^2 \bar{\rho} & 0 & 0 & -k_1^0 \sin \vartheta^0 \\ 0 & \omega^2 \bar{\rho} - 4\bar{\beta} (k_1^0 \sin \vartheta^0) & -\bar{\alpha} k_1^0 \sin \vartheta^0 & 0 \end{bmatrix} \times i d \quad (5.121)$$

gdzie

$$\bar{\alpha} = \left( \frac{\lambda^1 L}{\lambda^1 + 2\mu^1} + \frac{\lambda^2 l}{\lambda^2 + 2\mu^2} \right) \frac{1}{d}, \quad (5.122)$$

$$\bar{\beta} = \left( L \frac{\mu^1 (\lambda^1 + \mu^1)}{\lambda^1 + 2\mu^1} + l \frac{\mu^2 (\lambda^2 + \mu^2)}{\lambda^2 + 2\mu^2} \right) \frac{1}{d}, \quad (5.123)$$

$$\bar{\gamma} = \left( \frac{L}{\lambda^1 + 2\mu^1} + \frac{l}{\lambda^2 + 2\mu^2} \right) \frac{1}{d}, \quad (5.124)$$

$$\bar{\eta} = \left( \frac{L}{\mu^1} + \frac{l}{\mu^2} \right) \frac{1}{d}, \quad (5.125)$$

$$\bar{\rho} = \frac{L\rho^1 + l\rho^2}{d}. \quad (5.126)$$

Widzimy, że własności materiału zhomogenizowanej płyty opisane są nie przez trzy stałe materiałowe, tak jak w przypadku izotropowym ( $\lambda, \mu, \rho$  - co otrzymano w jednowymiarowym procesie homogenizacji), lecz przez pięć niezależnych stałych zdefiniowanych w powyższych wzorach (5.122-5.126).

### 5.7. Fale sprężyste w ośrodku zhomogenizowanym

W celu zbadania fal propagujących się w ośrodku zhomogenizowanym należy obliczyć wartości własne macierzy  $i d \mathbf{R}$ , czyli znaleźć liczby falowe. Są one rozwiązaniem następującego równania ( $\mathbf{Id}$  jest macierzą identycznościową  $4 \times 4$ ):

$$\begin{aligned} \det(i d \mathbf{R} - k \mathbf{Id}) = & k^4 + k^2 d^2 \left\{ 2 (k_1^0 \sin \vartheta^0)^2 (\bar{\alpha} - 2 \bar{\eta} \bar{\beta}) + \omega^2 \bar{\rho} (\bar{\gamma} + \bar{\eta}) \right\} + \\ & + d^4 \left\{ (k_1^0 \sin \vartheta^0)^4 (\bar{\alpha}^2 + 4 \bar{\beta} \bar{\gamma}) - \right. \\ & \left. - (k_1^0 \sin \vartheta^0)^2 \omega^2 \bar{\rho} \left[ (\bar{\alpha}^2 + 4 \bar{\beta} \bar{\gamma}) \bar{\eta} + \bar{\gamma} \right] + \omega^4 \bar{\rho}^2 \bar{\gamma} \bar{\eta} \right\} = 0 \end{aligned} \quad (5.127)$$

Załóżmy na początku, że dwa następujące warunki są spełnione:

$$2 \bar{\eta} \bar{\beta} - \bar{\alpha} = 1, \quad (5.128)$$

$$\bar{\alpha}^2 + 4 \bar{\beta} \bar{\gamma} = 1. \quad (5.129)$$

Wówczas równanie (5.127) dla liczb falowych ma następującą postać:

$$\left[ k^2 + \left[ (k_1^{\text{eff}})^2 - (k_1^0 \sin \vartheta^0)^2 \right] \right] \left[ k^2 + \left[ (k_1^{\text{eff}})^2 - (k_1^0 \sin \vartheta^0)^2 \right] \right] = 0 \quad (5.130)$$

gdzie

$$(k_1^{\text{eff}})^2 = \omega^2 \bar{\rho} \bar{\gamma}, \quad (5.131)$$

$$(k_1^{\text{eff}})^2 = \omega^2 \bar{\rho} \bar{\eta}, \quad (5.132)$$

są liczbami falowymi dla fali podłużnej i poprzecznej, takimi samymi, jak w przypadku ośrodka zhomogenizowanego jednowymiarowego (to znaczy dla  $\vartheta^0=0$ ).

Podstawiając  $\bar{\alpha}$ ,  $\bar{\beta}$ ,  $\bar{\gamma}$ ,  $\bar{\eta}$  zdefiniowane w (5.122-5.125) do wyrażeń (5.128) i (5.129) otrzymujemy:

$$2\bar{\eta} \bar{\beta} - \bar{\alpha} = 1 + \frac{2Ll}{d^2} \frac{(\mu^1 - \mu^2)(\lambda^1 + \mu^1) + (\mu^2 - \mu^1)(\lambda^2 + \mu^2)}{\mu^1 \mu^2 (\lambda^1 + 2\mu^1)(\lambda^2 + 2\mu^2)} \quad (5.133)$$

i

$$\bar{\alpha}^2 + 4\bar{\beta} \bar{\gamma} = 1 + \frac{2Ll}{d^2} \frac{(\mu^1 - \mu^2)(\lambda^1 + \mu^1) + (\mu^2 - \mu^1)(\lambda^2 + \mu^2)}{(\lambda^1 + 2\mu^1)^2 (\lambda^2 + 2\mu^2)^2}. \quad (5.134)$$

Z wzorów (5.133) i (5.134) widać, że warunki (5.128, 5.129) są spełnione, gdy:

$$\mu^1 = \mu^2 \quad (5.135)$$

lub

$$\lambda^1 + \mu^1 = \lambda^2 + \mu^2. \quad (5.136)$$

W ogólnym przypadku efektywne liczby falowe mają następującą postać:

$$(k_1^{\text{eff}})^2 = - (k_1^0 \sin \vartheta^0)^2 (2\bar{\eta} \bar{\beta} - \bar{\alpha} - 1) + \frac{\omega^2 \bar{\rho}}{2} (\bar{\gamma} + \bar{\eta}) - \sqrt{\epsilon} \quad (5.137)$$

i

$$(k_1^{\text{eff}})^2 = - (k_1^0 \sin \vartheta^0)^2 (2\bar{\eta} \bar{\beta} - \bar{\alpha} - 1) + \frac{\omega^2 \bar{\rho}}{2} (\bar{\gamma} + \bar{\eta}) + \sqrt{\epsilon} \quad (5.138)$$

gdzie

$$\varepsilon = 4\bar{\beta}(k_1^0 \sin \bar{\vartheta}^0)^4 (\bar{\beta} \bar{\eta}^2 - \bar{\eta} \bar{\alpha} - \bar{\gamma}) + \omega^2 \bar{\rho} (k_1^0 \sin \bar{\vartheta}^0)^2 \left[ (1 + \bar{\alpha}) (\bar{\eta} \bar{\alpha} + \bar{\gamma}) + \right. \\ \left. 2\bar{\beta} \bar{\eta} (\bar{\gamma} - \bar{\eta}) \right] + \frac{(\omega^2 \bar{\rho})^2}{4} (\bar{\eta} - \bar{\gamma})^2. \quad (5.139)$$

Jak widać z powyższych wzorów, efektywne liczby falowe zależą od kąta padania  $\bar{\vartheta}^0$ . Zauważmy, że nasza zhomogenizowana płyta (zanim gęstość uwarstwienia zbiegnie do nieskończoności) jest globalnie anizotropowa, mimo, że każda z warstw indywidualnie jest jednorodna i izotropowa. Ten fakt właśnie powoduje, że efektywne parametry (liczby falowe) w ośrodku zhomogenizowanym zależą od kąta padania fali wymuszającej, wyznaczając tym samym kierunek homogenizacji ośrodka.

### 5.8. Fale dwuwymiarowe w ośrodku stochastycznym; przypadek graniczny

W poprzednim punkcie, wyprowadzając równanie dla amplitud fal odbitych i przechodzących przez płytę, zakładaliśmy że grubości warstw i stałe materiałowe w każdej warstewce są stałymi deterministycznymi. To założenie nie ma istotnego znaczenia dla otrzymanej postaci równań (5.110). Pozostają one również w mocy, gdy te wielkości (to znaczy: grubości  $\Delta_j$ ,  $\delta_j$ , gęstości ośrodka  $\rho_j^i$ , stałe Lamé  $\lambda_j^i$  i  $\mu_j^i$ ,  $i=1,2$ ) są zmiennymi losowymi; należy wówczas jedynie zapisać równości rozumieć w odpowiednim probabilistycznym sensie. W takim wypadku macierze  $T_j$  i  $Q_j$  w  $\mathcal{E}_j$  zawierają odpowiednie  $j$ -te zmienne losowe jako parametry).

Podobnie jak w przypadku deterministycznym, również tutaj wpływ na własności efektywne ośrodka w przypadku granicznym ma jedynie iloczyn  $\prod_{j=1}^N \mathcal{E}_j$ , występujący we wzorze (5.110). Załóżmy, że dla ustalonego  $N$  wektory zmiennych losowych zdefiniowane jako  $(\Delta_{j,N}, \delta_{j,N}, \lambda_{j,N}^1, \lambda_{j,N}^2, \mu_{j,N}^1, \mu_{j,N}^2, \rho_{j,N}^1, \rho_{j,N}^2)$ ,  $j=1,2,\dots,N$ , są niezależne i mają jednakowe rozkłady a ponadto  $\Delta_{j,N}$  i  $\delta_{j,N}$  mogą być przedstawione jako:



$$\Delta_{j,N} = \frac{L_j}{N+1}, \quad j=1,2,\dots,N, \quad (5.140)$$

$$\delta_{j,N} = \frac{l_j}{N}, \quad j=1,2,\dots,N, \quad (5.141)$$

gdzie

$$E \left\{ L_j \right\} = L, \quad E \left\{ l_j \right\} = l. \quad (5.142)$$

Oznaczmy macierze  $\mathcal{E}_j^N$  zdefiniowane w (5.111) dla ustalonego  $N$  przez  $\mathcal{E}_{j,N}^N$ ,  $j=1,2,\dots,N$ , ponieważ zawierają one zmienne losowe  $\Delta_{j,N}$ ,  $\delta_{j,N}$ , itd. jako parametry. Załóżmy, że rozkłady parametrów są takie, że dla każdego  $N$  oraz  $j=1,2,\dots,N$ , macierze losowe  $\mathcal{E}_{j,N}^N$  są całkowalne. Mogą być one przedstawione jako:

$$\mathcal{E}_{j,N}^N = \mathbf{Id} + \frac{1}{N} \mathcal{K}_{j,N} + \mathcal{R}_j(N), \quad (5.143)$$

gdzie  $\mathcal{K}_{j,N}$ ,  $j=1,2,\dots,N$  są niezależnymi macierzami losowymi o jednakowych rozkładach natomiast  $E|\mathcal{R}_j(N)| = o(N^{-1})$  dla dużych  $N$ . Wówczas spełnione są warunki wymagane w prawie wielkich liczb (2.18) dla iloczynów macierzy  $\mathcal{E}_{j,N}^N$  i w granicy otrzymujemy:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^N \mathcal{E}_{j,N}^N = \exp \left\{ E \left\{ \mathcal{K} \right\} \right\}, \quad (5.144)$$

w sensie zbieżności według rozkładu wszystkich wektorów otrzymanych przez pomnożenie macierzy przez dowolny deterministyczny wektor z prawej strony. W szczególnej sytuacji, gdy jedynie  $\Delta_{j,N}$  i  $\delta_{j,N}$  są losowe, macierz  $\exp \left\{ E \left\{ \mathcal{K} \right\} \right\}$  ma taką samą postać jak macierz przedstawiona we wzorze (5.112).

Jeżeli rozważymy teraz kompletny wzór (5.110) dla amplitud fal odbitych i przechodzących i założymy, że  $\Delta_{N+1}$  jest postaci (5.140) a materiał w otoczeniu

plyty ma własności deterministyczne, wówczas widzimy, że  $\Delta_{N+1} \rightarrow 0$  i  $\sum_{k=1}^{N+1} \Delta_{k,N} + \sum_{k=1}^N \delta_{k,N} \rightarrow d$  z prawdopodobieństwem 1 gdy  $N \rightarrow \infty$ , a to oznacza, że gdy gęstość

uwarstwienia  $N$  w płycie dąży do nieskończoności, to amplitudy fal odbitych i przechodzących są wyznaczone przez równanie deterministyczne analogiczne do (5.110) w którym efektywne własności ośrodka opisane są przez macierz  $\exp\left\{E\left\{\mathcal{R}\right\}\right\}$ .

### 5.9. Przypadek większej liczby warstw w panelu

Równanie (5.110-5.111) było uzyskane, gdy płyta zbudowana była z  $N$  par warstw zbudowanych z dwóch rodzajów materiału (indeksowanych przez 1 i 2). Wzory te można uogólnić na przypadek bardziej skomplikowanych laminatów, zbudowanych z większej liczby materiałów, na przykład  $N_1$ . Załóżmy zatem że płyta zbudowana jest z  $N$  segmentów składających się z  $N_1$  warstw wykonanych z materiałów indeksowanych odpowiednio  $1, 2, \dots, N_1$ . Dla  $j$ -tego segmentu ich grubości są równe  $\Delta_j^1, \Delta_j^2, \dots, \Delta_j^{N_1}$ ,  $j=1, 2, \dots, N$ , łączna grubość warstw wykonanych z  $i$ -tego materiału jest  $L_i^j = \sum_j \Delta_j^i$ ,  $i=1, 2, \dots, N_1$  a całkowita grubość płyty wynosi  $d = \sum_i L_i^j$ . W tym wypadku równanie dla amplitud analogiczne do (5.110) ma następującą postać:

$$\mathcal{A}_0 = \mathbf{T}_0^{-1}(0) \mathbf{N}^{-1} \prod_{j=1}^N \prod_{i=1}^{N_1} \mathbf{M}^i(-\Delta_j^i) \mathbf{M}^1(-\Delta_{N+1}^1) \mathbf{N} \mathbf{T}_0(d) \mathcal{A}_F \quad (5.145)$$

gdzie macierze  $\mathbf{M}^i(\cdot)$  w równaniu (5.145) są odpowiednikami macierzy zdefiniowanych w (5.111) dla wszystkich  $N_1$  materiałów. Jest również możliwe, że stałe materiałowe w macierzach  $\mathbf{M}^i$  dla  $j$ -tych segmentów są zmiennymi losowymi; wówczas modyfikujemy równanie (5.145) wprowadzając macierze losowe  $\mathbf{M}_j^i(-\Delta_j^i)$  zamiast macierzy deterministycznych  $\mathbf{M}^i(-\Delta_j^i)$  i w tym przypadku równania dla amplitud pozostają nadal spełnione.

Podobnie możemy rozważyć przypadek asymptotyczny dla  $N$  dążącego do

nieskończoności podczas gdy  $d$  pozostaje ograniczone. W tym wypadku badamy iloczyn

macierzy  $\prod_{j=1}^N \prod_{i=1}^{N_1} \mathbf{M}^i(-\Delta_j^i)$  występujący we wzorze (5.145). Zakładamy, że dla ustalonego

$N$  zbiory zmiennych losowych  $(\Delta_{j,N}^i, \lambda_{j,N}^i, \mu_{j,N}^i, \rho_{j,N}^i, i=1,2,\dots,N_1, j=1,2,\dots,N, \text{ są niezależne i mają jednakowe rozkłady a ponadto } \Delta_{j,N}^i \text{ mogą być przedstawione jako:}$

$$\Delta_{j,N}^1 = \frac{L_{j,N}^1}{N+1}, \quad j=1,2,\dots,N+1, \quad (5.146)$$

$$\Delta_{j,N}^i = \frac{L_{j,N}^i}{N}, \quad i=2,\dots,N_1, \quad j=1,2,\dots,N, \quad (5.147)$$

gdzie

$$\sum_j \mathbb{E} \left\{ L_{j,N}^i \right\} = L^i, \quad i=1,2,\dots,N_1 \text{ and } \sum_{i=1}^{N_1} L^i = d. \quad (5.148)$$

Widzimy, że dla  $N$  dążącego do nieskończoności ciąg macierzy przejścia (oznaczymy go przez  $\mathbf{M}_{j,N}^i$ ) może być przedstawiony jako:

$$\mathbf{M}_{j,N}^i = \text{Id} + \frac{1}{N} \mathbf{H}_{j,N}^i + \mathbf{R}_j^i(N), \quad (5.149)$$

gdzie  $\mathbf{H}_{j,N}^i$  dla  $i=1,2,\dots,N_1, j=1,2,\dots,N$  są macierzami losowymi o jednakowych rozkładach, niezależnymi dla  $j=1,2,\dots,N$  natomiast  $|\mathbf{R}_j^i(N)| = o(N^{-1})$  dla dużych  $N$ . Zakładamy dodatkowo, że macierze  $\mathbf{H}_{j,N}^i$  są całkowalne. Oznacza to, że spełnione są warunki, które zapewniają spełnienie prawa wielkich liczb dla iloczynów macierzy

przez  $\prod_{i=1}^{N_1} \mathbf{M}_{j,N}^i$  oraz że otrzymujemy w granicy:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^N \prod_{i=1}^{N_1} \mathbf{M}_{j,N}^i = \exp \left( E \left\{ \sum_{i=1}^{N_1} \mathbf{H}_{j,N}^i \right\} \right) \quad (5.150)$$

w sensie zbieżności według prawdopodobieństwa wszystkich wektorów uzyskanych przez pomnożenie macierzy losowej z prawej strony przez deterministyczny wektor. Macierze  $\mathbf{H}_{j,N}^i$  mogą być łatwo uzyskane z wzoru analogicznego do (5.81). Mają one następującą postać:

$$\begin{aligned} (\mathbf{H}_{j,N}^i)_{11} &= (\mathbf{H}_{j,N}^i)_{14} = (\mathbf{H}_{j,N}^i)_{22} = (\mathbf{H}_{j,N}^i)_{23} = (\mathbf{H}_{j,N}^i)_{32} = (\mathbf{H}_{j,N}^i)_{33} = \\ &= (\mathbf{H}_{j,N}^i)_{41} = (\mathbf{H}_{j,N}^i)_{44} = 0 \end{aligned}$$

$$(\mathbf{H}_{j,N}^i)_{12} = - \frac{\lambda_{j,N}^i}{\lambda_{j,N}^i + 2\mu_{j,N}^i} k_1^0 \sin\theta^0 L_{j,N}^i,$$

$$(\mathbf{H}_{j,N}^i)_{13} = - \frac{1}{\lambda_{j,N}^i + 2\mu_{j,N}^i} L_{j,N}^i,$$

$$(\mathbf{H}_{j,N}^i)_{21} = k_1^0 \sin\theta^0 L_{j,N}^i,$$

$$(\mathbf{H}_{j,N}^i)_{24} = - \frac{1}{\mu_{j,N}^i} L_{j,N}^i, \quad (5.151)$$

$$(\mathbf{H}_{j,N}^i)_{31} = \omega^2 \rho_{j,N}^i L_{j,N}^i,$$

$$(\mathbf{H}_{j,N}^i)_{34} = - k_1^0 \sin\theta^0 L_{j,N}^i,$$

$$(\mathbf{H}_{j,N}^i)_{42} = \left( \omega^2 \rho_{j,N}^i - 4 \frac{\mu_{j,N}^i \left( \lambda_{j,N}^i + \mu_{j,N}^i \right)}{\lambda_{j,N}^i + 2\mu_{j,N}^i} \left( k_1^0 \sin\theta^0 \right)^2 \right) L_{j,N}^i,$$

$$(\mathbf{H}_{j,N}^i)_{43} = \frac{\lambda_{j,N}^i}{\lambda_{j,N}^i + 2\mu_{j,N}^i} k_1^0 \sin\vartheta^0 L_{j,N}^i.$$

Z wzorów (5.151) znajdujemy, że efektywne własności uwarstwionej płyty zależą od następujących pięciu parametrów efektywnych:

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{d} \sum_{i=1}^{N_1} E \left( \frac{\lambda_{j,N}^i L_{j,N}^i}{\lambda_{j,N}^i + 2\mu_{j,N}^i} \right), \quad (5.152)$$

$$\bar{\beta} = \frac{1}{d} \sum_{i=1}^{N_1} E \left( \frac{\mu_{j,N}^i (\lambda_{j,N}^i + \mu_{j,N}^i) L_{j,N}^i}{\lambda_{j,N}^i + 2\mu_{j,N}^i} \right), \quad (5.153)$$

$$\bar{\gamma} = \frac{1}{d} \sum_{i=1}^{N_1} E \left( \frac{L_{j,N}^i}{\lambda_{j,N}^i + 2\mu_{j,N}^i} \right), \quad (5.154)$$

$$\bar{\eta} = \frac{1}{d} \sum_{i=1}^{N_1} E \left( \frac{L_{j,N}^i}{\mu_{j,N}^i} \right), \quad (5.155)$$

$$\bar{\rho} = \frac{1}{d} \sum_{i=1}^{N_1} E \left( \rho_{j,N}^i L_{j,N}^i \right). \quad (5.156)$$

Innym wnioskiem który może być wyprowadzony z wzoru (5.151) jest fakt, że efektywne własności zhomogenizowanej płyty nie zależą od kolejności rozmieszczenia materiałów wewnątrz okresowych grup warstw.

5.10. Zasada zachowania energii przy odbiciu fali sprężystej na granicy ośrodków.

W celu zbadania własności odbijania fal przez uwarstwowaną płytę powinniśmy znaleźć związek pomiędzy energią niesioną przez falę wymuszającą (podłużnie lub poprzecznie spolaryzowaną) a energiami fal odbitych i przechodzących przez płytę (podłużnych i poprzecznych). W tym celu porównujemy energie niesione przez rozważaną falę w jednostce czasu przez jednostkową powierzchnię położoną w płaszczyźnie prostopadłej do kierunku propagacji fali, opisaną przez wektor Poyntinga  $\mathcal{L}$  który dla fal sprężystych ma następujące współrzędne (w  $\mathbb{R}^2$ ) wyrażone wzorem:

$$\mathcal{L}_i = \frac{1}{2} \rho C_{ijkl} k_m u_j u_k, \quad i=1,2, \quad (5.157)$$

gdzie

$$\mathbf{U} = \mathbf{u} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \quad (5.158)$$

jest polem falowym,

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (5.159)$$

jest (rzeczywistym) wektorem amplitud  $\mathbf{a}$

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} \quad (5.160)$$

jest wektorem falowym.

Założenie, że warstwy w płycie są wykonane z materiału izotropowego i jednorodnego oznacza, że tensor stałych sprężystych  $C_{ijkl}$  we wzorze (5.157) ma postać:

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{km} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jm} + \delta_{jk} \delta_{im}); \quad (5.161)$$

w naszym szczególnym przypadku:

$$\mathcal{P}_1 = \frac{1}{2} \omega \left[ \lambda (k_1 u_1^2 + k_2 u_1 u_2) + \mu (2k_1 u_1^2 + k_1 u_2^2 + k_2 u_1 u_2) \right], \quad (5.162)$$

$$\mathcal{P}_2 = \frac{1}{2} \omega \left[ \lambda (k_2 u_2^2 + k_1 u_1 u_2) + \mu (2k_2 u_2^2 + k_2 u_1^2 + k_1 u_1 u_2) \right]. \quad (5.163)$$

Załóżmy, że fala wymuszająca jest podłużnie spolaryzowana i jej kąt padania jest równy  $\vartheta^0$  natomiast jej amplituda ma wartość  $A^0$ ; znaczy to, że fala ma postać:

$$\mathbf{U}^{\text{inc}} = A^0 \mathbf{n} e^{ik_1 \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}. \quad (5.164)$$

Współrzędne wektora amplitudy i wektora falowego mają następujące wartości:

$$u_1 = |A^0| \cos \vartheta^0 \quad (5.165)$$

$$u_2 = |A^0| \sin \vartheta^0 \quad (5.166)$$

$$k_1 = k_1 \cos \vartheta^0 \quad (5.167)$$

$$k_2 = k_1 \sin \vartheta^0 \quad (5.168)$$

a współrzędne wektora Poyntinga obliczone z wzorów (5.162-5.163) mają postać:

$$\mathcal{P}_{\text{inc},1} = \frac{1}{2} (\lambda + 2\mu) k_1 |A^0|^2 \omega \cos \vartheta^0, \quad (5.169)$$

$$\mathcal{P}_{\text{inc},2} = \frac{1}{2} (\lambda + 2\mu) k_1 |A^0|^2 \omega \sin \vartheta^0. \quad (5.170)$$

Oznacza to, że energia niesiona przez jednostkę powierzchni prostopadłej do kierunku propagacji fali w jednostce czasu (moduł wektora  $\mathcal{P}_{\text{inc}}$ ) jest równa

$$\mathcal{P}_{inc,lo} = \frac{1}{2} (\lambda + 2\mu) k_1 \omega |A^0|^2. \quad (5.171)$$

Fala wymuszająca generuje cztery fale: odbitą podłużnie spolaryzowaną, odbitą poprzecznie spolaryzowaną, przechodzącą podłużnie spolaryzowaną i przechodzącą poprzecznie spolaryzowaną. Stosując wzory (5.162) i (5.163) możemy w analogiczny sposób przedstawić energie niesione przez odpowiednie fale w jednostce czasu przez powierzchnię jednostkową. Są one równe:

- dla fali odbitej podłużnie spolaryzowanej:

$$\mathcal{P}_{ref,lo} = \frac{1}{2} (\lambda + 2\mu) k_1 \omega |B^0|^2. \quad (5.172)$$

- dla fali odbitej poprzecznie spolaryzowanej:

$$\mathcal{P}_{ref,t} = \frac{1}{2} \mu k_1 \omega |D^0|^2, \quad (5.173)$$

- dla fali przechodzącej podłużnie spolaryzowanej:

$$\mathcal{P}_{tr,lo} = \frac{1}{2} (\lambda + 2\mu) k_1 \omega |A^f|^2, \quad (5.174)$$

- dla fali przechodzącej poprzecznie spolaryzowanej:

$$\mathcal{P}_{tr,t} = \frac{1}{2} \mu k_1 \omega |C^f|^2. \quad (5.175)$$

W celu skonstruowania prawa zachowania energii w naszym szczególnym przypadku, rozważmy rurkę o jednostkowym kwadratowym przekroju w płaszczyźnie prostopadłej do kierunku propagacji wymuszającej podłużnie spolaryzowanej fali. Docierając do płyty, rzut tego kwadratu staje się prostokątem o krawędziach 1 i  $1/\cos\vartheta^0$ . Fala podłużnie spolaryzowana odbita od tego prostokąta biegnie znów rurką o kwadratowym jednostkowym przekroju podczas gdy przekrój rurki którą biegnie fala odbita poprzecznie spolaryzowana ma krawędzie 1 i  $\cos\kappa^0/\cos\vartheta^0$ . Analogicznie, fale przechodzące biegną przez rurki o krawędziach 1, 1 (podłużna) i 1,  $\cos\kappa^0/\cos\vartheta^0$



(poprzeczna). Dlatego też prawo zachowania energii ma w rozważanym modelu następującą postać (por. rysunek D3 w Dodatku):

$$\mathcal{P}_{inc,lo} = \mathcal{P}_{ref,lo} + \frac{\cos \kappa^0}{\cos \vartheta^0} \mathcal{P}_{ref,t} + \mathcal{P}_{tr,lo} + \frac{\cos \kappa^0}{\cos \vartheta^0} \mathcal{P}_{tr,t} \quad (5.176)$$

Analogicznie, gdy fala wymuszająca jest poprzecznie spolaryzowana o amplitudzie  $C^0$  i kącie padania  $\kappa^0$ , prawo zachowania energii przyjmuje następującą postać:

$$\mathcal{P}_{inc,t} = \frac{\cos \vartheta^0}{\cos \kappa^0} \mathcal{P}_{ref,lo} + \mathcal{P}_{ref,t} + \frac{\cos \vartheta^0}{\cos \kappa^0} \mathcal{P}_{tr,lo} + \mathcal{P}_{tr,t}, \quad (5.177)$$

gdzie

$$\mathcal{P}_{inc,t} = \frac{1}{2} \mu k_1 \omega |C^0|^2. \quad (5.178)$$

Zauważmy teraz, że w przypadku dwuwymiarowym nie ma sensu porównywanie amplitud (co było możliwe w przypadku jednowymiarowym). W tym wypadku amplitudy fali podłużnej i poprzecznej oznaczają całkiem inne wielkości fizyczne i nie mogą być ze sobą porównywane. W celu przeanalizowania własności odbijania fali przez uwarstwioną płytę możemy porównywać jedynie energie fal wygenerowanych przez falę wymuszającą. Widzimy, że są cztery takie fale i energia początkowa dzielona jest w procesie odbijania na cztery części, niesione przez te fale. Ilościowa analiza własności odbijania wymaga wprowadzenia pewnych miar, nazwanych współczynnikami odbicia (przejścia), będącymi stosunkiem energii fali odbitej (przechodzącej) do energii fali wymuszającej. W naszym modelu potrzebujemy dla każdego z dwóch typów fal wymuszających czterech takich miar (dla każdej z fal powstałych w procesie odbicia i przechodzenia fali przez płytę). W przypadku, gdy fala wymuszająca jest podłużnie spolaryzowana mamy następujące cztery współczynniki:  $\mathcal{R}_{ref,lo}$  - współczynniki odbicia dla fali podłużnej,  $\mathcal{R}_{tr,lo}$  - współczynnik przejścia dla fali podłużnej,  $\mathcal{R}_{ref,t}$  - współczynniki odbicia dla fali poprzecznej,  $\mathcal{R}_{tr,t}$  - współczynnik przejścia dla fali poprzecznej, zdefiniowane jako:

$$\mathcal{R}_{\text{ref},\text{lo}} = \frac{\mathcal{P}_{\text{ref},\text{lo}}}{\mathcal{P}_{\text{inc},\text{lo}}}, \quad (5.179)$$

$$\mathcal{R}_{\text{tr},\text{lo}} = \frac{\mathcal{P}_{\text{tr},\text{lo}}}{\mathcal{P}_{\text{inc},\text{lo}}}, \quad (5.180)$$

$$\mathcal{R}_{\text{ref},\text{t}} = \frac{\cos \mathcal{K}^0}{\cos \mathcal{D}^0} \frac{\mathcal{P}_{\text{ref},\text{t}}}{\mathcal{P}_{\text{inc},\text{lo}}}, \quad (5.181)$$

$$\mathcal{R}_{\text{tr},\text{t}} = \frac{\cos \mathcal{K}^0}{\cos \mathcal{D}^0} \frac{\mathcal{P}_{\text{tr},\text{t}}}{\mathcal{P}_{\text{inc},\text{lo}}}. \quad (5.182)$$

W przypadku poprzecznej fali wymuszającej, odpowiednie współczynniki są zdefiniowane jako:

$$\mathcal{R}_{\text{ref},\text{lo}} = \frac{\cos \mathcal{D}^0}{\cos \mathcal{K}^0} \frac{\mathcal{P}_{\text{ref},\text{lo}}}{\mathcal{P}_{\text{inc},\text{t}}}, \quad (5.183)$$

$$\mathcal{R}_{\text{tr},\text{lo}} = \frac{\cos \mathcal{D}^0}{\cos \mathcal{K}^0} \frac{\mathcal{P}_{\text{tr},\text{lo}}}{\mathcal{P}_{\text{inc},\text{t}}}, \quad (5.184)$$

$$\mathcal{R}_{\text{ref},\text{t}} = \frac{\mathcal{P}_{\text{ref},\text{t}}}{\mathcal{P}_{\text{inc},\text{t}}}, \quad (5.185)$$

$$\mathcal{R}_{\text{tr},\text{t}} = \frac{\mathcal{P}_{\text{tr},\text{t}}}{\mathcal{P}_{\text{inc},\text{t}}}. \quad (5.186)$$

Możemy również badać zagadnienie bardziej ogólnie, rozważając współczynnik odbicia fali jako sumę współczynników odbicia dla fal podłużnych i poprzecznych:

$$\mathcal{R}_{\text{ref}} = \mathcal{R}_{\text{ref},\text{lo}} + \mathcal{R}_{\text{ref},\text{t}}. \quad (5.187)$$

Oznacza to, że rozważamy odbitą energię bez dzielenia jej pomiędzy fale podłużne i poprzeczne.

## 5.11. Przykład numeryczny

Podobnie jak w paragrafie 4.5 jako przykład numeryczny rozważymy płytę zbudowaną z naprzemiennie ułożonych warstw stali (indeks 1) i tytanu (indeks 2) otoczonej aluminium (indeks 0). Podobnie jak w rozdziale 4 również tutaj wartości liczbowe stałych materiałowych są równe (cf.[Tuma]):

$$\lambda_0 = 5.44 \times 10^{10} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}, \mu_0 = 2.75 \times 10^{10} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}, \rho_0 = 2750 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

$$\lambda_1 = 10.71 \times 10^{10} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}, \mu_1 = 8.14 \times 10^{10} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}, \rho_1 = 8670 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

$$\lambda_2 = 7.08 \times 10^{10} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}, \mu_2 = 4.31 \times 10^{10} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}, \rho_2 = 4300 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

Innymi wielkościami potrzebnymi do opisania procesu falowego w uwarstwionej płycie są: liczba warstw i ich grubości, częstotliwość  $\omega$  fali wymuszającej oraz kąt jej padania na płytę. Amplituda fali wymuszającej, na skutek liniowości modelu, nie ma wpływu na współczynniki odbicia i przejścia; w obliczeniach przyjmujemy, że jest ona równa 1. Dla uproszczenia obliczeń, w większości przykładów przyjmujemy model deterministyczny (opisany w paragrafie 5.6), zakładając jednakową grubość warstw wykonanych z tego samego materiału. Jak wiemy, przykład ten dla zerowego kąta padania rozpatrywany był w paragrafie 4.5. W obliczeniach tego paragrafu zakładamy, że wymiary płyty są takie, iż:

$$L = 10, \quad l = 10, \quad (5.188)$$

to znaczy zakładamy równy udział obu materiałów w płycie. Oczywiście, inna proporcja materiałów w płycie mogłaby dać inne wartości współczynników odbicia dla szczególnych wartości częstotliwości i kąta padania fali, jednak nie wprowadziłoby to żadnych dodatkowych efektów jakościowych.

Zauważmy, że dla przyjętych wartości liczbowych stałych materiałowych maksymalny kąt padania przy którym fala przechodzi przez płytę, ma dla fali podłużnej wartość  $\pi/2 \approx 1.57$  podczas gdy dla fali poprzecznej wynosi on 0.542.

Rozpoczynamy numeryczne badanie problemu od przedstawienia własności odbijania fali przez zhomogenizowaną płytę jako funkcję częstotliwości fali wymuszającej  $\omega$  i kąta padania  $\vartheta^0$  (lub  $\kappa^0$ ). Na rysunkach 5.1 i 5.2 widzimy, że dla zerowego kąta padania współczynnik odbicia  $\mathcal{R}_{\text{ref}}$  dla obu typów fal wymuszających jest okresową

funkcją częstotliwości  $\omega$ . Ponieważ prędkość fali podłużnej jest zawsze większa, jej okres w dziedzinie  $\omega$  jest zawsze większy niż dla fali poprzecznej. Możemy też zaobserwować, że w obu przypadkach dla rosnącego kąta padania współczynnik odbicia staje się nieokresową funkcją  $\omega$ . W przypadku fali podłużnej, dla kąta padania dążącego do swej granicznej wartości i dla dowolnej częstotliwości  $\omega$ , współczynnik odbicia w sposób gładki zmierza do jedności - mamy do czynienia z całkowitym odbiciem fali; ponadto z rysunków 5.3 i 5.4 możemy stwierdzić, że fala odbita jest zawsze podłużna. W przypadku fali wymuszającej o polaryzacji poprzecznej sytuacja jest bardziej skomplikowana - współczynnik odbicia jest nieregularną funkcją kąta padania, silnie zależną od częstotliwości  $\omega$ . W granicy otrzymujemy, że fala poprzeczna przechodzi przez zhomogenizowaną płytę (nie ulega odbiciu), (rys. 5.5 i 5.6). Analizując rozdział energii fali wymuszającej pomiędzy wszystkie wygenerowane fale (rys.5.3-5.6) widzimy, że w obu przypadkach fale tego samego typu co fala wymuszająca dominują (sumarycznie: fala odbita i przechodząca). Jednakże, dla pewnych częstotliwości, udział przeciwnego typu fali w rozdziale energii może być znaczny, szczególnie fali odbitej.

W tej pracy badamy zbieżność własności płyty uwarstwionej do płyty zhomogenizowanej. Rysunki 5.7-5.9 pokazują jak zbieżność tych własności wygląda w kontekście współczynników odbicia. Widzimy, że dla fali podłużnej (rys.5.7-5.8), dla dowolnej częstotliwości i dla każdego kąta padania fali wymuszającej zbieżność współczynnika odbicia jest szybka; dla  $N > 40$  uwarstwiona płyta może być uważana za zhomogenizowaną z zadowalającą dokładnością. Z drugiej strony, współczynniki te dla małych  $N$  są bardzo nieregularne i w żaden sposób nie można przewidzieć ich wartości na podstawie znajomości współczynników otrzymanych dla płyty zhomogenizowanej. Ma to w szczególności miejsce gdy rozważamy udział energii poszczególnych typów fal w procesie odbicia. Rysunki 5.9 i 5.10 pokazują, że dobierając szczególne kombinacje wartości parametrów  $N$ ,  $\omega$  i  $\vartheta^0$  ( $\kappa^0$ ) możemy oczekiwać niemal dowolnych udziałów wartości energii fal poszczególnego typu.

Problem homogenizacji przy założeniu, że fala wymuszająca jest poprzecznie spolaryzowana jest bardzo podobny: dla każdego kąta padania współczynnik odbicia zbiega do wartości odpowiadającej osrodkowi zhomogenizowanemu. Różnica jest tu jednak taka, że dla zerowego kąta padania ta zbieżność jest zawsze wolniejsza w przypadku fali poprzecznie spolaryzowanej podczas gdy dla rosnącego kąta padania może być nawet szybsza niż w przypadku podłużnej fali wymuszającej.

Na dotychczas przedstawionych rysunkach badaliśmy własności odbijania konkretnego materiału - o ustalonych stałych materiałowych. W konkretnie wybranej

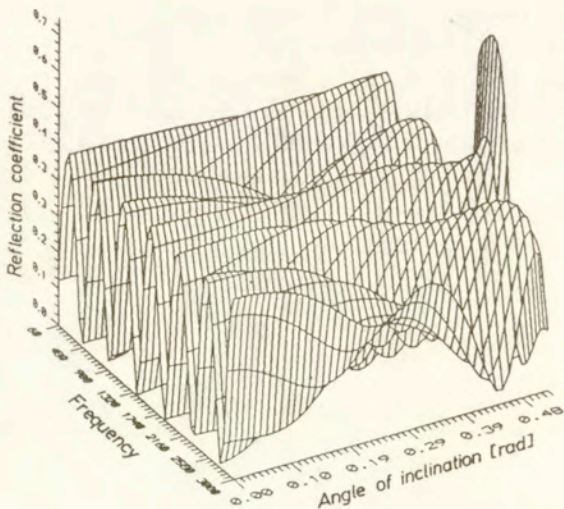
próbce materiału może być tak, że te stałe materiałowe różnią się nieco od założonych wartości. Rysunki 5.12-5.15 pokazują, że współczynniki odbicia są bardzo wrażliwe na zmiany stałych materiałowych w warstwach. W rachunkach założono, że wszystkie parametry oprócz  $\rho^2$  (odpowiednio  $\mu^2$ ) mają uprzednio założone wartości. Wskazane parametry na wykresach zmieniają wartość w granicach  $\pm 20\%$  swojej pierwotnej wartości. Widać, że wrażliwość współczynnika odbicia na zmiany tych parametrów silnie zależy od kąta padania fali. Widać także, że fale poprzeczne są dużo bardziej wrażliwe na zmiany stałych materiałowych niż fale podłużne. Również częstotliwość  $\omega$  ma bardzo silny wpływ na wrażliwość współczynnika odbicia na zmiany stałych materiałowych.

Podsumowując tę część rozważań podkreślimy, że powyższe wyniki mogą być bardzo użyteczne przy planowaniu eksperymentów wykorzystujących fale do badania własności ośrodków. Dobierając takie wartości kąta padania i częstotliwości oraz typ fali przy których współczynnik odbicia jest najbardziej wrażliwy na zmiany mierzonego parametru możemy zwiększyć dokładność pomiaru i poprawić jakość eksperymentu.

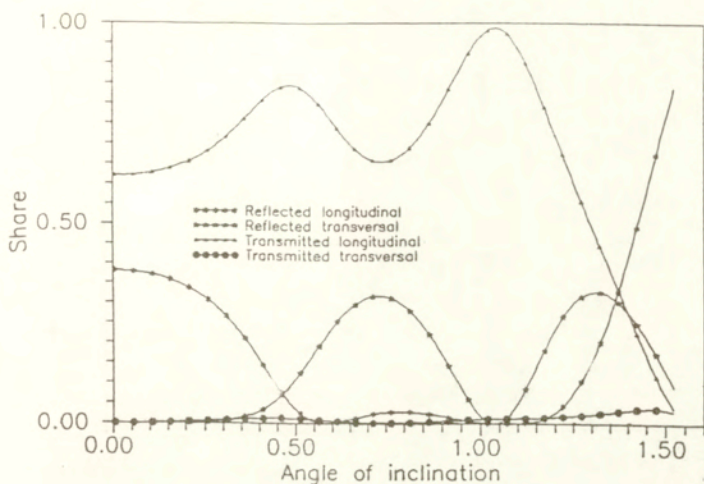
Jak już zaznaczyliśmy, powyższe wykresy były uzyskane przy założeniu, że grubości warstw w płycie są stałymi deterministycznymi. Założmy teraz, że są one niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie wykładniczym i że ich wartości średnie spełniają związki (5.140-5.142). Metodą symulacji komputerowej otrzymujemy teraz dla dwóch kątów padania podłużnej fali wymuszającej ( $\vartheta^0=0.0$  i  $\vartheta^0=0.8$ ) wartości współczynnika odbicia i jego wariancji w funkcji gęstości uwarstwienia  $N$ . (W procesie symulacji użyto 2000 realizacji, czas obliczeń - około 72 godziny pracy komputera IBM 486.) Wnioski wynikające z przedstawiających te wyniki rysunków 5.16 i 5.17 są podobne do wniosków uzyskanych w paragrafie 4.8. Widzimy ponadto, że wyniki dla modelu stochastycznego są bardziej gładkie niż dla modelu deterministycznego. Zbieżność do ośrodka zhomogenizowanego w przypadku stochastycznym jest wolniejsza niż w przypadku deterministycznym.



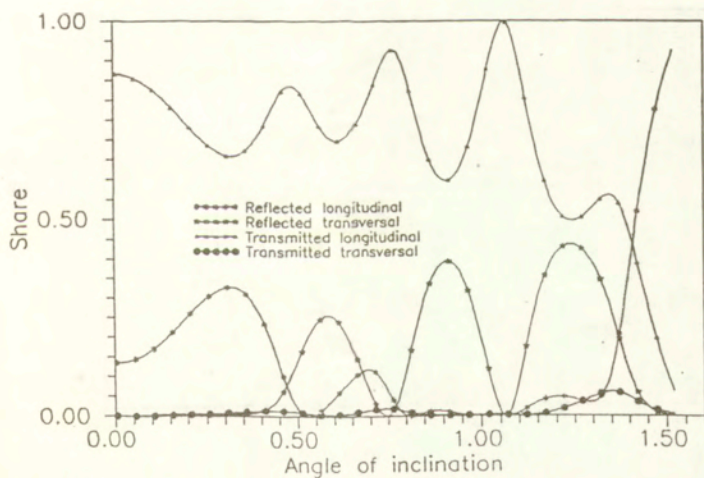
Rys.5.1 Zależność współczynnika odbicia fali podłużnej od kąta padania  $\vartheta^0$  i częstotliwości  $\omega$  (ośrodek zhomogenizowany).



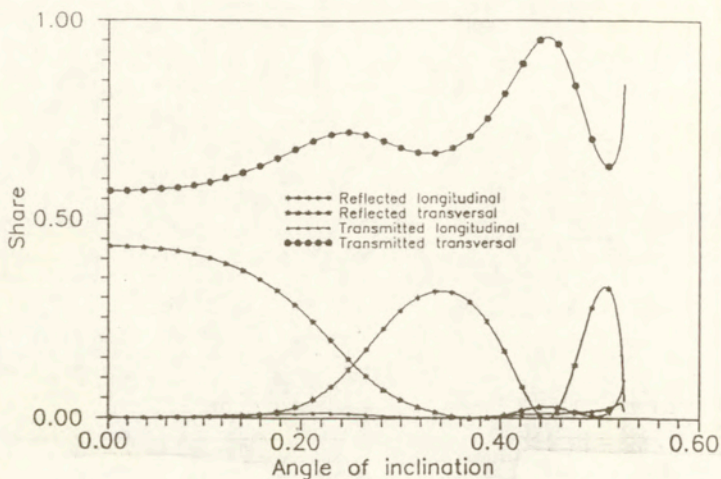
Rys.5.2 Zależność współczynnika odbicia fali poprzecznej od kąta padania  $\kappa^0$  i częstotliwości  $\omega$  (ośrodek zhomogenizowany).



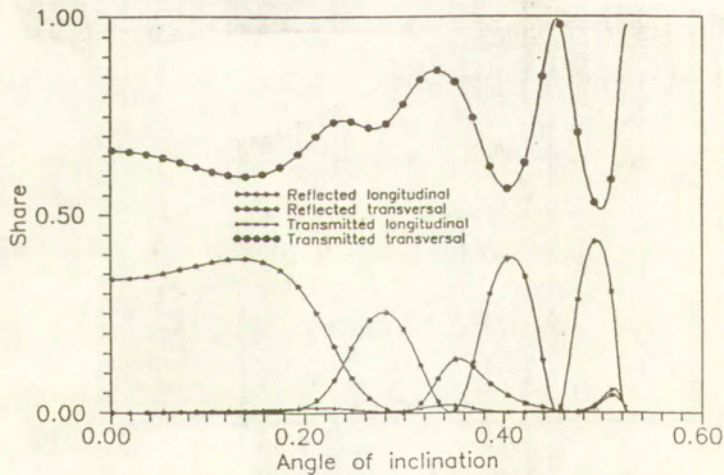
Rys.5.3 Zależność rozdziału energii wymuszającej fali podłużnej pomiędzy fale wygenerowane od kąta padania fali  $\vartheta^0$  ( $\omega = 3000$  Hz).



Rys.5.4 Zależność rozdziału energii wymuszającej fali podłużnej pomiędzy fale wygenerowane od kąta padania fali  $\vartheta^0$  ( $\omega = 6800$  Hz).

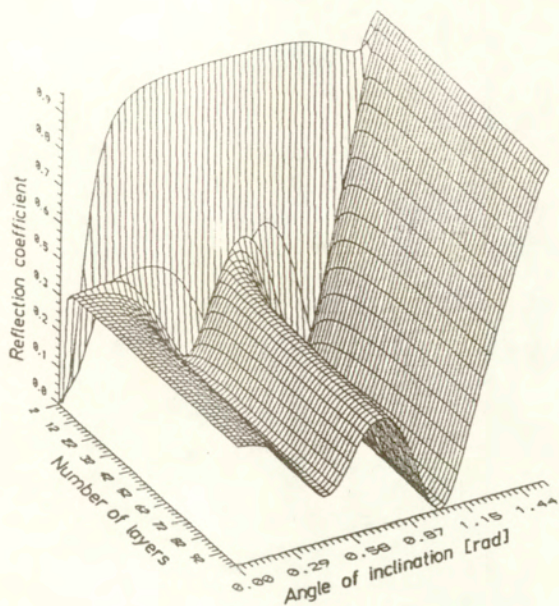


Rys.5.5 Zależność rozdziału energii wymuszającej fali poprzecznej pomiędzy fale wygenerowane od kąta padania fali  $\kappa^0$  ( $\omega = 3000$  Hz).

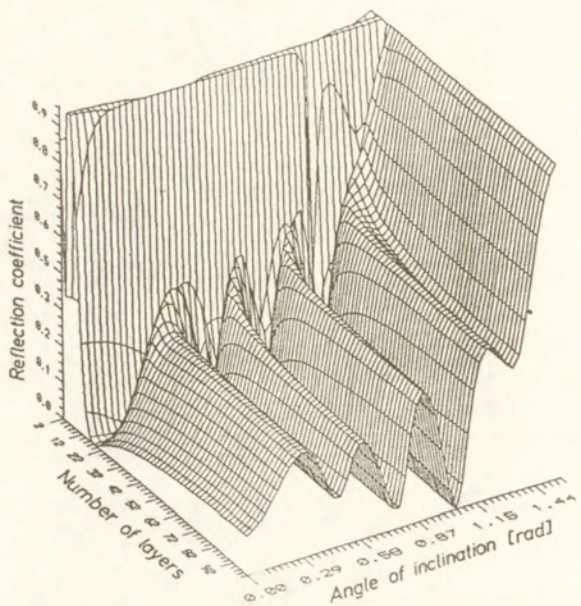


Rys.5.6 Zależność rozdziału energii wymuszającej fali poprzecznej pomiędzy fale wygenerowane od kąta padania fali  $\kappa^0$  ( $\omega = 6800$  Hz).





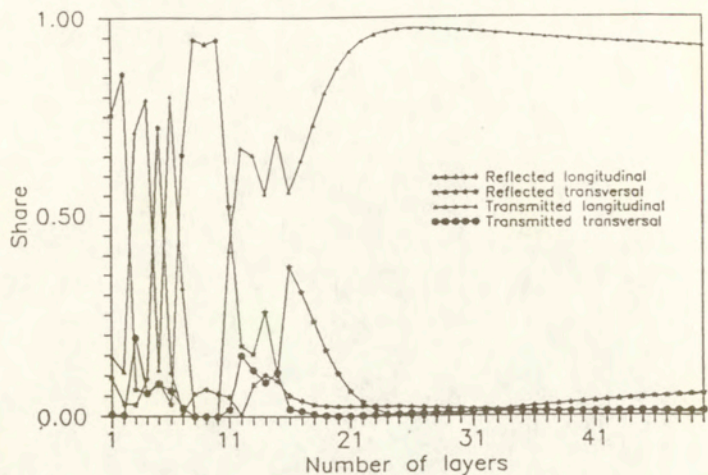
Rys.5.7 Zależność współczynnika odbicia fali podłużnej od kąta padania  $\vartheta^0$  i gęstości uwarstwienia  $N$  ( $\omega = 3000$  Hz).



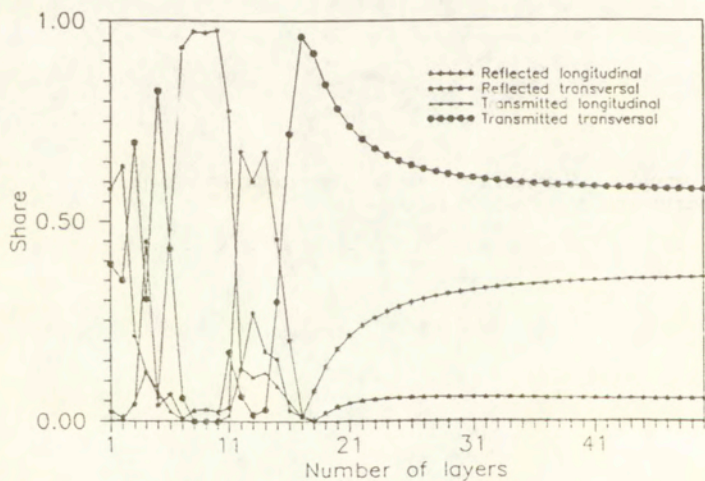
Rys.5.8 Zależność współczynnika odbicia fali podłużnej od kąta padania  $\vartheta^0$  i gęstości uwarstwienia  $N$  ( $\omega = 6800$  Hz).



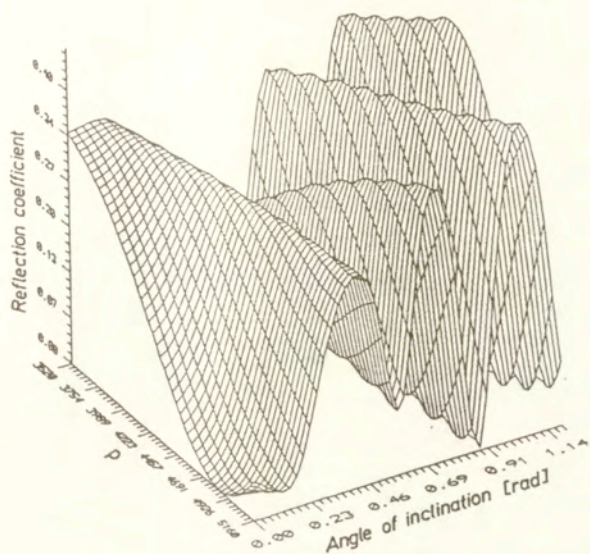
Rys.5.9 Zależność współczynnika odbicia fali poprzecznej od kąta padania  $\kappa^0$  i gęstości uwarstwienia  $N$  ( $\omega = 6800$  Hz).



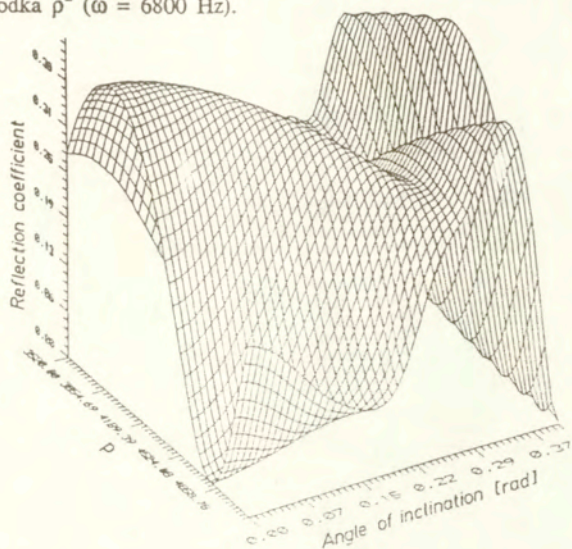
Rys.5.10 Zależność rozdziału energii wymuszającej fali podłużnej pomiędzy fale wygenerowane od gęstości uwarstwienia  $N$  ( $\omega = 6800$  Hz,  $\vartheta^0 = 0.8$ ).



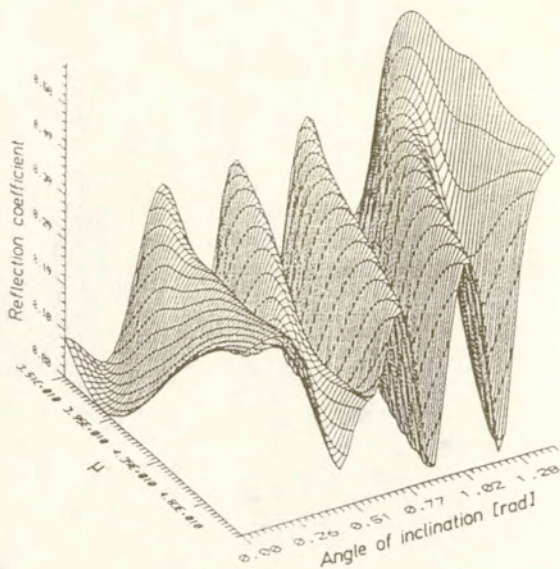
Rys.5.11 Zależność rozdziału energii wymuszającej fali poprzecznej pomiędzy fale wygenerowane od gęstości uwarstwienia  $N$  ( $\omega = 6800$  Hz,  $\kappa^0 = 0.4$ ).



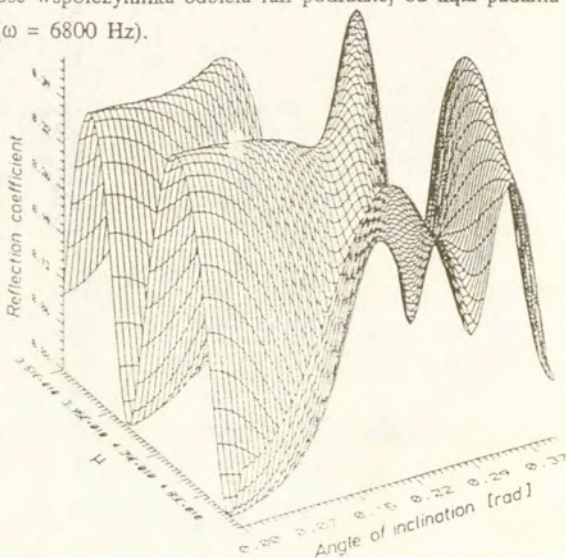
Rys.5.12 Zależność współczynnika odbicia fali podłużnej od kąta padania  $\theta^0$  i zmian gęstości ośrodka  $\rho^2$  ( $\omega = 6800$  Hz).



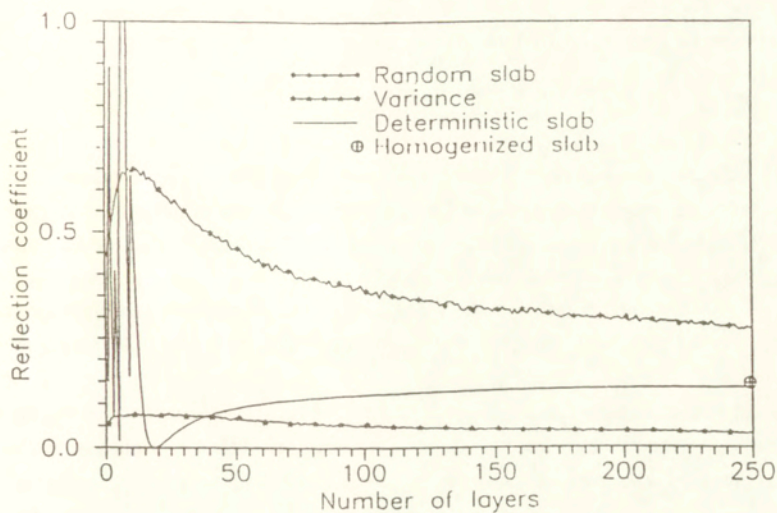
Rys.5.13 Zależność współczynnika odbicia fali poprzecznej od kąta padania  $\kappa^0$  i zmian gęstości ośrodka  $\rho^2$  ( $\omega = 6800$  Hz).



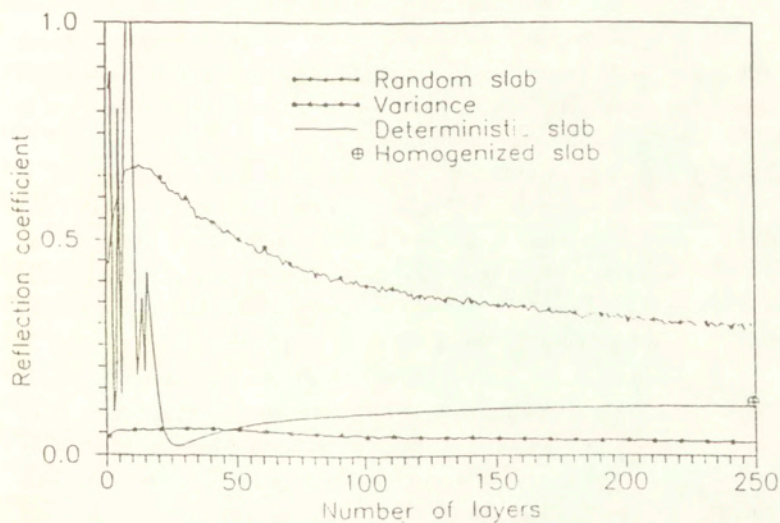
Rys.5.14 Zależność współczynnika odbicia fali podłużnej od kąta padania  $\vartheta^0$  i zmian stałej Lamé  $\mu^2$  ( $\omega = 6800$  Hz).



Rys.5.15 Zależność współczynnika odbicia fali poprzecznej od kąta padania  $\kappa^0$  i zmian stałej Lamé  $\mu^2$  ( $\omega = 6800$  Hz).



Rys.5.16 Zbieżność współczynnika odbicia fali podłużnej dla rosnącej liczby warstw  $N$  ( $\omega = 6800$ ,  $\vartheta^0 = 0.0$ ).



Rys.5.17 Zbieżność współczynnika odbicia fali podłużnej dla rosnącej liczby warstw  $N$  ( $\omega = 6800$ ,  $\vartheta^0 = 0.8$ ).

## 6. Zagadnienie propagacji impulsów falowych w wielosegmentowym pręcie.

### 6.1. Wstęp

W poprzednich rozdziałach przedstawiliśmy działanie metody macierzy przejścia w przypadku zastosowania jej do analizy fal harmonicznych. Metoda ta może być również zastosowana do badania propagacji impulsów falowych w elementach konstrukcji. Jest to z punktu widzenia metod matematycznych istotnie inne zadanie, ponieważ analizowane jest w nim zagadnienie niestacjonarne, w którym zmienna opisująca czas nie może zostać wyeliminowana; co więcej, odgrywa ona kluczową rolę w całym problemie.

Jak wiadomo, konstrukcje inżynierskie podczas swego funkcjonowania podlegają działaniu wewnętrznych i zewnętrznych sił wymuszających które wywołują w nich drgania lub fale. Zależnie od zaplanowanej funkcji takiej konstrukcji zjawiska te bywają wykorzystywane w działaniu konstrukcji lub powinny być wyeliminowane aby uniknąć jej zniszczenia. W tej sytuacji zagadnieniem szczególnie interesującym jest propagacja impulsów falowych w elementach takich konstrukcji. Ma ono miejsce w wielu maszynach roboczych lub narzędziach mechanicznych jak kafary lub młoty pneumatyczne, gdzie impulsy są używane w działaniu maszyn. W pewnych innych sytuacjach (na przykład w tłumikach, amortyzatorach i elementach mocujących) impulsy falowe pełnią rolę niszczącą. W obu przypadkach należy tak zaprojektować te elementy konstrukcji by optymalnie pełniły one swoją rolę.

Impuls falowy jest zaburzeniem ośrodka sprężystego poruszającym się w przestrzeni, przenoszącym energię i mającym ograniczony czas trwania. Efekt przechodzenia takiego impulsu przez element konstrukcji zależy nie tylko od własności materiału, z którego ta konstrukcja jest wykonana lecz także od kształtu impulsu i czasu jego trwania. W procesie projektowania konstrukcji te własności propagujących się w niej impulsów muszą być wzięte pod uwagę.

W tym rozdziale zajmujemy się szczególnym zagadnieniem propagacji impulsów falowych w prętach - elementach konstrukcji modelowanych matematycznie przez równania różniczkowe cząstkowe z jedną zmienną przestrzenną. Model zaprezentowany tutaj zawiera wiele uproszczeń. Pominięto w nim wiele efektów fizycznych występujących w rzeczywistych elementach konstrukcji, jak tarcie, tłumienie zewnętrzne i wewnętrzne, wszelkie efekty termiczne. Założono również, że cząsteczki



pręta poruszają się wyłącznie w kierunku równoległym do jego osi (założenie to nie powoduje istotnych ograniczeń gdy współczynnik Poissona w całym pręcie jest stały lub gdy jego grubość jest duża w porównaniu z wielkością odkształceń pręta). Pomimo tych ograniczeń model tego rodzaju był szeroko analizowany w literaturze (na przykład w pracach Lundberga i jego współpracowników), dając dobre efekty w planowaniu eksperymentów a nawet w projektowaniu narzędzi roboczych (młotki pneumatyczne). W naszych rozważaniach zajmiemy się analizą takich modeli w przypadku, gdy własności materiału lub wymiary geometryczne tak modelowanych elementów konstrukcji są zmiennymi losowymi.

Rozważania nasze rozpoczynamy od opisu matematycznego modelu zrandomizowanego pręta składającego się z wielu segmentów, by następnie przejść do uzyskania jego efektywnych własności w procesie transportu impulsów falowych (a co za tym idzie i energii) w sytuacji, gdy liczba segmentów w pręcie rośnie nieskończenie. W tym celu używamy metody analitycznej, a następnie przeprowadzamy obliczenia numeryczne prowadzące do graficznej wizualizacji uzyskanych wyników.

Opisując model pręta założymy, że zajmuje on obszar przestrzeni (tzn. osi liczb rzeczywistych  $x$ ) od punktu  $x=0$  do  $x=d$ . Zakładamy, że otoczenie takiego pręta składa się z z dwóch półnieskończonych prętów, rozciągających się od minus nieskończoności do  $x=0$  i od  $x=d$  do plus nieskończoności. Ponadto zakładamy, że sam pręt ma pewną strukturę wewnętrzną; składa się on z kilku (na przykład  $N$ ) segmentów o czasach

przejścia  $h_j$ ,  $\sum_{j=1}^n h_j = d$ , będących również prętami. W naszym modelu zakładamy, że

zarówno długości segmentów jak i ich parametry materiałowe mogą być zmiennymi losowymi. W takiej sytuacji również długość pręta (całkowity czas przejścia impulsu przez pręt)  $d$  jest zmienną losową.

Zagadnienie propagacji impulsów falowych jest sformułowane w takiej właśnie konstrukcji. Zakładamy, że impuls falowy  $f(x,t)$ , o podłużnej polaryzacji, przychodzi z lewej strony i dociera do pręta w punkcie  $x=0$  w chwili  $t=0$ . Następnie impuls ulega częściowemu odbiciu i częściowo wnika do pręta, propagując się w jego pierwszym segmencie. Z kolei impuls dociera do granicy drugiego segmentu, gdzie również rozdziela się na dwie części: odbitą i przechodzącą; podobnie dzieje się na granicach kolejnych segmentów. Ponadto impulsy odbite również podlegają procesowi kolejnych odbić i przejść, tworząc w sumie niezwykle skomplikowany obraz wielokrotnie odbitych, poruszających się w lewo i w prawo impulsów. (por. rysunek D4 w Dodatku).

Analiza matematyczna takiego zagadnienia ulega znacznemu uproszczeniu gdy zamienimy stosowany zwykle opis zjawiska w zmiennych czasowo-przestrzennych ( $t$  i  $x$ ) opisem częstotliwościowo-przestrzennym ( $\omega$  i  $x$ ), badając zachowanie transformaty Fouriera względem zmiennej czasowej  $t$  naszego pola falowego. Wówczas wymuszające pole falowe ma postać  $f(x, \omega)$  a równanie opisujące falę staje się równaniem różniczkowym zwyczajnym. Takie podejście do zagadnienia było w sposób efektywny wykorzystywane przez na przykład Lundberga i jego współpracowników a w przypadku fal w ośrodkach wielowymiarowych - przez Kennetta.

W następnym paragrafie tego rozdziału przedstawimy dokładne sformułowanie problemu propagacji impulsów falowych w jednorodnym pręcie. W punkcie 6.3 uogólnimy to na przypadek pręta kawałkami jednorodnego i podamy konstrukcję macierzy przejścia oraz równań dla amplitud fal odbitych i przechodzących. Punkty 6.4 i 6.5 poświęcone są zbadaniu przypadków asymptotycznych gdy liczba segmentów w pręcie dąży do nieskończoności w modelu deterministycznym i stochastycznym. Punkt 6.6 zawiera opis algorytmu numerycznego odwracania transformaty Fouriera w celu odtworzenia kształtów amplitud w dziedzinie czasowo-przestrzennej a punkt 6.7 - zastosowanie tego algorytmu do zbadania szybkości zbieżności opisu pręta podzielonego na segmenty do modelu pręta zhomogenizowanego.

## 6.2. Sformułowanie zagadnienia

Rozważmy sprężysty pręt o stałym przekroju wykonany z jednorodnego i izotropowego materiału. Fala biegnąca w takim pręcie może być opisana przez układ następujących dwóch równań różniczkowych cząstkowych:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial x} &= A \rho \frac{\partial v}{\partial t} \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{1}{A\eta} \frac{\partial \sigma}{\partial t} \end{aligned} \tag{6.1}$$

gdzie

$\sigma$  oznacza naprężenie,

$v$  jest prędkością cząstek ośrodka,

natomiast

$A$  jest polem przekroju poprzecznego pręta,

$\rho$  jest gęstością materiału z którego pręt jest wykonany,

$\eta$  jest modulem Younga.

Zmienne niezależne  $x$ ,  $t$  oznaczają odpowiednio współrzędną przestrzenną wzdłuż pręta oraz czas.

Wprowadzając zapis macierzowy możemy równanie (6.1) przedstawić w następującej postaci:

$$\frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} \sigma \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & A\rho \\ \frac{1}{A\eta} & 0 \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \sigma \\ v \end{bmatrix}. \quad (6.2)$$

Po podstawieniu wyrażenia dla prędkości falowej w ośrodku sprężystym:

$$c = \sqrt{\frac{\eta}{\rho}}, \quad (6.3)$$

przekształcamy równanie (6.2) do następującej postaci:

$$\frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} \sigma \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & A\sqrt{\rho\eta} \\ \frac{1}{A\sqrt{\rho\eta}} & 0 \end{bmatrix} c \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \sigma \\ v \end{bmatrix}. \quad (6.4)$$

Wprowadźmy zamiast zmiennej przestrzennej  $x$  nową zmienną niezależną będącą czasem przejścia z punktu 0 do punktu  $x$ , zdefiniowaną jako:

$$\xi = \int_0^x \frac{1}{c} dx' = \frac{x}{c} \quad (6.5)$$

Jeśli ponadto zdefiniujemy impedancję ośrodka  $Z$  jako:

$$Z = A \sqrt{\rho\eta} \quad (6.6)$$

wówczas nasze wyjściowe równanie falowe (6.4) przyjmie następującą postać:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \begin{bmatrix} \sigma \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & Z \\ 1 & 0 \\ \bar{Z} & 0 \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \sigma \\ v \end{bmatrix}. \quad (6.7)$$

Wprowadzając w równaniu (6.7) zapis wektorowy otrzymujemy:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} s = Q \frac{\partial}{\partial t} s, \quad (6.8)$$

gdzie zostały przyjęte następujące oznaczenia:

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & Z \\ 1 & 0 \\ \bar{Z} & 0 \end{bmatrix}, \quad s = \begin{bmatrix} \sigma \\ v \end{bmatrix}. \quad (6.9)$$

Na zakończenie dokonujemy w równaniu (6.8) transformacji Fouriera względem zmiennej czasowej  $t$ :

$$\hat{s}(\xi, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} s(\xi, t) dt, \quad s(\xi, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \hat{s}(\xi, \omega) d\omega, \quad (6.10)$$

i otrzymujemy następujące równanie różniczkowe zwyczajne dla transformowanego pola falowego:

$$\frac{d}{d\xi} \hat{s} = i\omega Q \hat{s}, \quad (6.11)$$

z pewnym warunkiem początkowym  $\hat{s}(0, \omega)$ .

Rozwiązanie równania (6.11) w jednorodnym przecie może być przedstawione w następującej postaci:

$$\hat{s}(\xi, \omega) = P(\xi, \omega) \hat{s}(0, \omega), \quad (6.12)$$

gdzie  $P(\xi, \omega)$  jest rozwiązaniem następującego różniczkowego równania macierzowego:

$$\frac{d}{d\xi} \mathbf{P} = i\omega \mathbf{Q} \mathbf{P}, \quad \mathbf{P}(0, \omega) = \text{Id}. \quad (6.13)$$

Takie rozwiązanie ma następującą postać:

$$\mathbf{P} = e^{i\omega \mathbf{Q} \xi}, \quad (6.14)$$

lub w jawnej postaci:

$$\mathbf{P} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{i\omega \xi} + e^{-i\omega \xi} & Z \left( -e^{i\omega \xi} + e^{-i\omega \xi} \right) \\ \frac{1}{Z} \left( -e^{i\omega \xi} + e^{-i\omega \xi} \right) & e^{i\omega \xi} + e^{-i\omega \xi} \end{bmatrix}. \quad (6.15)$$

Wyrażając funkcję eksponent w wyrażeniu (6.15) w terminach funkcji sinus i cosinus otrzymujemy:

$$\mathbf{P} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \cos \omega \xi & -iZ \sin \omega \xi \\ \frac{i}{Z} \sin \omega \xi & \cos \omega \xi \end{bmatrix}. \quad (6.16)$$

Zakładając, że interesuje nas tylko naprężenie, możemy wyeliminować z układu równań (6.11) prędkość  $\hat{v}$ , w wyniku otrzymując pojedyncze równanie dla naprężenia  $\hat{\sigma}$  w następującej postaci:

$$\frac{d^2}{d\xi^2} \hat{\sigma} + \omega^2 \hat{\sigma} = 0. \quad (6.17)$$

Jego rozwiązanie ma postać:

$$\hat{\sigma}(\xi, \omega) = \hat{\sigma}_l(\omega) e^{-i\omega \xi} + \hat{\sigma}_r(\omega) e^{i\omega \xi} \quad (6.18)$$

gdzie

$\hat{\sigma}_l(\omega)$  jest amplitudą fali biegnącej w prawą stronę (wymuszającej),

$\hat{\sigma}_R(\omega)$  jest amplitudą fali biegnącej w lewą stronę (odbitej).  
Znając to rozwiązanie i korzystając ze związku:

$$\frac{d}{d\xi} \hat{v}(\xi, \omega) = i\omega \frac{1}{Z} \hat{\sigma}(\xi, \omega) \quad (6.19)$$

możemy znaleźć transformatę Fouriera prędkości  $\hat{v}(\xi, \omega)$ :

$$\hat{v}(\xi, \omega) = \frac{1}{Z} \left[ -\hat{\sigma}_1(\omega) e^{-i\omega\xi} + \hat{\sigma}_R(\omega) e^{i\omega\xi} \right]. \quad (6.20)$$

### 6.3. Konstrukcja macierzy przejścia

Sytuacja przedstawiona w poprzednim rozdziale komplikuje się, gdy fala biegnąca w pręcie napotyka na nieciągłość ośrodka. Wówczas następuje zjawisko częściowego odbicia fali i częściowego przejścia fali przez punkt nieciągłości, następuje więc skok amplitudy fali i jej fazy. Odbywa się to w taki sposób, że w punkcie nieciągłości  $\xi$  zachowana jest ciągłość (transformowanego) naprężenia i prędkości:

$$\hat{s}(\xi^-, \omega) = \hat{s}(\xi^+, \omega) \quad (6.21)$$

Warunek ciągłości (6.21) w punkcie  $\xi$  zapisany z wykorzystaniem wyrażeń (6.18) i (6.20) dla dwóch ośrodków indeksowanych odpowiednio liczbami 1 i 2 ma postać:

$$\hat{\sigma}_1^1(\omega) e^{-i\omega\xi} + \hat{\sigma}_R^1(\omega) e^{i\omega\xi} = \hat{\sigma}_1^2(\omega) e^{-i\omega\xi} + \hat{\sigma}_R^2(\omega) e^{i\omega\xi} \quad (6.22)$$

$$\frac{1}{Z_1} \left[ -\hat{\sigma}_1^1(\omega) e^{-i\omega\xi} + \hat{\sigma}_R^1(\omega) e^{i\omega\xi} \right] = \frac{1}{Z_2} \left[ -\hat{\sigma}_1^2(\omega) e^{-i\omega\xi} + \hat{\sigma}_R^2(\omega) e^{i\omega\xi} \right]$$

Załóżmy teraz, że pręt zbudowany jest z  $N$  jednorodnych segmentów; w  $j$ -tym segmencie impedancja ma wartość  $Z_j$  a czas przejścia fali przez ten segment (odpowiadający jego długości) jest równy  $h_j$ . Początek pręta jest w punkcie 0; kolejne punkty połączenia segmentów pręta (w dziedzinie czasu przejścia) są równe

$$\xi_j = \sum_{k=1}^j h_k. \text{ Załóżmy także, że impuls falowy postaci } \hat{\delta}_1^0 e^{-i\omega\xi} \text{ dochodzi do początku}$$

pręta z otaczającego ośrodka rozciągającego się z lewej strony punktu 0 (wielkości charakteryzujące własności tego materiału będziemy oznaczali indeksem 0). Generuje on impuls odbity w ośrodku 0 oraz impuls przechodzący w pierwszym segmencie pręta (oznaczonym indeksem 1). W wyniku kolejnych odbić i przejść impulsów przez powierzchnie nieciągłości na połączeniach segmentów, w każdym z nich mamy dwie fale (biegnące w prawo i w lewo) następującej postaci:

$$\Phi_L(\omega, \xi) = \hat{\Delta}_1^j e^{-i\omega\xi}, \quad \Phi_R(\omega, \xi) = \hat{\Delta}_R^j e^{i\omega\xi}, \quad (6.23)$$

odpowiednio w segmencie o czasie przejścia  $h_j$ , to znaczy dla  $\xi \in (\xi_{j-1}, \xi_j)$ . W ośrodku znajdującym się za prętem występuje tylko fala biegnąca w prawą stronę (przechodząca), o postaci:

$$\Phi_R(\omega, \xi) = \hat{\Delta}_R^{N+1} e^{i\omega\xi}. \quad (6.24)$$

Warunek ciągłości (6.22) na połączeniu segmentów, zapisany w postaci macierzowej, ma dla ustalonego punktu  $\xi_{j-1}$  następującą postać:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ -\frac{1}{Z_{j-1}} & \frac{1}{Z_{j-1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\Delta}_1^{j-1} e^{-i\omega\xi_{j-1}} \\ \hat{\Delta}_R^{j-1} e^{i\omega\xi_{j-1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ -\frac{1}{Z_j} & \frac{1}{Z_j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\Delta}_1^j e^{-i\omega\xi_{j-1}} \\ \hat{\Delta}_R^j e^{i\omega\xi_{j-1}} \end{bmatrix}. \quad (6.25)$$

Wprowadźmy nowe zmienne:

$$\hat{f}_1^j = \hat{\Delta}_1^j e^{-i\omega\xi_{j-1}}, \quad \hat{f}_R^j = \hat{\Delta}_R^j e^{i\omega\xi_{j-1}}. \quad (6.26)$$

Ponieważ  $\xi_{j-1} = \xi_j \cdot h_j$  (lub  $\xi_j = \xi_{j-1} + h_j$ ) dla  $j=1, 2, \dots, N$ ;  $\xi_0 = 0$ ,  $h_0 = 0$ , otrzymujemy:

$$\xi_{j-2} = \xi_{j-1} \cdot h_{j-1}, \quad \xi_{j-1} = \xi_{j-2} + h_{j-1}, \quad (6.27)$$

oraz

$$\hat{\Delta}_1^{j-1} e^{-i\omega\xi_{j-1}} = \hat{\Delta}_1^{j-1} e^{-i\omega\xi_{j-2}} e^{-i\omega h_{j-1}} = \hat{f}_1^{j-1} e^{-i\omega h_{j-1}}, \quad (6.28)$$

$$\hat{\Delta}_R^{j-1} e^{i\omega \hat{z}_{j-1}} = \hat{\Delta}_R^{j-1} e^{i\omega \hat{z}_{j-2}} e^{i\omega h_{j-1}} = \hat{f}_R^{j-1} e^{i\omega h_{j-1}}, \quad (6.29)$$

natomiast równanie ciągłości (6.25) przyjmuje postać:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ -\frac{1}{Z_{j-1}} & \frac{1}{Z_{j-1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{f}_I^{j-1} e^{-i\omega h_{j-1}} \\ \hat{f}_R^{j-1} e^{i\omega h_{j-1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ -\frac{1}{Z_j} & \frac{1}{Z_j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{f}_I^j \\ \hat{f}_R^j \end{bmatrix} \quad (6.30)$$

lub

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ -\frac{1}{Z_{j-1}} & \frac{1}{Z_{j-1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-i\omega h_{j-1}} & 0 \\ 0 & e^{i\omega h_{j-1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{f}_I^{j-1} \\ \hat{f}_R^{j-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ -\frac{1}{Z_j} & \frac{1}{Z_j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{f}_I^j \\ \hat{f}_R^j \end{bmatrix} \quad (6.31)$$

Rozwiązując równanie (6.31) ze względu na  $(j-1)$  zmienne, otrzymujemy:

$$\begin{bmatrix} \hat{f}_I^{j-1} \\ \hat{f}_R^{j-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{i\omega h_{j-1}} & 0 \\ 0 & e^{-i\omega h_{j-1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ -\frac{1}{Z_{j-1}} & \frac{1}{Z_{j-1}} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ -\frac{1}{Z_j} & \frac{1}{Z_j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{f}_I^j \\ \hat{f}_R^j \end{bmatrix} \quad (6.32)$$

Oznaczmy:

$$A_j = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ -\frac{1}{Z_j} & \frac{1}{Z_j} \end{bmatrix}, \quad E_j = \begin{bmatrix} e^{i\omega h_{j-1}} & 0 \\ 0 & e^{-i\omega h_{j-1}} \end{bmatrix}, \quad \hat{F}^j = \begin{bmatrix} \hat{f}_I^j \\ \hat{f}_R^j \end{bmatrix} \quad (6.33)$$

Wówczas równanie przejścia (6.32) przyjmuje następującą prostą postać:

$$\hat{F}^{j-1} = E_{j-1} A_{j-1}^{-1} A_j \hat{F}^j \quad (6.34)$$

Rozważając cały pręt składający się z  $N$  elementów otrzymujemy ( $\hat{F}^0$  odpowiada ośrodkowi z lewej strony pręta,  $\hat{F}^{N+1}$  ośrodkowi z jego prawej strony):

$$\hat{F}^0 = E_0 A_0^{-1} A_1 E_1 A_1^{-1} \cdots A_N E_N A_N^{-1} A_{N+1} \hat{F}^{N+1} \quad (6.35)$$



Ponieważ  $E_0 = Id$ , równanie (6.35) może być zapisane w następującej postaci:

$$\hat{F}^0 = A_0^{-1} \prod_{j=1}^N A_j E_j A_j^{-1} \cdot A_{N+1} \hat{F}^{N+1}. \quad (6.36)$$

Zapisujemy zatem równanie dla amplitud fal z użyciem macierzy przejścia  $A_j E_j A_j^{-1}$ . Korzystając z faktu, że  $A_j^{-1}$  jest znana:

$$A_j^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{Z_j}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{Z_j}{2} \end{bmatrix}, \quad (6.37)$$

zapisujemy macierz przejścia w jawnej postaci:

$$\begin{aligned} A_j E_j A_j^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \bar{Z}_j & \bar{Z}_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{i\omega h_{j-1}} & 0 \\ 0 & e^{-i\omega h_{j-1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{Z_j}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{Z_j}{2} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \cos \omega h_j & -iZ_j \sin \omega h_j \\ -i\frac{1}{Z_j} \sin \omega h_j & \cos \omega h_j \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (6.38)$$

Zespolona macierz przejścia  $A_j E_j A_j^{-1}$  może być również przedstawiona w postaci rzeczywistej; uzyskujemy to mnożąc ją z lewej i prawej strony przez macierz  $R$  i odwrotną do niej, zdefiniowane w następujący sposób:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}, \quad R^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}. \quad (6.39)$$

Po takiej transformacji macierz przejścia (6.38) przyjmuje postać:

$$M_j = R^{-1} A_j E_j A_j^{-1} R = \begin{bmatrix} \cos \omega h_j & Z_j \sin \omega h_j \\ -\frac{1}{Z_j} \sin \omega h_j & \cos \omega h_j \end{bmatrix}, \quad (6.40)$$

natomiast odpowiadające tej nowej macierzy przejścia równanie dla amplitud (6.36) staje się następujące:

$$\hat{F}^0 = A_0^{-1} R \prod_{j=1}^N M_j R^{-1} \cdot A_{N+1} \hat{F}^{N+1}. \quad (6.41)$$

Powracając ponownie do amplitud  $\hat{G}_1^0, \hat{G}_R^0, \hat{G}_1^{N+1}$  ( $\hat{G}_R^{N+1} \equiv 0$ , ponieważ za prętym nie ma fali odbitej), używając definicji:

$$\hat{f}_1^0 = \hat{G}_1^0, \quad \hat{f}_R^0 = \hat{G}_R^0, \quad \hat{f}_1^{N+1} = \hat{G}_1^{N+1} e^{-i\omega \xi_N} = \hat{G}_1^{N+1} \exp \left\{ -i\omega \sum_{j=1}^N h_j \right\}, \quad (6.42)$$

otrzymujemy poszukiwane równanie:

$$\begin{bmatrix} \hat{G}_1^0 \\ \hat{G}_R^0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -iZ_0 \\ 1 & iZ_0 \end{bmatrix} \prod_{j=1}^N M_j \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{Z_{N+1}} & \frac{1}{Z_{N+1}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{G}_1^{N+1} e^{-i\omega \sum h_j} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (6.43)$$

lub po przekształceniu:

$$\begin{bmatrix} \hat{G}_1^0 \\ \hat{G}_R^0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -iZ_0 \\ 1 & iZ_0 \end{bmatrix} \prod_{j=1}^N M_j \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ \frac{1}{Z_{N+1}} \end{bmatrix} \hat{G}_1^{N+1} \exp \left\{ -i\omega \sum_{j=1}^N h_j \right\}. \quad (6.44)$$

#### 6.4. Fale w pręcie o strukturze okresowej; przypadek graniczny

Rozważmy teraz przypadek okresowy, to znaczy taki w którym pręt zbudowany jest z dwóch rodzajów elementów, które są w nim rozmieszczone naprzemiennie. Niech  $N = 2K$  i macierze przejścia przez warstwy są zdefiniowane jako:

$$M_i = M_1 \text{ dla } i = 1, 3, \dots, 2K - 1,$$

$$M_i = M_2 \text{ dla } i = 2, 4, \dots, 2K,$$

gdzie

$$M_1 = R^{-1} A_1 E_1 A_1^{-1} R = \begin{bmatrix} \cos \omega h_1 & Z_1 \sin \omega h_1 \\ -\frac{1}{Z_1} \sin \omega h_1 & \cos \omega h_1 \end{bmatrix} \quad (6.45)$$

$$M_2 = R^{-1} A_2 E A_2^{-1} R = \begin{bmatrix} \cos \omega h_2 & Z_2 \sin \omega h_2 \\ -\frac{1}{Z_2} \sin \omega h_2 & \cos \omega h_2 \end{bmatrix} \quad (6.46)$$

Czasy przejścia  $h_1$  i  $h_2$  są związane z długością segmentów  $l_1$  i  $l_2$  zgodnie z wzorem (6.5) w następujący sposób:

$$h_1 = \frac{l_1}{c_1} = \sqrt{\frac{\rho_1}{\eta_1}} l_1 = \frac{A\rho_1}{Z_1} l_1, \quad h_2 = \frac{l_2}{c_2} = \sqrt{\frac{\rho_2}{\eta_2}} l_2 = \frac{A\rho_2}{Z_2} l_2. \quad (6.47)$$

Możemy teraz wprowadzić macierz przejścia przez parę warstw jako:

$$M = M_1 M_2 = \quad (6.48)$$

$$\begin{bmatrix} \cos \omega h_1 \cos \omega h_2 - \frac{Z_1}{Z_2} \sin \omega h_1 \sin \omega h_2 & Z_1 \sin \omega h_1 \cos \omega h_2 + Z_2 \cos \omega h_1 \sin \omega h_2 \\ \frac{\sin \omega h_1 \cos \omega h_2}{Z_1} - \frac{\cos \omega h_1 \sin \omega h_2}{Z_2} & \cos \omega h_1 \cos \omega h_2 - \frac{Z_2}{Z_1} \sin \omega h_1 \sin \omega h_2 \end{bmatrix}$$

i przekształcić równanie dla amplitud do następującej postaci:

$$\begin{bmatrix} \hat{\Delta}_1^0 \\ \hat{\Delta}_R^0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -iZ_0 \\ 1 & iZ_0 \end{bmatrix} M^K \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ \frac{1}{Z_{fin}} \end{bmatrix} \hat{\Delta}_1^{fin} e^{-i\omega K(h_1+h_2)}. \quad (6.49)$$

Rozważmy teraz przypadek graniczny gdy liczba paneli w przecie dąży do nieskończoności, ich długość zmierza do zera lecz zarówno długość pręta jak i stosunek długości jego składników pozostaje stały:

$$K \rightarrow \infty, \quad l_1 = \frac{L_1}{K}, \quad l_2 = \frac{L_2}{K} \quad (6.50)$$

lub, co z tego wynika:

$$h_1 = \frac{H_1}{K}, \quad h_2 = \frac{H_2}{K} \quad (6.51)$$

gdzie

$$H_1 = \frac{A\rho_1}{Z_1} L_1, \quad H_2 = \frac{A\rho_2}{Z_2} L_2 \quad (6.52)$$

są czasami przejścia przez segmenty wewnątrz pręta wykonane, odpowiednio, z materiału 1 i 2.

Można pokazać, że w granicznym przypadku własności odbijania impulsu falowego przez pręt są równoważne odpowiednim własnościom pręta jednorodnego (zhomogenizowanego), w którym impedancja i czas przejścia fali od początku do końca pręta przyjmują pewne efektywne wartości. Ażeby obliczyć ich wartości liczbowe wstawmy przyjęte wielkości  $h_1 = \frac{H_1}{K}$  i  $h_2 = \frac{H_2}{K}$  do wzoru (6.52) dla macierzy przejścia  $\mathbf{M}$ . Rozwijając macierz  $\mathbf{M}$  w szereg potęgowy względem  $1/K$  otrzymujemy:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{K} \begin{bmatrix} 0 & Z_1\omega H_1 + Z_2\omega H_2 \\ \omega \frac{H_1}{Z_1} - \omega \frac{H_2}{Z_2} & 0 \end{bmatrix} + o\left(\frac{1}{K}\right) \quad (6.53)$$

lub

$$\mathbf{M} = \mathbf{A} + \frac{1}{K} \mathbf{B} + o\left(\frac{1}{K}\right), \quad (6.54)$$

gdzie

$$A = \text{Id} \quad (6.55)$$

oraz

$$B = \begin{bmatrix} 0 & Z_1 \omega H_1 + Z_2 \omega H_2 \\ \omega H_1 & \omega H_2 \\ -\frac{\omega H_1}{Z_1} & -\frac{\omega H_2}{Z_2} \\ & 0 \end{bmatrix}, \quad (6.56)$$

a następnie obliczając granicę

$$\lim_{K \rightarrow \infty} M^K = \lim_{K \rightarrow \infty} \left( \text{Id} + \frac{1}{K} B + o\left(\frac{1}{K}\right) \right)^K = e^B, \quad (6.57)$$

otrzymujemy efektywną macierz przejścia dla zhomogenizowanego pręta:

$$e^B = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{-i\omega a} + e^{i\omega a} & ib \left( e^{-i\omega a} - e^{i\omega a} \right) \\ \frac{1}{ib} \left( e^{-i\omega a} - e^{i\omega a} \right) & e^{-i\omega a} + e^{i\omega a} \end{bmatrix}, \quad (6.58)$$

gdzie efektywny czas przejścia fali przez pręt  $a$  i efektywna impedancja  $b$  są równe:

$$a = \sqrt{\frac{\left( H_1 Z_1 + H_2 Z_2 \right) \left( H_1 Z_2 + H_2 Z_1 \right)}{Z_1 Z_2}}, \quad (6.59)$$

$$b = \sqrt{Z_1 Z_2 \frac{H_1 Z_1 + H_2 Z_2}{H_1 Z_2 + H_2 Z_1}}. \quad (6.60)$$

Macierz przejścia może być zapisana w postaci rzeczywistej jako:

$$e^{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \cos \omega a & b \sin \omega a \\ \frac{1}{b} \sin \omega a & \cos \omega a \end{bmatrix}. \quad (6.61)$$

Parametry efektywne  $a$  i  $b$  mogą być także wyrażone w terminach długości  $L_1$  i  $L_2$  zamiast czasów przejścia  $H_1$  i  $H_2$ . Podstawiając wyrażenie (6.52) do (6.59) i (6.60) otrzymujemy:

$$a = A \sqrt{\left( L_1 \rho_1 + L_2 \rho_2 \right) \left( \frac{L_1 \rho_1}{Z_1^2} + \frac{L_2 \rho_2}{Z_2^2} \right)}. \quad (6.62)$$

$$b = \sqrt{\frac{L_1 \rho_1 + L_2 \rho_2}{\frac{L_1 \rho_1}{Z_1^2} + \frac{L_2 \rho_2}{Z_2^2}}}. \quad (6.63)$$

Ponadto, podstawiając w (6.62) i (6.63) definicję impedancji (6.6) możemy  $a$  i  $b$  przedstawić w terminach stałych materiałowych i długości:

$$a = \sqrt{\left( L_1 \rho_1 + L_2 \rho_2 \right) \left( \frac{L_1}{\eta_1} + \frac{L_2}{\eta_2} \right)}, \quad (6.64)$$

$$b = A \sqrt{\frac{L_1 \rho_1 + L_2 \rho_2}{\frac{L_1}{\eta_1} + \frac{L_2}{\eta_2}}}. \quad (6.65)$$

Podstawiając efektywną macierz przejścia do równania dla amplitud fal (6.49) otrzymujemy następujące równanie końcowe:

$$\begin{bmatrix} \hat{G}_1^0 \\ \hat{G}_R^0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -iZ_0 \\ 1 & iZ_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \omega a & b \sin \omega a \\ \frac{1}{b} \sin \omega a & \cos \omega a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ Z_{fn} \end{bmatrix} \hat{G}_1^{fn} e^{-i\omega(H_1+H_2)}. \quad (6.66)$$

Dokonując mnożenia macierzy w równaniu (6.66) uzyskujemy wyrażenia dla amplitud fal:

$$\hat{G}_1^0(\omega) = \frac{1}{2} \left[ \left( 1 + \frac{Z_0}{Z_{fin}} \right) \cos \omega a + i \left( \frac{b}{Z_{fin}} + \frac{Z_0}{b} \right) \sin \omega a \right] \hat{G}_1^{fin}(\omega) e^{-i\omega(H_1+H_2)} \quad (6.67)$$

$$\hat{G}_R^0(\omega) = \frac{1}{2} \left[ \left( 1 - \frac{Z_0}{Z_{fin}} \right) \cos \omega a + i \left( \frac{b}{Z_{fin}} - \frac{Z_0}{b} \right) \sin \omega a \right] \hat{G}_1^{fin}(\omega) e^{-i\omega(H_1+H_2)} \quad (6.68)$$

Formułując problem zakładaliśmy, że impuls wymuszający  $\hat{G}_1^0(\omega)$  jest jedyną znaną falą w naszym modelu. Dlatego też możemy przedstawić nieznaną amplitudę fali odbitej  $\hat{G}_R^0(\omega)$  i przechodzącej przez pręt  $\hat{G}_1^{fin}(\omega)$ , używając  $\hat{G}_1^0(\omega)$ , w następujący sposób:

$$\hat{G}_R^0(\omega) = \frac{\left[ \left( 1 - \frac{Z_0}{Z_{fin}} \right) \cos \omega a + i \left( \frac{b}{Z_{fin}} - \frac{Z_0}{b} \right) \sin \omega a \right] \hat{G}_1^0(\omega)}{\left[ \left( 1 + \frac{Z_0}{Z_{fin}} \right) \cos \omega a + i \left( \frac{b}{Z_{fin}} + \frac{Z_0}{b} \right) \sin \omega a \right]} \quad (6.69)$$

$$\hat{G}_1^{fin}(\omega) = \frac{2 \hat{G}_1^0(\omega) e^{i\omega(H_1+H_2)}}{\left[ \left( 1 + \frac{Z_0}{Z_{fin}} \right) \cos \omega a + i \left( \frac{b}{Z_{fin}} + \frac{Z_0}{b} \right) \sin \omega a \right]} \quad (6.70)$$

Obliczając odwrotną transformatę Fouriera wyrażeń (6.69) i (6.70) znajdujemy zachowanie się w czasie (kształt) odbitych i przechodzących impulsów.

## 6.5. Fale w pręcie o strukturze losowej; przypadek graniczny

Załóżmy, że pręt zbudowany jest z  $2K$  segmentów o długości odpowiednio  $l_1(\gamma)$ ,  $l_2(\gamma)$ , ...,  $l_{2K}(\gamma)$ , gdzie  $l_i(\gamma)$ ,  $i=1,2, \dots, 2K$  są zmiennymi losowymi. Przez  $\gamma \in \Gamma$  oznaczono zdarzenie elementarne;  $(\Gamma, \mathcal{F}, \mathcal{P})$  jest przestrzenią probabilistyczną. Załóżmy ponadto, że stałe materiałowe tych segmentów pręta i ich pola przekroju poprzecznego  $(\rho_{2j-1}(\gamma), \eta_{2j-1}(\gamma), A_{2j-1}(\gamma), \rho_{2j}(\gamma), \eta_{2j}(\gamma), A_{2j}(\gamma))$  są, jako wektorowe zmienne losowe, niezależne i mają jednakowe rozkłady dla  $j=1,2,\dots,2K$ . Ponadto zakładamy, że długości segmentów mają następującą szczególną własność, taką że:

$$\left( l_{2j-1}(\gamma), l_{2j}(\gamma) \right) = \left( \frac{L_{2j-1}(\gamma)}{2K}, \frac{L_{2j}(\gamma)}{2K} \right), \quad (6.71)$$

dla  $j=1,2,\dots,K$ , są niezależnymi, dwuwymiarowymi zmiennymi losowymi o jednakowych rozkładach spełniającymi warunek:

$$E\left\{ L_{2j-1}(\gamma) \right\} = L_1, \quad E\left\{ L_{2j}(\gamma) \right\} = L_2, \quad (6.72)$$

dla  $j=1,2,\dots,K$ . W tym szczególnym przypadku równanie (6.44) dla transformat Fouriera amplitud fal przyjmuje następującą postać:

$$\begin{bmatrix} \hat{\Delta}_1^0(\omega, \gamma) \\ \hat{\Delta}_R^0(\omega, \gamma) \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -iZ_0 \\ 1 & iZ_0 \end{bmatrix} \prod_{j=1}^K M_j(\omega, \gamma) \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ Z_{2K+1} \end{bmatrix} \hat{\Delta}_1^{2K+1}(\omega, \gamma) \exp\left\{ -i\omega \sum_{j=1}^{2K} h_j(\gamma) \right\}, \quad (6.73)$$

gdzie  $h_j(\gamma)$  są zrandomizowanymi odpowiednikami czasu przejścia zdefiniowanego w (6.5),  $M_j(\omega, \gamma)$  są zrandomizowanymi macierzami przejścia przez parę segmentów zdefiniowaną w (6.48):



$$M_j(\omega, \gamma) = \quad (6.74)$$

$$\left[ \begin{array}{l} \cos \omega h_{2j-1}(\gamma) \cos \omega h_{2j}(\gamma) - \frac{Z_{2j-1}(\gamma)}{Z_{2j}(\gamma)} \sin \omega h_{2j-1}(\gamma) \sin \omega h_{2j}(\gamma), \\ \frac{\sin \omega h_{2j-1}(\gamma) \cos \omega h_{2j}(\gamma)}{Z_{2j-1}(\gamma)} - \frac{\cos \omega h_{2j-1}(\gamma) \sin \omega h_{2j}(\gamma)}{Z_{2j}(\gamma)}, \\ Z_{2j-1}(\gamma) \sin \omega h_{2j-1}(\gamma) \cos \omega h_{2j}(\gamma) + Z_{2j}(\gamma) \cos \omega h_{2j-1}(\gamma) \sin \omega h_{2j}(\gamma) \\ \cos \omega h_{2j-1}(\gamma) \cos \omega h_{2j}(\gamma) - \frac{Z_{2j}(\gamma)}{Z_{2j-1}(\gamma)} \sin \omega h_{2j-1}(\gamma) \sin \omega h_{2j}(\gamma) \end{array} \right]$$

dla  $j=1, 2, \dots, K$ , gdzie

$$Z_i(\gamma) = A_i(\gamma) \sqrt{\rho_i(\gamma) \eta_i(\gamma)}, \quad i=1, 2, \dots, 2K. \quad (6.75)$$

W celu zbadania przypadku granicznego propagacji impulsów falowych przez pręt zbudowany z segmentów, rozkładamy macierz przejścia zdefiniowaną w (6.74), przy założeniu (6.71), ( $h_j(\gamma)$  są związane z  $l_j(\gamma)$  wzorem analogicznym do (6.52)), względem potęg  $1/K$ :

$$\begin{aligned} M_j(\omega, \gamma) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \\ &+ \frac{1}{K} \left[ \begin{array}{cc} 0 & Z_{2j-1}(\gamma)\omega H_{2j-1}(\gamma) + Z_{2j}(\gamma)\omega H_{2j}(\gamma) \\ \frac{\omega H_{2j-1}(\gamma)}{Z_{2j-1}(\gamma)} & \frac{\omega H_{2j}(\gamma)}{Z_{2j}(\gamma)} \end{array} \right] + \\ &+ o\left(\frac{1}{K}\right). \end{aligned} \quad (6.76)$$

Macierze  $B_j$  występujące we wzorze (2.16) są zdefiniowane jako:

$$B_j = \begin{bmatrix} 0 & Z_{2j-1}(\gamma)\omega H_{2j-1}(\gamma) + Z_{2j}(\gamma)\omega H_{2j}(\gamma) \\ \omega \frac{H_{2j-1}(\gamma)}{Z_{2j-1}(\gamma)} - \frac{\omega H_{2j}(\gamma)}{Z_{2j}(\gamma)} & 0 \end{bmatrix}, \quad (6.77)$$

a ich wartości średnie są równe:

$$E\{B_j\} = \omega \begin{bmatrix} 0 & E\{Z_1(\gamma)H_1(\gamma)\} + E\{Z_2(\gamma)H_2(\gamma)\} \\ -E\left\{\frac{H_1(\gamma)}{Z_1(\gamma)}\right\} - E\left\{\frac{H_2(\gamma)}{Z_2(\gamma)}\right\} & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.78)$$

Macierz  $e^{E\{B_j\}}$  ma postać analogiczną do (6.58):

$$e^{E\{B_j\}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{-i\omega a} + e^{i\omega a} & ib \left[ e^{-i\omega a} - e^{i\omega a} \right] \\ \frac{1}{ib} \left[ e^{-i\omega a} - e^{i\omega a} \right] & e^{-i\omega a} + e^{i\omega a} \end{bmatrix}, \quad (6.79)$$

gdzie obecnie efektywny czas przejścia przez pręt  $a$  i efektywna impedancja  $b$  są równe:

$$a = \sqrt{\left[ E\{Z_1(\gamma)H_1(\gamma)\} + E\{Z_2(\gamma)H_2(\gamma)\} \right] \left[ E\left\{\frac{H_1(\gamma)}{Z_1(\gamma)}\right\} + E\left\{\frac{H_2(\gamma)}{Z_2(\gamma)}\right\} \right]}, \quad (6.80)$$

$$b = \sqrt{\frac{E\{Z_1(\gamma)H_1(\gamma)\} + E\{Z_2(\gamma)H_2(\gamma)\}}{E\left\{\frac{H_1(\gamma)}{Z_1(\gamma)}\right\} + E\left\{\frac{H_2(\gamma)}{Z_2(\gamma)}\right\}}}. \quad (6.81)$$

Analogicznie do (6.61) macierz przejścia może być zapisana w postaci rzeczywistej:

$$e^{E\{B_j\}} = \begin{bmatrix} \cos \omega a & b \sin \omega a \\ -\frac{1}{b} \sin \omega a & \cos \omega a \end{bmatrix}. \quad (6.82)$$

Możemy także znaleźć zrandomizowane odpowiedniki wzorów (6.62-6.65) w których efektywne parametry  $a$  i  $b$  są wyrażone w terminach  $L_1$  i  $L_2$  oraz stałych materiałowych segmentów. Otrzymujemy:

$$a = \sqrt{\left[ E \left\{ \rho_1(\gamma) A_1(\gamma) L_1(\gamma) \right\} + E \left\{ \rho_2(\gamma) A_2(\gamma) L_2(\gamma) \right\} \right]} \times \\ \times \sqrt{\left[ E \left\{ \frac{\rho_1(\gamma) A_1(\gamma) L_1(\gamma)}{Z_1^2(\gamma)} \right\} + E \left\{ \frac{\rho_2(\gamma) A_2(\gamma) L_2(\gamma)}{Z_2^2(\gamma)} \right\} \right]}, \quad (6.83)$$

$$b = \frac{\sqrt{\left[ E \left\{ \rho_1(\gamma) A_1(\gamma) L_1(\gamma) \right\} + E \left\{ \rho_2(\gamma) A_2(\gamma) L_2(\gamma) \right\} \right]}}{\sqrt{\left[ E \left\{ \frac{\rho_1(\gamma) A_1(\gamma) L_1(\gamma)}{Z_1^2(\gamma)} \right\} + E \left\{ \frac{\rho_2(\gamma) A_2(\gamma) L_2(\gamma)}{Z_2^2(\gamma)} \right\} \right]}}, \quad (6.84)$$

lub

$$a = \sqrt{\left[ E \left\{ \rho_1(\gamma) A_1(\gamma) L_1(\gamma) \right\} + E \left\{ \rho_2(\gamma) A_2(\gamma) L_2(\gamma) \right\} \right]} \times \\ \times \sqrt{\left[ E \left\{ \frac{L_1(\gamma)}{\eta_1(\gamma) A_1(\gamma)} \right\} + E \left\{ \frac{L_2(\gamma)}{\eta_2(\gamma) A_2(\gamma)} \right\} \right]}, \quad (6.85)$$

$$b = \sqrt{\frac{E \left\{ \rho_1(\gamma) A_1(\gamma) L_1(\gamma) \right\} + E \left\{ \rho_2(\gamma) A_2(\gamma) L_2(\gamma) \right\}}{E \left\{ \frac{L_1(\gamma)}{\eta_1(\gamma) A_1(\gamma)} \right\} + E \left\{ \frac{L_2(\gamma)}{\eta_2(\gamma) A_2(\gamma)} \right\}}} \quad (6.86)$$

Powyższe wzory mogą być łatwo uogólnione na przypadek gdy pręt jest zbudowany z więcej niż dwóch rodzajów materiału - czyli gdy liczba segmentów powstrających się w elemencie okresowym (w naszym stochastycznym sensie) jest na przykład  $k$ . Wówczas macierz przejścia dla zhomogenizowanego pręta jest również postaci (6.79) lub (6.82) lecz wówczas efektywny czas przejścia  $a$  i efektywna impedancja  $b$  są w niej zdefiniowane jako:

$$a = \sqrt{\sum_{i=1}^k E \left\{ \rho_i(\gamma) A_i(\gamma) L_i(\gamma) \right\}} \sqrt{\sum_{i=1}^k E \left\{ \frac{L_i(\gamma)}{\eta_i(\gamma) A_i(\gamma)} \right\}}, \quad (6.87)$$

$$b = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^k E \left\{ \rho_i(\gamma) A_i(\gamma) L_i(\gamma) \right\}}{\sum_{i=1}^k E \left\{ \frac{L_i(\gamma)}{\eta_i(\gamma) A_i(\gamma)} \right\}}} \quad (6.88)$$

Wyrażenia dla amplitud fali odbitej i przechodzącej są w tym przypadku analogiczne do wyrażen (6.69)-(6.70) w których wstawiono powyższe parametry  $a$  i  $b$ .

Z przedstawionych wzorów dla efektywnego czasu przejścia i efektywnej impedancji wynika, że ośrodek losowy bardziej rozprasza fale niż odpowiadający mu ośrodek periodyczny (przez odpowiadający będziemy rozumieli ośrodek, w którym wartości parametrów są równe wartościom oczekiwanych parametrów ośrodka losowego). Na przykład efektywny czas przejścia impulsu przez ośrodek stochastyczny jest większy niż przez ośrodek deterministyczny. Wynika to z następującego faktu (nierówności Schwarza):

$$1 = \left[ E\left\{ 1 \right\} \right]^2 = \left[ E\left\{ X \frac{1}{X} \right\} \right]^2 \leq E\left\{ X^2 \right\} E\left\{ \frac{1}{X^2} \right\} \quad (6.89)$$

czyli:

$$\frac{1}{E\left\{ X^2 \right\}} \leq E\left\{ \frac{1}{X^2} \right\}. \quad (6.90)$$

Można zatem o każdej dodatniej zmiennej losowej powiedzieć, że odwrotność jej wartości oczekiwanej jest zawsze mniejsza lub równa wartości oczekiwanej jej odwrotności (o ile te wartości oczekiwane istnieją). Fakt ten, przy dodatkowym założeniu niezależności statystycznej stałych materiałowych w warstwie, zastosowany we wzorze (6.85), daje powyższy wniosek.

### 6.6. Zastosowanie szybkiej transformaty Fouriera do numerycznego rozwiązania zagadnienia

Skoncentrujemy teraz uwagę na odbitym impulsie opisanym dla zhomogenizowanego (jednorodnego) pręta przez wzór (6.69) a dla pręta zbudowanego z segmentów przez analogiczne równanie otrzymane wprost z równania (6.49):

$$\hat{G}_R^0(\omega) = \frac{\left[ \left( M_{11}^K - M_{22}^K \frac{Z_0}{Z_{fn}} \right) + i \left( M_{12}^K \frac{1}{Z_{fn}} + M_{21}^K Z_0 \right) \right] \hat{G}_1^0(\omega)}{\left[ \left( M_{11}^K + M_{22}^K \frac{Z_0}{Z_{fn}} \right) + i \left( M_{12}^K \frac{1}{Z_{fn}} - M_{21}^K Z_0 \right) \right]}, \quad (6.91)$$

gdzie  $M_{ij}^k$  jest  $ij$ -tym elementem macierzy  $M^k$  ( $k$ -tej potęgi macierzy przejścia  $M$ ).

Znalezienie kształtu impulsu odbitego od pręta wymaga teraz odwrócenia transformaty Fouriera wyrażonej przez wzór (6.91), co w ogólnym przypadku wymaga obliczeń komputerowych.

Analizując wyrażenie dla impulsu odbitego (6.91) widzimy, że występują w nim dwa

elementy:  $\delta_1^0(\omega)$  - opisujące impuls początkowy, oraz pozostałe elementy wzoru, charakteryzujące własności pręta i jego oddziaływanie z otoczeniem. Badając własności pręta mamy zwykle możliwość doboru kształtu impulsu falowego służącego do testowania próbki, czyli jego czasu trwania i przebiegu amplitudy w czasie.

Jednym z najprostszych możliwych kształtów jest impuls prostokątny, mający postać:

$$f(t) = \begin{cases} \beta, & t \in (0, \alpha) \\ 0, & \text{w przeciwnym wypadku} \end{cases} \quad (6.92)$$

gdzie  $\beta$  jest wielkością amplitudy impulsu (przemieszczenia materiału) natomiast  $\alpha$  jest czasem trwania impulsu (rozpoczynającego się w chwili  $t=0$ ). Transformata Fouriera impulsu potrzebna we wzorze (6.91) jest w tym wypadku następującą funkcją zmiennej  $\omega \in (-\infty, \infty)$ :

$$F(\omega) = \alpha\beta \left[ \frac{\sin \frac{\omega\alpha}{2}}{\frac{\omega\alpha}{2}} \right] \exp\left\{-i \frac{\omega\alpha}{2}\right\}. \quad (6.93)$$

Podobnie możemy otrzymać transformaty Fouriera innych rodzajów impulsów o nieskomplikowanym kształcie, przydatnych do testowania elementów konstrukcji. Na przykład, impuls sinusoidalny:

$$f(t) = \begin{cases} \beta \sin\left[\frac{\pi t}{\alpha}\right], & t \in (0, \alpha) \\ 0, & \text{w przeciwnym wypadku} \end{cases} \quad (6.94)$$

ma transformatę Fouriera:

$$F(\omega) = -\frac{\beta\alpha\pi(1+\cos\alpha\omega)}{\alpha^2\omega^2 - \pi^2} + i \frac{\beta\alpha\pi \sin\alpha\omega}{\alpha^2\omega^2 - \pi^2} \quad (6.95)$$

a impuls trójkątny:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{2\beta}{\alpha} t, & t \in \left[0, \frac{\alpha}{2}\right] \\ -\frac{2\beta}{\alpha} t + 2\beta, & t \in \left[\frac{\alpha}{2}, \alpha\right] \\ 0 & \text{w przeciwnym wypadku} \end{cases} \quad (6.96)$$

daje w efekcie transformatę:

$$F(\omega) = \frac{2\beta e^{-i\alpha\omega} \left[ -1 + \exp\left(i\frac{\alpha\omega}{2}\right) \right]^2}{\alpha\omega^2} \quad (6.97)$$

W celu zbadania własności impulsu odbitego, odzwierciedlającego wewnętrzną strukturę pręta, do wzoru (6.91) powinniśmy podstawić transformatę Fouriera impulsu wymuszającego, na przykład jedną z powyższych transformat:

$$\hat{G}_1^0(\omega) = F(\omega) \quad (6.98)$$

i następnie dokonać obliczenia odwrotnej transformacji Fouriera. W ogólności wymaga to obliczeń numerycznych i, z racji złożoności zagadnienia, zastosowania efektywnych algorytmów obliczania dyskretnej transformaty Fouriera, tak zwanej Szybkiej Transformaty Fouriera.

W naszych rozważaniach przyjęliśmy, że prosta ciągła transformata Fouriera jest zdefiniowana jako:

$$F(\omega) = \int f(t) e^{-i\omega t} dt. \quad 6.99$$

Wówczas odwrotna ciągła transformata Fouriera ma postać:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int F(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad 6.100$$

natomiast jej dyskretny odpowiednik definiujemy jako:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \sum (TD_n) e^{j\omega_n t} \Delta\omega, \quad (6.101)$$

gdzie

$$D_n = F(\omega_n), \quad \omega_n = n\Delta\omega, \quad \Delta\omega = \frac{2\pi}{T}, \quad (6.102)$$

a  $T$  jest pewną stałą, odpowiadającą okresowi funkcji  $f(t)$  w dziedzinie czasowej.

Załóżmy, że dana jest ciągła transformata Fouriera  $F(\omega)$ . Dokonujemy próbkowania tej transformaty na przedziale  $(-R, R)$  przekształcając funkcję ciągłą w równoważną jej formę dyskretną. Przyjmujemy, że liczba punktów próbkowania na przedziale  $(0, R)$  jest równa  $N$ ; całkowita liczba jest zatem równa  $NN=2N$ . Przy tym założeniu krok próbkowania  $\Delta\omega$  jest równy:

$$\Delta\omega = \frac{R}{N}, \quad (6.103)$$

i, co z tego wynika, punkty próbkowania są zdefiniowane jako:

$$\omega_n = n\Delta\omega = n \frac{R}{N}, \quad \text{dla } n=0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N. \quad (6.104)$$

Zgodnie z definicją,

$$D_n = \overline{D_{-n}}, \quad (6.105)$$

gdzie kreska oznacza sprzężenie liczby zespolonej.

W obliczeniach numerycznych punkty próbne transformaty  $F(\omega)$  są umieszczone w zespolonym wektorze  $\mathbf{F}$  o długości  $NN=2N$  w szczególny sposób. Podstawiamy mianowicie:

$$\mathbf{F}_1 = D_0, \mathbf{F}_2 = D_1, \dots, \mathbf{F}_{N+1} = D_{\pm N}, \mathbf{F}_{N+2} = D_{-N+1}, \dots, \mathbf{F}_{2N} = D_{-1}, \quad (6.106)$$

gdzie założono okresowość transformaty Fouriera; przyjmujemy, że wartości transformaty na końcach przedziału próbkowania są równe i umieszczamy je w elemencie  $\mathbf{F}_{N+1}$  wektora dyskretnej transformaty.



W celu odtworzenia funkcji  $f(t)$  musimy obliczyć dyskretną odwrotną transformatę Fouriera zdefiniowaną jako:

$$f(t_m) = f_m = \frac{1}{T} \sum_{n=0}^{2N-1} D_n e^{i\omega_n t_m} = \frac{1}{T} \sum_{n=0}^{2N-1} D_n e^{i2\pi n m / 2N}, \quad (6.107)$$

gdzie użyto następujących definicji  $t_m$  i  $\omega_n$ :

$$t_m = m \Delta T, \quad \omega_n = \frac{2\pi n}{2N\Delta T} = \frac{2\pi n}{T}. \quad (6.108)$$

W celu powiązania występującej w obliczeniach stałej  $T$  reprezentującej czas (okres w dziedzinie czasu funkcji podlegającej transformacji) z szerokością widma  $R$  tej funkcji w dziedzinie spektralnej, używamy wyrażen dla  $\omega_n$ . Porównując  $\omega_n$  w (6.104) i (6.108) otrzymujemy:

$$\frac{nR}{N} = \frac{2\pi n}{2N \Delta T}, \quad (6.109)$$

Wówczas krok dyskretyzacji w dziedzinie czasowej jest równy:

$$\Delta T = \frac{\pi}{R}, \quad (6.110)$$

natomiast okres  $T$  jest zdefiniowany jako:

$$T = 2 N \Delta T = \frac{2\pi N}{R}. \quad (6.111)$$

Dla obliczeń numerycznych dyskretnej transformaty Fouriera zdefiniowanej w tym rozdziale, stosować będziemy algorytm Szybkiej Transformaty Fouriera zaczerpnięty z książki [Press,...] przyjmując liczbę punktów jako  $N=2^{16}=65536$ .

## 6.7. Przykład numeryczny

Rozważmy teraz przykład pręta którego model opisany został w paragrafie 6.4. Przyjmijmy, że pręt ten zbudowany jest z dwóch materiałów z impedancjami o wartościach, odpowiednio,  $Z_1=4.0$  i  $Z_2=2.0$ , natomiast ośrodek otaczający pręt ma impedancję  $Z_0=Z_{fin}=1.0$ . Załóżmy również, że łączny czas przejścia przez oba materiały stanowiące składniki pręta jest taki sam, równy 1 (tzn.  $H_1=H_2=1.0$ ). Dla takich parametrów w naszym modelu okresowym przeprowadzamy procedurę homogenizacyjną zgodnie z algorytmem przedstawionym w paragrafie 6.4. W jej efekcie otrzymujemy wartości liczbowe efektywnego czasu przejścia  $a$  przez zhomogenizowany pręt i jego efektywną impedancję  $b$  jako:

$$a = 2.12132, \quad (6.112)$$

$$b = 2.828427. \quad (6.113)$$

Pierwszą nasuwającą się tu obserwacją jest fakt, że czas przejścia przez pręt zhomogenizowany jest większy niż suma czasów przejścia przez oba materiały stanowiące jego składniki. Mamy tu zatem do czynienia z pewnym rodzajem lokalizacji fali w ośrodku: impuls falowy przebywa w ośrodku dłużej niż wynikałoby z prostego dodania czasów jego przebywania w poszczególnych warstwach. Jest to konsekwencją wielokrotnego odbicia impulsu od powierzchni nieciągłości wewnątrz pręta i jego czasowego "uwięzienia". Dokładniejsze informacje dotyczące procesu homogenizacji możemy uzyskać badając impuls falowy przechodzący przez nasz segmentowany pręt. Do tego celu najlepiej nadaje się impuls prostokątny. Taki kształt impulsu, dzięki ostrym krawędziom, pozwala dokładnie ustalić chwilę jego rozpoczęcia, czas trwania, wielkość impulsu powstałego w wyniku wielokrotnego odbicia na granicach segmentów wewnątrz pręta. Ta cecha impulsu prostokątnego jest bardzo istotna, gdyż nawet dla jednorodnego pręta kształt impulsu odbitego może być bardzo skomplikowany. Jako przykład potwierdzający to stwierdzenie weźmy nasz zhomogenizowany pręt o impedancji podanej w (6.113), otoczony ośrodkiem o jednostkowej impedancji. Do takiego pręta w chwili  $t=0$  dociera impuls prostokątny o amplitudzie  $\beta=1.0$  i czasie trwania  $\alpha=1$ . Impuls odbity przedstawiony został na rysunku 6.1a-d dla kilku wybranych długości pręta (mierzonych czasem przejścia fali przez pręt). Widzimy, że

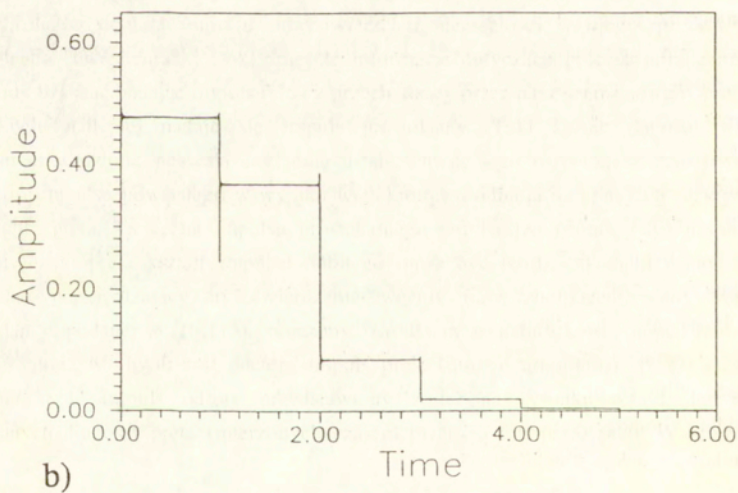
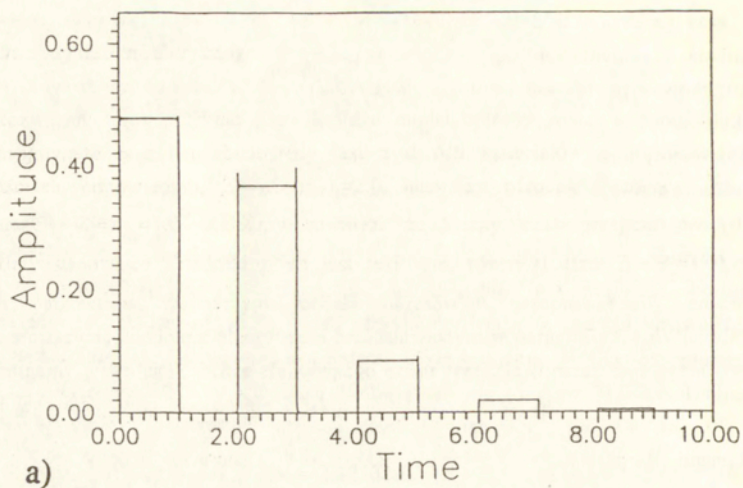
gdy czas przejścia fali przez pręt jest krótszy niż czas trwania impulsu, mamy do czynienia z nakładaniem się impulsów wielokrotnie odbitych w pręcie i przez to - skomplikowanym obrazem impulsu odbitego odbieranego na początkowej krawędzi pręta w punkcie  $x=0$ .

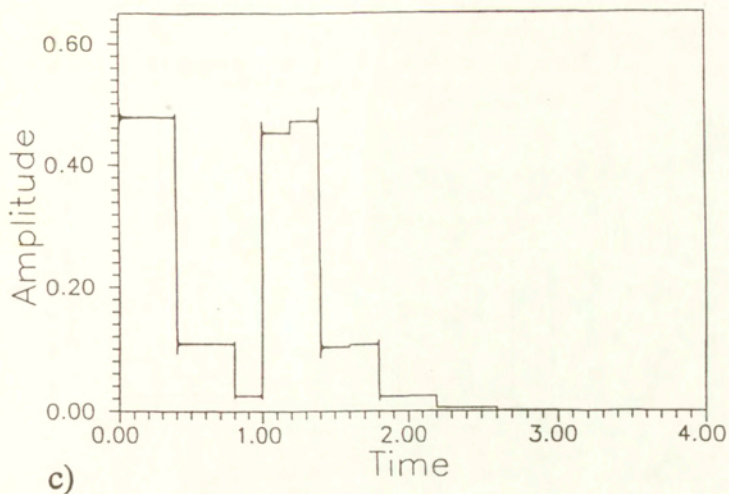
Rozważmy teraz, podobnie jak w przypadku fal harmoniczych, problem zbieżności ośrodka uwarstwionego do ośrodka zhomogenizowanego i jego szybkość wraz ze wzrostem liczby segmentów w pręcie. W przeciwieństwie do fal harmoniczych, gdzie współczynnik odbicia jest dobrą miarą zbieżności, znalezienie takiej miary dla impulsów falowych jest bardzo trudne. Dlatego też w celu pokazania zbieżności przedstawimy kształt odbitego impulsu dla danej liczby segmentów w pręcie (przy założeniu, że udział poszczególnych materiałów w pręcie pozostaje stały). Na rysunkach 6.2-6.10 widzimy amplitudy odbitych impulsów dla , odpowiednio, 1, 2, 4, 10, 20, 30, 40, 50 i 100 periodycznych par warstw (rysunki oznaczone literą *a* wykonano dla parametrów  $Z_1=4.0$  i  $Z_2=2.0$ , rysunki z literą *b* - dla  $Z_1=2.0$  i  $Z_2=4.0$ ). Rysunek 6.11 pokazuje odbity impuls dla pręta zbudowanego z 500 par segmentów (dla takiej dużej liczby segmentów kształt rysunku nie zależy od kolejności materiałów w parze). Na ostatnim rysunku 6.12 pokazano impuls odbity od zhomogenizowanego pręta (czyli pręta o parametrach przedstawionych w (6.112-113)).

Przedstawione wykresy pokazują, że proces homogenizacji (który jako model teoretyczny jest procesem asymptotycznym) rzeczywiście ma miejsce. Widać, że nawet dla stosunkowo niewielkiej liczby segmentów (na przykład 10) pojawia się koncentracja impulsów odbitych, podobna do impulsu otrzymywanego dla pręta zhomogenizowanego. W tym wypadku możemy przewidzieć położenie impulsów w czasie, jednak ich amplituda nadal jest trudna do przewidzenia. Zwiększając gęstość "uwarstwienia" pręta dochodzimy do wyniku zbliżonego do otrzymanego w przypadku asymptotycznym. Prędkość zbieżności możemy ocenić obserwując kolejno rysunki 6.2-6.11.

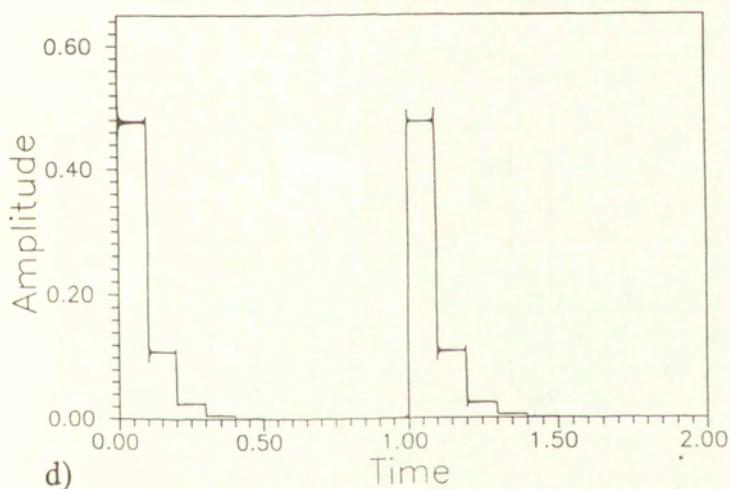
Innym wnioskiem wynikającym z przedstawionych wykresów jest fakt, że dla małej liczby segmentów kształt odbitego impulsu silnie zależy od kolejności materiałów w pręcie. Różnica ta jest silniejsza dla impulsów wielokrotnie odbitych w pręcie. Praktycznie zanika ona dla dużej liczby segmentów w pręcie.

Przedstawione rachunki przeprowadzono dla przypadku okresowego, nielosowego pręta. Losowość jego własności spowodowałaby znaczne skomplikowanie uzyskanego obrazu odbitych impulsów. Podobnie jak w przypadku fal harmoniczych zbieżność do modelu zhomogenizowanego jest znacznie wolniejsza i uzyskanie interesujących wyników wymaga długotrwałych obliczeń.





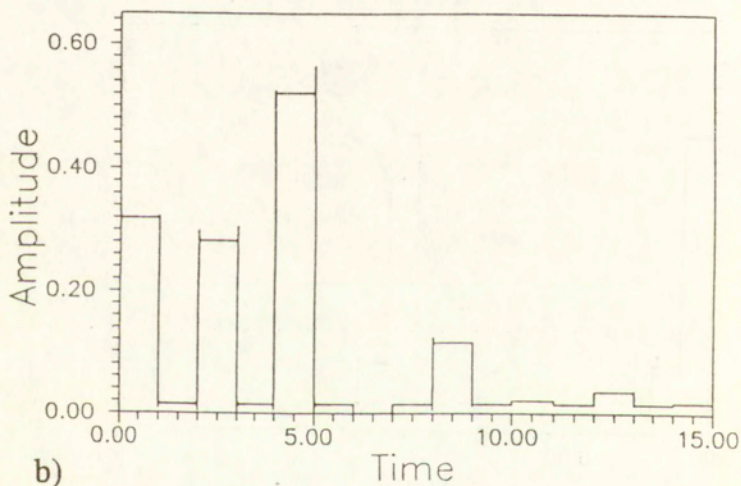
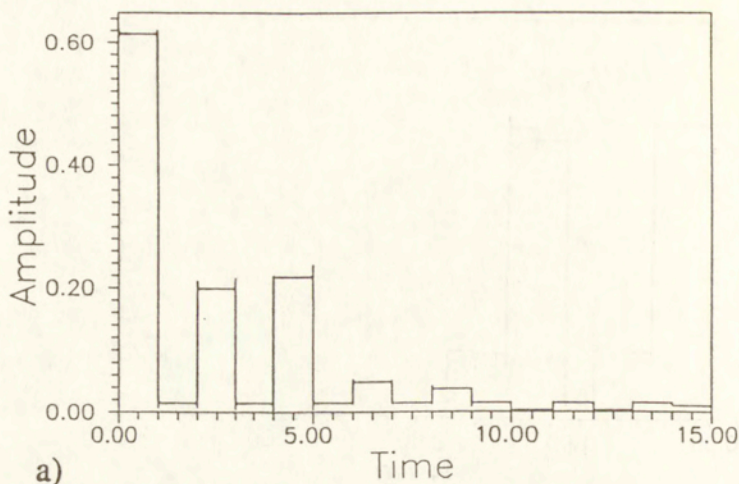
c)



d)

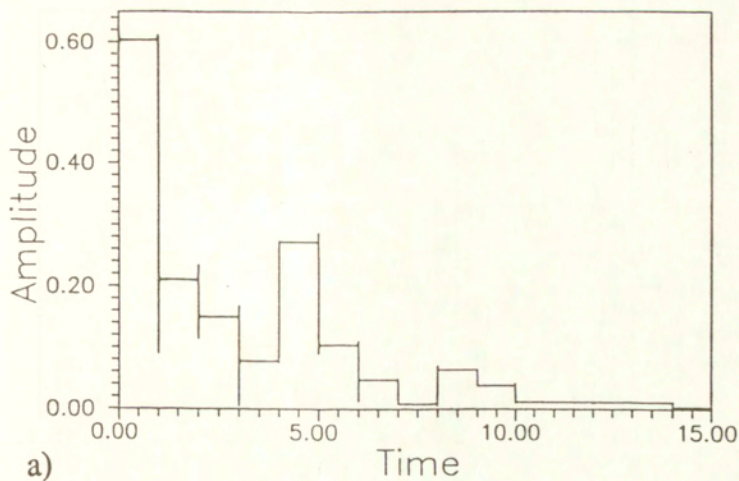
Rys.6.1 Amplituda impulsu odbitego od jednorodnego pręta o impedancji  $b = 2.828427$  i czasie przejścia

a)  $a = 1.0$ ; b)  $a = 0.5$ ; c)  $a = 0.2$ ; d)  $a = 0.05$ .

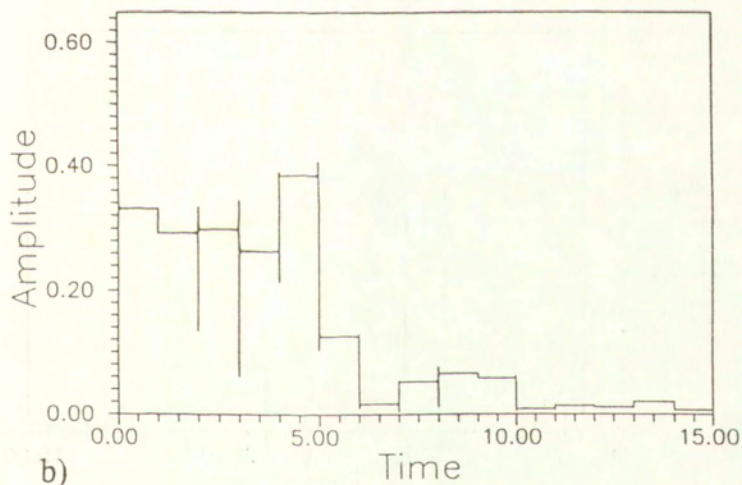


Rys.6.2 Amplituda impulsu odbitego od pręta składającego się z 1 pary segmentów w którym:

a)  $z_1 = 4.0$ ,  $z_2 = 2.0$ ; b)  $z_1 = 2.0$ ,  $z_2 = 4.0$ .

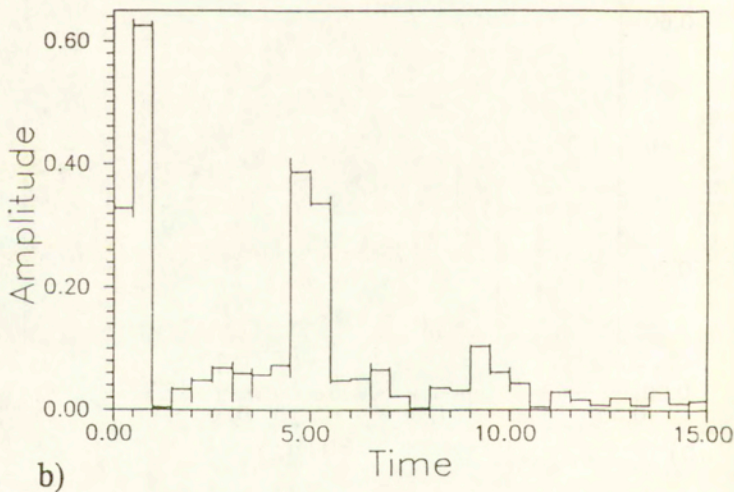
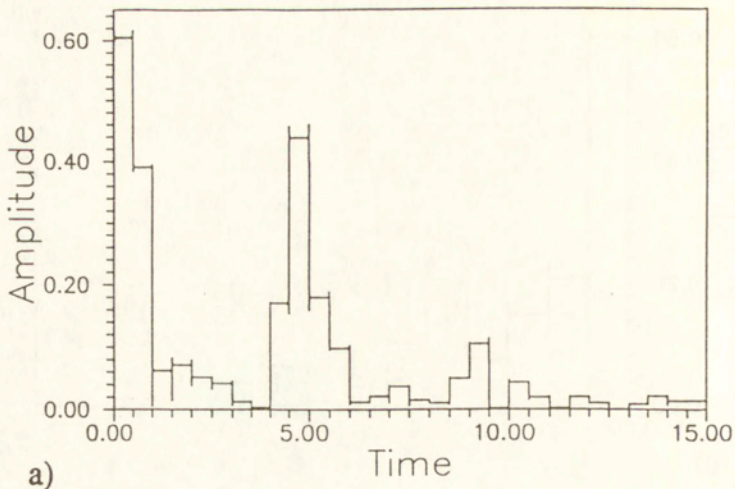


a)



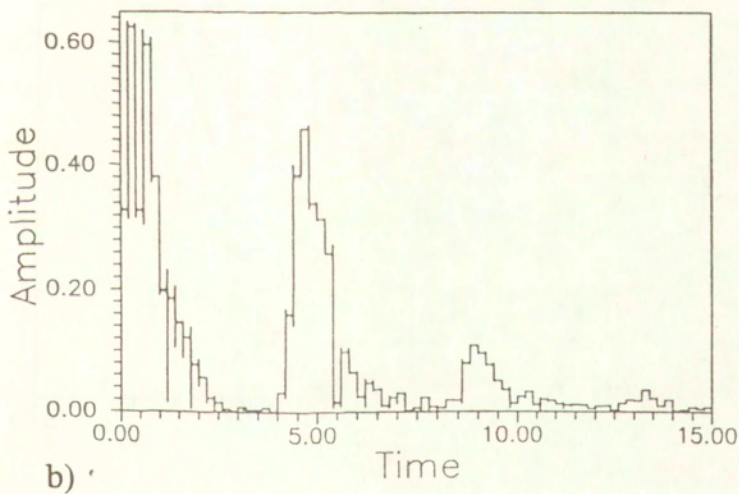
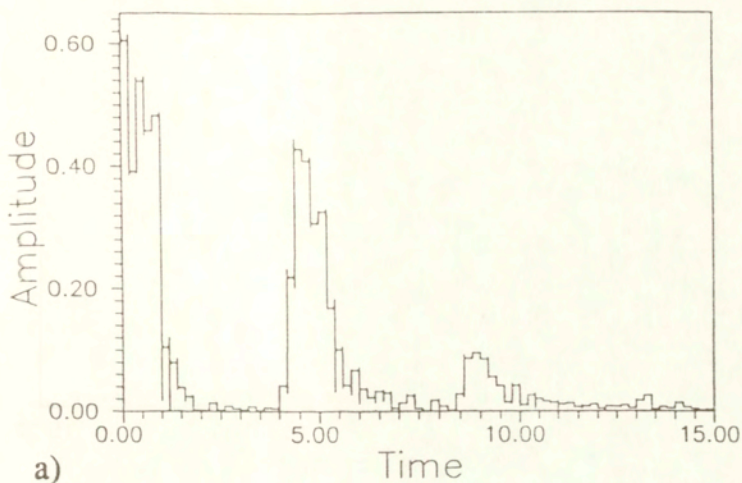
b)

Rys.6.3 Tak jak na Rys.6.2 lecz dla 2 par segmentów.

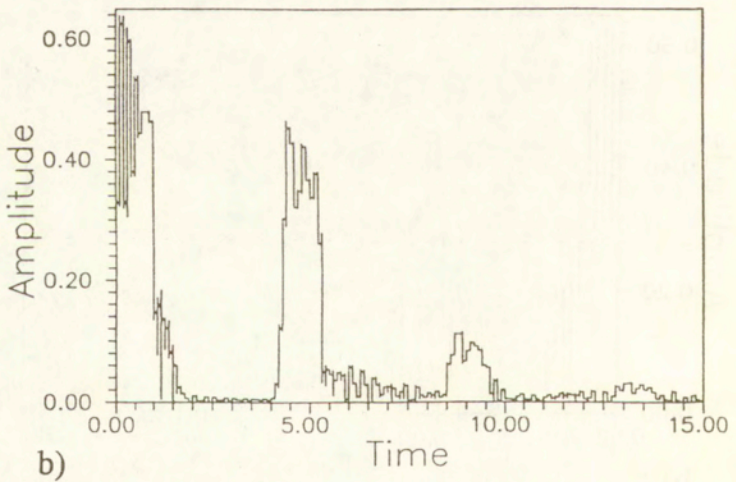
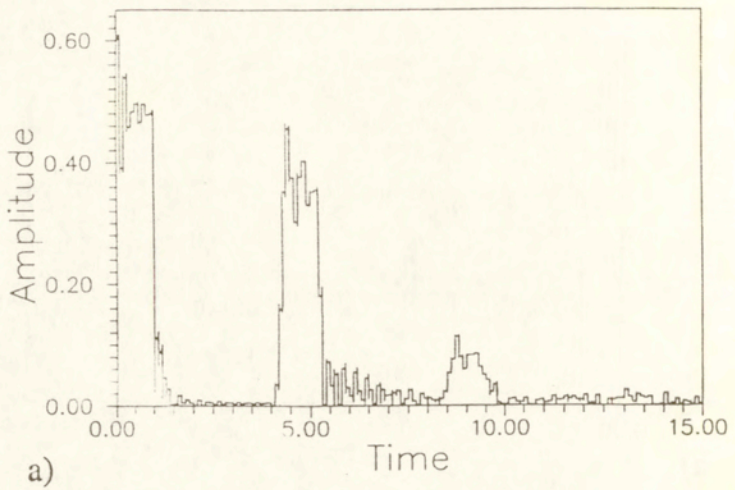


Rys.6.4 Tak jak na Rys.6.2 lecz dla 4 par segmentów.

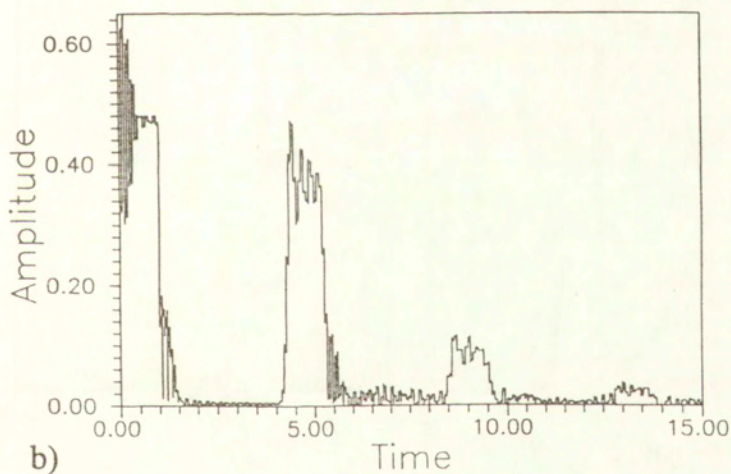
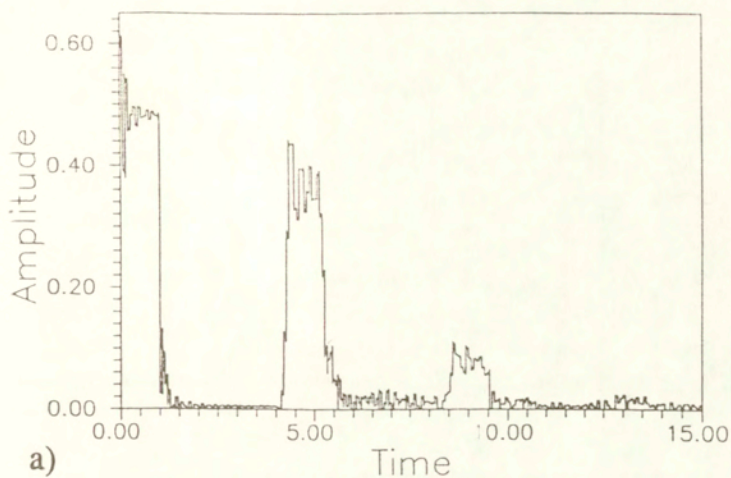




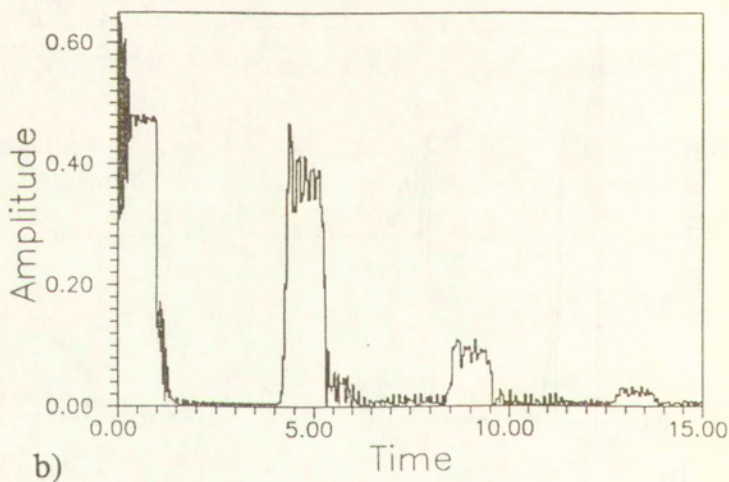
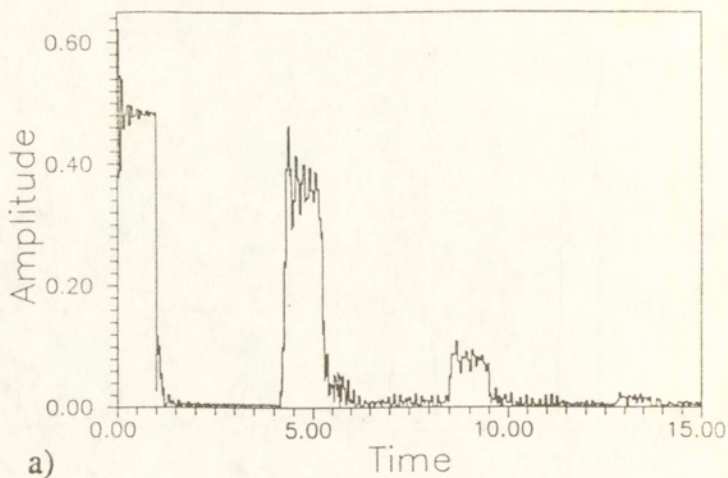
Rys.6.5 Tak jak na Rys.6.2 lecz dla 10 par segmentów.



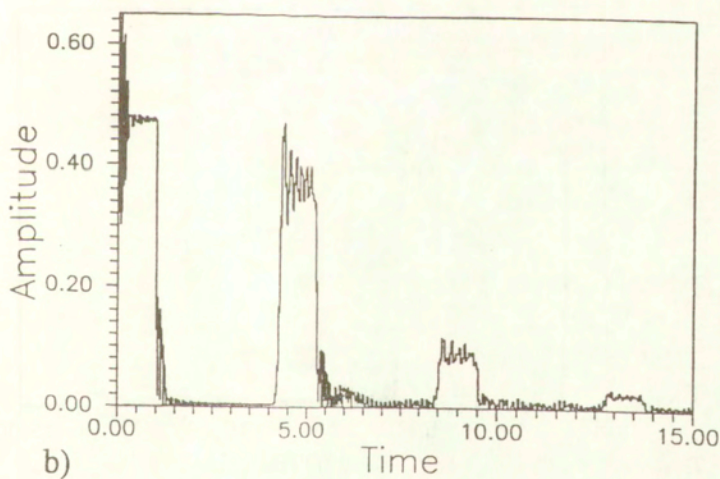
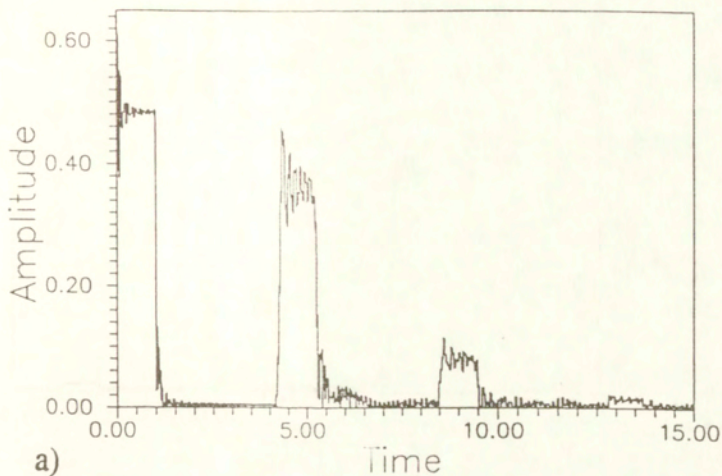
Rys.6.6 Tak jak na Rys.6.2 lecz dla 20 par segmentów.



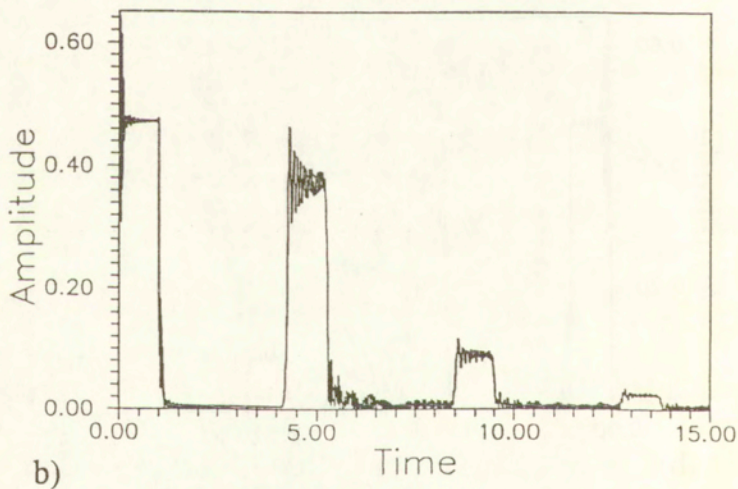
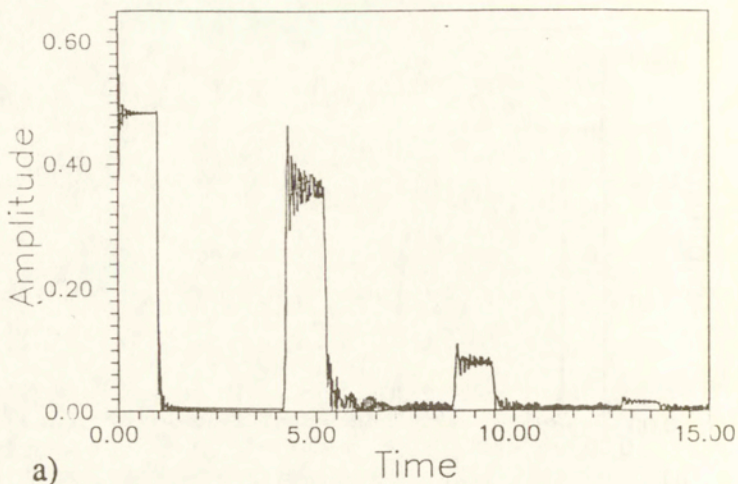
Rys.6.7 Tak jak na Rys.6.2 lecz dla 30 par segmentów.



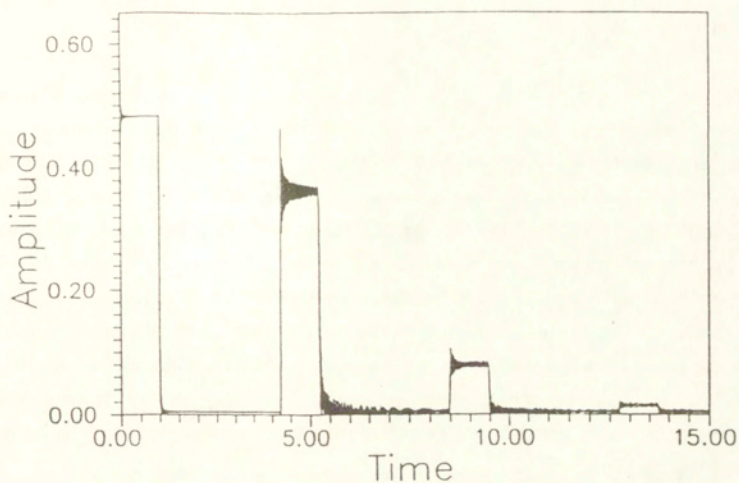
Rys.6.8 Tak jak na Rys.6.2 lecz dla 40 par segmentów.



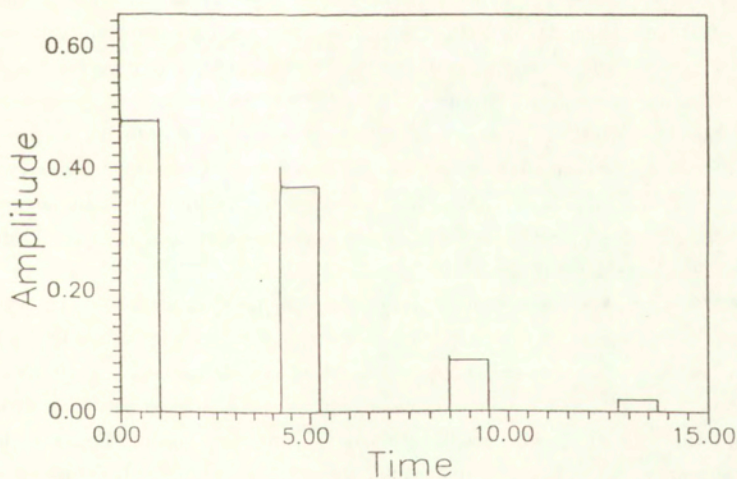
Rys.6.9 Tak jak na Rys.6.2 lecz dla 50 par segmentów.



Rys.6.10 Tak jak na Rys.6.2 lecz dla 100 par segmentów.



Rys.6.11 Tak jak na Rys.6.2a lecz dla 500 par segmentów.



Rys.6.12 Amplituda impulsu odbitego od zhomogenizowanego pręta z efektywnym czasem przejścia fali  $a = 2.12132$  i o efektywnej impedancji  $b = 2.828427$ .

## 7. Podsumowanie

W pracy tej przedstawiono sposób zastosowania bardzo ogólnej metody, jaką jest metoda macierzy przejścia, do analizy fal w dyskretnych ośrodkach warstwowych, ze szczególnym uwzględnieniem ośrodków stochastycznych. Zbadano przykłady zarówno fal harmonicznych czyli modeli stacjonarnych, jak i zagadnień silnie niestacjonarnych - propagacji impulsów falowych. Metoda okazała się na tyle uniwersalna, że pozwoliła, po odpowiednim zmodyfikowaniu modeli, na analizę tak różnorodnych zadań. Wśród fal harmonicznych zbadano zagadnienie jedno i dwuwymiarowe. W obu tych przypadkach metoda okazała się równie skuteczna. W pracy otrzymano wzory dla amplitud fal które stanowią pełne rozwiązanie analityczne zarówno problemów deterministycznych jak i stochastycznych. Mogą one stanowić podstawę do dalszej analizy probabilistycznej procesu falowego w ośrodku warstwowym (uzyskania rozkładu prawdopodobieństwa, momentów itp.).

Metoda macierzy przejścia zastosowana w pracy pozwala zarówno opisać fale w ośrodku warstwowym o skończonej liczbie warstw (przy tym mogą to być warstwy o dowolnych grubościach i stałych materiałowych), jak i w przypadku asymptotycznym, gdy ośrodek ma okresowy układ warstw (lub stochastycznie okresowy w zdefiniowanym przez nas rozumieniu) i liczba ich dąży do nieskończoności. Metoda ta staje się wówczas narzędziem homogenizacji problemu propagacji fal w ośrodku warstwowym. Łączy ona w sposób harmonijny klasyczne zagadnienie homogenizacyjne (to znaczy poszukiwanie rozwiązania równania falowego w przypadku asymptotycznym) z zagadnieniem znalezienia efektywnych stałych materiałowych dla ośrodka warstwowego. Ma ona tę dodatkową zaletę, że pozwala niejako zidentyfikować model efektywny, to znaczy ustalić, jakie stałe materiałowe są wymagane do opisu procesu falowego w ośrodku efektywnym. Nie można tego ustalić na podstawie tylko znajomości składników materiałów składających się na ośrodek warstwowo.

W pracy mieliśmy do czynienia z dwoma odmiennymi sytuacjami. Pierwsza wystąpiła w przypadku jednowymiarowym. Każdy ze składników ośrodka warstwowego był w nim w pełni opisany przez dwa parametry (na przykład gęstość ośrodka i moduł Younga). Jednowymiarowy ośrodek zhomogenizowany również był w pełni opisany przez dwie stałe efektywne (tutaj: gęstość średnią ośrodka i efektywny moduł Younga). Inaczej przedstawiała się sytuacja w przypadku dwuwymiarowym. Każdy z jednorodnych izotropowych składników płyty opisany był w pełni przez trzy stałe materiałowe:



dwie stałe Lamé i gęstość ośrodka. Ośrodek efektywny wymagał już do opisu pięciu stałych. Zarówno ich liczba jak i forma została ustalona w wyniku zastosowania procedury homogenizacyjnej wynikającej z zastosowanej metody macierzy przejścia. Potwierdziło to jeszcze raz jej zalety jako metody łatwej w zastosowaniu i wysoce efektywnej.

Z podanego przykładu wynika jeszcze jeden wniosek. Jak wiadomo, przy zerowym kącie padania fali wymuszającej problem dwuwymiarowy sprowadza się do jednowymiarowego i w tym wypadku okazuje się, że do opisu fali sprężystej w ośrodku efektywnym (a raczej do opisu ośrodka efektywnego przewodzącego fale sprężyste) wystarczają dwie stałe materiałowe. Wynika z tego, że procedura homogenizacji ośrodka, aby dać poprawne wyniki, musi być ściśle związana z celem jakiego ośrodek ten ma służyć. Efektywny tensor stałych sprężystych uzyskany na przykład przy okazji badania problemu statycznego wcale nie musi być odpowiedni w zagadnieniu dynamicznym. Nie przeczy temu nawet fakt, że w tej pracy stałe materiałowe w modelu jednowymiarowym uzyskane dla fal harmoniczných (odpowiadające równaniom statyki) są identyczne ze stałymi otrzymanymi w dynamicznym przypadku impulsów (przy odpowiedniej interpretacji uzyskanych wyników). Problem równości stałych efektywnych opisujących zjawisko fizyczne statycznie i dynamicznie w tym samym ośrodku nie jest jeszcze w pełni rozwiązane. W szczególnie skomplikowanych modelach, w których występuje efekt lokalizacji energii, prawdopodobnie nie muszą być one jednakowe.

Praktycznym wnioskiem jaki wynika z rozważań tej pracy jest to, że prowadzenie procedury homogenizacyjnej wymaga szczególnej uwagi, aby upraszczając model nie pominąć ważnych jego własności, zamazując w ten sposób istotę zjawiska fizycznego.

W pracy tej rozważono trzy przykłady ośrodków jako miejsce gdzie propagują się fale. Możliwości zaprezentowanej metody na tym się oczywiście nie kończą. Dalsze jej zastosowanie wymaga jednak wiele pracy, zarówno przy sformułowaniu modelu jak i przy przeprowadzeniu odpowiednich obliczeń, niezbędnych do uczynienia go efektywnym. Pierwszym możliwym rozszerzeniem zastosowania metody macierzy przejścia do analizy fal harmoniczných jest adaptowanie jej do ośrodków zbudowanych z bardziej skomplikowanych materiałów. Mogą to być sprężyste materiały porowate nasycone cieczą, w których oprócz fal sprężystych w szkielecie propaguje się fala akustyczna w cieczy (por.[Kończak]), mogą materiały termosprężyste, gdzie występują dodatkowe efekty związane z przepływem ciepła lub fale termiczne - gdy rozważamy przepływ ciepła ze skończoną prędkością (por.[Ignaczak]).(Ciekawe prace dotyczące przepływu ciepła w stochastycznym ośrodku warstwowym zostały napisane przez

[Clarke]). W obu tych wypadkach mamy bardziej skomplikowane warunki ciągłości (większą ich liczbę) a co za tym idzie - więcej wymiarowe macierze przejścia. W obu tych wypadkach uzyskanie macierzy przejścia jest skomplikowane, wymaga odwracania dużych macierzy, co w dobie komputerów jest jednak wykonalne. Są to zatem przykłady dwóch ośrodków w których metoda macierzy przejścia może efektywnie działać.

Innym przykładem możliwego zastosowania metody może być adaptowanie jej do przykładów fal z udziałem efektów elektromagnetycznych. W przypadku szczególnego doboru układu materiałów w ośrodku warstwowym można doprowadzić do sytuacji, gdy na granicy ośrodków będą się gromadzić ładunki elektryczne. Prowadzić to będzie do skoków potencjału przy przejściu od warstwy do warstwy i pewnych warunków "nieciągłości" zamiast warunków ciągłości dla fal elektromagnetycznych na granicy ośrodków (por. prace takich autorów jak Alshits, Darinskii, Shuvalov, Kotowski). Odpowiednio wykorzystując te warunki można by otrzymać macierze przejścia dla takiego zagadnienia i skorzystać z wszelkich udogodnień jakie daje metoda macierzy przejścia w analizie fal. Podobne warunki nieciągłości mogłyby być wykorzystane również w przypadku wystąpienia szczelin między warstwami również w wypadku innych materiałów.

Również zagadnienie dotyczące propagacji impulsów falowych rozważane w tej pracy może (i powinno) być uogólnione. Pierwszym nasuwającym się możliwym uogólnieniem jest zagadnienie dwuwymiarowe. Wymaga ono przeprowadzenia dwuwymiarowej transformaty Fouriera równań ruchu w celu sprowadzenia problemu do postaci ewolucyjnej, umożliwiającej zastosowanie naszej metody. Inne ciekawe problemy jakie tu można rozważyć to analiza impulsów falowych w prętach oddziałujących z otoczeniem powierzchniami bocznymi poprzez tarcie, tłumienie lepkie itp. (por. [Sokołowski, Wesółowski], [Nikitin]).

Oddzielnym interesującym problemem może być uwzględnienie w budowie pręta elementów łączy i zamocowań poprzez odpowiednie zmodyfikowanie warunków ciągłości w miejscu ich występowania, na przykład na końcach pręta, jak również niewspółliniowego położenia jego segmentów, co powoduje generowanie dodatkowych fal na złączach (por. [Homer, White]).

W pracy zastosowaliśmy prawo wielkich liczb do analizy fal w stochastycznych ośrodkach warstwowym. Umożliwiło nam ono z jednej strony znalezienie wyrażeń dla fali średniej, z drugiej - znalezienie efektywnych parametrów ośrodka. Interesujące mogłoby być zastosowanie centralnego twierdzenia granicznego do takiego ośrodka, na przykład twierdzenia przedstawionego w paragrafie 3.4. W takim wypadku uzyskana w granicy wielkość jest zmienną losową gaussovą, a więc obiektem mającym dwa

parametry które go charakteryzują: wartość oczekiwaną i wariancję (drugi moment). Uzyskalibyśmy w ten sposób, po odpowiedniej interpretacji, więcej informacji o procesie falowym w ośrodku stochastycznym niż przy wykorzystaniu prawa wielkich liczb.

Zastosowanie metody macierzy przejścia umożliwiło nam również stwierdzenie występowania w ośrodku warstwowym zjawiska lokalizacji fali. Ma ono miejsce w dwóch sytuacjach: w przypadku całkowitego odbicia fali przez stochastyczny ośrodek warstwowy oraz w wypadku przechodzenia fali (impulsu falowego) przez ośrodek warstwowy o skończonej grubości lecz o rosnącej do nieskończoności liczbie warstw. W pierwszym przypadku mamy do czynienia z wniknięciem fali na pewną głębokość do ośrodka i odbiciem jej nie przez powierzchnię zewnętrznej warstwy lecz przez układ warstw (co powoduje, że w obszarze przy brzegu ośrodka uwarstwionego następuje zlokalizowanie pewnej ilości energii). W sytuacji przechodzenia fali przez ośrodek uwarstwiony następuje spowolnienie przechodzenia fali przez ośrodek w wyniku wielokrotnych odbić fali na powierzchniach warstw i przez to zlokalizowanie w ośrodku pewnej ilości energii, która w przypadku ośrodków jednorodnych wykonanych z materiałów tworzących warstwy zostałaby szybciej wypromieniowana. W przyszłości zjawisko to powinno być badane bardziej intensywnie, szczególnie w przypadku warstwowych ośrodków termosprężystych (lub innych ośrodków w których występują pola połączone).

Podsumowując możemy stwierdzić, że metoda macierzy przejścia ma przed sobą jeszcze duże perspektywy rozwoju jako narzędzie analizy fal w ośrodkach warstwowych jak również w innych zagadnieniach mechaniki, na przykład układach drgających.

## 8. Bibliografia

J.Aboudi (1986), Harmonic waves in composite materials, *Wave Motion*, vol.8, pp.289- 303.

J.Aboudi (1987), Transient waves in composite materials, *Wave Motion*, vol.9, pp.141-156.

J.Aboudi (1988), Wave propagation in damaged composite materials, *Int.J. Solids and Structures*, vol.24, no.2, pp.117-138.

B.S.Abramovich, S.N.Gurbatov (1980), Nonstationary problems of multiple scattering of waves in one-dimensional randomly inhomogeneous medium, *Izv. VUZ - Radiofizyka*, vol.23, no.4, pp.442-451.

G.Adomian (1971), The closure approximation in the hierarchy equations, *J.Statist. Physics*, vol.3, pp.2- .

D.J.Allwright (1991), The minimum time property for rays in stratified medium, *Journal of Sound and Vibration*, vol.148, no.2, pp.353-354.

V.I.Alshits, A.N.Darinskii, R.K.Kotowski, A.L.Shuvalov (1988), Analog of Schocli effect in reflection of acoustic beams from free boundaries of a crystal, *Cristallography*, vol.33, no.3, pp.541-553.

V.I.Alshits, A.N.Darinskii, A.L.Shuvalov (1991), On the effect of anomalous reflection and transmission of the acoustic pulses at the interface of two piezoelectrics, XI Acoustic Conference, Moscov, pp.59-62.

V.I.Alshits, A.N.Darinskii, A.L.Shuvalov (1991), Elastic waves in infinite and semi-infinite anisotropic media, materiały konferencyjne, kopia z maszynopisu, pp.189-213.

V.I.Alshits, A.N.Darinskii, A.L.Shuvalov (1992), Anomalous reflection and transmission of acoustic beam on the interface between two  $180^{\circ}$ -ferroelectric domains, *Ferroelectrics*, vol.126, pp.323-328.

V.I.Alshits, A.N.Darinskii, A.L.Shuvalov, V.V.Antipov, S.I.Chizhikov, N.G.Sorokin (1989), Acoustical and optical diffractive phenomena in ferroelectrics with regular domain structure under electric bias, *Ferroelectrics*, vol.96, pp.91-96.

V.I.Alshits, A.L.Shuvalov (1992), The Bragg reflection of sound in periodic structure of piezocrystal layers with conducting or metallized surfaces, (manuskrypt).

L.-E.Anderson, B.Lundberg (1984), Some fundamental transmission properties of impedance transitions, *Wave Motion*, vol.6, pp.389-406.

L.Arnold, V.Wihstutz eds. (1986), Lyapunov Exponents, *Lecture Notes in Mathematics* no.1186, Springer.

M.Asch, W.Kohler, G.Papanicolaou, M.Postel, B.White (1991), Frequency content of randomly scattered signals, *SIAM Review*, vol.33, no.4, pp.519-625.

J.L.Auriault (1991), Heterogeneous medium: Is an equivalent macroscopic description possible?, *Int. J.Engng. Sci.*, vol.29, no.7, pp.785-795.

G.I.Babkin, V.I.Klyatskin (1980), Wave intensity fluctuations in one-dimensional randomly inhomogeneous medium. III. The effect of absorption and transfer equation, *Izv. VUZ - Radiofizyka*, vol.23, no.4, pp.432-441.

I.Babuska (1976), Homogenization and its application, mathematical and computational problem, in: B.Hubbard, ed., *Numerical solution of partial differential equations - III*, pp.89-116.

I.Babuska (1976), Homogenization approach in engineering, in: R.Glowinski, J.L.Lions, *Computing methods in applied science and engineering*, pp.137-153.

R.N.Baer, J.S.Perkins, E.B.Wright, J.J.McCoy (1984), Stochastic propagation in the mutual coherence function in the deep ocean, *Journal of the Acoustical Society of America*, vol.75, no.5, pp.1407-1414.

M.Bath, A.J.Berkhout (1984), *Mathematical aspects of seismology*, Geophysical Press, London.

R.Beccu, B.Lundberg (1987), Transmission and dissipation of stress wave energy at a percussive drill rod joint, *Int. J.Impact Engng.*, vol.6, no.3, pp.157-173.

R.Beccu, B.Lundberg (1990), Efficiency of percussive drilling of rock with dissipative joints, *Int. J.Impact Engng.*, vol.9, no.3, pp.277-287.

G.Becus (1978), Wave propagation in imperfectly periodic structures: a random evolution approach, *ZAMP*, vol.29, pp.252- 261.

G.Becus (1979a), Diffusion approximation of wave propagation in imperfectly periodic structures, *ZAMP*, vol.30, pp.724- 727.

G.Becus (1979b), Homogenization and random evolutions: Applications to the mechanics of composite materials, *Quarterly of Applied Mathematics*, vol.37, no.3 pp.209-217.

R.Bellman (1954), Limit theorem for non-commutative operations. 1, *Duke Math. J.*, vol.21, pp.491-500.

R.Bellman (1960), *Introduction to matrix analysis*, New York: McGraw-Hill Book Comp.

A.Ben-Menahem, S.J.Singh (1981), *Seismic waves and sources*, Springer, New York.

A.Bensoussan, J.-L.Lions, G.Papanicolaou (1978), *Asymptotic analysis for periodic structures*, North-Holland.

M.J.Beran, J.J.Mc Coy (1970), Mean field variation in a statistical sample of heterogeneous linearly elastic solids, *Int.J. Solids Struct.*, vol.6, pp.8- .

M.A.Berger (1984), Central limit theorem for products of random matrices, Trans. A.M.S., vol.285, pp.777-803.

L.V.Berlyand, S.M.Kozlov (1992), Asymptotic of homogenized moduli for elastic chess composite, ARMA, (w druku).

M.J.Berry, G.F.West (1966), Reflected and head wave amplitudes in a medium of several layers, Geophys.Monogr., Am.Geophys.Union, vol.10, pp.464-481.

A.T.Bharucha-Reid (1972), Random Integral Equations, Academic Press, New York.

D.R.Bland (1988), Wave theory and applications, Clarendon Press, Oxford.

P.Borejko (1989), Long-time of a layered elastic half-space predicted by the generalized ray theory, Anzeiger der Österreichischen Akademie der Wissenschaften, vol.126, pp.93-99.

P.Borejko (1991), Seismic waves in a half-space generated by a transient point source, ZAMM, vol.71, no.4, pp.T347-350.

P.Borejko, H.P.Rossmann, Y.Z.Wei (1992), Stress waves in layered rocks, Acta Mechanica, vol.92, pp.175-181.

P.Borejko, F.Ziegler (1989), Pulsed cylindrical elastic waves in a half-space with a dipping surface layer, in: Elastic Wave Propagation, M.F.McCarthy, M.A.Hayes, ed., pp.39-44, Elsevier.

P.Borejko, F.Ziegler (1990a), Refraction of seismic signals along a dipping layer, Part I: Theory, Gerlands Beitr. Geophysik, vol.99, no.6, pp.559-578.

P.Borejko, F.Ziegler (1990b), Refraction of seismic signals along a dipping layer, Part II: Numerical Calculations, Gerlands Beitr. Geophysik, vol.99, no.6, pp.579-588.

P.Borejko, F.Ziegler (1990c), Transient elastic and viscoelastic response of a half-space, in: *Elastic Waves and Ultrasonic Nondestructive Evaluation*, S.K.Datta, J.D.Achenbach, Y.S.Rajapakse ed., pp.401-402, Elsevier.

P.Borejko, F.Ziegler (1991), Effects of seismic explosive waves on structures, Tagungsband, IV Kolloquium Erdbeben-Ingenieurwesen, 9-11 Januar 1991, Potsdam.

M-P.Bosse, R.E.Showalter (1990), Homogenization of the layered medium equation, manuskrypt.

L.M.Brekhovskikh (1960), *Waves in layered media*, New York: Academic Press.

L.M.Brekhovskikh, O.A.Godin (1990), *Acoustics of Layered Media I, II*, Berlin: Springer-Verlag.

L.Brillouin (1953), *Wave propagation in periodic structures*, Dover, New York.

L.Brillouin, M.Parodi (1956), *Propagation des ondes dans les milieux periodiques*, Dunod, Paris.

R.Burridge, G.Papanicolaou, P.Sheng, B.White (1989), Probing a random medium with a pulse, *SIAM Journal of Applied Mathematics*, vol.49, no.2, pp.582-607.

R.Burridge, G.Papanicolaou, B.White (1987), Statistics for pulse reflection from a randomly layered medium, *SIAM J. Appl. Math.*, vol.47, no.1, pp.146-168.

C.H.Chapman (1976), Exact and approximate generalized ray theory in vertically inhomogeneous media, *Geophys. J.R.Astron.Soc.*, vol.46, pp.201-233.

C.H.Chapman (1978), A new method for computing synthetic seismograms, *Geophys. J.R.Astron.Soc.*, vol.54, pp.481-518.

G.Chen, J.Zhou (1990), The wave propagation method for the analysis of boundary stabilization in vibrating structures, *SIAM J.Appl. Math.*, vol.50, no.5, pp.1254-1283.



Y.Chevalier (1978), Dispersion of harmonic waves in elastic and viscoelastic periodic composite materials, ed.D.F.Parker, G.A.Manguin: Recent Developments in Surface Acoustic Waves, pp.260-268, Springer.

M.Chipot, D.Kinderlehrer, G.V.Caffarelli (1986), Smoothness of linear laminates, ARMA, vol.96, no.1, pp.81-96.

P.L.Chow (1978), Function-space differential equations associated with a stochastic partial differential equation, Indiana University Mathematical Journal, vol.25, pp.609-627.

N.S.Clarke (1984), Heat diffusion in random laminates, Q.J. Mech. appl. Math., vol.37, no.2, pp.195-210.

N.S.Clarke (1986), On the effective diffusivity model for heat diffusion in inclined random laminates, Q.J. Mech. Appl. Math., vol.39, no.1, pp.139-152.

C.A.Coulson, A.Jeffrey (1982), Fale. Modele matematyczne, WN-T, Warszawa.

G.Dal Maso, L.Modica (1986), Nonlinear stochastic homogenization, Annali di Matematica pura ed applicata, vol.144, pp.347-389.

G.Dal Maso, G.F.Dell'Antonio ed.(1991), Composite media and homogenization theory, Birkhäuser, Boston.

D.A.Dawson, G.C.Papanicolaou (1984), A random wave process, Appl.Math.Opt., vol.12, pp.97-114.

A.N.Demienin, V.S.Koroliuk (1978), in:Physical-Engin. Applications of Boundary Value Problems, Kiev.

M.Deschamps, P.Chevee (1992), Reflection and refraction of a heterogeneous plane wave by a solid layer, Wave Motion, vol.15, pp.61-75.

S.B.Dong, R.B.Nelson (1972), On natural vibrations and waves in laminated orthotropic plates, Trans. ASME-Journal of Applied Mechanics, Sept.1972, pp. 739-745.

J.F.Doyle (1989), Wave propagation in structures. An FFT-based spectral analysis methodology. Springer-Verlag.

J.L.Ericksen, D.Kinderlehrer, R.Kohn, J.-L.Lions ed.(1986), Homogenization and effective moduli of materials and media, Springer, New York.

W.M.Ewing, W.S.Jardetzky, F.Press (1957), Elastic waves in layered media, Mc Graw-Hill, New York.

J.A.Fawcett (1988), Numerical simulation and analytic approximations of transmission through a random medium, Wave Motion, vol.10, pp.99-114.

M.Fisz (1969), Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna, PWN, Warszawa.

V.D.Freilikher, S.A.Grebeskul (1990), Localization and propagation of waves in randomly stratified media, Uspekhi Fizicheskikh Nauk, vol.160, no.2, pp.239-262.

L.Fryba (1986), Random vibration of a beam on elastic foundation under moving force, in: I.Elishakoff, R.H.Lyon, ed., Random vibration-status and recent developments, Elsevier, Amsterdam.

H.Furstenberg (1963), Non commuting random products, Trans. AMS, 108, 377-428.

H.Furstenberg, H.Kesten (1960), Products of random matrices. Ann.Math. Statist., vol.31, pp.457-469.

A.Gałka, J.J.Telega, R.Wojnar (1991), Homogenization of thermoelastic solid in the presence of diffusion, maszynopis.

B.Gambin (1978), Fale sprężyste w półprzestrzeni stochastycznie niejednorodnej. Rozprawa doktorska, IPPT PAN.

B.Gambin, E.Kröner (1989), Higher order terms in the homogenized stress-strain relation of periodic elastic media, *Phys.Stat.Sol.*, vol.151, pp.513-519.

M.E.Gerzenshtein, V.B.Vasiljev (1959), Waveguide with the random nonhomogeneities and Brownian motion on the Lobachevsky's plane, *Prob. Th. and Appl.*, vol.4, no.4, pp.424-432.

F.Gilbert, G.E.Backus (1966), Propagator matrices in elastic wave and vibration problem, *Geophysics*, vol.31, pp.326-332.

S.Gopalakrishnan, M.Martin, J.F.Doyle (1992), A matrix methodology for spectral analysis of wave propagation in multiple connected Timoshenko beams, *Journal of Sound and Vibration*, vol.158, no.1, pp.11-24.

B.Gopinath (1976), The solution to an inverse problem in stratified dielectric media, *J. Math. Phys.*, vol.17, no.7, pp.1099-1104.

W.J.Hannon (1964), An application of the Haskell-Thomson matrix method to the synthesis of the surface motion due to dilatational waves, *Bull.Seismol.Soc.Am.*, vol.54, pp.2067-2079.

D.G.Harkrider (1964), Surface waves in multilayered elastic media I., Rayleigh and Love waves from buried sources in a multilayered elastic half-space, *Bull.Seismol.Soc.Am.*, vol.54, pp.627-679.

D.G.Harkrider (1970), Surface waves in multilayered elastic media II., Higher mode spectra and spectral ratios from point sources in plane layered earth models, *Bull.Seismol.Soc.Am.*, vol.60, pp.1937-1987.

Z.Hashin, S.Shtrikman (1963), A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials, *J.Mech.Phys.Solids*, vol.11, pp.127-.

N.A.Haskell (1953), The dispersion of surface waves on multilayered media, *Bull.Seismol.Soc.of America*, vol.43, pp.17- 34.

N.A.Haskell (1960), Crustal reflection of plane SH waves, *J.Geophys. Res.*, vol.65, pp.4147-4150.

N.A.Haskell (1962), Crustal reflection of plane P and SV waves, *J.Geophys. Res.*, vol.67, pp.4751-4769.

N.A.Haskell (1964), Radiation pattern of surface waves from point sources in a multi-layered medium, *Bull.Seismol.Soc.of America*, vol.54,pp.377-393.

R.Z.Hasminski (1966), A limit theorem for solutions of differential equations with random right hand side, *Theory Prob.Appl.*, vol.11, pp.390-406.

C.H.Hodges (1982), Confinement of vibration by structural irregularity, *J.Sound Vibration*, vol.82, pp.411- 424.

E.Hopf (1952), Statistical hydrodynamics and functional calculus, *J.Rational Mech. Anal.*, vol.1, pp.87-123.

J.Hori (1968), Spectral properties of disordered chains and lattices, Pergamon Press, Oxford.

J.L.Horner, R.G.White (1991), Prediction of vibrational power transmission through bends and joints in beam-like structures, *Journal of Sound and Vibration*, vol.147, no.1, pp.87-103.

M.S.Howe (1971), Wave propagation in random media, *J.Fluid Mech.*, vol.45, P.4, pp.769-783.

T.Ch.Hu, F.Moricz, R.L.Taylor (1989), Strong laws of large numbers for arrays of rowwise independent random variables, *Acta Math. Hungarica*, vol.54, no.1-2, pp.153-162.

J.Ignaczak (1989), Termosprężystość ze skończonymi prędkościami falowymi, Ossolineum, Wrocław.

K.Ishii (1973), Localization of eigenstates and transport phenomena in the one-dimensional disordered systems, Supplement to Progress of Theoretical Physics, no.53, pp.77-138.

A.Ishimaru (1978), Wave propagation and scattering in random media, vol.1-2, Academic Press.

S.Kaliski ed.(1966), Vibrations and waves in solids, PWN, Warszawa.

S.Kaliski ed.(1986), Technical Mechanics vol.3. Vibrations and waves, PWN, Warszawa.

F.I.Karpelevich, V.N.Tutubalin, M.G.Shour (1959), Limit theorems for the compositions of distributions in the Lobachevsky's plane and space, Th. Prob. Appl., vol.4, no.4, pp.432-436.

J.B.Keller (1964), Stochastic equations and wave propagation in random media, Proc.Symp.Appl.Math., vol.16, pp.145-170, AMS, Providence.

J.B.Keller, F.C.Karal (1966), Effective dielectric constant, permeability and conductivity of a random medium and the velocity and attenuation of coherent waves, J.Math.Phys., vol.7, pp.661-670.

B.L.N.Kennett (1981), Elastic wave propagation in stratified media, in: Advances in Applied Mechanics, Vol.21, (C.-S.Yih, ed.), pp. 79-167, New York: Academic Press.

B.L.N.Kennett (1983), Seismic wave propagation in stratified media. London: Cambridge Univ.Press.

H.Kesten (1973), Random difference equations and renewal theory for products of random matrices, Acta Mathematica, vol.131, pp.207-248.

V.I.Klyatskin (1980), Stochastic equations and waves in random media, Nauka, Moskwa.

L.Knopoff (1964), A matrix method for elastic wave problems, Bull.Seisnol. Soc.Am., vol.54, pp.431-438.

W.E.Kohler (1986), Reflection from a one-dimensional, totally refracting random multilayer, SIAM J.Appl.Math, vol.46, no.3, pp.464-482.

W.E.Kohler (1988), Reflection from a one-dimensional, totally refracting random multilayer II. - Internal field statistics, SIAM J.Appl.Math, vol.48, no.3, pp.52-661.

W.Kohler, G.C.Papanicolaou (1973), Power statistics for wave propagation in one dimension and comparison with radiative transport theory, J. Math. Phys., vol.14, no. 12, pp.1733-1745.

W.Kohler, G.C.Papanicolaou (1974), Power statistics for wave propagation in one-dimension and comparison with radiative transport theory. II, J. Math. Phys., vol.15, no.12, pp.2186-2197.

R.V.Kohn, G.W.Milton ed.(1989), Random media, Proc. SIAM Workshop on Random Media and Composites, SIAM.

Z.Kończak (1992), Reflection and refraction of waves at an interface between fluid-saturated porous media, 29. Polska Konferencja Mechaniki Ciała Stałego, Rytro.

Z.Kotulski (1984a), Characteristic functionals of stochastic wave processes, (Doctor Thesis), IFTR Reports 14/84, pp.1-174.

Z.Kotulski (1984b), One-dimensional thermoelastic wave in solid with randomly fluctuating coefficient of linear expansion, Archives of Mechanics, vol.36, no.4, pp.499-514.

Z.Kotulski (1987), On the Markovian model of turbulent diffusion, Reports on Mathematical Physics, vol.24, no.1, pp.125-136.

Z.Kotulski (1989a), Equations for the characteristic functional and moments of the stochastic evolutions with an application, *SIAM Journal on Applied Mathematics*, vol.49, no.1, pp.296-313.

Z.Kotulski (1989b), Wave propagation in a randomly stratified medium, *J.Sound Vibration*, vol.128, no.2, pp.195-208.

Z.Kotulski (1990a), Elastic waves in randomly stratified medium, Part1:Analytical results, *Acta Mechanica*, vol.83, pp.61-75.

Z.Kotulski (1990b), On the effective reflection properties of the randomly stratified elastic slab, *ZAMM*, vol.70, pp. T211-T213.

Z.Kotulski (1991), Generalized Shapiro-Loginov formula and moment stability of a string equation with random telegraphic parameter, *Archives of Mechanics*, vol.43, no.2-3, pp.143-162.

Z.Kotulski (1992a), Elastic waves in randomly stratified medium, Part 2, Numerical calculations, *Acta Mechanica*, vol.85, pp.111-222.

Z.Kotulski (1992b), Law of large numbers as a method of homogenization of stratified elastic media, *ZAMM*, vol.72, no.4, pp.T267-T269.

Z.Kotulski (1992c), Wave propagation in randomly stratified media and the law of large numbers, *Journal of Sound and Vibration*, vol.158, no.1, pp.93-104.

Z.Kotulski (1992d), On the effective reflection properties of the randomly segmented elastic bar, *IFTR Reports* 31/92.

Z.Kotulski, K.Sobczyk (1984), Characteristic functionals of randomly excited physical systems, *Physica* 123A, pp.261-278.

Z.Kotulski, K.Sobczyk (1992), Non-local description of pollution transport in random medium, *Modelling and Scientific Computing*, Vol.1, No.1, (Pergamon Press)

Yu.A.Kravcov, A.I.Saichev (1982), The effect of double transmission of waves in randomly inhomogeneous medium, *Usp. Mat. Nauk*, vol.137, no.3, pp.501-527.

E.Kröner (1977), Bounds for effective elastic moduli of disordered materials, *J.Mech.Phys.Solids*, vol.25, pp.137-155.

E.Kröner (1986), Statistical modelling, in: J.Gittus, J.Zarka, *Modelling small deformations of polycrystals*, Elsevier, London.

J.A.Krumhansl (1972), Randomness and wave propagation in inhomogeneous media, in: E.H.Lee ed., *Dynamics of Composite Materials*, ASME, pp.139-150.

Ya.V.Kurylev (1991), Nonstationary Gaussian wave packets in highly dispersive active media, *Wave Motion*, vol.13, pp.107-114.

E.H.Lee (1972), A survey of variational methods for elastic wave propagation analysis in composites with periodic structures, in: E.H.Lee ed., *Dynamics of Composite Materials*, pp.122-138, ASME Publ.

L.C.Lee (1974), Wave propagation in a random medium: a complete set of the moment equations with different wavenumbers, *J.Math.Phys.*, vol.15, pp. .

T.Lewiński, J.J.Telega (1991), Homogenization and effective properties of plates weakened by partially penetrating fissures: asymptotic analysis, *Int.J.Engng.Sci.*, vol.29, no.9, pp.1129-1155.

E.E.Lewis, U.R.Hanebutte, R.F.Stefan (1990), A two-dimensional nonlinear response matrix method with scattering and absorption-emission, *Transport Theory and Statistical Physics*, vol.19 (3-5), pp.387-403.

I.Lindemann (1992), Stability of hyperbolic partial differential equations with random loads, *SIAM J.Appl.Math.*, vol.52, no.2, pp.347-367.

R.B.Lindsay (1939), Filtration of oblique elastic waves in stratified media, *J.Acous.Soc.Am.*, vol.11, pp.178-183.



B.Lundberg; R.H.Blanc (1988), Determination of mechanical material properties from the two-point response of an impacted linearly viscoelastic rod specimen, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 126, no.1 pp.97-108.

B.Lundberg, J.Carlsson, K.G.Sundin (1990), Analysis of elastic waves in non-uniform rods from two-point strain measurement, *Journal of Sound and Vibration*, vol.137, no.3, pp.483-493.

B.Lundberg, R.Gupta, L.-E.Anderson (1979), Optimum transmission of elastic waves through joints, *Wave Motion*, vol. 1, pp.193-200.

A.K.Mal (1988), Wave propagation in layered composite laminates under periodic surface loads, *Wave Motion*, vol.10, pp.257-266.

K.Z.Markov, K.D.Zvyatkov (1991), Optimal third-order bounds on the effective properties of some composite media, and related problems., *Advances in Mechanics*, vol.14, no.4, pp.3-46.

J.Mc Coy (1972), Higher-order moments of the inverse of a linear stochastic operator, *J.Opt.Soc. Amer.*, vol.62, pp.1- .

J.McKenna, J.A.Morisson (1970), Moments and correlation functions of solutions of a stochastic differential equation, *J. Math. Phys.*, vol.11, no.8, pp.2348-2360.

D.J.Mead (1975), Wave propagation and natural modes in periodic systems -I and II, *J.Sound Vibration*, vol.40, pp.1-39.

D.J.Mead (1986), A new method of analysing wave propagation in periodic structures; application to periodic Timoshenko beams and stiffened plates, *J.Sound Vibration*, vol.104, pp.9-27.

W.Menke (1983), A formula for the apparent attenuation of acoustic waves in randomly layered media, *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, vol.75, pp.541-544.

G.W.Milton (1990), On characterizing the set of possible effective tensors of composites: The variational method and the translation method., *Comm.Pure Appl.Math.*, vol.43, pp.63-125.

J.A.Morrison (1972), Moments and correlation functions of solutions of some stochastic matrix differential equations, *J. Math. Phys.*, vol.13, no.3, pp.299-306.

B.Nair, B.S.White (1991), High-frequency wave propagation in a random media - a unified approach, *SIAM J.Appl.Math.*, vol.51, no.2, pp.374-411.

A.Negro (1987), Homogenization of the quasistationary Maxwell equations in nonlinear laminated materials, *Applicable Analysis*, vol.25, pp.197-237.

M.Newlands (1952), The disturbance due to a line source in a semi-infinite elastic medium with a single surface layer, *Phil.Trans.R. Soc. London, ser.A*, vol.245, pp.213-308.

L.V.Nikitin (1963), Wave propagation in an elastic rod in the presence of dry friction, *Ingenery Journal, Mechanika tverdogo tela*, vol.3, no.1, pp.126-130.

L.V.Nikitin, A.N.Tyurekhodgaev (1990), Wave propagation and vibration of elastic rods with interfacial frictional slip, *Wave Motion*, vol.12, pp.513-526.

E.Nordlund, B.Lundberg (1986), Slip and energy dissipation in conical friction joints loaded by impact-induced waves, *Int. J.Impact Engng.*, vol.4, no.2, pp.127-144.

A.Norris, F.Santosa (1992), Shear wave propagation in a periodically layered medium - an asymptotic theory, *Wave Motion*, vol.16, pp.33-55.

K.Oelschläger (1988), Homogenization of a diffusion process in a divergence-free random field, *The Annals of Probability*, vol.16, no.3, pp.1084-1126.

O.A.Oleinik, A.S.Shamaev, G.A.Yosifian (1992), *Mathematical problems in elasticity and homogenization*, Elsevier.

B.Orłowska (1971a), Macroscopic properties of periodic structure systems with local interactions, Bulletin de L'Academie Polonaise des Sciences, Serie des sciences techniques, vol.19, no.1, pp.1-5.

B.Orłowska (1971b), Macroscopic model of hyperelastic bodies system with a periodic structure, Bulletin de L'Academie Polonaise des Sciences, Serie des sciences techniques, vol.19, no.1, pp.7-13.

Y.H.Pao, R.R.Gajewski (1977), The generalized ray-theory and transient responses of layered elastic solids, in: Physical Acoustics, Vol.13, (W.P.Mason, R.N.Thurston eds.), pp.184- 256, New York: Academic Press.

Y.H.Pao, F.Ziegler (1989), Wave propagation from a point source in a wedge-shaped layer on top of a half-space, in: Elastic Wave Propagation, M.F.McCarthy, M.A.Hayes, ed., pp.235-240, Elsevier.

Y.H.Pao, F.Ziegler, Y.S.Wang (1989), Acoustic waves generated by a point source in a sloping fluid layer, J.Acoust.Soc.Am., vol.85, no.4, pp.1414-1426.

G.Papanicolaou (1971), Wave propagation in a one-dimensional random medium, SIAM J.Appl. Math., vol.21, no.1, pp.13-18.

G.Papanicolaou ed.(1987), Random media, IMA Volumes in Mathematics and its Applications, Springer, New York.

G.Papanicolaou (1988), Waves in one-dimensional random media, in: Ecole d'Ete de ProBABILITIES de Saint-Flour XV- XVII, 1985- 87, (ed. P.L.Hennequin), Lect.Not.Math. 1362, Springer Verlag, Berlin.

G.Papanicolaou, J.B.Keller (1971), Stochastic differential equations with applications to random harmonic oscillators and wave propagation in random media, SIAM J.Appl. Math., vol.21, no.2, pp.287-305.

G.Papanicolaou, S.R.S.Varadhan (1982), Boundary value problems with rapidly oscillating random coefficients, in: J.Fritz, J.L.Lebowitz, D.Szasz ed., Random Fields, Colloq.Math. Soc. Janos Bolyai vol.27, pp.835-873, North-Holland, Amsterdam.

G.I.Petrashen, L.A.Molotkov, P.V.Krauklis (1982-vol.1, 1985-vol.2), Waves in stratified-homogeneous isotropic elastic media, Nauka, Leningrad.

W.L.Pilant (1979), Elastic Waves in the Earth, Elsevier, Amsterdam.

W.H.Press, B.F.Flannery, S.A.Teukolsky, W.T.Vetterling (1986), Numerical Recipes. The art of scientific computing, Cambridge University Press.

H.Reissner (1938), Der senkrechte und schräge Durchtritt einer in einem flüssigen Medium erzeugten ebenen Dilatations Welle durch einen in diesem Medium befindliche planparallele feste Platte, Helv.Phys.Acta, vol.11, pp.140-155.

P.G.Richards (1971), Elastic wave solutions in stratified media, Geophysics, vol.36, pp.798-809.

P.G.Richards (1974), Weakly coupled potentials for high-frequency elastic waves in continuously stratified media, Bull.Seismol.Soc.Am., vol.64, pp.1575-1588.

P.G.Richards (1976), On the adequacy of plane-wave reflection/transmission coefficients in the analysis of seismic body waves, Bull.Seismol.Soc.Am., vol.66, pp.701-717.

E.A.Robinson (1978), Waves propagating in random media as statistical time series, in Applied time series analysis, (ed. D.F.Findley), pp.287-324, New York: Academic Press.

S.M.Rytov (1966), Introduction to statistical radiophysics, Nauka, Moskwa.

S.M.Rytov, Yu.A.Kravcov, V.I.Tatarskii (1978), Introduction to statistical radiophysics, vol.II: Random fields, Nauka, Moskwa.

S.S.Saatchi, R.H.Lang (1992), Mean wave propagation in a slab of one-dimensional discrete random medium, *Wave Motion*, vol.15, pp.301-314.

K.Sab (1992), On the homogenization and the simulation of random materials, *European Journal of Mechanics. A/Solids*, vol.11, no.5, pp.585-608.

E.Sanchez-Palencia (1974), Comportements local et macroscopique d'un type de milieux physiques hétérogènes, *Int.J.Engng.Sci.*, vo.12, pp.331-351.

E.Sanchez-Palencia (1980), Non-homogeneous media and vibration theory, *Lect.Not.in Phys.* vol.127, Springer.

J.F.M.Scott (1985), The statistics of waves propagating in a one-dimensional random medium, *Proc of Roy.Soc. London*, A398, 341- 363.

J.v.Scheidt, W.Purkert (1983), *Random Eigenvalue Problems*, Akademie-Verlag, Berlin.

M.A.G.Silva (1991), Pass and stop bands of some periodic laminates, *Acustica*, vol.75, pp.62-68.

M.A.G.Silva (1992), Propagation of transverse anti-plane waves in orthotropic layers, *European Journal of Mechanics. A.Solids*, vol.11, pp.849-862.

B.Skalmierski, A.Tylikowski (1973), *Stabilność układów dynamicznych*, PWN, Warszawa.

A.V.Skorohod (1965), Constructive methods of introducing of stochastic processes, *Usp.Mat.Nauk*, vol.20, pp.67-87.

J.B.Smyth, R.B.Lindsay (1944), Supersonic transmission at oblique incidence through a solid plate in water, *J.Acous.Soc.Am.*, vol.16, pp.20-25.

K.Sobczyk (1973a), *Metody dynamiki stochastycznej*, PWN.

K.Sobczyk (1973b), Reflection of scalar wave from a plane with random impedance, *Acta Phys.Pol.*, A44, p.4.

K.Sobczyk (1976), Elastic wave propagation in a discrete random medium, *Acta Mechanica*, vol.25, pp.13-28.

K.Sobczyk (1982), *Fale stochastyczne*, PWN, Warszawa.

K.Sobczyk (1984), *Stochastic wave propagation*, PWN- Elsevier, Warszawa.

K.Sobczyk (1991), *Stochastic differential equations with applications to physics and engineering*, Kluwer Acad.Publ., Dordrecht.

K.Sobczyk (1992), Korteweg-deVries solitons in a randomly varying medium, *Int.J.Non-Linear Mechanics*, vol.27, pp.1-8.

L.Socha (1991), A survey of quantitative and qualitative methods of sensitivity analysis for stochastic dynamic systems, in: Y.K.Lin, I.Elishakoff eds., *Stochastic Structural Dynamics I. New Theoretical Developments*, Springer, Berlin.

M.Sockell, J.Besieris, W.Kohler, H.Freese (1985), A Markov process model of ocean sediments, *Journal of the Acoustical Society of America*, vol.77, no.1, pp.74-82.

M.Sokołowski, Z.Wesołowski (1989), Elastic wave propagation in a two-component composite structure, *Archives of Mechanics*, vol.41, no.1, pp.157-163.

M.Sokołowski, Z.Wesołowski (1992), Dynamic effects of fracture in two-component composite rod, 29. *Polska Konferencja Mechaniki Ciała Stałego*, Ryto.

P.D.Spanos, C.A.Brebbia ed. (1991), *Computational Stochastic Mechanics*, CMP-Elsevier, Southampton.

A.A.Swiesznikow (1965), *Podstawowe metody funkcji losowych*, PWN, Warszawa.

V.I.Tatarskii (1967), *Wave propagation in turbulent medium*, Nauka, Moskwa.

E.Tassilly (1987), Propagation of bending waves in a periodic beam, *Int. J.Engng Sci.*, vol.25, no.1, pp.85-94.

J.J.Telega (1992), Justification of a refined scaling of stiffnesses of reissner plates with fine periodic structure, *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, vol.2, pp.375-406.

E.N.Thrower (1965), The computation of the dispersion of elastic waves in layered media, *J.Sound Vibration*, vol.2, pp.210-226.

W.T.Thomson (1950), Transmission of elastic waves through a stratified solid medium, *J.Appl.Phys.*,vol.21, 89-93.

J.J.Tuma (1976), *Handbook of Physical Calculations*, McGraw - Hill Book Company.

D.Turhan, Z.Celep, I.K.Zain-Edden (1991), Transient wave propagation in layered media conducting heat, *Journal of Sound and Vibration*, vol.144, no.2, pp.247-261.

V.N.Tutubalin (1965), On limit theorems for products of random matrices, *Prob. Th. Appl.*, vol.10, no.1, pp.19-32.

V.N.Tutubalin, On products of random matrices, *Th.Prob. Appl.*, pp.402-404, (1966?).

M.Tygel, P.Hubral (1985), Transient analytic point-source response of a layered acoustic medium, *Geophysics*, vol.50, no.9, pp.1466-1477 (part 1), pp.1478-1487 (part 2).

M.Tygel, P.Hubral (1987), *Transient waves in layered media*, Elsevier.

A.Tylikowski (1991), *Stochastyczna stateczność układów ciągłych*, PWN, Warszawa.

B.Ursin (1983), Review of elastic and electromagnetic wave propagation in horizontally layered media, *Geophysics*, vol.48, pp.1063- 1081.

B.J.Uscinski (1977), The elements of wave propagation in random media, McCraw-Hill, New York.

L.A.Wainstein (1963), Fale elektromagnetyczne, PWN, Warszawa.

A.D.Wentzell (1980), Wykłady z teorii procesów stochastycznych, PWN, Warszawa.

Z.Wesołowski (1985), Dynamics of a model of two-component medium, Archives of Mechanics, vol.37, no.6, pp.705-716.

Z.Wesołowski (1989), Akustyka ciała sprężystego, PWN, Warszawa-Poznań.

Z.Wesołowski (1989), Interaction between two pulses in nonlinear elastic material, Bull. of the Polish Academy of Sciences, Technical Sciences, vol.37, no.7-12, pp.401-406.

Z.Wesołowski (1991a), Nonlinear interaction between two shear waves in elastic material, Engineering Transactions, vol.39, no.1, pp.97-110.

Z.Wesołowski (1991b), Separation of variables for nonlinear wave equation, Bull. of the Polish Academy of Sciences, Technical Sciences, vol.39, no.1, pp.1-5.

Z.Wesołowski (1991c), One-dimensional sinusoidal wave in non-homogeneous elastic material, Bull. of the Polish Academy of Sciences, Technical Sciences, vol.39, no.3, pp.371-380.

Z.Wesołowski (1991d), Two transition layers between different homogeneous elastic materials, Bull. of the Polish Academy of Sciences, Technical Sciences, vol.39, no.3, pp.381-387.

Z.Wesołowski (1991e), Wave speeds in periodic elastic layers, Archives of Mechanics, vol.43, no.2-3, pp.271-286.

Z.Wesołowski (1991f), On the dynamics of the transition region between two homogeneous materials, Journal of Technical Physics, vol.32, no.2, pp.293-312.



J.E.White (1965), *Seismic waves: radiation, transmission and attenuation*, McGraw-Hill, New York.

G.B.Whitham (1974), *Linear and nonlinear waves*, A Wiley-Interscience, New York.

A.G.Yegorov (1989), Dumping of elastic waves in thin-layered saturated porous media, *Applied Mathematics and Mechanics*, vol.53, no.6, pp.911-918.

F.Ziegler (1969), Mean waves in laminated random media, *Int. J.Solid Structures*, vol.5, pp.893- 914.

F.Ziegler (1977), Wave propagation in periodic and disordered layered composite elastic materials, *Int.J. Solids Structures*, vol.13, pp.293-305.

F.Ziegler (1985), Instationäre Wellenausbreitung im geschichteten elastischen Körper, *ZAMM*, vol.65, no.4, pp.T15-25.

F.Ziegler, Y.H.Pao (1984a), Transient elastic waves in a wedge-shaped layer, *Acta Mechanica*, vol.52, pp.133-163.

F.Ziegler, Y.H.Pao (1984b), A note on transient elastic cylindrical waves in a dipping layer on top of a half-space, *ÖAW, Sonderdruck aus Sitzungsberichte, Abt II*, vol.193, no.8-10, pp.501-512.

F.Ziegler, Y.H.Pao (1990), Die Phasenfunktion kugeligter Wellen in der leilförmigen Oberflächenschicht, *ZAMM*, vol.70, no.4, pp.T222-T223.

F.Ziegler, Y.-H.Pao, Y.S.Wang (1985a), Generalized ray- integral representation of transient SH-waves in a multiply layered half-space with dipping structure, *Acta Mechanica*, vol.56, pp.1-15.

F.Ziegler, Y.H.Pao, Y.S.Wang (1985b), Transient SH waves in dipping layers: the burried line-source problem, *J. Geophysics*, vol.57, pp.23-32.

R.Zieliński (1972), *Generatory liczb losowych*, PWN, Warszawa.

L.A.Zolotukhina (1965), Probabilistic characteristics and asymptotic distributions of the summarized, singly reflected waves in a stochastic model of the laminar medium with an application in seismic investigations, Trudy of the Stiekhlov Mathematical Institute, vol.95, pp.21-41.

L.A.Zolotukhina, K.I.Latyshev, V.N.Chuchuyeva (1965), On stochastic models of a laminar medium and probabilistic properties of the reflected waves propagating in such media, Trudy of the Stiekhlov Mathematical Institute, vol.95, pp.42-97.

## 9. Dodatek.

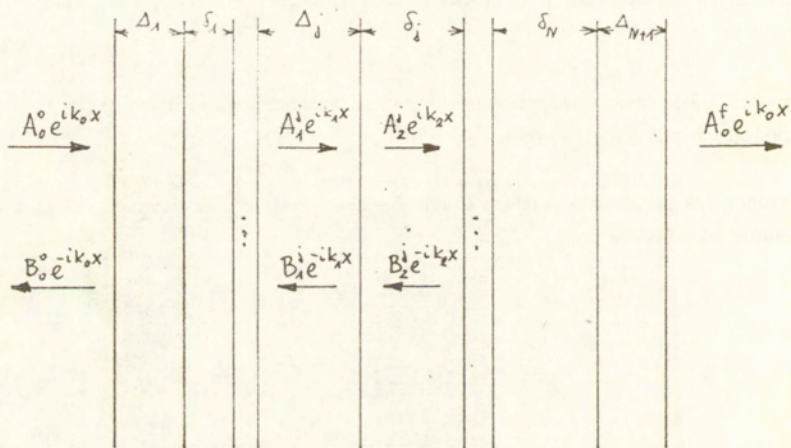
Na rysunkach zawartych w dodatku przedstawione są schematycznie modele ośrodków warstwowych omawianych w tej pracy.

Rysunek D1 przedstawia przebieg fal harmoniczych w jednowymiarowym ośrodku warstwowym (zagadnienie omówione w rozdziale 4).

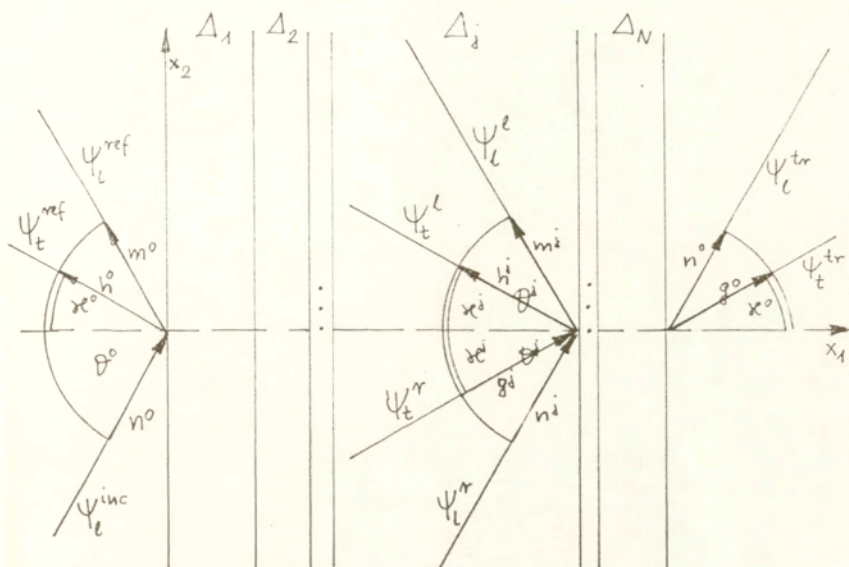
Rysunek D2 przedstawia położenie wektorów kierunków i przebieg dwuwymiarowych harmoniczych fal sprężystych w ośrodku warstwowym (zagadnienie omówione w rozdziale 5).

Rysunek D3 ilustruje zasadę zachowania energii dla harmoniczych fal sprężystych przechodzących przez warstwę (por. punkt 5.10).

Rysunek D4 przedstawia przebieg frontu impulsu w pręcie zbudowanym z dwóch segmentów jako funkcję czasu.



Rys.D1. Fala harmoniczna w jednowymiarowym ośrodku warstwowym (por. str. 37).



Rys.D2. Harmoniczna fala sprężysta w ośrodku warstwowym (zagadnienie dwuwymiarowe).

Oznaczenie wektorów kierunków (str.83) oraz biegnących wzdłuż tych kierunków fal:

$\Psi_1^{inc}(\mathbf{r})$  - fala padająca podłużnie spolaryzowana,

$\Psi_1^{ref}(\mathbf{r})$  - fala odbita podłużnie spolaryzowana,

$\Psi_1^{ref}(\mathbf{r})$  - fala odbita poprzecznie spolaryzowana,

$\Psi_1^r(\mathbf{r})$  - fala biegnąca w prawo, podłużnie spolaryzowana, (por.str.82-83)

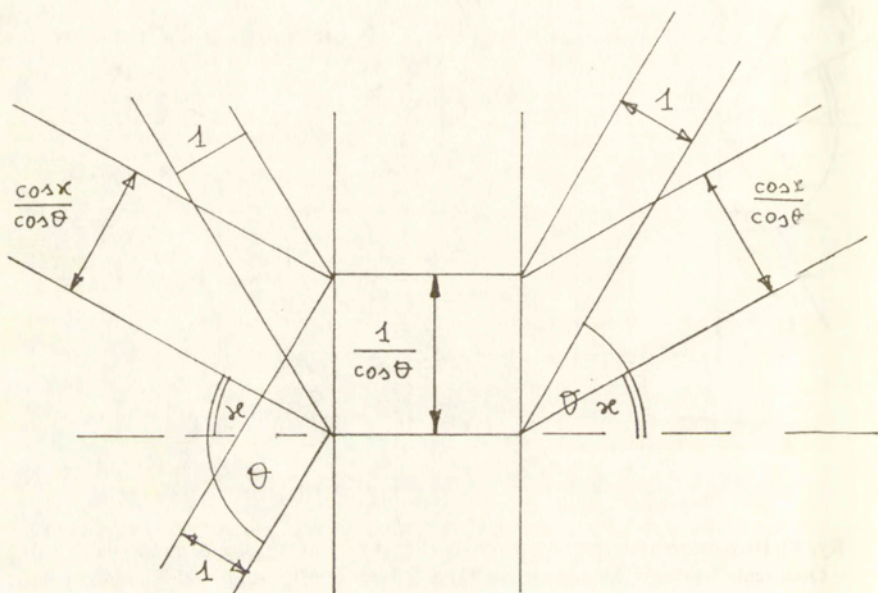
$\Psi_1^l(\mathbf{r})$  - fala biegnąca w lewo, podłużnie spolaryzowana, (por.str.82-83)

$\Psi_1^r(\mathbf{r})$  - fala biegnąca w prawo, poprzecznie spolaryzowana, (por.str.82-83)

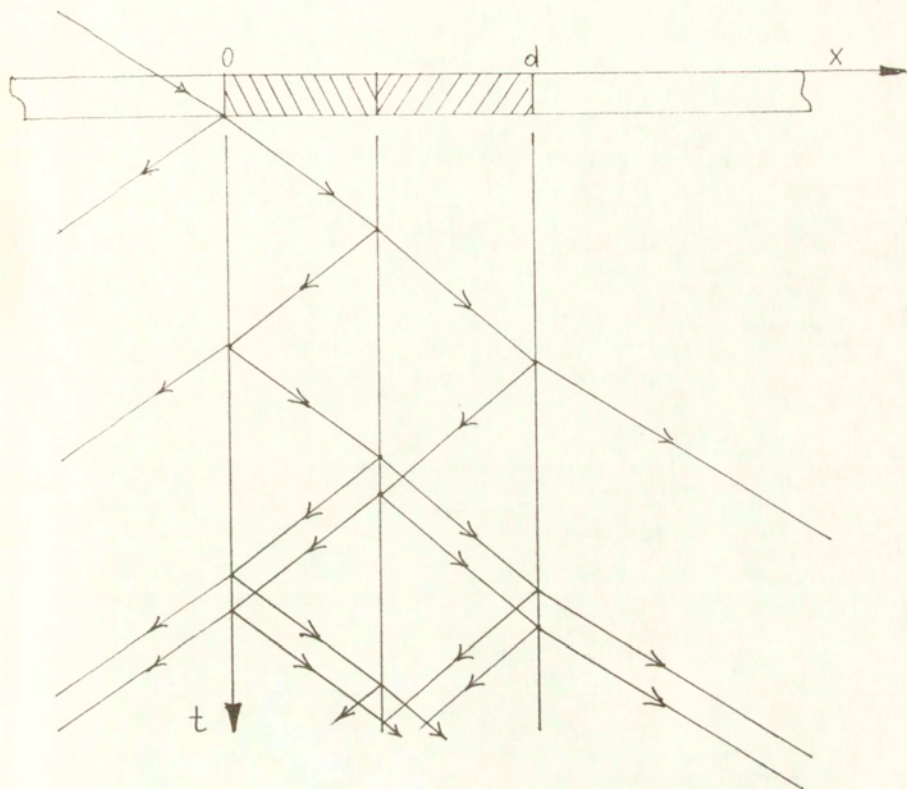
$\Psi_1^l(\mathbf{r})$  - fala biegnąca w lewo, poprzecznie spolaryzowana, (por.str.82-83)

$\Psi_1^{tr}(\mathbf{r})$  - fala przechodząca podłużnie spolaryzowana,

$\Psi_1^{tr}(\mathbf{r})$  - fala przechodząca poprzecznie spolaryzowana.



Rys.D3. Zasada zachowania energii dla fali sprężystej przechodzącej przez warstwę.



Rys.D4. Przebieg frontu impulsu w pręcie zbudowanym z dwóch segmentów jako funkcji czasu.