Kaufmann, Das Unendliche in der Mathematik

Das Unendliche in der Mathematik und seine Ausschaltung

von

Dr. Felix Kaufmann

Leipzig und Wien
FRANZ DEUTICKE

1/V 1930

Inw

Kat

Das Unendliche in der Mathematik und seine Ausschaltung

Eine Untersuchung
über die Grundlagen der Mathematik

Von

Dr. Felix Kaufmann
Privatdozent an der Universität Wien

Leipzig und Wien
Franz Deuticke
1930

Verlags-Nr. 3365

Manzsche Buchdruckerei, Wien IX. 2343

Vorwort.

Die vorliegende Arbeit behandelt die Grundlagenprobleme der Mathematik, die größtenteils mit dem Begriffe des Unendlichen verknüpft sind, und versucht über die wichtigsten umstrittenen Fragen zu klarer Entscheidung zu gelangen. Ihr Thema ist also Philosophie der Mathematik.

Aber das Wort „Philosophie" wird hier nicht in dem leider allzu gebräuchlichen Sinne von spekulativer Konstruktion verstanden, sondern es besagt: Verdeutlichung von Gedanken durch Besinnung (Reflexion). Daß hierin die zentrale Aufgabe einer von den positiven Wissenschaften zu trennenden Philosophie liegt, diese Einsicht bricht sich trotz aller metaphysischen „Abenteuer der Vernunft" unter den führenden Denkern der Gegenwart unaufhaltsam Bahn und ihr endgültiges Durchdringen wird auch das Ende der philosophischen „Richtungen" — deren verschiedene Terminologie oft weitgehende sachliche Übereinstimmung verschleiert — zur Folge haben.

Die Aufgabe einer Philosophie der Mathematik liegt also darin den Sinn der mathematischen Sätze, der mathematischen Begriffe und der mathematischen Methode zu voller Deutlichkeit zu bringen. Daß diese Problemstellung nicht nur prinzipiell berechtigt, sondern seit drei Jahrzehnten (dem Auftauchen der Antinomien) für die Mathematiker dauernd aktuell ist, wird kein mit den mathematischen Grundlagenfragen Vertrauter bestreiten. Unter den hiedurch vorgezeichneten Analysen sind die methodenkritischen Untersuchungen, welche die Aufweisung und Prüfung der im mathematischen Verfahren benutzten Voraussetzungen in sich schließen, besonders hervorzuheben. Daß ganz allgemein derartige Prüfungen zu bedeutsamen Ergebnissen führen können, dafür bietet besonders die moderne Physik prägnante Beispiele; man denke etwa an die Umgestaltung des Begriffes der Gleichzeitigkeit räumlich entfernter Ereignisse im Rahmen der Relativitätstheorie und an die Revision der in der Physik herrschend gewesenen Kausalitätsauffassung im Zusammenhange mit der Quantentheorie.

Die kritische Analyse der mathematischen Methode hat, wie wir erkennen werden, die Ausschaltung derjenigen Annahmen zur Folge, die zur Einführung des aktual Unendlichen und insbesondere des unabzählbar Unendlichen in die Mathematik führen, doch wird hiedurch keineswegs, wie meist behauptet, das Gebäude der klassischen Mathematik erschüttert.

Wie aus dem eingangs Gesagten bereits unzweideutig hervorgeht, werden sich die folgenden Untersuchungen auf keine „Standpunktsphilosophie" stützen, also keinerlei Voraussetzungen von außen her an die zu analysierenden Sachverhalte heranbringen dürfen; sondern sich allein an diesen Sachverhalten selbst zu orientieren haben.

Das Verständnis für diese sachliche Einstellung haben mir die philosophischen Werke Edmund Husserls eröffnet und hiefür — aber nicht hiefür allein — bin ich ihm stets zu tiefem Dank verpflichtet.

Ich bin vor ungefähr 13 Jahren durch das Studium der Antinomien der Logik und Mengenlehre zu den in dieser Arbeit behandelten Problemen geführt worden und immer wieder zu ihnen zurückgekehrt. Denn wer sie einmal recht erfaßt und erkannt hat, ein wie wesentlicher Teil der logisch-erkenntnistheoretischen Fragen, gleichsam in Reinkultur, in ihnen enthalten ist, der kommt nicht mehr von ihnen los.

Aber trotzdem wäre diese Arbeit wohl kaum zustandegekommen, wenn ich nicht durch Teilnahme an den Diskussionen eines Kreises von Philosophen und Mathematikern, in welchem — unter Leitung der Herrn M. Schlick und H. Hahn — seit nunmehr sechs Jahren Grundlagenprobleme der Mathematik behandelt werden, fortgesetzt wichtige Anregungen empfangen hätte.

Überhaupt habe ich in den letzten Jahren immer wieder die Gelegenheit gesucht und gefunden, die einschlägigen Probleme zu erörtern, um sachliche Mängel und Mängel der Darstellung bei ihrer Behandlung zu vermeiden oder zu beseitigen. Für ihre Unterstützung hiebei danke ich herzlich den Herren Oskar Becker, Freiburg i. Br., Adolf Fraenkel, Kiel, Moritz Geiger, Göttingen, Hans Hahn, Wien, Carl Gustav Hempel, Berlin, Karl Menger, Wien, Friedrich Waismann, Wien; ganz besonders aber Herrn

Heinrich Behmann, Halle a. d. Saale, und Herrn Rudolf Carnap, Wien.

Diejenigen Arbeiten, auf welche sich die folgenden Untersuchungen stützen oder kritisch beziehen, werden im allgemeinen im Text und in den Anmerkungen hinreichend hervorgehoben, so daß hier ein besonderer Hinweis unterbleiben kann; an dieser Stelle möchte ich nur auf die Ähnlichkeit meiner Auffassung in der Frage des unabzählbar Unendlichen mit derjenigen der großen französischen Funktionentheoretiker Borel, Baire, Lebesgue hinweisen, da dies in der Arbeit selbst vielleicht nicht deutlich genug zum Ausdruck kommt.

In der am Ende dieses Buches zu findenden Zusammenstellung des Schrifttums sind nur jene Arbeiten berücksichtigt, auf die bereits in den Anmerkungen zum Text Bezug genommen worden ist; der Leser, der ein fast alle wichtigeren Publikationen enthaltendes Literaturverzeichnis wünscht, findet es (für die bis Mitte 1928 erschienenen Schriften) in der dritten Auflage von A. Fraenkels „Einleitung in die Mengenlehre".

Diese Arbeit wendet sich zwar in erster Linie an solche Leser, die schon Vertrautheit mit der einschlägigen Problematik besitzen, doch werden — einige gelegentliche Textstellen und Anmerkungen ausgenommen — keine besonderen Vorkenntnisse in der Mathematik und symbolischen Logik vorausgesetzt. Sie ist also auch solchen Forschern und Studierenden zugänglich, die, vorwiegend für allgemein erkenntnistheoretische Probleme interessiert, die mathematische und logistische Technik nur in geringem Maße beherrschen.

Wien, im Dezember 1929.

Inhaltsverzeichnis.

VI. Das Problem der durchgängigen Entscheidbarkeit arithmetischer Fragen.

Einleitung.

Als es der mathematischen Forschung im vorigen Jahrhundert gelang, den Begriff des Unendlichkleinen aus der Infinitesimalanalysis auszuschalten, wurde dies als großer Fortschritt im Sinne des Postulates der Reinheit der mathematischen Methode angesehen[1]). Hatte doch vor allem der princeps mathe-

[1]) Es werde aber nicht übersehen, daß die Schöpfer des Infinitesimalkalküls, Newton und Leibniz, sich über dessen finiten Charakter keineswegs im unklaren waren. Dies mögen die folgenden Belegstellen vor Augen führen:

„Ultimae rationes illae quibuscum quantitates evanescunt revera non sunt rationes quantitatum ultimarum, sed limites ad quos quantitatum sine limite decrescentium rationes semper appropinquant et quas proprius assequi possunt, quam pro data quavis differentia, nunquam vero transgredi." Newton, „Principia Philos. naturalis", Amsterdam 1723, p. 23.

„In finitis autem quantitatibus analysin instituere et finitarum nascentium vel evanescentium rationes primas vel ultimas investigare, consonum est geometriae veterum: et volui ostendere quod in methodo fluxionum non opus sit figuras infinite parvas in geometriam inducere." Newton, „Tractatus de curvata curvarum".

„Videndum an exacte demonstrari possit ..... quod differentia non tantum sit infinite parva, sed omnino nulla quod ostendetur, si constet, eo usque semper posse inflecti polygonum ut differentia assumta etiam infinite parva minor fiat error. Leibniz, „Math. Schriften" ed C. I. Gerhardt, B. 5, p. 217. Die drei Belegstellen zit. nach A. Voss, „Über das Wesen der Mathematik", 2. Aufl., Berlin 1913, S. 20, Anm.

Aber durch die von Leibniz eingeführte, für die heuristische und Rechentechnik vorzüglich geeignete Symbolik, die sich allgemein durchgesetzt hat, wurde der Anschein eines Operierens mit unendlich kleinen Größen erweckt, und so bedurfte es im vorigen Jahrhundert der ganzen geistigen Energie eines Cauchy und Weierstraß, um den finiten Charakter des Infinitesimalkalküls zur Anerkennung zu bringen. Bei dem Operieren mit dem Unendlichkleinen haben auch — teilweise auf Leibniz zurückgehende — metaphysische Spekulationen eine Rolle gespielt. Unter den modernen philosophischen Richtungen hat die „Marburger Schule" erkenntnistheoretische Folgerungen aus einer mit dem Begriff des Unendlichkleinen arbeitenden Infinitesimaltheorie — derjenigen Hermann Cohens — gezogen. Über die Unhaltbarkeit dieser Cohenschen Theorie besteht aber heute kaum mehr ein Zweifel.

maticorum, Gauß, — wohl unter dem Einflusse der Kantschen Vernunftkritik — diesen Begriff als unmathematisch abgelehnt, und auch die meisten anderen unter den schöpferischen Mathematikern jener Zeit konnten sich der Tatsache nicht verschließen, daß das Unendlichkleine einen recht unerbetenen Gast in dem wohl umgrenzten Bereiche der mathematischen Erkenntnis darstelle.

Mit Mißtrauen wurden daher in den letzten Jahrzehnten dieses Jahrhunderts die Thesen Georg Cantors aufgenommen, der in seiner Mengenlehre eine Mathematik des „aktual Unendlichen" aufzubauen unternahm und behauptete, daß die Reihe der natürlichen Zahlen über das Endliche hinaus fortgesetzt werden müsse, wenn man nicht bestimmten, logisch völlig erfaßbaren Sachverhalten seine Anerkennung versagen wolle. Vor allem hat L. Kronecker, einer der bedeutendsten Mathematiker unter den Zeitgenossen Georg Cantors, diese Thesen auf das entschiedenste bekämpft.

Aber die anscheinend durchschlagende Beweiskraft der Cantorschen Argumentation trug den Sieg über alle Einwände davon, und seit dem Beginn unseres Jahrhunderts wird seine „Mengenlehre" von den kompetenten Forschern als legitime mathematische Disziplin angesehen.

Hiezu trug wesentlich der Umstand bei, daß die Cantorschen Entdeckungen sich als äußerst fruchtbringend für eine der wichtigsten mathematischen Disziplinen, die Funktionentheorie, erwiesen. Zur Beunruhigung gab dagegen der Umstand Anlaß, daß die konsequente Durchführung der Cantorschen Prinzipien zu Widersprüchen führte.

Aber den Bemühungen der Mathematiker — wir nennen E. Zermelo und A. Fraenkel — gelang es oder schien es gelungen zu sein, die Mengenlehre in der Weise aus einem System von Axiomen abzuleiten, daß die widerspruchsvollen („paradoxen") Mengen fortfielen, wogegen die als legitim betrachteten Ergebnisse Cantors im wesentlichen bestehen blieben.

Trotzdem konnte es den tiefstblickenden unter den Mathematikern nicht entgehen, daß die verschiedenen Axiomatiken Bauten auf unsicherem Grunde darstellen, und so ist das Streben, diesen als unbefriedigend erkannten Zustand der mathematischen Erkenntnis zu beseitigen, nicht mehr zur Ruhe gekommen.

Heute stehen sich bezüglich dieser Probleme vor allem der Formalismus Hilberts, der Intuitionismus Brouwers und Weyls und der Logizismus Russells gegenüber und meiner Meinung nach wurde das schwierigste Stück des Weges zu ihrer Lösung bereits durchmessen, wobei freilich auf jeder der drei Seiten nur ein Teil der Wahrheit liegt. Daß aber endgültige Klarheit nicht erreicht wurde, führe ich in erster Linie darauf zurück, daß es dem in die Symbolik seiner Wissenschaft eingelebten Mathematiker besonders schwer fällt, sich aus dem Bannkreise dieser Symbolik zu befreien und unvoreingenommen zu den Sachverhalten selbst vorzustoßen, die durch die Symbolik bezeichnet werden.

Demgegenüber wird im folgenden der Nachweis erbracht werden, daß eine der Hauptwurzeln der das „aktual Unendliche" (das Transfinite im Sinne Cantors) betreffenden Problematik in der Verwendung der mathematischen Symbolik über ihren Sinnbereich hinaus zu finden ist und daß, sobald deren — im Kantschen Sinne — „überschwänglicher", d. i. sachlich nicht mehr gerechtfertigter Gebrauch ausgeschaltet wird, ohne allzugroße Schwierigkeit sich der Weizen von der Spreu, die echte Erkenntnis von der Scheinerkenntnis sondern läßt.

Wir wollen bereits hier das allgemeine Schema jenes für die mathematische Heuristik gefährlichen Irrweges des Denkens kurz skizzieren. Es sind folgende drei Schritte zu unterscheiden:

Der erste besteht in einer echten mathematischen Erkenntnis; an diese knüpft sich dann zweitens eine über den faktischen Erkenntnisgehalt in einer bestimmten Richtung hinausgehende Interpretation, welche in der Einführung einer bestimmten Symbolik ihren Ausdruck findet; drittens endlich wird dann — im Anschluß an die Interpretation — diese Symbolik auch dort verwendet, wo die ursprünglich durch sie bezeichneten Erkenntnisobjekte fehlen, wodurch deren Existenz vorgetäuscht wird[1]).

[1]) Demgemäß werden wir im folgenden erkennen, daß bei einem Teil der Aussagen über das „Unendlichgroße" dieser Begriff — analog dem „Unendlichkleinen" in der Analysis — ausgeschaltet und durch finite Begriffe ersetzt werden kann, ohne daß sich an dem sachlichen Gehalt der betreffenden Sätze etwas ändert. Bei anderen Sätzen dagegen, in denen das „Unendlichgroße" auftritt, u. zw. bei denjenigen, wo vom „unabzählbar Unendlichen" die Rede ist, wird eine solche „Übersetzung" nicht möglich sein. Diese Sätze werden sich als Scheinurteile herausstellen und aus der Mathematik auszumerzen sein.

Setzt dann die Kritik gegen jenen überschwänglichen Gebrauch der Symbolik ein, so fürchtet der Mathematiker (mit Unrecht), daß die Antastung der Symbolik auch jenen Bestand von Erkenntnissen gefährde, den er (mit Recht) als gesichert ansieht. Es greift dann die seltsame Auffassung Platz, daß „allzu große Strenge“ zu einer Verarmung der mathematischen Erkenntnis führe und man sich darum vor einer Überspannung dieser Forderung hüten müsse.

In Wahrheit aber hat die Bezeichnung auf unstrengem Wege erreichter Ergebnisse als „Erkenntnis“ nur dann Berechtigung, wenn dieselben Ergebnisse auch auf einwandfreiem Wege gewonnen werden können.

Um hier klar zu sehen, werden wir im folgenden auf das schärfste zwischen den mathematischen Operationen einerseits und der Interpretation dieser Operationen anderseits zu unterscheiden haben. In jenen allein liegt der Erkenntnisgehalt der Mathematik beschlossen, mag auch diese unter Umständen heuristisch noch so wichtig sein. Es wird sich dann, wie bereits oben angedeutet wurde, zeigen, daß die Mathematiker — ebenso wie die Forscher in den meisten anderen Wissenschaften — den Erkenntnisgehalt der Symbolik ihrer Wissenschaft nur selten vollkommen durchschauen und daß gerade hier einer der wichtigsten psychologischen Ansatzpunkte für die Problematik des Transfiniten zu finden ist.

Diese kurzen allgemeinen Feststellungen werden ihr volles Licht erst von den im folgenden durchzuführenden Untersuchungen her erhalten; doch sei bereits an dieser Stelle angemerkt, daß in den eben schematisierten Fehlargumentationen auch die Ansatzpunkte für metaphysische Umdeutungen gewisser für die Erkenntnis fundamentaler Sachverhalte liegen[1]).

Schon die vorstehenden Bemerkungen lassen ahnen, in welch engem Zusammenhang die Problematik des Transfiniten in der Mathematik mit grundlegenden Problemen der Erkenntnistheorie steht. Im folgenden aber wird sich die — auch auf anderen Gebieten festzustellende — Erkenntnistatsache mit voller Deutlichkeit weisen, daß wichtige methodologische Probleme, die an den Grenzen der Spezialwissenschaften (hier der Mathematik) auftauchen, um dort ihrer Lösung oder, wo es sich um Scheinprobleme handelt, ihrer Auflösung entgegengeführt zu werden,

[1]) Vgl. hiezu unten S. 15, Anm. 1.

allgemeine Erkenntnisprobleme sind. Eben darum aber muß man auch, um zu den methodologischen Grundproblemen der Spezialwissenschaften den rechten Zugang zu finden, — und um methodologische Fragen handelt es sich überwiegend auch bei der Problematik des Transfiniten — von Betrachtungen allgemeinster Art seinen Ausgang nehmen, an die Grundtatsachen der Erkenntnis anknüpfen. Die Aufweisung derjenigen dieser Grundtatsachen, deren klare Erfassung für unsere Spezialanalysen von Wichtigkeit ist, soll im nächsten Abschnitt erfolgen.

I. Grundtatsachen der Erkenntnis.

Wenn wir uns in der „natürlichen Einstellung" des Erlebens dem Geschehen in Raum und Zeit zuwenden, so finden wir eine Fülle von Dingen mit mannigfachen Eigenschaften vor und weiter entdecken wir Beziehungen zwischen der Vorfindlichkeit von Dingen gleicher oder verschiedener Art, dergestalt, daß entweder beide regelmäßig gleichzeitig oder aber in bestimmter zeitlicher Folge aufweisbar sind.

Hiebei ist die „Welt", deren wir gewahr werden, gemeint als ein unabhängig von unserem oder irgend einem anderen Denken Bestehendes, ein schlechthin Daseiendes; weder bedarf dieses Daseiende als solches des Erkanntwerdens, noch wird es hiedurch in seiner Faktizität oder in seinem Charakter (seiner Wesensart) geändert. Wir denken also die Welt unabhängig von der Tatsache bestimmter auf sie gerichteter Denkakte.

Aber sobald wir in der — einsichtigermaßen möglichen — Reflexion das Denken der Welt betrachten, wird das Seiende zur Gegebenheit, und es entsteht die Frage, ob bzw. inwieweit innerhalb der Gegebenheit die Trennung der dem Subjekt (Sensorium und Verstand) und der den Dingen zuzurechnenden Momente vollziehbar ist.

Daß überhaupt subjektive Momente zu berücksichtigen sind, darauf ist man im historischen Verlauf des philosophischen Denkens wohl zuerst auf Grund der Tatsache gestoßen, daß die Wahrnehmungsinhalte nicht nur durch Umgestaltungen am Objekt, sondern auch durch Veränderungen der Betrachtungsweise (Standort, farbige Brille usw.) beeinflußt werden. Hieran haben sich dann die übereilten Thesen von der „bloßen Subjektivität der Sinnenwelt" angeschlossen.

Aber ebenso wie die Analyse vom Objekt her zu subjektiven Momenten führt, indem sie zeigt, daß jede Bestimmung des Gegenstandes auf Erkenntnis hinweist und daher das Sein nicht vom Erkennen loszulösen ist, ebenso führt die von den subjektiven Momenten ausgehende Analyse zum Objekt zurück, indem sie zeigt, daß im Denken dasjenige, woran gedacht wird, der Gegenstand des Denkens, in spezifischer Weise „enthalten" ist. Es ist dies die Grundtatsache der Intentionalität, welche in voller Deutlichkeit zuerst von Franz Brentano erfaßt worden ist und im Zentrum jeder korrekten deskriptiven Analyse des Denkens — mag sie sich nun Phänomenologie, deskriptive Psychologie oder Erkenntnistheorie nennen — ihren Platz finden muß.

Wir können den im vorstehenden gekennzeichneten fundamentalen Zusammenhang zwischen Erkenntnis und Sein wie folgt präzisieren:

Jeder Erkenntnisakt geht auf einen unabhängig von diesem Akte bestehend gedachten Sachverhalt in der physischen oder psychischen (bzw. psychophysischen) Welt. Kein Sachverhalt ist denkbar, der prinzipiell unerkennbar wäre[1]).

Die erste der beiden Feststellungen bezeichnet man als das Prinzip der „Transzendenz des Erkennens", die zweite wollen wir mit O. Becker[2]) „Phänomenologisches Zugangsprinzip" nennen. Machen wir uns den Sinn dieser beiden Prinzipien an einem einfachen Beispiele klar: Wenn wir — etwa auf Grund eines unmittelbaren visuellen Erlebnisses — das Urteil fällen: „Einige Schritte von hier (von unserem Standpunkte) befindet sich ein Haus", so liegt in diesem Urteil über die Existenz des Hauses die These eingeschlossen, daß es „da ist", gleichgültig, ob es betrachtet wird oder nicht; andrerseits aber hätte es keinen Sinn zu behaupten: das Haus existiert, aber es ist prinzipiell — nicht etwa bloß aus technischen Gründen — unwahrnehmbar. Denn die Urteile über seine sinnlichen Qualitäten — Gestalt, Farbe usw. — setzen ebenso die Möglichkeit eines Betrachters voraus, wie die Aussagen über das „Jetzt und Hier" — bzw.

[1]) Neuerdings wurde von N. Hartmann in seinem Werke „Grundzüge der Metaphysik des Erkennens", 2. Aufl., Berlin 1925, die entgegengesetzte These verfochten, daß man transintelligibles, d. h. der Erkenntnis prinzipiell unzugängliches Sein anzunehmen habe. Die Auseinandersetzung mit Hartmanns Argumenten für diese seine These soll in einem anderen Rahmen erfolgen.

[2]) „Mathematische Existenz", Jahrbuch für Philosophie und phänomenologische Forschung, 8. Bd., S. 439—809f., 1927, S. 502. In seiner früheren Arbeit „Beiträge zur phänomenologischen Begründung der Geometrie und ihrer physikalischen Anwendungen", ebenda Bd. 6, S. 385—560, 1923, bezeichnete Becker diese Behauptung als „Prinzip des transzendentalen Idealismus" (S. 387f.).

„Dann (Damals) und Dort“ — seiner Existenz, welches nur in Relation zu einem „festen“ Betrachterstandpunkt bestimmt werden kann.

Mit diesen beiden vorhin als Einbruchsstellen der Subjektivität in das Denken gekennzeichneten Momenten haben wir aber auch bereits eine Grundzäsur angedeutet, die das gesamte Denken durchzieht. Wir wollen sie, einer gebräuchlichen Terminologie folgend, als Unterscheidung zwischen *So-sein* und *Da-sein* bezeichnen.

Die Aussagen über So-sein geben Antwort auf die Fragen nach dem „*Wie*“; die Aussagen über Da-sein auf Fragen nach dem „*Wo und Wann*“ der Gegenstände (Sachverhalte). Bestimmungen der ersten Art können nun mit Bestimmungen der zweiten Art in der Weise verknüpft sein, daß von räumlich-zeitlich lokalisierten Gegenständen (Sachverhalten) gewisse Eigenschaften ausgesagt werden. Dies geschieht z. B. in dem Satze: „Die Mehrzahl der derzeit in Wien stehenden Häuser hat braune Dächer.“ Um die Wahrheit oder Falschheit dieser Behauptung festzustellen, hat man über gewisse Einzelobjekte (die Wiener Häuser) Beobachtungen anzustellen, und es ist wesentlich für die Prüfung einer solchen Behauptung, daß die Beobachtungen *gerade an diesen bestimmten* Einzelobjekten angestellt werden. Anders steht es mit den *reinen So-seins-Aussagen*. Zwar verhält es sich auch hier keineswegs solcherart, daß das So-sein vom Da-sein unabhängig wäre; aber es fehlt dessen nähere Bestimmung; d. h. die räumlich-zeitliche Lage der ihrem So-sein nach gekennzeichneten Gegenstände bleibt unbestimmt.

Wenden wir uns, um das Gesagte zu begreifen, dem Erkenntnisprozeß zu, den wir vollziehen, wenn wir eine Aussage über eine bestimmte sinnliche Qualität machen, beispielsweise eine *Farbe*, die wir an einem vor unseren Augen befindlichen farbigen Gegenstand aktuell erfassen. Stellen wir etwa fest, daß die Farbe nach drei Richtungen hin variieren kann, und zwar nach Farbton (rot, blau, grün usw.), Helligkeit und Sättigung, so ist es einleuchtend, daß diese Konstatierung sich nicht nur auf die an dem unmittelbar vorliegenden Gegenstand erfaßte Farbe bezieht, sondern in gleicher Weise von *jeder beliebigen* Farbe gilt. Wir erfassen also einen *Wesenszug* der Farbe an einem bestimmten — jetzt und hier seienden — Gegenstand *bestimmter* Farbe; daß jedoch der Gegenstand gerade jetzt und hier wahrzunehmen ist und daß er gerade diese bestimmte Farbe hat, diese Tatsachen gehen in den Inhalt unserer Erkenntnis des Wesens der Farbe nicht ein. Es wird von ihnen abstrahiert, aber diese Abstraktion besagt nicht, daß dem Wesen der Farbe ein Sein jenseits von Raum und Zeit zukomme und daß „neben" oder „über" den bestimmten an realen Gegenständen auftretenden Farben auch eine Farbe für sich bestünde, sondern es handelt sich hiebei um nichts anderes, als um die Feststellung der Invarianz bestimmter Momente gegenüber Variationen gewisser Art. Die Aussagen über das Wesen der Farbe gelten für farbige Gegenstände, wo immer und wann immer sie existieren mögen.

Diesem Sachverhalte trägt die Ausdrucksweise Rechnung, wonach einer Aussage über Farbe oder ganz allgemein über eine Qualität diejenige über alles Farbige bzw. über alle Dinge dieser Qualität gleichgesetzt wird. Aber man muß sich darüber klar sein, daß durch eine solche Qualitätsaussage die Gesamtheit der Gegenstände, welche diese Qualität besitzen, weder gegeben ist, noch in ihr als gegeben vorausgesetzt wird. Diese Aussage bestimmt also durchaus nicht eine Gesamtheit wohlunterschiedener Dinge, denen diese Qualität zukommt. Zwar läßt sich an jedem einzelnen gegebenen Dinge entscheiden, ob es die fragliche Qualität besitzt oder nicht; aber dafür, daß ein Ding „gegeben" sei, ist das principium individuationis erforderlich.

Noch ein Beispiel zur Erläuterung dieser für unsere Spezialuntersuchungen besonders wichtigen Punkte: Wenn man von den zu einer bestimmten Zeit lebenden Einwohnern von London spricht, so ist hiedurch zugleich ein Kriterium angegeben, auf Grund dessen man prinzipiell jeden einzelnen Menschen ermitteln kann, der unter den fraglichen Begriff fällt, wie dies z. B. bei einer Volkszählung tatsächlich geschieht; daher ist es auch grundsätzlich möglich, über die Einwohner von London zu einer bestimmten Zeit Feststellungen zu machen, die nicht schon in dem Begriffe „Einwohner von London" enthalten sind. Es läßt sich etwa feststellen, ob die Körpergröße sämtlicher Einwohner von London in dem Intervall zwischen 40 cm und 2 m liegt.

Trifft dies zu, so wird man sagen, daß alle Einwohner von London eine Körpergröße zwischen 40 cm und 2 m besitzen, aber dieses „alle" hat nicht denselben Sinn, wie der gleiche Terminus dort, wo wir von allen farbigen Dingen sprachen. Um dies einzusehen, hat man zunächst darauf zu achten, daß hier mit jenem Ausdruck zwei verschiedene Bedeutungen, die meist nicht auseinandergehalten werden, verbunden werden können. Die eine Bedeutung ist: „Kein Einwohner von London hat eine Körpergröße, die nicht zwischen 40 cm und 2 m liegt", oder — was das gleiche besagt —: „Wenn ein Gegenstand Einwohner von London ist, so hat er eine Körpergröße zwischen 40 cm und 2 m." Dieser Satz ist wahr, wenn es keinen Einwohner von London gibt. In der zweiten Bedeutung aber wird der eben genannten verneinenden bzw. hypothetischen Behauptung noch die Existentialbehauptung: „Es gibt einen Einwohner von London" konjungiert und diese und daher auch die zusammengesetzte Behauptung ist falsch, wenn es keinen Einwohner von London gibt.

Gleichgültig aber, ob man die erste oder die zweite Behauptung zugrunde legt, wird man, um über die Wahrheit oder Falschheit solcher empirischer Aussagen zu entscheiden, Untersuchungen über die Existenz von einschlägigen Gegenständen anzustellen haben, um entweder festzustellen, daß solche nicht existieren, oder aber, wenn sie existieren, ob sämtliche vorhandenen Exemplare der in Frage stehenden Behauptung genügen. Gibt es also — um zu unserem Beispiel zurückzukehren — Einwohner von London, so sind Aussagen von der Art der vorgenannten über „alle Einwohner Londons" in Wahrheit nur Zusammenfassungen von Aussagen über den Einwohner A, den Einwohner B, den Einwohner C usw. über jeden Gegenstand, der unter den Begriff „Einwohner von London" fällt, und nur über solche Gegenstände. Daß eine solche empirische All-Aussage überhaupt verifizierbar ist, setzt — wie schon hier festgestellt sei, aber im folgenden noch näher begründet werden wird — eine räumlich-zeitliche Umgrenzung, ein principium individuationis voraus.

Demgemäß aber — und damit kommen wir zu der Festlegung des grundsätzlichen Unterschiedes zwischen empirischen und nicht-empirischen All-Aussagen — sind andere Aussagen über „alle farbigen Gegenstände schlechthin" als solche, die bereits aus dem Wesen der farbigen Gegenstände (der Farbe) folgen, nicht möglich. Denn eine Frage nach der empirischen Existenz findet hier überhaupt keinen Platz und die Zerlegung in Einzelaussagen ist mangels principii individuationis ausgeschlossen.

Wir werden im folgenden erkennen, daß die mangelnde Trennung von empirischen und nicht-empirischen All-Aussagen, bzw. Existenzaussagen eine der Hauptquellen der Schwierigkeiten ist, die sich bei der Grundlegung der Mengenlehre ergeben.

Im Rahmen der diesen Abschnitt bildenden erkenntnistheoretischen Erörterungen aber haben wir unser Augenmerk zunächst darauf zu lenken, daß die eben durchgeführte Unterscheidung in engem Zusammenhange mit derjenigen Zäsur steht, durch welche die gesamte Erkenntnis in Erkenntnis a priori und Erkenntnis a posteriori eingeteilt wird[1]).

Die moderne Philosophie hat den Charakter dieser Unterscheidung klar herausgearbeitet und gezeigt, daß die Grunddivergenz zwischen jenen beiden Erkenntnisarten darin besteht, daß die Erkenntnis a posteriori sich auf den Einzelfall als solchen bezieht, weshalb ihre Gültigkeit grundsätzlich an diesen gebunden erscheint, während für die Erkenntnis a priori der Einzelfall, an dem der allgemeine Wesenszug erfaßt wird, nur als Beispiel für diesen Wesenszug erscheint, welches auch durch ein anderes Beispiel ersetzt werden könnte[2]).

Es wird also in der Erkenntnis a priori von allen empirischen Fakten, wonach Dinge bestimmter Eigenschaften — oder Dinge, zwischen denen Beziehungen bestimmter Art bestehen — an einem festgelegten Ort zu einer festgelegten Zeit existieren, abstrahiert und hiedurch werden die Eigenschaften und Beziehungen ihrer spezifischen Eigenart nach gedanklich isoliert. Aber es sei nachdrücklich betont, daß dieser gedanklichen Isolierung keine Selbständigkeit — im Platonischen Sinne — entspricht.

So kann beispielsweise ein „Rot" nicht selbständig auftreten, sondern nur an einem räumlich ausgedehnten Dinge. Aber anderseits werden Dinge beschrieben durch ihre Eigenschaften; diese sind Stoff der Erkenntnis, Prädikationen über das Ding-Subjekt. Es ist also zwar das Einzelding allein „real", aber

---

[1]) Sie ist aber von der philosophischen Grundauffassung weitgehend unabhängig. Denn ob man die nicht-empirischen All- und Existenzaussagen als Urteile a priori oder als verkappte Tautologien auffaßt, ändert nichts an der Einsicht ihrer prinzipiellen Verschiedenheit von den empirischen All-Aussagen bzw. Existenzaussagen.

[2]) Gegenüber dem Kantschen a priori besteht freilich vor allem der wesentliche Unterschied, daß von diesem nur die Grundlagen der Erfahrung überhaupt erfaßt werden, aber nicht die Grundlagen bestimmter (sachhaltiger) Erfahrungen, also beispielsweise des Wesens der Farbe.

es baut sich in Qualitäten auf, die sohin ihm gegenüber einfacher sind, ihm gegenüber ein logisches prius bedeuten.

Von diesem Sachverhalt mußte alle ontologische Forschung ihren Ausgang nehmen; er bildet sowohl die Hauptquelle des Realismusstreites, ob den wirklichen Dingen oder den Gattungen Priorität zukomme, als auch des Substanzproblems; von Problemen also, mit denen die antike und die mittelalterliche Philosophie gerungen haben und deren Bewältigung eines der Ziele der Kantschen Vernunftkritik war.

Aber Unselbständigkeit kommt nicht nur den Eigenschaften im Verhältnis zu den körperlichen Dingen zu; sie findet sich ebenso — mit gewissen Modifikationen — auf anderen Stufen des Aufbaus der Gegenständlichkeit.

Wir wollen dies in Anknüpfung an das oben herangezogene Beispiel verdeutlichen. Zu jeder Farbe gehören Farbton (rot, blau, grün), Helligkeit und Sättigung, und diese drei Momente können unabhängig voneinander variieren, d. h. jeder Farbton kann in allen Graden der Helligkeit und der Sättigung auftreten, und auch von den beiden letzten Momenten wird keines durch das andere bestimmt. Die Farbe nun mit ihrem bestimmten Ton, ihrer bestimmten Helligkeit und bestimmten Sättigung ist der Wahrnehmung als einheitliches Phänomen gegeben und erst dessen Analyse, nämlich die Reflexion auf die Variationen nach den verschiedenen Richtungen hin, führt auf die genannten Momente, die isoliert betrachtet werden, obwohl sie nicht isoliert bestehen können[1]). Aber anderseits sind sie das Einfachere, denn das Farbphänomen weist sie vereinigt auf, und sie stehen daher zu diesem im Verhältnis von Elementen zum

---

[1]) Mit der Einsicht, daß die Erfassung des So-seins an einem beliebigen Exemplar eine spezifische Erkenntnisweise darstellt, erledigt sich auch die sensualistische Abstraktionstheorie, wonach die Abstraktion in der Zusammenfassung von Gemeinsamkeiten empirisch vorliegender Gegenstände besteht. Sie enthält, wie Husserl in der zweiten seiner „Logischen Untersuchungen", 3. Aufl., Halle 1922 (II/1, S. 106ff.) gezeigt hat, einen circulus vitiosus, da sie die Bestimmtheit des zu isolierenden Gemeinsamen bereits voraussetzt. Aus dieser fehlerhaften Voraussetzung ergibt sich dann die Konsequenz, daß durch jede Eigenschaft eine Gesamtheit von Dingen mit dieser Eigenschaft eindeutig bestimmt ist (Komprehensionsprinzip).

Russell hat die Unhaltbarkeit des sensualistischen Abstraktionsprinzips erkannt, aber er hat daraus nicht die Konsequenz gezogen, auch das Komprehensionsprinzip aufzugeben.

Komplex. Ein solches Verhältnis aber darf keineswegs als Summation aufgefaßt werden. Ganz abgesehen davon, daß von einer solchen richtigerweise nur bei Zahlen gesprochen werden kann, liegt hier nämlich nicht eine bloße Aneinanderreihung, sondern ein echtes „Ineinander", eine Synthese vor, da die einzelnen Momente in durchaus anderer Weise ein Phänomen höherer Komplexität zusammensetzen als aneinandergrenzende Materiestücke ein körperliches Ding. Diese Beziehungen sind, wie schon betont, für den Aufbau der Gegenstandswelt grundlegend und sie ragen tief hinein in die Problematik der Einzelwissenschaften. Es ist erstaunlich, daß die präzisen, einleuchtenden Formulierungen, die wir E. Husserl[1]) zu diesem Untersuchungsthema verdanken, methodologisch noch kaum ausgewertet wurden, so daß heute noch ein erbitterter Streit um Grundpositionen besteht, bezüglich welcher die Theorie bereits das entscheidende Wort gesprochen hat.

Wir wollen nachstehend die für uns bedeutsamsten Feststellungen Husserls im Wortlaut anführen.

Im Zentrum steht hier der Begriff der Fundierung. Husserl bestimmt ihn wie folgt[2]):

„Kann wesensgesetzlich ein α als solches nur existieren in einer umfassenden Einheit, die es mit einem μ verknüpft, so sagen wir, es bedürfe ein α als solches der Fundierung durch ein μ, oder auch, es sei ein α als solches ergänzungsbedürftig durch ein μ."

„Sind demgemäß α_0, μ_0 bestimmte in Einem Ganzen verwirklichte Einzelfälle der im angegebenen Verhältnis stehenden reinen Gattungen α, bzw. μ, so nennen wir α_0 durch μ_0 fundiert, und zwar ausschließlich durch μ_0 fundiert, wenn die Ergänzungsbedürftigkeit von α_0 durch μ_0 allein gestillt wird. Natürlich können wir diese Terminologie auf die Arten selbst übertragen. Die Äquivokation ist hier ganz unschädlich. Unbestimmter sagen wir ferner, die beiden Inhalte, bzw. die beiden reinen Arten, ständen in einem Fundierungsverhältnis oder auch im Verhältnis notwendiger Verknüpfung; wobei es freilich offen bleibt, welches der beiden möglichen und einander nicht ausschließenden Verhältnisse gemeint sei. Die unbestimmten Aus-

---

[1]) „Logische Untersuchungen", 2. Bd., 3. Untersuchung.
[2]) Ibidem, S. 261.

drücke: α_0 ist ergänzungsbedürftig, es ist in einem gewissen Moment fundiert, sind offenbar gleichbedeutend mit dem Ausdruck: α_0 ist unselbständig."

„Jeden relativ zu einem Ganzen G selbständigen Teil nennen wir ein Stück, jeden relativ zu ihm unselbständigen Teil ein Moment (einen abstrakten Teil) dieses selben Ganzen G. Es ist hiebei gleichgültig, ob das Ganze selbst, absolut oder relativ zu einem höheren Ganzen betrachtet, selbständig ist oder nicht. Abstrakte Teile können darnach wieder Stücke haben und Stücke wieder ab-abstrakte Teile. Wir sprechen von Stücken einer Zeitdauer, obschon diese etwas Abstraktes ist, ebenso von Stücken einer Ausdehnung. Die Formen dieser Stücke sind ihnen innewohnende abstrakte Teile."[1])

„Ein Gegenstand heißt mit Beziehung auf seine abstrakten Momente ein relatives Konkretum."[2]) „Ein Konkretum, das selbst nach keiner Richtung hin abstrakt ist, kann absolutes Konkretum genannt werden."[3])

„Die Rede von der Einheitlichkeit der Fundierung soll besagen, daß jeder Inhalt mit jedem, sei es direkt oder indirekt, durch Fundierung zusammenhängt. Dies kann so statthaben, daß alle diese Inhalte ohne äußeren Sukkurs unmittelbar oder mittelbar ineinander fundiert sind; oder auch so, daß umgekehrt alle zusammen einen neuen Inhalt, und zwar wieder ohne äußeren Sukkurs fundieren."[4])

Auf diesen Feststellungen Husserls wollen wir jetzt weiter bauen. Zunächst ergibt sich aus ihnen unmittelbar, daß das körperliche Ding nicht „neben", sondern „in" seinen Eigenschaften ist; wobei diese aber nicht isoliert sind, sondern nur isoliert betrachtet werden können. Die Möglichkeit der gedanklichen Isolierung aber gründet, wie wir gezeigt haben, in der freien Variierbarkeit innerhalb gewisser Grenzen. Farbe und Ausdehnung etwa, die untrennbar zusammengehören, können darum doch jede für sich betrachtet werden, weil jede beliebige Farbe mit jeder beliebigen Ausdehnung verträglich ist. Zu

1) Ibidem, S. 266f.
2) Ibidem, S. 267.
3) Ibidem, S. 268.
4) Ibidem, S. 276.

uferlosen metaphysischen Spekulationen aber kommt es, sobald man jene Isolierbarkeit zu selbständiger Existenz hypostasiert[1]).

Bleiben wir bei diesem Beispiel, um an ihm weitere wichtige Feststellungen zu machen. Wir haben oben die So-seins-Erkenntnis a priori umschrieben und als ihr Charakteristikum erkannt, daß an einem beliebigen Exemplar einer Art das Wesen erfaßt wird. Nun kann aber diese Erfassung auf verschiedener Allgemeinheitsstufe erfolgen. Man kann sich etwa an einem Ding, welches eine bestimmte Rotnuance zeigt, das Wesen dieser Rotnuance zur Gegebenheit bringen, oder das Wesen „Röte", oder endlich das Wesen „Farbe". Hier aber ist die Grenze dieser Art von Verallgemeinerung (Generalisierung). Wir können deshalb die Farbe — im Anschluß an Husserl — als eine oberste Gattung bezeichnen.

Husserl bestimmt diesen für die Logik grundwichtigen Begriff durch folgende Ausführungen, in welchen auch der für unsere Untersuchungen sehr bedeutsame Begriff der eidetischen Singularität festgelegt wird[2]):

„Jedes Wesen, ob ein sachhaltiges oder leeres (also reinlogisches) Wesen, ordnet sich in eine Stufenfolge von Wesen, in eine Stufenreihe der Generalität und Spezialität ein[3]).

---

[1]) Wir wollen kurz die wichtigsten metaphysischen Lehren anführen, die an diesem Punkt ihren rationalen Ursprung haben:

Zum Begriffsrealismus kommt es, sobald die Qualitäten, deren Momente, usw. als selbständig seiend aufgefaßt werden; werden diese Begriffe bzw. die in ihnen intendierten Wesenheiten überdies als Wertträger angesehen, so gelangt man zum „Reich der Ideen".

Das „Ding an sich" stellt die Verselbständigung der objektiven Komponenten der Wahrnehmung dar; hiebei bildet die Basis die gedankliche Isolierung, welche ihre Wurzel in der bereits festgestellten Variationsmöglichkeit des Wahrnehmungsinhaltes nach zwei Richtungen hin hat.

Zur Annahme eines Reiches unkörperlicher Geister oder zu derjenigen eines objektiven Geistes kommt es durch Verselbständigung des Psychischen, d. h. durch seine Heraushebung aus dem Fundierungszusammenhang des psychophysischen Konkretums. Mit dieser Annahme erkenntnispsychologisch eng verwandt ist diejenige von selbständigen Zweckursachen, welche in der Metaphysik von jeher eine große Rolle gespielt hat. Hier kommt freilich noch die Vermengung vom „Zweck" als intentionalem Sachverhalt (Zweckvorstellung) und als realem Sachverhalt hinzu.

[2]) „Ideen zu einer reinen Phänomenologie und phänomenologischen Philosophie", Halle 1913, S. 25.

[3]) Vgl. hiezu: „Ideen", S. 26, § 13: „Scharf unterscheiden muß man die Verhältnisse der Generalisierung und Spezialisierung von den wesentlich anders-

Zu ihr gehören notwendig zwei nie zusammenfallende Grenzen. Heruntersteigend gelangen wir zu den niedersten spezifischen Differenzen oder, wie wir auch sagen, den eidetischen Singularitäten; emporsteigend durch die Art- und Gattungswesen zu einer obersten Gattung. Eidetische Singularitäten sind Wesen, die zwar notwendig über sich ‚allgemeinere' Wesen haben als ihre Gattungen, aber nicht mehr unter sich Besonderungen, in Beziehung auf welche sie selbst Arten (nächste Arten oder mittelbare, höhere Gattungen) wären. Ebenso ist diejenige Gattung die oberste, welche über sich keine Gattung mehr hat."

Demgemäß gehören zu der obersten Gattung „Farbe"[1]) als eidetische Singularitäten, d. i. als letzte Besonderungen in der Sphäre des So-seins, die bestimmten Farbnuancen, wie sie an Einzelgegenständen feststellbar sind (ein solches Rot, wie dasjenige eines bestimmten Daches).

Die von Husserl durchgeführte — für die folgenden Analysen ebenfalls sehr wichtige — Unterscheidung zwischen „sachhaltig" und „leer" oder „formal" beruht auf dem Vorhandensein bzw. Fehlen spezifischen Empfindungsmaterials (Sinnesdaten). Demgemäß sind z. B. Ordnung und Zahl formale Gegenstände.

Daß eine Gattung B niederer ist als eine Gattung A — daß sie „unter die Gattung A fällt" — aber bedeutet nichts anderes, als daß ein beliebiges Einzelding, welches unter die Gattung B fällt, auch unter die Gattung A fällt. Man darf daher die Beziehung zwischen einer allgemeineren Gattung und einer weniger allgemeinen Gattung bzw. einer eidetischen Singularität nicht dadurch mißdeuten, daß man

---

artigen der Verallgemeinerung von Sachhaltigem in das reinlogisch Formale, bzw. umgekehrt, der Versachlichung eines logisch Formalen. Mit anderen Worten: Generalisierung ist etwas total anderes als Formalisierung, wie sie z. B. in der mathematischen Analysis eine so große Rolle spielt; und Spezialisierung etwas total anderes als Entformalisierung, als ‚Ausfüllung' einer logisch-mathematischen Leerform, bzw. einer formalen Wahrheit."

[1]) Husserl selbst bezeichnet freilich (ibidem S. 25) nicht „Farbe", sondern „sinnliche Qualität" als oberste Gattung; doch scheint mir dies im Sinne seiner allgemeinen, über den Begriff der obersten Gattung gemachten Feststellungen nicht zutreffend zu sein.

sie der Beziehung zwischen einer Gattung und den unter sie fallenden Einzeldingen gleichsetzt.

Machen wir uns den zwischen jenen beiden Fällen bestehenden prinzipiellen Unterschied vollkommen deutlich! Daß ein raum-zeitlich bestimmtes Etwas, ein „dies-da", bestimmte Eigenschaften hat, das ist eine empirische Erkenntnis: Dies-da ist rot, aber es könnte — theoretisch — auch am selben Orte zur selben Zeit etwas sein, was nicht rot ist. Daß aber ein Ding mit einer bestimmten Rotnuance ein farbiges Ding ist, das ist nicht etwas, was einmal sein und ein andermal nicht sein kann, weil in dem Begriff der „bestimmten Rotnuance" bereits derjenige der Farbe mitgemeint ist. Es hat also jedes farbige Ding eine bestimmte Farbe und eine bestimmte Nuance dieser Farbe. Daß man aber dessen ungeachtet über „Farben überhaupt" — über „alles Farbige" — Aussagen machen kann, das beruht auf der zu Beginn dieses Abschnittes beschriebenen Erkenntnistatsache der Verschiedenstufigkeit der Abstraktion; diese ermöglicht es, an Hand eines gegebenen — sc. an einem konkreten Ding gegebenen — So-seins auch Feststellungen über solches So-sein zu machen, welches mit dem gegebenen nur partiell übereinstimmt. Die Aussagen über „allgemeines" So-sein (Röte, Farbe[1]) sind demgemäß Aussagen über bloß partiell bestimmtes So-sein. Besonderung ist also nähere Bestimmung des So-seins; sie findet in der vollständigen Bestimmtheit der eidetischen Singularität ihren Abschluß. Es ist auch für das Verständnis der Problematik des Transfiniten von Wichtigkeit, sich darüber klar zu sein, daß nicht verschiedene Allgemeinheitsschichten der empirischen Gegebenheit des So-seins bestehen, sondern daß jedes So-sein in einer eidetischen Singularität gegeben ist; denn wir werden erkennen, daß jede bestimmte natürliche Zahl eine letzte logische Besonderung, also eine formale eidetische Singularität (im Sinne Husserls) ist. Diese Einsicht wird insbesondere die verhängnisvolle Verquickung von Eigenschaften bzw. Mengen von konkreten Einzeldingen und „Eigenschaften" bzw. „Mengen" von Zahlen verhindern.

Begriffsbildungen der letzteren Art sind unentbehrlich bei dem Versuche des Aufstieges zum unabzählbar Unendlichen, dessen logische Legitimität im Mittelpunkte des mathematischen Me-

[1]) Genau gesagt: Über rote bzw. farbige Gegenstände als solche.

thodenstreites steht; wir wollen sie daher noch etwas näher analysieren. Zu diesem Behufe haben wir zunächst die empirische Behauptung, ein bestimmtes Ding D_1 habe eine bestimmte Eigenschaft E_1, zu betrachten. Was uns an ihr interessiert, ist die Frage, inwiefern das Ding D_1 unabhängig davon, daß ihm die Eigenschaft E_1 zukommt, als bestimmt gelten kann. (Daß es bestimmt sei, wird vorausgesetzt, da unsere Behauptung als empirisch angenommen wurde, so daß E_1 in D_1 nicht analytisch enthalten sein kann.) Man erkennt nun, daß die eindeutige Bestimmtheit hier durch das principium individuationis erzeugt wird. Unser Satz bedeutet also: Das jetzt hier, bzw. damals (dann) dort, befindliche Ding hat die Eigenschaft E_1. Dieses Ding kann außerdem auch noch durch andere Eigenschaften, die es besitzt, oder durch Beziehungen, in denen es zu anderen Dingen steht, gekennzeichnet werden, aber das muß nicht der Fall sein, denn das principium individuationis ist notwendige und hinreichende Bedingung für seine eindeutige Bestimmtheit.

Wie steht es aber demgegenüber mit der Behauptung, daß eine bestimmte Eigenschaft E_1 (z. B. eine bestimmte Farbe) eine bestimmte „Eigenschaft" E_2 (z. B. eine bestimmte Helligkeit) habe? Da zeigt es sich, daß eine Eigenschaft (Farbe) E_1 als bestimmt überhaupt nur dann gelten kann, wenn feststeht, ob sie die „Eigenschaft" E_2 (bestimmte Helligkeit) besitzt oder nicht. Demgemäß sind Aussagen über „Eigenschaften" von Eigenschaften nur sprachliche Umformungen von Aussagen über die Eigenschaften selbst und müssen sich daher bei Einführung einer geeigneten Symbolik eliminieren lassen. Andernfalls liegen Scheinaussagen vor, d. h. eine Aneinanderreihung von Worten (Symbolen), die zunächst sinnvoll erscheinen, sich aber bei genauerer Analyse als sinnlos herausstellen.

Eine andere Möglichkeit, „Eigenschaften" von Eigenschaften einzuführen, scheint darin zu liegen, daß man es als „Eigenschaft" einer bestimmten Eigenschaft bezeichnet, daß Dinge dieser Eigenschaft existieren, d. h. zu bestimmten Zeiten an bestimmten Orten aufweisbar sind. Hienach wäre es beispielsweise eine Eigenschaft der Farbe „gelb", daß in einem bestimmten Zimmer zu einer bestimmten Zeit drei gelbe Dinge sind. Aber diese in der mathematischen Grundlagenforschung vorherrschende Auffassung kann kritischer Besinnung nicht standhalten. Um dies einzusehen, muß man sich nur zur vollen Bewußtheit bringen, daß jede „Eigenschaft" das Ergebnis eines Abstraktionsprozesses ist, worin insbesondere von dem principium individuationis abgesehen wird. Die raum-zeitliche Unbestimmtheit gehört also zum Sinn jeder Eigenschaft als solcher, und demgemäß ist es unsinnig, raum-zeitliche Bestimmungen als „Eigenschaften" von Eigenschaften aufzufassen und diese Auffassung in einer logischen Symbolik zu verankern. Immerhin hat dasjenige, was man meint, wenn man behauptet: Es ist eine „Eigenschaft" der Farbe gelb, daß sich drei gelbe Dinge in einem bestimmten Zimmer befinden, seinen guten Sinn; denn diese Behauptung besagt nicht mehr und nicht weniger als: „In jenem bestimmten Zimmer befinden sich zu jener bestimmten Zeit drei gelbe Dinge." (Die Frage, wie die Dingeinheit zu definieren ist, spielt hier keine Rolle.)

Allgemein ergibt sich also: Überall dort, wo von „Eigenschaften" von Eigenschaften, „Eigenschaften" von „Eigenschaften" von Eigenschaften usw. die Rede ist, kommt dem Worte „Eigenschaft" keine einheitliche Bedeutung zu und solche Sätze sind demgemäß nur insoweit sinnvoll, als sie sich in andere Sätze „übersetzen" lassen, in welchen jene Doppelverwendung des Wortes „Eigenschaft" nicht statthat.

Die im vorstehenden über „Eigenschaften" von Eigenschaften usw. gemachten Feststellungen lassen sich nun sinngemäß auf „Eigenschaften" von Zahlen usw. übertragen. Auch hier handelt es sich — aus den obigen analogen Gründen — stets um Aussagen über die Zahlen selbst; der Anschein des Gegenteils ist auf Mängel der Symbolik zurückzuführen. Die Konsequenz dieser Einsicht muß die Eliminierung des sog. erweiterten Funktionenkalküls sein, mit dem die wichtigsten Grundlagenprobleme der Mathematik eng verknüpft sind. In den beiden folgenden Abschnitten wird dies noch deutlicher werden.

Wir haben nun auch bereits die Grundlage für die Feststellung des Sinns der, in nicht sehr glücklicher Bezeichnung, „Existentialurteile" genannten „Es gibt"-Sätze — also der Sätze von der Form „Es gibt ein S, für welches P gilt" — in der Sphäre der reinen So-Seins-Aussagen, der Sätze a priori, gewonnen. Das „es gibt" ist hier nämlich nichts anderes als die Leerform für die näher zu bestimmenden Besonderungen eines allgemeinen So-seins[1]). Es ist für das Fol-

[1]) Vgl. hiezu Hilbert „Über das Unendliche", Math. Ann., Bd. 95, S. 161—190, 1925, S. 173. „Allgemein hat vom finiten Standpunkt eine existentiale Aussage von

gende überaus wichtig, sich darüber klar zu sein, daß hier weder durch den Begriff „alle“ eine unendliche Mannigfaltigkeit zusammengefaßt, noch durch den Begriff „es gibt“ eine Auswahl aus einer unendlichen Mannigfaltigkeit bezeichnet wird. Diese Feststellung gilt gleichermaßen für die sachhaltige und für die formale Sphäre und spielt im Methodenstreit über die Grundlagen der Mathematik eine wichtige Rolle.

Die irrige Auffassung, daß Behauptungen mathematischer Existenz selbständige, keiner Ergänzung bedürftige Urteile seien, steht in engem Zusammenhang mit Überlegungen, die die Sphäre des unabzählbar Unendlichen betreffen. Es ist eine der Hauptaufgaben, welche sich die vorliegende Arbeit setzt, die Annahme einer solchen Sphäre zu entkräften und damit den stärksten Impuls für die Trennung von „mathematischer Existenz“ und „Konstruktivität“ zu beseitigen.

Mit dem Begriff der obersten Gattung hängt noch folgende für die gesamte Erkenntnis grundwichtige Unverträglichkeitsbeziehung zusammen: Verschiedene Arten derselben obersten Gattung können nicht vereinigt sein. Während also sehr wohl ein raum-zeitlich eindeutig bestimmtes Ding blau und rechteckig oder blau und rund sein kann, ist es nicht möglich, daß es — sc. an derselben Stelle — blau und gelb ist.

Nachdem wir unsere Aufmerksamkeit bisher vorwiegend der So-seins-Erkenntnis gewidmet haben, wollen wir uns nunmehr den Prinzipien der Erkenntnis des Da-seins der Einzeldinge zuwenden. Hier lautet der oberste Grundsatz: Jeder seiner raum-zeitlichen Lage nach eindeutig festgelegte Gegenstand (Sachverhalt) ist auch seinem So-sein nach eindeutig bestimmt.

Inhalt der empirischen Erkenntnis aber ist die Zuordnung zwischen Da-sein und So-sein, d. h. die Beantwortung der Frage nach dem „Wie“ der zu einer bestimmten

---

der Form: es gibt eine Zahl von der und der Eigenschaft nur als Partialaussage einen Sinn, d. h. als Teil einer näher bestimmten Aussage, deren genauer Inhalt jedoch für viele Anwendungen unwesentlich ist.“ Unsere Ansicht unterscheidet sich also von der Hilberts nur dadurch, daß wir den Finitismus nicht als einen „Standpunkt“ ansehen, neben dem auch andere Standpunkte möglich wären, sondern als ein unabweisbares Gebot der Vernunft. Die eben zitierte These Hilberts stimmt weitgehend mit der Auffassung Brouwers überein; über die Konsequenzen aber bestehen, wie wir erkennen werden, noch beträchtliche Meinungsverschiedenheiten.

Zeit an einem bestimmten Orte vorfindlichen Gegenstände (Sachverhalte)[1]. Nun zeigt es sich, daß diesbezüglich häufig mit beträchtlicher Zuverlässigkeit Voraussagen gemacht werden können; d. h. es treffen Annahmen über bestimmte Ereigniskonstellationen mit erheblicher Genauigkeit zu[2]. Objektive Voraussetzung hiefür sind die Wiederholungen im Weltgeschehen, d. h. die Wiederkehr gleichartiger Konstellationen, bzw. gleichartiger Momente innerhalb der Konstellationen.

Auf dieser „Tatsache", deren Weiterbestehen über den Gegenwartszeitpunkt hinaus freilich nur „angenommen" (vermutet) werden kann, basiert nun der Erkenntnisgehalt der allgemeinen empirischen Urteile, wie etwa des Urteiles: „Alle Tiere, die lebende Junge zur Welt bringen, atmen durch Lungen." Dieses Urteil ist eine Annahme, deren vollkommene Verifizierung grundsätzlich nur auf solche Weise möglich ist, daß — falls es überhaupt Tiere gibt, die lebende Junge zur Welt bringen — jedes einzelne Tier, welches lebende Junge zur Welt bringt, daraufhin untersucht wird, ob es durch Lungen atmet. Dies wiederum ist jedoch prinzipiell nur dann möglich, wenn der räumlich-zeitliche Bereich, innerhalb dessen sich Tiere, die lebende Junge zur Welt bringen, befinden, irgendwie limitiert ist, denn andernfalls ist die Aufgabe, jene Feststellung zu vollziehen, gar nicht bestimmt formuliert.

Es ist also in allgemeinen empirischen Urteilen, soferne sie voll rationalisiert sind, d. h. soferne man sich über ihren Sinn vollkommen klar ist, stets ein bestimmter raum-zeitlicher Bereich mitgemeint; in unserem Beispiel etwa die „Erde". Dies gilt in verschärftem Maße dort, wo Sukzessionsbeziehungen zwischen Ereignissen bestimmter Art den Gegenstand der Aussage bilden, also in Kausalurteilen. Die Behauptung, daß Ereignisse der Art A_2 „allgemein" auf Ereignisse der Art A_1 folgen, ist nämlich, selbst in bezug auf ihre Gültigkeit für den Einzelfall, nur dadurch zu entscheiden, daß man die relative örtliche und zeitliche Lage von A_2 in bezug auf A_1 umgrenzt, d. h. eine bestimmte raum-zeitliche Umgebung von A_1 angibt, innerhalb

---

[1]) Dies trifft auch für die Frage zu, wo „dasselbe" Ding, welches sich im Zeitpunkte t_1 an einem Orte O_1 befindet, sich im Zeitpunkte t_2 befinden wird. Denn in dieser Identifizierung sind bereits So-Seins-Bestimmungen mitgemeint.

[2]) Auf die Kriterien der Verifizierung können wir hier nicht eingehen.

welcher A_2 auftritt. Denn sonst wäre eine Widerlegung einer Kausalbehauptung für einen bestimmten Fall prinzipiell undenkbar. Es genügt, sich den Inhalt irgend eines präzis formulierten physikalischen Gesetzes ins Bewußtsein zu rufen, um dies völlig zu begreifen.

Durchaus anders aber verhält es sich, wie wir schon zu Beginn dieses Abschnittes bemerkt haben, mit den reinen Soseins-Aussagen. Sie gelten nicht für einen bestimmten, sondern für jeden beliebigen raum-zeitlichen Bereich, also für „alle" Bereiche, da ihre Verifizierung oder Widerlegung nicht durch Untersuchung einer Gesamtheit von Realobjekten der betreffenden Eigenschaft erfolgt, sondern an einem beliebigen Realobjekt mit dieser Eigenschaft vollzogen werden kann.

Wir wollen die „Allgemeinheit" der empirischen Urteile von der „Allgemeinheit" der reinen So-seins-Urteile — im Anschluß an Husserl[1]) — als „individuelle Allgemeinheit" und „spezifische Allgemeinheit" voneinander unterscheiden.

Daß diese radikale Divergenz, die wir bereits eingehend analysiert haben, meist übersehen wurde, war sowohl für die Logik als auch für die mathematische Grundlagenforschung verhängnisvoll. Dies wird, soferne es die Logik betrifft, noch in diesem, soferne es die Mathematik betrifft, in späteren Abschnitten erhärtet werden. Es wird sich bei den Analysen der Grundlagenfragen der Mathematik an den wichtigsten Stellen, d. i. bei der Problematik der natürlichen Zahlen, bzw. der vollständigen Induktion, sowie bei derjenigen der Irrationalzahlen und des unabzählbar Unendlichen, zeigen, daß der Hauptknotenpunkt der Verwirrung durch die Verschlingung jener beiden heterogenen Momente im Klassen- (Mengen-) Begriff gebildet wird, und daß demgemäß mit der Auflösung dieser Äquivokation ein gut Teil der hier auftretenden Schwierigkeiten überwunden ist. Die eben bezeichnete Verquickung ist auf zwei Hauptwurzeln zurückzuführen. Die erste liegt in der ungenügenden Beachtung des Umstandes, daß zu jedem empirischen Urteil ein bestimmter raum-zeitlicher Bereich, für den es gelten soll, gehört; denn dadurch, daß auf einen solchen Bereich nicht explizit Bezug genommen wird, ergibt sich eine gefährliche sprachliche Verwischung der Unterscheidung zwi-

---

[1]) „Logische Untersuchungen", 2. Bd., S. 110f.

schen der „Allgemeinheit" empirischer Urteile einerseits, nichtempirischer Urteile anderseits. Die zweite, vielleicht noch wichtigere Hauptwurzel dieser Verwirrung liegt in der sensualistischen Abstraktionstheorie (vgl. oben S. 12). Diese verfehlt den Sinn der generellen Allgemeinheit durchaus und ist daher insbesondere auch unfähig, den Charakter jener letzten formalisierenden Verallgemeinerungen, welche zur Sphäre der Logik führen, richtig zu begreifen. Dieser haben wir uns nunmehr zuzuwenden.

Man definiert die Logik mitunter als die Lehre von den formalen Kriterien der Wahrheit, und wir wollen uns, um Einblick in ihr Wesen zu gewinnen, über den Sinn der „Wahrheit" und des „Formalen" Klarheit verschaffen, wobei sich freilich herausstellen wird, daß jene Definition nicht einwandfrei ist. Beginnen wir mit der „Wahrheit"!

Die landläufige Auffassung über das Verhältnis zwischen den drei Begriffen „Richtigkeit individueller Urteilsakte", „Wahrheit" und „Sein" ist folgende: „Ein Urteil ist ‚richtig', wenn die darin aufgestellte Behauptung wahr ist. Als ‚wahr' aber gilt eine Behauptung dann, wenn sie — in näher zu bestimmender Weise — mit dem Sein übereinstimmt."

Aber diese Formulierung ist nicht einwandfrei, da sie zwischen das Faktum der Richtigkeit (Seinsgemäßheit) von Urteilen und das Sein, dem sie entsprechen, noch einen Zwischenbegriff einschiebt, der in seiner Beziehung zu den beiden anderen Begriffen nicht klar erfaßt wird. Vielmehr ist der Begriff der Wahrheit von Urteilen korrekterweise wie folgt zu bestimmen: „Ein bestimmtes Urteil ist wahr," bedeutet: „Wer immer, wo und wann immer, dieses Urteil fällt, urteilt richtig (sachgemäß); er behauptet, was der Fall ist[1]). (Die Kriterien, wonach

[1]) Freilich kann es sein, daß Ausdrücke erst dadurch ihren vollen Sinn erhalten, daß man die personalen bzw. lokalen und temporalen Daten des Ausdrucksfaktums mitberücksichtigt. Dies trifft vor allem dort zu, wo Personal- und Demonstrativpronomina oder Lokal- und Temporaladverbia in den Sätzen auftreten (z. B. „Du hast mich beleidigt", „Hier ist nicht diese Wegkreuzung"). Husserl spricht in diesen Fällen von „wesentlich okkasionellen Ausdrücken". Ihnen ist es wesentlich, ihre „jeweils aktuelle Bedeutung nach der Gelegenheit, nach der redenden Person und ihrer Lage zu orientieren". („Logische Untersuchungen", II/1, S. 81.) Um bei solchen Sätzen über ihre Wahrheit oder Falschheit zu entscheiden, hat man zuerst die okkasionellen Ausdrücke auszuschalten und durch die ihnen entsprechenden objektiven Bestimmungen zu ersetzen.

sich jeweils die Richtigkeit bestimmt, können hier außer Spiel bleiben.) In dem Begriff der Wahrheit von Urteilen kommt also die Invarianz ihrer Richtigkeit gegenüber Variationen der Urteilsfakten, als da sind Person des Urteilenden und Ort und Zeit der Urteilsfällung, zum Ausdruck. Der Ursprung dieser Invarianz liegt in der eingangs festgestellten Unabhängigkeit des Seins vom Faktum seines jeweiligen Gedachtwerdens.

Der dargestellte Sachverhalt wurde nun in der Weise umgedeutet, als gäbe es neben dem Seienden noch ein „Reich der Wahrheit" und ein Urteil sei dann richtig, wenn es in dieses Reich falle. Aber diese Zwischenschaltung ist — wie eben festgestellt — unberechtigt; es gibt kein „drittes Reich" der Geltungen, welches Sein und Denken verbände. „Urteile überhaupt" und „Wahrheit überhaupt" stehen nicht jenseits, nicht „über" den psychophysischen Subjekten und den Gegenständen, worüber geurteilt wird, sondern durch diese Termini soll nur die Invarianz gegenüber Variationen der urteilenden Personen und die Geltung für beliebige Urteilsgegenstände hervorgehoben werden.

Durch das eben Gesagte ist die Bedeutung des „Urteils im logischen Sinne" klargestellt. Ein Urteilsakt ist das Denken eines Sachverhaltes als bestehend; wird nun bloß der gedachte Sachverhalt (Gegenstand des Urteils) und die Merkmale, durch die er gedacht wird (Inhalt des Urteils), berücksichtigt, während man von den „okkasionellen Daten", d. i. von der Person des Urteilenden und von Ort und Zeit der Urteilsfällung, abstrahiert, so erhält man das „Urteil im logischen Sinne"[1]).

Diese Einsicht gestattet uns bereits, eine in dem Terminus „Urteil" liegende Äquivokation unschädlich zu machen; nämlich diejenige zwischen Urteilsakt und Urteilsgegenstand. Es leuchtet ein, daß das Faktum des Denkens eines Sachverhaltes und der hiebei gedachte Sachverhalt scharf voneinander zu unterscheiden sind. Aber durch die scharfe Trennung von Urteilsakt und Urteilsgegenstand sind die Gefahren der Verquickung heterogener Momente innerhalb dieses Bereiches noch

[1]) Vgl. hiezu nunmehr die eingehenden Analysen Husserls in seinem neuen Werke „Formale und transzendentale Logik" (Jahrbuch für Philosophie und phänomenologische Forschung, 10. Bd. Halle 1929, S. 1—298, insbesondere S. 93ff.) über den Zusammenhang von „formaler Apophantik" und „formaler Ontologie".

nicht beseitigt; hiezu bedarf es noch der Unterscheidung von Urteilsgegenstand und Urteilsinhalt.

Wir wollen uns, um diesen Unterschied zu präzisieren, auf E. Husserls grundlegende Untersuchungen zu diesem Thema beziehen und ihn mit Husserls eigenen Worten klarmachen. Er führt aus: „Jeder Ausdruck besagt nicht nur etwas, sondern er sagt auch über Etwas; er hat nicht nur seine Bedeutung, sondern er bezieht sich auch auf irgendwelche Gegenstände. Diese Beziehung ist für einen und denselben Ausdruck unter Umständen eine mehrfache. Niemals fällt aber der Gegenstand mit der Bedeutung zusammen. Natürlich gehören beide zum Ausdruck nur vermöge der ihm sinngebenden psychischen Akte; und wenn man in Hinsicht auf diese ‚Vorstellungen' zwischen ‚Inhalt' und ‚Gegenstand' unterscheidet, so ist damit dasselbe gemeint, was hinsichtlich des Ausdruckes als das, was er bedeutet oder ‚besagt', und das, worüber er etwas sagt, unterschieden wird[1]."

„Die klarsten Beispiele für die Sonderung von Bedeutung und gegenständlicher Beziehung bieten uns die Namen. Bei ihnen ist in der letzteren Hinsicht die Rede von der ‚Nennung' gebräuchlich. Zwei Namen können Verschiedenes bedeuten, aber dasselbe nennen. So z. B. der Sieger von Jena — der Besiegte von Waterloo; das gleichseitige Dreieck — das gleichwinklige Dreieck. Die ausgedrückte Bedeutung ist in den Paaren eine offenbar verschiedene, obwohl beiderseits derselbe Gegenstand gemeint ist. Ebenso verhält es sich bei Namen, die vermöge ihrer Unbestimmtheit einen ‚Umfang' haben. Die Ausdrücke ein gleichseitiges Dreieck und ein gleichwinkliges Dreieck haben dieselbe gegenständliche Beziehung, denselben Umfang möglicher Anwendung[2]."

Wir werden im folgenden, um nicht zu sehr mit der in der mathematischen Grundlagenforschung üblichen Terminologie zu kontrastieren, als „Bedeutung" eines Satzes den in ihm behaupteten Sachverhalt bezeichnen, während wir das, was Husserl hier „Bedeutung" nennt, „Sinn" oder „Inhalt" nennen wollen.

Eine weitere wichtige Feststellung über das „Urteil" betrifft das Verhältnis zwischen seinem Sinn und seiner Wahrheit.

[1]) „Logische Untersuchungen", 2. Bd., I. Teil, S. 46.

[2]) A. a. O., S. 47.

Ein Urteil ist wahr oder falsch, je nachdem ob der in ihm als bestehend behauptete Sachverhalt besteht oder nicht besteht, und es hat nur dann einen klaren eindeutigen Sinn, wenn feststeht, nach welchen Kriterien sich jenes „Bestehen" oder „Nichtbestehen" bestimmt. Denn andernfalls würde es ja unklar bleiben, was unter „Bestehen" und „Nichtbestehen" verstanden werden soll: Ein sinnvolles Urteil muß also entweder wahr oder falsch sein, und es muß feststehen, unter welchen Bedingungen (auf Grund welcher Kriterien) es als wahr und unter welchen Bedingungen es als falsch anzusehen ist[1]).

Diese Feststellung läßt sich auch auf Tautologien und Kontradiktionen (s. unten S. 38ff.) ausdehnen; die „Kriterien" liegen hier darin, daß sich Tautologien und Kontradiktionen nach entsprechenden Umformungen „zeigen" müssen[2]).

Aus den vorstehenden Analysen ergeben sich bereits wichtige Folgerungen für eine Reihe von Problemen, die insbesondere in der Logistik und dadurch auch in der logistischen Theorie der Mathematik eine große Rolle spielen. Zunächst ist hier die logische Behandlung der Aussagen über Aussagen, der Aussagen über Aussagen über Aussagen usw. zu betrachten.

Gegeben seien die beiden Aussagen: „Alle Menschen sind sterblich" (p) und: „Alle Neger sind sterblich" (q) und man stelle fest, daß zwischen diesen beiden Aussagen die Beziehung „p bedingt q" besteht, womit gesagt werden soll, daß aus der Wahrheit der Aussage p die Wahrheit der Aussage q folgt. Dann ist diese Feststellung anscheinend eine Aussage über Aussagen.

Nun ergibt sich aber — auf Grund der eben gewonnenen Einsicht über die Begriffe „Wahrheit" und „Urteil" —, daß diese Formulierung nichts anderes darstellt, als eine Transposition

---

[1]) Vgl. hiezu Wittgenstein, Tractatus Logico-Philosophicus. With an introduction by B. Russell, London 1922 (englisch-deutsch); S. 66, Satz 4·024, „Einen Satz verstehen, heißt, wissen was der Fall ist, wenn er wahr ist". Diese hochbedeutsame Schrift Wittgensteins, auf die wir im folgenden wiederholt verweisen, ist bereits vorher in den Ann. der Natur- und Kulturphilosophie, Bd. 14, 1921, erschienen, doch zeigt die erstgenannte Ausgabe mehrfache Verbesserungen. Eine eingehende Darstellung und Analyse der Wittgensteinschen Lehre wird — wie ich höre — ein in Bälde in der Sammlung „Schriften zur wissenschaftlichen Weltauffassung", Springer, Wien, erscheinendes Buch von F. Waismann, „Logik, Sprache, Philosophie", enthalten.

[2]) Vgl. unten S. 51, insbesondere Anm. 1.

von Urteilen über Sachverhalte in „Urteile über richtige Urteile über Sachverhalte"; denn daß aus der Wahrheit von p die Wahrheit von q folgt, ist ja notwendig und hinreichend dadurch bedingt, daß der durch p gemeinte Sachverhalt den durch q gemeinten Sachverhalt in sich schließt, d. h. daß der Sachverhalt q immer besteht, wenn der Sachverhalt p besteht.

Durch jene Transposition ändert sich also zwar der Inhalt der Urteile, da diese nunmehr auf Denkakte überhaupt (d. h. auf Denkakte beliebiger Personen zu beliebiger Zeit an beliebigem Orte) Bezug nehmen, aber jedes Urteil ist mit seiner Transposition zugleich wahr und zugleich falsch oder — wie man statt dessen kurz sagt — es ist mit ihr „äquivalent". Es sind also die logischen „Beziehungen" zwischen zwei Urteilen vollkommen bestimmt durch die Beziehungen zwischen den Sachverhalten, von denen die Wahrheit oder Falschheit der Urteile abhängt, und dies gilt in gleicher Weise für Urteile, die sich unmittelbar auf jene Sachverhalte beziehen, wie für Urteile über solche Urteile, usf. in beliebiger Iteration.

Die logische „Beziehung" („Wahrheitsbeziehung") zwischen Urteilen ist demgemäß nicht etwas, was neben den in den entsprechenden Sachverhalten liegenden Kriterien bestünde. Der Anschein des Gegenteiles entsteht hauptsächlich dadurch, daß man Urteilsinhalt und Urteilsakt nicht scharf auseinanderhält. Denn aus der Behauptung „Wer immer, wo und wann immer, in bestimmter Weise urteilt, urteilt richtig", lassen sich, wenn ihre personalen, lokalen und temporalen Leerstellen durch empirische Daten ausgefüllt werden, freilich empirische Aussagen über die Richtigkeit empirisch bestimmter Urteilsakte machen, aber man erkennt, daß sich solche Aussagen nicht mehr unmittelbar auf „Urteile im logischen Sinne" beziehen. Jede Aussage über Urteile bzw. über die Wahrheit von Urteilen muß sich also in eine Aussage über die Sachverhalte, die das Thema jener Urteile bilden, übersetzen lassen. Daher ist die Einführung einer Symbolik, die Urteile über Urteile zum Gegenstande hat (erweiterter Funktionenkalkül), nicht erforderlich. Man darf auch nicht als Argument für die Berechtigung der Einführung eines solchen erweiterten Kalküls die Redeweise ins Treffen führen, wonach die Wahrheit eines Urteils als „Eigenschaft" dieses Urteils bezeichnet wird, denn die eben durchgeführte Analyse des Begriffes „Wahrheit" hat offenbar gemacht, wie diese Redeweise zu verstehen und korrekterweise aufzulösen ist. Hieraus ergibt sich, daß die Bezeichnung der Wahrheit als „Eigenschaft von Urteilen“ nicht korrekt ist.

Weiter ergeben sich aus unseren Feststellungen Folgerungen für die Problematik der sogenannten nichtprädikativen Urteile, d. i. der „Urteile, die sich selbst enthalten“. Hält man hier nämlich Urteilsakt und Urteilsgegenstand deutlich auseinander, so erkennt man, daß die Frage, ob ein Urteil sich selbst enthalten kann, in korrekter Formulierung lautet: „Kann ein Urteilsakt in dem entsprechenden Urteilsgegenstand mitgemeint sein?“ Mit dieser Formulierung ist aber bereits ein wesentlicher Teil der in dieser Problemsphäre auftauchenden Schwierigkeiten aus dem Wege geräumt. Da die nichtprädikativen Urteile eine der Hauptquellen der logischen Antinomien bilden, so werden wir uns im letzten Abschnitte, welcher der Analyse dieser Antinomien gewidmet ist, noch eingehender mit ihnen zu befassen haben.

Endlich sei — für die mit der Theorie von Frege und Russell vertrauten Leser — bemerkt, daß sich mit der korrekten Unterscheidung von Urteilsinhalt und Urteilsgegenstand eine Entscheidung in dem Meinungsstreit über die „Extensionalitätsthese“[1]) insofern im positiven Sinne für diese These ergibt, als eine innerhalb einer Aussage auftretende Satzfunktion φ durch eine beliebige formal äquivalente Satzfunktion ψ ersetzt werden kann, ohne daß sich der Wahrheitswert der Aussage ändert. Man kann also in der Aussage $f(\varphi x)$ die Funktion φx durch ihre Extension ersetzen.

Verbindet man aber — wie dies in der Logistik meist geschieht — mit dem Begriff der Extension einer Aussagenfunktion die Vorstellung einer „Gesamtheit von Gegenständen, welche diese Aussagefunktion befriedigen“, so richtet sich hiegegen der oben gemachte Einwand der Verquickung von individueller und spezifischer Allgemeinheit, auf den wir bei der nun-

[1]) Die Extensionalitätsthese geht auf Wittgenstein zurück und wurde im Anschluß an ihn vor allem von F. P. Ramsey „The foundations of mathematics“ (Proceedings of the London Math. Soc. (2), Bd. 25, 1927, S. 338 bis 384) und R. Carnap „Der logische Aufbau der Welt“, Berlin-Schlachtensee 1928, vertreten. Carnap beweist sie a. a. O., S. 57ff., durch Herausarbeitung des Unterschiedes zwischen „Sinnaussagen“ und „Bedeutungsaussagen“, wobei er der Terminologie Freges („Über Sinn und Bedeutung“, Zeitschr. f. Phil. u. phil. Kritik 100, 1892, S. 25 bis 50) folgt.

mehr folgenden Analyse der logischen Beziehungen zwischen Begriffen neuerlich zurückkommen werden.

In analoger Weise wie das Urteil aus dem Denken des Bestehens eines Sachverhaltes ergibt sich der Begriff aus dem Meinen[1]) eines Gegenstandes (Sachverhaltes). Hier aber ergeben sich weitere Komplikationen durch die Verquickung von Logik und Sprache[2]).

Sie tritt besonders deutlich in der Auffassung der Definition hervor, wenn man meint, deren logischen Gehalt dadurch zu erschöpfen, daß man für einen Namen einen anderen setzt[3]). Wäre dem so, dann hätte man jede Übersetzung aus einer Sprache in die andere als „Definition“ zu bezeichnen. Es leuchtet aber ein, daß man die Übersetzung nicht mitmeint, wenn man die Definition als logisches Verfahren im Auge hat. In Wahrheit meint man unter der Definition eines Begriffes die Angabe der Art der Zusammensetzung eines Gegenstandes (Sachverhaltes) aus anderen — selbständigen oder unselbständigen — Gegenständen (Sachverhalten). Hiebei soll unter „Zusammensetzung“ erstens die Konstitution von komplexeren Gegenständen aus einfacheren verstanden werden; zweitens die hievon wohl zu unterscheidende Besonderung allgemeiner Gegenstände (Definition der Art durch die Gattung). Demgemäß sind Definitionen, die empirische Gegenstände intendieren, dann — und nur dann — sinnvoll, wenn sie sich als Zusammensetzungen miteinander verträglicher empirischer Daten darstellen; ob aber Exemplare der also definierten Arten empirisch aufweisbar sind (Häuser) oder nicht (Zentauren), ist eine Frage, die die Logik nicht betrifft.

Damit erledigt sich die Frage des Zusammenhanges zwischen Definition und Existenz des Definierten. In der Definition empi-

---

[1]) Über den Unterschied zwischen „Meinen“ und „Vorstellen“ vgl. die grundlegenden Ausführungen Husserls in den „Logischen Untersuchungen“, 2. Bd., S. 61ff.

[2]) Vgl. hiezu auch den folgenden Abschnitt „Symbolik und Axiomatik“.

[3]) Für die Logistik, deren Hauptziel darin liegt, Fehler des logischen Denkens durch Verbesserungen der Symbolik hintanzuhalten, liegt die Identifizierung von Sprache und Logik sehr nahe. Da aber der Logistiker doch nicht geneigt ist, die Prinzipien der Logik als variabel anzusehen, wie es die Regeln der bestehenden Symboliken sind, so gelangt er häufig dazu, unter „Sprache“ eine formal vollkommene Sprache zu verstehen. Diese Bedeutung hat der Terminus „Sprache“ z. B. bei Wittgenstein. Aussagen über eine solche Idealsprache sind demgemäß nur Umformungen von Aussagen über die Struktur der Welt.

rischer Begriffe[1]) werden gegebene, d. h. ihrem So-sein nach einsichtige, Daten raum-zeitlich (bzw. zeitlich) vereinigt gedacht; ob aber diese Vereinigung tatsächlich irgendwo in Raum und Zeit vorliegt, wird hierdurch nicht entschieden.

Bei der Definition formaler Begriffe, wie sie die reine Logik und Mathematik vollzieht, fällt aber die letztere Frage überhaupt weg. Der unauflösbare Zusammenhang mit der Welt, der eine logische „Urzeugung" durch „schöpferische Definitionen" ausschließt, wird jedoch auch hier offenbar, sobald man die Bedeutung des Formalen richtig erfaßt hat[2]).

Von besonderem Interesse ist für uns die Lehre vom Umfang und Inhalt der Begriffe, da in ihr die eben aufgewiesene Verquickung von individueller und spezifischer Allgemeinheit, eine wesentliche, für die logische, philosophische[3]) und mathematische Problematik gleich verhängnisvolle Rolle spielt.

Die in Rede stehende Fehlauffassung kommt sowohl in der Definition des logischen Umfanges eines Begriffes als „Menge der Gegenstände, die unter ihn fallen," zum Ausdruck, als auch in der Definition des Begriffsinhaltes als „Summe der Merkmale des Gegenstandes"[4]).

Nun können wir, auch ohne einstweilen das Wesen der Logik eindeutig beschrieben zu haben, doch als gewiß annehmen, daß logische Beziehungen nicht abhängig sind von den Veränderungen innerhalb der realen — physische und psychische Tatsachen umfassenden — Welt[5]), während auf

---

[1]) D. h. Begriffe von empirischen Gegenständen.

[2]) Vgl. unten S. 32ff.

[3]) Vor allem bei den „artigen Fragen, ob das Feld der Möglichkeit größer sei, als das Feld, was alles Wirkliche enthält, dieses aber wiederum größer, als die Menge desjenigen, was notwendig ist." (Kant, Kritik d. r. V., 2. Aufl., Transsz. Logik, System aller Grundsätze d. r. V., Widerlegung des Idealismus.)

[4]) Es wäre unzutreffend, einzuwenden, eine Definition könne nie unrichtig sein, da es im freien Belieben stünde, welchen Sinn man einem noch nicht verwendeten Terminus beilegen wolle. Denn die Unrichtigkeit liegt gerade darin, daß einem Terminus nicht derjenige Sinn beigelegt wird, der ihm im Gebrauch zukommt. Wenn wir also behaupten, die eben angeführte Definition des logischen Umfanges sei unrichtig, so wollen wir damit sagen, daß sie nicht denjenigen Sinn trifft, der in den Aussagen der Logik faktisch mit ihm verbunden wird.

[5]) Diese Feststellung ist insbesondere für die Beurteilung der Brouwerschen Thesen zur Theorie der Mathematik wichtig. Vgl. unten S. 58ff.

Grund der genannten Umfangsdefinition das Gegenteil der Fall sein müßte. Vielmehr handelt es sich hier ausschließlich um Beziehungen zwischen Gegenstands a r t e n, bei welchen das reale Sein des Einzelfalles außer Spiel bleibt[1]). Aber auch abgesehen davon ist die Formulierung irreführend. Es gibt nicht 1. einen B e g r i f f, 2. einen U m f a n g des Begriffes, 3. einen I n h a l t des Begriffes, sondern der Inhalt des Begriffes ist gar nichts anderes als der Begriff selbst, und sein Umfang ist die durch ihn gemeinte Gegenstandssphäre, diese aber ist vollständig bestimmt durch den Inhalt[2]).

Die Annahme, daß der I n h a l t eines Begriffes zwar etwas sei, was zu ihm gehöre, ohne aber mit ihm identisch zu sein, ist vor allem auf die Identifizierung von Begriff und Begriffszeichen (Wort) zurückzuführen. Die V e r s e l b s t ä n d i g u n g des Umfanges gegenüber dem I n h a l t jedoch stammt hauptsächlich aus der Mißdeutung der „Größenbeziehung" von Umfang und Inhalt, wonach jeder Begriff einen Umfang und einen Inhalt bestimmter Größe hätte und zwischen den Variationen von Umfang und Inhalt die Beziehung der Inversion bestünde. In Wahrheit steht es so, daß die Umfänge oder Inhalte zweier b e l i e b i g e r Begriffe gar nicht ihrer Größe nach miteinander vergleichbar sein müssen. Eine solche Vergleichbarkeit von zwei Begriffen B_1 und B_2 besteht vielmehr nur dann, wenn durch B_1 jeder Gegenstand gemeint ist, der durch B_2 gemeint ist, oder aber durch B_2 jeder Gegenstand gemeint ist, der durch B_1 gemeint ist, wobei dies bei jeder beliebigen Tatsachenkonstellation gelten muß. Gelten diese Beziehungen unumkehrbar, so sagt man im ersteren Falle, daß B_1 den größeren Umfang bzw. kleineren Inhalt hat als B_2, im zweiten Falle, daß B_2 den größeren Umfang (kleineren Inhalt) hat als B_1; gelten sie umkehrbar, so nennt man B_1 und B_2 umfangsgleich.

Die Behauptung, daß der Umfang eines Begriffes größer sei als der eines anderen und diejenige, daß sein Inhalt kleiner sei als der dieses anderen (oder umgekehrt), beschreiben also den-

[1]) Eine Beziehung des logischen Umfanges zu numerischen Größen liegt nur insofern vor, als in keinem Bereiche mehr Gegenstände unter einen Begriff kleineren Umfanges fallen können, als unter einen Begriff größeren Umfanges. Es müssen aber nicht mehr Einzelgegenstände unter diesen fallen als unter jenen.

[2]) Wir denken hier nur an A l l g e m e i n begriffe. Ob es sich empfiehlt, überhaupt von Individualbegriffen zu sprechen, kann hier nicht erörtert werden.

selben Sachverhalt, sie bedeuten dasselbe und sagen es nur in verschiedener Weise.

Damit taucht die folgende für das Verständnis der Logik fundamentale Frage auf: Sind die logischen Sätze sämtlich von solcher Art, wie derjenige über das Verhältnis von Umfang und Inhalt eines Begriffes? Ist der Erkenntnisgehalt der Logik einzig und allein darin beschlossen, daß sie diejenigen Momente, welche mit dem psychischen Faktum des Denkens, als eines in der Zeit verlaufenden, von bestimmten Voraussetzungen ausgehenden und zu bestimmten Folgerungen gelangenden Prozesses, zusammenhängen, als sachlich irrelevant erkennen läßt? Ist sie vielleicht nur ein Inbegriff von Regeln, die den Gebrauch bestimmter Symbole betreffen?

Gehen wir, um uns die Problemlage an einem Beispiel klar zu machen, von dem Satz „p bedingt q" aus. Er läßt sich durch den Satz „non q bedingt non p" ersetzen; d. h. beide Sätze bedeuten dasselbe.

Worin besteht nun aber der Unterschied? Die von den der mathematischen Forschung nahestehenden modernen Logikern zu erwartende Antwort auf diese Frage ist die, daß er in der Sprache liege; aber dieser Bescheid bedarf jedenfalls der Präzisierung, da ja zwischen den beiden genannten Formen offenbar keineswegs bloß eine Differenz von der Art vorliegt, wie sie zwischen einer deutschen und der entsprechenden französischen Formulierung besteht. Vielmehr handelt es sich hiebei, abgesehen von der sprachlichen Formulierung, um eine Variation im Denken selbst. Diese Behauptung bedarf noch der Präzisierung, welche — da formale Umformungen in Frage stehen — vor allem den Sinn formaler Begriffe, wie z. B. „nicht", „und", „oder", „bedingt", ins Licht zu rücken haben wird.

Hier liegt folgende Auffassung nahe: In der Welt gibt es nur Gegenstände (Sachverhalte), aber nicht negative Gegenstände (Sachverhalte); daher sage die Negation nichts über die Welt aus; und analog sei es zwar eine Aussage über die Welt, daß der Sachverhalt A besteht, und eine Aussage über die Welt, daß der Sachverhalt B besteht, aber dem „und" in der Aussage: „A besteht und B besteht", entspreche nichts in der Welt. Das gleiche gelte für die Disjunktion und Implikation.

Aber diese Auffassung ist nicht zutreffend, wie wir uns an den Beispielen, der Negation und der Konjunktion, klar machen wollen. Beginnen wir mit der Negation: Um deren Sinn zu begreifen, muß man sich zunächst darüber klar sein, daß kein (vollständiges) affirmatives empirisches Urteil die Existenz von Sachverhalten schlechthin behauptet, sondern daß in ihm — wie wir festgestellt haben — stets ein lokal- (bzw. personal-) temporaler Existenzbereich abgesteckt sein muß. Demgemäß bedeutet die Negation eines solchen Urteils, daß innerhalb jenes endlichen Existenzbereiches Gegenstände (Sachverhalte) der fraglichen Art nicht vorkommen. Eine solche Aussage gehört aber ebensowohl zur Beschreibung jenes Bereiches, wie eine affirmative Aussage, denn um den Bereich zu kennen, genügt es nicht zu wissen, daß die Sachverhalte A, B, C, ... in ihm vorkommen, sondern man muß auch wissen, daß andere Sachverhalte P, Q, R, ... nicht in ihm vorkommen[1]). Das Ideal vollkommener Kenntnis des Bereiches besteht darin, von jedem Sachverhalt, der in ihm vorkommt, zu wissen, daß er in ihm vorkommt und überdies zu wissen, daß kein anderer Sachverhalt in ihm vorkommt. Die Negation ist sohin wesentliches Element der Beschreibung der Welt, d. h. aber Element der Welt selbst.

Auch der Zusammenhang der Konjunktion mit der Welt läßt sich einsehen, wenn man erfaßt hat, daß jede vollständige Aussage über empirische Existenz eine raum- (personal-) zeitliche Bestimmung einschließt. Dann erkennt man nämlich, daß die konjungierten Existentialaussagen: „Es gibt einen Sachverhalt S_1 und es gibt einen Sachverhalt S_2“ in der Weise umgeformt werden können, daß sie lauten: Ein Sachverhalt S_1 kommt mit einem Sachverhalt S_2 in demselben umgrenzten Bereich vor. Das „und“ bedeutet also auch hier eine Gemeinsamkeit, eine Gleichheit in gewisser Beziehung, ebenso wie dort (wo dies ohneweiters einleuchtet), wo es Gemeinsamkeit bestimmter Eigenschaften bezeichnet.

Diese Erkenntnistatsache ist dadurch etwas verdunkelt worden, daß man meist nicht mit den Sachverhalten selbst, sondern mit den Aussagen gedanklich operiert und unter „p und q“ das

---

[1]) Vgl. hiezu Wittgenstein a. a. O., Satz 1,11 und Satz 1,12. „Die Welt ist durch die Tatsachen bestimmt und dadurch, daß es alle Tatsachen sind. Denn die Gesamtheit der Tatsachen bestimmt, was der Fall ist und auch, was alles nicht der Fall ist.“ Durch die im Texte gegebene finite Formulierung soll Nachdruck darauf gelegt werden, daß von der Welt als einem abgeschlossenen Ganzen nicht gesprochen werden kann.

„zugleich wahr sein“ von p und von q versteht, womit freilich nichts weiter besagt wird, als „p ist wahr“, „q ist wahr“, denn wie wir festgestellt haben, ist es verfehlt, die Wahrheit als Eigenschaft von Urteilen aufzufassen; es kann also nicht eine Mehrzahl von Urteilen auf Grund ihrer „gemeinsamen Eigenschaft“ wahr zu sein zusammengefaßt werden[1]).

Daß ebenso wie Negation und Konjunktion auch Disjunktion und Implikation mit der Welt zusammenhängen, haben wir bereits hervorgehoben. Dies ergibt sich auch einfach daraus, daß sich, wie die elementare Logistik zeigt, Disjunktion und Implikation auf Verknüpfungen von Negation und Konjunktion zurückführen lassen.

Aber die Gültigkeit des Gesagten scheint mit der Tatsache nicht vereinbar zu sein, daß man mit Zeichen, denen man die Namen „nicht“, „und“, „oder“, „bedingt“ beilegt, auf Grund bestimmter Regeln operieren kann, ohne daß man auf jenen Sinn, den wir eben herausgestellt haben, rekurrieren würde, und daß dessen ungeachtet alle logischen Sätze über jene Begriffe in diesem Formalismus ihre ein-eindeutige Entsprechung finden.

Doch besteht hier nur scheinbar Unstimmigkeit, wie die folgende Überlegung zeigt: Daß aus einer Aussage p eine Aussage q „folgt“, bedeutet, daß der Sachverhalt, dessen Bestehen in der Aussage p behauptet wird, den Sachverhalt, dessen Bestehen in der Aussage q behauptet wird, einschließt, daß also in p derjenige Sachverhalt, der in q behauptet wird, mitbehauptet wird. Die Regeln aber, welche für den Gebrauch der verwendeten Zeichen festgelegt werden, sind folgendermaßen zu verstehen:

1. Daß an die Stelle einer Formel eine andere Formel eingesetzt (substituiert) werden kann, besagt, daß bei inhaltlicher Deutung dieser Formeln beide dasselbe bedeuten sollen.

2. Daß eine Formel f_2 aus einer anderen Formel f_1 ableitbar ist, besagt, daß bei inhaltlicher Deutung dieser Formeln die Bedeutung von f_2 in der Bedeutung von f_1 enthalten ist.

Hiebei wird für die die Formeln bildenden Zeichen vorausgesetzt, daß gleiche Zeichen dasselbe bedeuten, d. h. unabhängig

---

[1]) Die eben gemachten Feststellungen über den Sinn der Negation und Konjunktion in empirischen Aussagen lassen sich einfach dadurch auf Aussagen a priori übertragen, daß man an Stelle eines bestimmten Bereiches jeden beliebigen Bereich einsetzt.

von der jeweiligen Tatsachenkonstellation (Weltsituation) dasselbe bezeichnen. Nun werden aber diese Gleichbedeutungs- und Mitbedeutungskonventionen der Logistik, die teils in den Ausgangsformeln zum Ausdrucke kommen, so gewählt, daß sie auf die logischen Begriffe Negation, Konjunktion usw. „passen", d. h. die mit diesen Beziehungen vorgenommenen gedanklichen Operationen schematisieren, und demgemäß muß bei der entsprechenden „metalogischen" bzw. „metamathematischen" Deutung alles stimmen.

Wir haben also, um den Sinn des Formalen bzw. den Sinn der Logik zu erfassen, folgende Punkte zu unterscheiden:

a) Der erste Punkt ist bestimmt durch die Feststellung, daß es Aussagen gibt, die für beliebige Sachverhalte („Sachverhalte überhaupt") sinnvoll sind. So kann man einen beliebigen Sachverhalt negieren und kann man das Bestehen von näher zu bestimmenden Gemeinsamkeiten (Gleichheit in gewisser Hinsicht) von Sachverhalten behaupten oder auch negieren. Diese thematische Einstellung, die diejenigen und nur diejenigen Momente berücksichtigt, bei denen auf inhaltliche Bestimmtheiten kein Bezug genommen wird, konstituiert die Sphäre des Formalen oder, wie wir auch sagen können, die Sphäre der logischen Begriffe.

b) Zu dem zweiten Punkt gelangen wir auf Grund der Einsicht, daß man dieselben formalen Zusammenhänge auf verschiedene Art denken kann, wobei sich die Variationen aus der Verschiedenheit der gedanklichen Ausgangspunkte ergeben (z. B. „p bedingt q", „non q bedingt non p"). Daß diese beiden Aussagen dasselbe besagen, ergibt sich durch Besinnung darauf, was jede der beiden besagt, vorausgesetzt natürlich, daß man den Sprachzeichen die üblichen Bedeutungen gibt. Das Ergebnis der Besinnung liegt hier in der Einsicht, daß gewisse Daten, die zu dem Faktum des Denkprozesses gehören, objektiv irrelevant sind. Die logischen Sätze behaupten also nichts über die Welt, sondern sie deklarieren die totale oder partielle Bedeutungsgleichheit von Behauptungen über die Welt.

c) Zum dritten Punkte kommen wir, wenn wir bedenken, daß die logischen Transformationen, die durch die Besinnung auf die Bedeutung der formalen Begriffe legitimiert werden, semiotisch festgelegt werden können, wodurch dann jeder weitere Rekurs darauf, was die Zeichen, mit denen operiert wird, bedeuten, entfällt. Damit aber werden nicht auch die Transformationen als solche sinnlos; denn die „Ableitbarkeit" einer Formel f_l aus anderen Formeln f_i und f_k bedeutet, daß bei inhaltlicher Deutung von f_i, f_k und f_l die Bedeutung von f_l in den Bedeutungen von f_i und f_k enthalten ist.

Es wird also zwar beim Operieren mit den Formeln diesen keine Bedeutung beigelegt, wohl aber bestimmen die Operationsregeln die Bedeutungsverknüpfungen zwischen den Formeln bei deren inhaltlicher Deutung.

Da man nicht nur die durch die sub a und b beschriebene Thematik konstituierte Sphäre als „formal" bzw. als „logisch" bezeichnet, sondern auch diejenige gedankliche Sphäre, die durch die sub c beschriebene Thematik konstituiert wird, so entsteht die Gefahr verwirrender Äquivokationen, auf deren Vermeidung wir im folgenden bedacht sein müssen.

Es läßt sich nun auch unschwer erkennen, welche Bewandtnis es mit dem Widerspruch in der Logik hat. Daß man denselben Sachverhalt nicht behaupten und negieren „kann", bzw. „darf", bedeutet, daß man nichts behauptet, wenn man dies tut. Wo also eine wirkliche Behauptung vorliegt, da ist in ihr niemals ihre Negation enthalten und diese kann daher auch nicht aus ihr erschlossen werden, denn das „Schließen" von bestimmten Sätzen (Prämissen) auf andere Sätze besagt ja, wie wir eben dargetan haben, nichts anderes als die Heraushebung von Bedeutungen, die in den Prämissen mitgemeint sind.

Dies muß in einem logischen Formelsystem, worin von der Bedeutung der Zeichen abstrahiert wird, in der Weise zum Ausdrucke kommen, daß solche Formeln, die bei inhaltlicher Deutung im Verhältnis der Negation zueinander stehen sollen, nicht beide ableitbare Formeln sein dürfen.

Die im vorstehenden gegebene Analyse des logischen Schließens stimmt nun aber mit der traditionellen Auffassung insofern nicht überein, als gemäß dieser das logische Schließen einen Zusammenhang zwischen Wahrheiten herausstellt, während es von uns als Herausstellung eines Bedeutungszusammenhanges deklariert worden ist. Daß die letztere Auffassung die zutreffende ist, kann man sich leicht klar machen, wenn man sich die Schlüsse aus hypothetischen Prämissen vor Augen hält. Denn die Behauptung: „Wenn p wahr ist, so ist — im Sinne der Logik — q wahr", verlangt offenbar eine Begründung, die von den Kriterien der Wahrheit von p unabhängig sein muß, da ja empirische Zusammenhänge nicht in Frage stehen. Da zeigt es sich nun, daß q darum wahr sein muß, wenn p wahr ist, weil in q nichts behauptet[1]) wird, was nicht auch in p behauptet wird. Der logische Zusammenhang zwischen Aussagen ist also ein Bedeutungszusammenhang, wobei unter Bedeutung einer Aussage dasjenige, was sie behauptet, zu verstehen ist. Demgemäß können auch aus falschen Aussagen wahre Aussagen folgen, da ja auch in falschen Behauptungen Zutreffendes mitbehauptet sein kann.

Wie aber steht es mit dem vielfach mißverstandenen Satze der Logistik, daß eine beliebige falsche Behauptung jede wahre Behauptung und jede falsche Behauptung impliziere, so daß also beispielsweise aus dem Satze $2 \times 2 = 5$ sowohl das Urteil „Blut ist rot" als auch das Urteil „Blut ist grün" folgen würde. Jener Satz ist folgendermaßen zu verstehen: Faßt man den logischen Zusammenhang als Wahrheitszusammenhang auf, so bedeutet die Implikation „p bedingt q" nichts anderes als die Negation von „p und non q". Da nun aber „p und non q" stets falsch ist, wenn p falsch ist, so ist „non (p und non q)" in diesem Fall immer wahr. Es ist aber anderseits auch „non (p und q)" wahr, was in der eben genannten Terminologie der Aussage „p bedingt non q" entspricht. Demgemäß läßt sich im Sinne der dargestellten Auffassung insbesondere aus dem „immer falschen", d. h. kontradiktorischen Satze „p und non p" jeder beliebige Satz ableiten. Diese letztere Auffassung könnte man auch ohne Zugrundelegung der These, daß die Logik ein Wahrheitszusammenhang sei, dadurch zu rechtfertigen versuchen, daß man sagt, der Satz „p und non p" behaupte alles und daher lasse sich aus ihm alles ableiten. Aber diese Rechtfertigung wäre unstichhaltig: die Kontradiktion behauptet nämlich gar nichts; sie ist widersinnig.

Allgemein läßt sich sagen, daß durch den in der Logistik terminologisch fixierten Implikationsbegriff die spezifisch logische Implikation mit der empirischen „Implikation" in verwirrender Weise verquickt wird. Bei dieser ist die Bewährung oder Widerlegung der Implikationsbehauptung in der Tat

[1]) Wir verstehen hier und im folgenden das Wort „behaupten" bezw. „Behauptung" so, daß darunter nicht nur die Affirmation, sondern auch die Negation fällt.

nur durch eine Feststellung betreffend das Bestehen bestimmter Sachverhalte — bzw. wie man in thematischer Blickwendung sagen kann, durch Feststellungen betreffend die Wahrheit bestimmter Urteile — zu erlangen. Aber für die logische Implikation gilt dies nicht; sie ist reiner Bedeutungszusammenhang.

Die gewonnenen Einsichten gestatten uns nun, den Sinn der logischen Sätze und den Sinn der logischen Begriffe eindeutig festzulegen. Für die logischen Sätze ist es — wie wir erkannt haben — zunächst charakteristisch, daß sie keine Behauptungen über die Welt aufstellen, sondern nur deutlich machen, wie man dasselbe auf verschiedene Art denken bzw. ausdrücken kann. Logische Sätze sind also Tautologien[1]).

Aber ist auch jede Tautologie ein logischer Satz? Wird man beispielsweise den Satz: „Der Schnee ist weiß oder nicht weiß" als Satz der Logik bezeichnen? Man wird dies nicht tun, wenn man im Einklang damit bleiben will, was man seit mehr als zwei Jahrtausenden, wenn auch vielfach undeutlich, unter Logik verstanden hat, und zwar darum nicht, weil in unserem Satz auch andere als formale Begriffe vorkommen. Als logische Sätze wird man demgemäß solche Tautologien zu bezeichnen haben, die keine anderen als formale Begriffe enthalten.

Wir haben bereits oben (S. 35) festgestellt, daß als „formal" solche Begriffe zu bezeichnen sind, in denen keinerlei Bezugnahme auf Empfindungsmaterial enthalten ist, nunmehr ergibt sich die weitere Frage, ob es möglich ist, den Bedeutungsgehalt der formalen Sphäre präzis zu beschreiben bzw. zu umgrenzen. Daß diese Möglichkeit besteht, dafür spricht die Tatsache, daß in den bestehenden logistischen Systemen, vor allem demjenigen der „Principia Mathematica" die Logik mit Hilfe weniger Grundzeichen aufgebaut werden kann.

Um hier deutlicher zu sehen, muß man sich darauf besinnen, daß folgende Grundformen für die Erkenntnisse, die dann ihre inhaltliche Ausfüllung je nach der sachhaltigen Eigenart der betrachteten Objekte erhalten, und nur diese, bestehen:

1. Beliebige Sachverhalte können als nicht bestehend gedacht (negiert) werden.

---

[1]) Vgl. hiezu insbesondere Wittgenstein, a. a. O., Satz 4,46ff.

2. Eine Mehrzahl beliebiger Sachverhalte kann auf das Bestehen bzw. Nichtbestehen bestimmter Gemeinsamkeiten hin untersucht werden.

3. Jede Eigenschaft von Gegenständen steht an bestimmter Stelle innerhalb einer Stufenfolge der Allgemeinheit.

Diese drei Schemata der Erkenntnis bilden die Basis der formalen Sphäre und an ihnen muß sich daher jede symbolische Darstellung der Logik orientieren. Dem ersten Punkt entspricht das Wort „nicht", dem zweiten das Wort „und", dem dritten das Wort „alle" (im Sinne spezifischer Allgemeinheit verstanden). Negation und Konjunktion lassen sich, wie Sheffer[1]) gezeigt hat, durch die Beziehung „unverträglich mit" ersetzen, wenn man die Negation als Unverträglichkeit mit sich selbst bezeichnet.

Bei der eben erfolgten Aufzählung der logischen Grundbeziehungen fehlt ein anscheinend unentbehrlicher Begriff, nämlich derjenige der Identität. Die tiefergehende Analyse zeigt jedoch, daß diese Ausscheidung berechtigt ist, denn „Identität" ist kein Begriff, der als solcher oder in inhaltlichen Ausfüllungen, deren formales Schema er darstellen würde, zur Welt gehört, d. h. zu ihrer Beschreibung erforderlich ist. Es können ja nie mehrere Gegenstände identisch sein, sonst wären es nicht mehrere, einen Gegenstand aber als „mit sich selbst identisch" zu bezeichnen, hat keinen Sinn[2]). Sinnvoll wird der Begriff der Identität nur dort gebraucht, wo man ausdrücken will, daß man auf verschiedene Weise dasselbe denkt, bzw. mit verschiedenen Zeichen dasselbe bezeichnet.

Die für das Folgende wichtigste Anwendung dieser Einsicht ist die Feststellung, daß sich das Gleichheitszeichen in der Mathematik nicht auf die mathematischen Gegenstände (Zahlen) selbst, sondern auf die mathematischen Symbole bezieht. Daß zwischen

---

[1]) H. M. Sheffer, „A set of five independent postulates for Boolean algebras, with application to logical constants". (Transact. Amer. Math. Soc., Bd. 14, S. 481 bis 488, 1913.) Vgl. ferner:

J. G. P. Nicod, „A reduction in the number of the primitive propositions of logic." (Proc. of the Cambridge Philos. Soc., Bd. 19, S. 32 bis 41, 1917/20.)

[2]) Die tiefen und wichtigen Untersuchungen, in welcher Weise ein Gegenstand als ein und derselbe in verschiedenen, auf ihn gerichteten Denkakten erfaßt wird, gehören auf ein anderes Blatt. Zu dieser Frage ist vor allem Husserl, „Formale und transzendentale Logik" zu vergleichen.

zwei mathematische Symbole ein Gleichheitszeichen gesetzt wird, besagt nämlich, daß sie dasselbe bedeuten[1]).

Wenn wir nun abschließend und zusammenfassend das Verhältnis zwischen Logik und Welt bestimmen wollen, so können wir sagen, daß die Logik zwar nichts über die Welt sagt, daß sie aber die Welt voraussetzt[2]). Denn die logischen Begriffe stellen, wie wir erkannt haben, Schemata der Beschreibung der Welt dar, und überdies setzt die Analyse der Bedeutungszusammenhänge von Aussagen, welche das Hauptthema der Logik bildet, ein Sein voraus, welches als Gegenstand dieser Aussagen deren Bedeutung konstituiert. Von diesem Punkte aus läßt sich auch die historische Stellung der Logik als Wissenschaftslehre begreifen, worauf wir aber hier nicht näher eingehen können.

Klarheit über den Sinn der Logik ist unerläßlich für jedes tiefere Verständnis der mathematischen Grundlagenprobleme, was sich insbesondere bei der folgenden Untersuchung über den Zahlbegriff zeigen wird.

Vor Inangriffnahme dieser Untersuchung empfiehlt sich jedoch eine kurze Analyse einerseits der mathematischen Sprache (Symbolik) und anderseits der axiomatischen Methode, da das Verständnis für die Rolle beider im Rahmen der mathematischen Erkenntnis für das Begreifen des Charakters der mathematischen Methode wichtig ist.

---

[1]) Die deutliche Einsicht in den Sinn der „Identität" ist Wittgenstein zu verdanken (a. a. O., Satz 5,4733 und 5,53 bis 5,5352). Er knüpft hieran eine Kritik der einschlägigen Symbolik der „Principia Mathematica" (vgl. unten S. 45), die von Russell, wie aus dessen Vorwort zu Wittgensteins Schrift hervorgeht, prinzipiell anerkannt wird. Dies ist für das Folgende darum bedeutsam, weil bei dem Versuch der logischen Legitimierung des Cantorschen Begriffes der Potenzmenge (vgl. unten S. 148ff.) in den „Principia Mathematica" von jener unkorrekten Interpretation der Identität wesentlicher Gebrauch gemacht wird. (V. II., p. 458ff.) Übrigens wird auch bei der Definition der einzelnen natürlichen Zahlen in den P. M. die Identität wesentlich mitbenützt. So lautet z. B. die Definition der Zahl 1 dortselbst in die Wortsprache übersetzt: „1 ist die Klasse aller Klassen α, für die es ein x gibt, so daß x Element von α ist und für jedes y, das Element von α ist, $x = y$ gilt."

[2]) Vgl. hiezu Husserl, „Formale und transzendentale Logik", S. 197ff.

II. Symbolik und Axiomatik.

Das durchgreifende Verständnis des Charakters der Laut- und Schriftsymbolik ist an die allgemeine Einsicht in das Wesen der Symptome geknüpft.

Ein Sachverhalt S_1 heißt Symptom für einen Sachverhalt S_2, wenn aus dem Vorliegen von S_1 Schlüsse auf das — vergangene oder gegenwärtige oder zukünftige — Bestehen von S_2 gezogen werden können. Daß aber solche Schlüsse erfolgen können, besagt offenbar nichts anderes, als daß zwischen S_1 und S_2 eine Realbeziehung — ein empirischer Zusammenhang — besteht. Diese Realbeziehung muß jedoch, wie sich aus der obigen Definition ergibt, keineswegs von der Art sein, daß das Symptom (der Erkenntnisgrund) für einen Sachverhalt mit einer seiner Ursachen (Realgrund) zusammenfällt. Es kann vielmehr auch eine Wirkung dieses Sachverhaltes sein oder aber mit ihm gemeinsame Ursachen haben. Aber auch dort, wo das Symptom Ursache ist, steht es keineswegs so, daß ein besonders taugliches Symptom eine besonders wesentliche[1]) Ursache sein müßte. Mangelnde Klarheit über das Verhältnis zwischen Symptom und Realgrund hat in der Philosophie viel Verwirrung gestiftet.

Symptome in diesem allgemeinen Sinne können wir auch — mit Husserl[2]) — Anzeichen nennen; aus ihnen sind die Zeichen herauszuheben, durch welche Vernunftwesen anderen Vernunftwesen etwas mitteilen. Die wichtigste Art dieser Zeichengebung stellt die Sprache dar.

In den Worten und Sätzen der Sprache kommen Bewußtseinsinhalte zum Ausdruck; das will besagen, daß der Sprechende

---

[1]) Die „Wesentlichkeit" von Ursachen eines Phänomens bestimmt sich hiebei nach dem induktiv festzustellenden „Ausmaße" der Variationen, die bei Fortfallen jener Ursachen unter sonst gleichen Umständen, am Phänomen bemerkbar sind. Freilich ist jener Begriff auch hiedurch noch keineswegs präzis festgelegt.

[2]) „Logische Untersuchungen", 2. Bd., S. 24.

mit Hilfe bestimmter von ihm hervorgerufener akustischer Phänomene dem Angeredeten den Inhalt eigener Bewußtseinsakte vermittelt (mitteilt). Ausdrücke sind demnach Symptome für Bewußtseinsinhalte; diese können aus ihnen erschlossen werden, und ihre Bedeutung bilden eben jene aus ihnen zu erschließenden Inhalte. Soll nun der Angeredete tatsächlich verstehen, was der Sprechende mit seinen Lautzeichen meint, so muß er „die Sprache des anderen beherrschen“, d. h. er muß das Zuordnungsschema kennen, dessen sich der andere bedient. Daß in irgend einer Sprache bestimmte Lautverbindungen Bestimmtes bedeuten oder, wie man auch sagt, „eine bestimmte Bedeutung haben“, besagt keineswegs, daß diesen akustischen Phänomenen ihre Bedeutung als qualitas occulta innewohnt, sondern einzig und allein, daß eine Anzahl von Menschen als „Glieder derselben Sprachgemeinschaft“ einheitlich jene Lautverbindungen bestimmten Bewußtseinsinhalten zuordnen, so daß hinsichtlich dieser Zeichen ein Bereich wechselseitigen Verständnisses besteht. Ein Wort aus einer Sprache in die andere übersetzen heißt demgemäß: die Lautverbindung L_2 feststellen, die innerhalb einer Menschengemeinschaft G_2 als Symptom für einen Bewußtseinsinhalt I verwendet wird, dem in der Menschengemeinschaft G_1 die Lautverbindung L_1 als Symptom entspricht.

Eine Sprache stellt den Inbegriff der für einen bestimmten Verständnisbereich gültigen Zuordnungsbeziehungen dar. Ist sie demgemäß nichts anderes als eine innerhalb eines bestimmten Bereiches gemeinsam angewandte „Ausdrucksweise“, so erscheint sie doch meistens dem Einzelnen, dem sie durch Erziehung — vielleicht sogar in gewissem Maße durch Vererbung — „vorgegeben“ ist, der in sie „hineinwächst“ und an ihr in der Regel keine oder doch nur unbedeutende Umgestaltungen durchführen kann[1]), als ein von menschlichen Subjekten überhaupt unabhängiges objektives Sein. Weil die verschiedenen Schöpfer und ihre Anteile am Geschaffenen meistens unbekannt sind, weil Sprachschöpfung nur selten in voller Bewußtheit vor sich geht und weil endlich diese „Schöpfung“ meist in einem allmählichen, durch viele Generationen sich erstreckenden Prozeß erfolgt, wollen manche Forscher in der

[1]) Das heißt, er kann meist gar nicht, oder doch nur in sehr bescheidenem Maße, die Glieder der Sprachgemeinschaft zu einer Bereicherung oder Abänderung der von ihnen konform angewandten Lautsymbolik bringen.

Sprache überhaupt nichts Geschaffenes, sondern ein „Gewachsenes“ sehen. Aber es bedeutet keineswegs ein Verkennen der bedeutsamen Unterschiede zwischen Volkssprache und Kunstsprache — welch letztere allerdings nicht, wie jene, „Farbe und Duft“, d. h. Verwurzelung im Emotionalen, hat und eine Fülle an ungehobenen Schätzen der Erkenntnis birgt — wenn wir die Unzulässigkeit der Umdeutung anonymer interindividueller Beziehungen in supraindividuelle Wesenheiten, in einen „objektiven Geist“, hervorheben. Mögen solche Umdeutungen auch unter Umständen zeitweilig der Fachforschung einen Ansporn geben, so stellen sie letztlich doch eine schwere Gefahr für sie dar, weil sie der exakten Analyse des Erkenntnisobjektes im Wege stehen.

Durch diese Feststellungen soll vor allem zweierlei ins Licht gerückt werden: erstens der konventionelle Charakter der Sprache und zweitens ihr Verhältnis zum Denken, zur Erfassung des Seins. Mit dem Verständnis dieses Verhältnisses meinen wir aber nicht die Klärung der Frage, inwieweit sich das Denken faktisch ohne Vorstellung sprachlicher Zeichen vollzieht oder vollziehen kann, sondern es handelt sich hier vor allem um die Hervorhebung des akzessorischen Charakters der Sprache, als einer Ausdrucksfunktion, gegenüber dem Denken. Die Sprache kann als Sprache, d. h. im Rahmen dieser ihrer Ausdrucksfunktion das Sein niemals bereichern oder umformen, sondern sie kann es nur „abbilden“, wobei die Art der „Abbildung“, abgesehen von dem jeweiligen Stande der Erkenntnis, in hohem Maße dadurch bestimmt sein wird, welchen Zwecken eine Sprache vorwiegend dient. Demgemäß wird die Umgangssprache die Strukturbeziehungen des Seins im allgemeinen nicht mit derjenigen Schärfe wiedergeben, welche für komplizierte logische Untersuchungen nötig ist, und es ist daher eine erkenntnispraktisch überaus wichtige Leistung, daß in den letzten Jahrzehnten in der logistischen Symbolik eine für den spezifischen Zweck logisch-mathematischer Untersuchungen bestimmte Semiotik geschaffen wurde, wobei natürlich das Faktum, daß bei der logistischen Sprache aus technischen Gründen das visuelle Moment gegenüber dem akustischen in den Vordergrund rückt, prinzipiell irrelevant ist.

Ehe wir uns der logistischen Symbolik zuwenden, müssen wir uns völlig klar darüber werden, was man meint, wenn vom objektiven Sinn der Sprache bzw. gewisser Sprachzeichen die Rede ist. Denn hier offenbart sich eine Zwiespältigkeit der Auffassung, die geeignet erscheint, Verwirrung hervorzurufen.

Einerseits versteht man nämlich unter dem „objektiven Sinn" der Sprachzeichen diejenigen Gedanken, welche in einer bestimmten Menschengemeinschaft allgemein durch diese Zeichen zum Ausdruck gebracht werden. Hier heißt also „Objektivität" Intersubjektivität im Hinblick auf das Denken innerhalb eines solchen Bereiches, ohne daß über den Inhalt der Gedanken irgend etwas ausgesagt würde.

In einer engeren Bedeutung aber nennt man Sprachzeichen dann „sinnvoll" oder „objektiv sinnvoll", wenn sie „sinnvollen" Gedanken Ausdruck verleihen, und hier liegt die „Objektivität des Sinns" darin, daß die Gedanken sich auf das „objektive Sein", auf die Gegenstände und Sachverhalte der Welt beziehen.

Man muß dies richtig begreifen: Alles Denken ist — wie wir im ersten Abschnitte festgestellt haben — Denken von etwas, was als unabhängig von der Tatsache des Gedachtwerdens bestehend angenommen wird, und demgemäß ist ein Denken, welches frei wäre von jeglichem Bezug auf das Sein, ausgeschlossen; wohl aber ist es möglich, daß gedankliche „Verknüpfungen" solcher Art Platz greifen, daß ihnen keine konforme Verknüpfung im Sein entsprechen kann.

Man nehme als Beispiele hiefür einerseits einen „leichtsinnigen Kreis" oder eine „viereckige Tugend", andrerseits einen „schwarzen Schimmel" oder einen „jungen Greis". Den Beispielen beider Arten ist gemeinsam, daß in ihnen die Zusammenfassung von nicht Zusammengehörigem unternommen wird; aber diese Nichtzusammengehörigkeit ist bei der ersten Klasse eine radikalere. Hier sind nämlich auch die zu den verknüpften Begriffen gehörigen obersten Gattungen miteinander unverträglich, während dies bei den Beispielen der zweiten Art nicht der Fall ist. Es ist wichtig, diese beiden Fälle scharf voneinander zu trennen, wie dies Husserl durch seine Unterscheidung zwischen „Unsinn" und „Widersinn" tut[1]). Insbesondere ist hervorzuheben, daß die Antinomien der Logik und der Mengenlehre zum größten Teil auf „unsinnigen" Voraussetzungen be-

[1]) Logische Untersuchungen, $2/_1$ Bd., S. 326; hienach wären die Beispiele der ersten Art als Beispiele für „Unsinn" zu bezeichnen.

ruhen. Solche unsinnige Verknüpfungen stehen jenseits der Anwendbarkeit des Satzes vom Widerspruch, denn in diesem Satze werden, wie wir im vorigen Abschnitte festgestellt haben, sinnvolle Aussagen bereits vorausgesetzt.

Es ist in diesem Zusammenhang noch darauf hinzuweisen, daß die Feststellung oder die Negierung von „Unsinn" und „Widersinn" ausschließlich auf Erkenntnis a priori basiert, also keinerlei Untersuchungen über die empirische Vorfindlichkeit voraussetzt. Man drückt dies häufig — im Anschluß an Leibniz — in der Weise aus, daß man sagt, es handle sich hier um Beziehungen, die „für jede mögliche Welt" bestehen; doch erscheint mir diese Ausdrucksweise nicht glücklich, da der Begriff der „möglichen Welt", wie eine genauere Analyse zeigt, gar keinen anderen Sinn in sich schließt, als denjenigen des Geltungsbereiches der vérités de raison, der Urteile a priori. Beziehen sich demgemäß Erkenntnis a priori und Erkenntnis a posteriori auf eine und dieselbe Welt als ihren Geltungsbereich, so darf doch die prinzipielle Verschiedenheit dieser beiden Erkenntnisweisen nicht verwischt werden.

Die beiden, für das Folgende wichtigsten Ergebnisse dieser Untersuchung sind:

1. Ein „sinnloses Zeichen" ist eine contradictio in adjecto, denn in der Behauptung, daß visuelle oder akustische Phänomene „Zeichen" sind, liegt diejenige eingeschlossen, daß man durch sie etwas verstehen, mit ihrer Hilfe fremde Gedanken erfassen kann.

Freilich muß es sich nicht so verhalten, daß dem räumlich (gestaltlich) oder zeitlich selbständigen, visuellen oder akustischen Phänomen ein selbständiger Sinn entspricht; es kann vielmehr sein, daß erst mit bestimmten Verknüpfungen solcher Phänomene Sinn verbunden wird. Es ist nicht vollkommen korrekt, in diesem Falle von „unselbständigen Zeichen" zu sprechen, da ja ein Zeichen überhaupt erst vorliegt, sobald eine solche Verknüpfung und mit ihr der Sinnbezug hergestellt ist[1]).

[1]) Dessenungeachtet hat sich in diesen Fällen die Bezeichnung „unvollständige Symbole" eingebürgert. Vgl. A. N. Whitehead and B. Russell „Principia Mathematica" (Cambridge, Vol. I [1910, 2. Aufl., 1925], Vol. II [1912, unveränderte Neuaufl. 1927], Vol. III [1913 bzw. 1927]. (Im folgenden wird stets nach der ersten Auflage zitiert, wenn nicht ausdrücklich auf die zweite

2. Durch seinen Sinn, d. h. durch seine Verknüpfung mit dem Denken ist das Zeichen mittelbar verknüpft mit dem Sein, das den Gegenstand des Denkens bildet, und es ist demgemäß wesentlich für jedes Zeichen, daß es ein Seiendes bedeutet, nämlich dasjenige Seiende, welches den Gegenstand des Gedankens bildet, dessen Ausdruck es ist[1]).

Die eben gemachten Feststellungen scheinen nun aber in Widerstreit mit der vielleicht wichtigsten neuen Errungenschaft auf dem Gebiete der mathematischen Grundlagenforschung zu stehen, nämlich mit der Hilbertschen Beweistheorie.

Wir wollen deren Grundgedanken mit Hilberts eigenen Worten wiedergeben: „Die Grundidee meiner Beweistheorie ist nichts anderes, als die Tätigkeit unseres Verstandes zu beschreiben, ein Protokoll über die Regeln aufzunehmen, nach denen unser Denken tatsächlich verfährt[2]).“

„Alle Aussagen, die die Mathematik ausmachen, werden in Formeln umgesetzt, so daß die eigentliche Mathematik zu einem Bestand an Formeln wird. Diese unterscheiden sich von den gewöhnlichen Formeln der Mathematik nur dadurch, daß in ihnen außer den gewöhnlichen Zeichen noch die logischen Zeichen

$\rightarrow$,	&,	$\vee$,	$-$,	(x),	$(E\,x)$
(folgt)	(und)	(oder)	(nicht)	(alle)	(es gibt)

vorkommen. Gewisse Formeln, die als Bausteine des formalen Gebäudes der Mathematik dienen, werden Axiome genannt. Ein Beweis ist eine Figur, die uns als solche anschaulich vorliegen muß; er besteht aus Schlüssen vermöge des Schlußschemas

$$\begin{array}{c} \mathfrak{S} \\ \mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{T} \\ \mathfrak{T} \end{array}$$

wo jedesmal die Prämissen, d. h. die betreffenden Formeln $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{T}$, jede entweder ein Axiom ist bzw. direkt durch Einsetzung aus einem Axiom entsteht oder mit der Endformel eines

Auflage hingewiesen wird). Vol. I, p. 69: „By an ‚incomplete‘ symbol we mean a symbol which is not supposed to have any meaning in isolation, but is only defined in certain contexts.“

[1]) Vgl. hiezu auch die Unterscheidung zwischen „Ausdruck“ und „Bedeutung“, bei R. Carnap, „Der logische Aufbau der Welt“, S. 24f.

[2]) „Die Grundlagen der Mathematik.“ (Mit Diskussionsbemerkungen von H. Weyl und einem Zusatze von P. Bernays.) Abh. a. d. Math. Sem. d. Hamb. Univ., Bd. 6, S. 65 bis 92, 1928, S. 79.

Schlusses übereinstimmt, der vorher im Beweise vorkommt bzw. aus ihr durch Einsetzung entsteht. Eine Formel soll beweisbar heißen, wenn sie entweder ein Axiom oder die Endformel eines Beweises ist.“

„Die Axiome und beweisbaren Sätze, d. h. die Formeln, die durch dieses Verfahren entstehen, sind die Abbilder der Gedanken, die alle übliche Mathematik ausmachen[1].“

„Zu der eigentlichen so formalisierten Mathematik kommt eine gewissermaßen neue Mathematik, eine Metamathematik, die zur Sicherung jener notwendig ist, in der — im Gegensatz zu den rein formalen Schlußweisen der eigentlichen Mathematik — das inhaltliche Schließen zur Anwendung kommt, aber lediglich zum Nachweis der Widerspruchsfreiheit der Axiome. In dieser Metamathematik wird mit den Beweisen der eigentlichen Mathematik operiert, und diese letzteren bilden selbst den Gegenstand der inhaltlichen Untersuchung[2].“

„Dieses Problem der Widerspruchsfreiheit ist aber bei der gegenwärtigen Sachlage durchaus der Behandlung zugänglich. Es reduziert sich darauf, wie man sofort erkennt, einzusehen, daß aus unseren Axiomen nach den aufgestellten Regeln „$1 \neq 1$“ sich nicht als Endformel herausstellen kann, also „$1 \neq 1$“ nicht eine beweisbare Formel ist[3].“

Die Auffassung, die in den eben angeführten Belegstellen zum Ausdrucke kommt, bedarf nun in einem Punkte kritischer Berichtigung; doch wendet sich diese Feststellung keineswegs gegen die Beweistheorie als solche, deren mathematische und auch erkenntnistheoretische Tragweite, wie ich glaube, eine ganz außerordentliche ist und sich in den kommenden Jahren immer deutlicher erweisen dürfte, sondern allein gegen die philosophische Interpretation dieser Theorie durch ihre Schöpfer Hilbert und Bernays[4].

---

[1]) A. a. O., S. 66.

[2]) „Die logischen Grundlagen der Mathematik.“ Math. Ann., Bd. 88, S. 151 bis 165, 1923, S. 153.

[3]) „Über das Unendliche“, a. a. O., S. 179. Über die im Rahmen seiner Beweistheorie von Hilbert behandelte „Methode der Ideale“ vgl. unten S. 55 ff.

[4]) Allerdings hat diese Interpretation, wie wir im folgenden sehen werden, auch insofern Konsequenzen für die mathematische Theorie selbst, als sie zu einem Stützungsversuch der Cantorschen Theorie vom unabzählbar Unendlichen führt.

Nach dieser, aus den vorstehenden Zitaten zu entnehmenden, Interpretation sind die Beweise anschaulich vorliegende, völlig sinnlose Figuren. Demgegenüber hat die im ersten Abschnitte (S. 34f.) durchgeführte Analyse offenbar gemacht, daß in den Regeln für den Gebrauch der Zeichen bei Bildung von „Beweisfiguren" eben jener Sinn eingeschlossen ist, der den logischen Transformationen — d. h. Bildungen von Aussagen, deren Bedeutung in der Bedeutung vorgegebener Aussagen enthalten ist — als Transformationen zukommt. Dies tritt besonders augenfällig dadurch hervor daß auch in den Beweisfiguren verschiedene Gruppen von Zeichen verwendet werden, die dann bei der inhaltlichen Deutung die Unterscheidung zwischen Individualzeichen und Zeichen für Variable sowie zwischen formal verschiedenen Arten von Individualzeichen und Variablezeichen ermöglichen[1]).

[1]) Dagegen erklärt Hilberts Mitarbeiter P. Bernays („Über Hilberts Gedanken zur Grundlegung der Arithmetik". Jahresbericht d. Deutschen Mathematikervereinigung, Bd. 31, S. 10 bis 19, 1922, S. 16). „Wo Begriffe fehlen, da stellt ein Zeichen zur rechten Zeit sich ein. Dies ist das methodische Prinzip der Hilbertschen Theorie." Man erkennt bei Betrachtung dieses Ausspruches, wie stark die Faszination der eigenwissenschaftlichen Symbolik gerade für diejenigen ist, die sie am virtuosesten handhaben, und wie berechtigt das Mißtrauen gegen die erkenntnistheoretische Interpretation eigener fachwissenschaftlicher Arbeiten auch der hervorragendsten Forscher sein kann. Es sei als Analogie auf die positivistische Deutung naturwissenschaftlicher Ergebnisse durch die Naturforscher selbst hingewiesen, die Husserl zu dem Ausspruche geführt haben: „Wenn wirklich die Naturwissenschaft spricht, hören wir gerne und als Jünger. Aber nicht immer spricht die Naturwissenschaft, wenn die Naturforscher sprechen; und sicherlich nicht, wenn sie über ‚Naturphilosophie' und ‚naturwissenschaftliche Erkenntnistheorie' sprechen." („Ideen", S. 38.) Vgl. hiezu auch Aloys Müller „Über Zahlen als Zeichen", Math. Ann., Bd. 90, S. 153 bis 158, 1923, und P. Bernays' Erwiderung hierauf, ibd. S. 159 bis 163, sowie O. Becker, „Mathematische Existenz", a. a. O., S. 453ff.

Zur Hilbertschen Symbolik und Beweistheorie seien, außer den bereits angeführten, nachfolgende Arbeiten hervorgehoben:

D. Hilbert, „Neubegründung der Mathematik". Erste Mitteilung, Abh. a. d. Math. Seminar d. Hamb. Univ., Bd. 1, S. 157 bis 177, 1922.

D. Hilbert und W. Ackermann, „Grundzüge der theoretischen Logik", Berlin 1928.

P. Bernays, „Axiomatische Untersuchung des Aussagenkalküls der ‚Principia mathematica'." Math. Zeitschr., Bd. 25, S. 305 bis 320, 1926.

W. Ackermann, „Begründung des ‚tertium non datur' mittels der Hilbertschen Theorie der Widerspruchsfreiheit". Math. Ann., Bd. 93, S. 1 bis 36, 1924.

Kommt demgemäß schon den Zeichen und Formeln der Hilbertschen Beweistheorie, welche die denkbar radikalste Formalisierung darstellt, Sinn zu, so gilt dies a fortiori für die impliziten Definitionen, die seiner geometrischen Axiomatik zugrunde liegen.

Die Hilbertschen Axiome der Geometrie sind nämlich Aussagen über bestimmte arithmetische oder im engeren Sinne logische Beziehungen zwischen beliebigen Gegenständen, also ein logisch-arithmetisches (relationstheoretisches) Schema, welches in verschiedener Weise durch anschauliche bzw. pseudoanschauliche[1]) Gegenstände ausgefüllt werden kann. Daß es in der Hilbertschen Axiomatik der Geometrie genau drei Systeme von Gegenständen gibt, und daß zwischen den einzelnen Gegenstandsystemen Zahlenbeziehungen und andere Ordnungsbeziehungen festgelegt werden, macht bereits den Sinngehalt dieser Axiomatik aus. Die impliziten Definitionen von Gegenständen bedeuten also nichts anderes als die Festlegung von formalen Beziehungen zwischen sonst beliebigen Gegenständen.

Hieraus ergibt sich auch die Erklärung der Abbildbarkeit der geometrischen Beziehungen auf arithmetische Beziehungen, die von Hilbert bekanntlich zum Beweis der gegenseitigen Unabhängigkeit und der Widerspruchsfreiheit der Axiome seiner Geometrie verwendet wird. Sie beruht nämlich darauf, daß die sogenannten geometrischen Beziehungen der Hilbertschen Axiomatik — in der jeder Bezug auf Anschauung ausgeschaltet ist — in Wahrheit logisch-arithmetische Beziehungen sind; die Zuordnung läßt den Charakter dieser Beziehungen nur klarer hervortreten. Wir kommen auf diesen Punkt im 4. Abschnitt noch näher zu sprechen.

Endlich fällt von hier aus Licht auf die Problematik der Isomorphie. Man versteht hierunter die ein-eindeutige Abbild-

W. Ackermann, „Zum Hilbertschen Aufbau der reellen Zahlen", ebenda, Bd. 99, S. 118 bis 133, 1928.

J. v. Neumann, „Zur Hilbertschen Beweistheorie". Math. Zeitschr., Bd. 26, S. 1 bis 46, 1927.

W. Dubislav, „Elementarer Nachweis der Widerspruchslosigkeit des Logikkalküls" erscheint demnächst im Journal f. Math., Bd. 101.

In manchen Punkten verwandt mit den Gedanken Hilberts zur Grundlegung der Mathematik sind diejenigen, die J. König in seinem Werke „Neue Grundlagen der Logik, Arithmetik und Mengenlehre", Leipzig 1914, ausspricht.

[1]) Vgl. unten S. 111ff.

barkeit zweier axiomatisch festgelegter Bereiche aufeinander derart, daß das Bestehen beliebiger Beziehungen zwischen den Elementen des einen Bereiches das Bestehen gewisser zugeordneter Beziehungen zwischen den entsprechenden Elementen des anderen Bereiches impliziert. Diese Abbildbarkeit wird vielfach als eine letzte, nicht weiter erklärbare, Gegebenheit hingenommen. Aber es ist hier, wie auch sonst in den meisten Fällen, ein Anzeichen unzureichender Einsicht, wenn man mit Möglichkeitsdefinitionen operiert; denn die Möglichkeit weist nun erst recht wieder auf einen sie „erzeugenden" Seinsgrund, ein Kriterium, hin und dessen Bestimmung stellt dann das eigentliche Problem dar. So verhält es sich — wie wir im folgenden noch dartun werden — mit der „Konstruierbarkeit", der „Wohlordenbarkeit", der „Entscheidbarkeit", und so steht es auch mit der Isomorphie. Diese ist nichts anderes als formale (strukturelle) Gleichheit, und die Angabe eines Korrelators, welcher die ein-eindeutige Zuordnung zwischen den isomorphen Beziehungen herstellt, ist nur ein Mittel, um diese formale Gleichheit zu erfassen. Ein Mittel — aber gewiß nicht das einzige —, denn die Struktur jedes Systems steht ja unabhängig von derjenigen irgend eines anderen Systems fest; daher muß sich eine logische „Normalform" finden lassen, die die unmittelbare Prüfung zweier beliebiger Axiomensysteme auf Isomorphie hin ermöglicht. Die von Hilbert und seinen Mitarbeitern in den letzten Jahren ausgearbeitete Theorie erscheint hiefür als das geeignete Instrument[1]).

Bei der Durchführung aller derartigen Untersuchungen spielt nun die logistische Symbolik eine wichtige Rolle und wir haben uns daher klar zu machen, welche Momente ihre Tauglichkeit für den erstrebten Zweck begründen[2]).

Zunächst ist festzustellen, daß in ihr keine anderen Unterschiede zur Darstellung gelangen sollen, als solche der Struktur. Sie beschränkt sich also von vornherein darauf, die Struktur der Welt zu beschreiben.

Nun ergibt sich die weitere Frage, auf welchen Prinzipien eine Ausdrucksfunktion basieren muß, damit sich an den be-

[1]) Vgl. auch die unten S. 71ff. folgenden Ausführungen über Monomorphie von Axiomensystemen.

[2]) Zur Geschichte des Logikkalküls vgl. G. Stammler, „Begriff, Urteil, Schluß", Halle a. d. S., 1928, S. 83ff.

treffenden Zeichen die durchzuführenden logisch-mathematischen Erkenntnistatsachen möglichst einleuchtend veranschaulichen lassen. Dieses Ziel sucht die Logistik dadurch zu erreichen, daß sie die Zeichen so wählt, daß sich in ihnen die auszudrückende Struktur abbildet oder, wie man auch sagen kann, „zeigt"[1]).

Demgemäß werden als gleich vorausgesetzten Gegenständen (Beziehungsträgern) gleiche Zeichen zugeordnet; Gegenständen, die nicht als gleich vorausgesetzt werden, verschiedene Zeichen.

Die Darstellung einer Beziehung zwischen einer — sc. endlichen — Mehrheit verschiedener Dinge wird in der Weise durchgeführt, daß jedem Gegenstand ein Zeichen umkehrbar eindeutig zugeordnet erscheint. Wenn eine Beziehung sich als aus anderen zusammengesetzt erweist, so wird dieser Zusammengesetztheit dadurch Rechnung getragen, daß auch die Bezeichnung für jene Beziehung aus den Zeichen für jene einfacheren Beziehungen zusammengesetzt wird.

Hiedurch wird der logische Überblick wesentlich erhöht und jeder einzelne Schritt des gedanklichen Prozesses zu voller Bewußtheit erhoben, wodurch sich Fehler viel leichter entdecken lassen.

Aber jede „Sprache" weist gewisse unbehebbare Mängel darum auf, weil sie gezwungen ist, die einzelnen akustischen oder visuellen Zeichen zeitlich oder räumlich zu ordnen, indem sie sie nacheinander bzw. nebeneinander oder über- und untereinander setzt und hiedurch eine „Richtung" in das Bild der Beziehung gebracht wird, welche die abzubildende Beziehung selbst nicht besitzt[2]).

Wir wollen uns dies an einem einfachen Beispiel der gewöhnlichen Wortsprache begreiflich machen. Die Aussage: „Die männliche Person A ist ein Bruder der männlichen Person B" verleiht demselben Sachverhalt Ausdruck, wie die Aussage: „Die männliche Person B ist ein Bruder der männlichen Person A", trotz-

[1]) Vgl. Wittgenstein, a. a. O. „Der Satz zeigt die logische Form der Wirklichkeit. Er weist sie auf." (Satz 4·121.) „So zeigt ein Satz ‚f a', daß in seinem Sinn der Gegenstand a vorkommt, zwei Sätze ‚f a' und ‚g a', daß in ihnen beiden von demselben Gegenstand die Rede ist" (4·1211).

[2]) Vgl. hiezu O. Neurath, „Eindeutigkeit und Kommutativität des logischen Produktes „a b". Archiv f. syst. Phil., Bd. 15, S. 104 bis 106, 1909, sowie „Definitionsgleichheit und symbolische Gleichheit", ibd., Bd. 16, S. 142 bis 144, 1910.

dem die Urteile verschiedenen Sinn haben, da im ersten Falle A, im zweiten Falle B Subjekt ist. Dieses Faktum darf nun nicht in der Weise interpretiert werden, als bezögen sich die beiden Sätze „zunächst" auf zwei getrennte Sachverhalte, deren Gleichheit erst hinterher festgestellt würde, sondern es liegt nur ein einziger Sachverhalt vor, und die Verdoppelung ist nur auf die Bezeichnungsweise zurückzuführen, durch die in die ihrem Wesen nach richtungslose Beziehung eine Richtung dadurch hineingetragen wird, daß die beiden Beziehungsglieder in der Bezeichnung eine verschiedene räumliche oder zeitliche Stellung haben.

Hieraus aber ergibt sich nun bereits eine für unsere folgenden Untersuchungen sehr wichtige Feststellung. Sie geht dahin, daß die logistische Beschreibung von Beziehungen keineswegs in der Weise aufgefaßt werden darf, als wären die hiebei durchgeführten Unterscheidungen — etwa Transitivität, Nichttransitivität, Intransitivität — Aufweisungen von Eigenschaften der verschiedenen Beziehungen, so daß hiedurch etwas über die Welt ausgesagt würde. Sie betrifft nämlich in Wahrheit gar nicht die Beziehungen selbst, sondern nur die verschiedenen Arten ihrer Symbolisierung und deren wechselseitige Substituierbarkeit. Es liegt hier also — wie im Gegensatze zur herrschenden Meinung nachdrücklich betont sei — kein Anlaß zur Bildung eines Kalküls vor, der Eigenschaften von Beziehungen zu symbolisieren hätte. Daß ein solcher „erweiterter Funktionenkalkül" überhaupt nicht erforderlich ist, geht schon aus den im ersten Abschnitte (S. 18f. u. 26ff.) durchgeführten Analysen hervor.

Es sei hier nochmals auf die schon im ersten Abschnitte hervorgehobene Tatsache hingewiesen, daß die Richtung, welche durch die Bezeichnungsweise an Stelle der ontischen Richtungslosigkeit gesetzt wird, insoferne mit derjenigen des Denkens übereinstimmt, als dieses durch die zeitliche Aufeinanderfolge der Erfassung der einzelnen Erkenntnistatsachen und ihrer Beziehungen diese in eine psychische Ordnung bringt. Ziehen wir, um dies einleuchtend zu machen, das Beispiel der Bedingung heran. „A bedingt B" bedeutet: A und non B bestehen nie zusammen; eine Beziehung, in welcher non B gegenüber A in keiner Weise ausgezeichnet ist. Für das Denken aber, welches von dem Bestehen von A seinen Ausgang nimmt und dann aus diesem das vielleicht nicht unmittelbar einleuchtende Bestehen von B folgert, erscheint das zuerst erfaßte A als das prius gegenüber dem hieraus erschlossenen B; die Denkordnung wird fälschlich als Seinsordnung interpretiert. Diese Fehlinterpretation hat viel zur Verdunkelung der Grundprobleme der Logik und Mathematik beigetragen.

Wir geben im folgenden ein kurze, unvollständige Zusammenstellung der für die Beschreibung der obigen Beziehungen wesentlichen Begriffe, wie sie sich bei Carnap[1]) findet, wieder.

„Eine Beziehung heißt symmetrisch, wenn sie mit ihrer Konversen (Umkehrung) identisch ist (z. B. Gleichaltrigkeit), andernfalls nicht-symmetrisch (z. B. Bruder); eine nicht-symmetrische Beziehung heißt asymmetrisch, wenn sie ihre Konverse ausschließt (z. B. Vater). Eine Beziehung heißt reflexiv, wenn sie bei Identität (innerhalb ihres Feldes) stets erfüllt ist (z. B. Gleichaltrigkeit), andernfalls nicht-reflexiv (z. B. Lehrer); eine nicht-reflexive Beziehung heißt irreflexiv, wenn sie die Identität ausschließt (z. B. Vater). Eine Beziehung heißt transitiv, wenn sie stets auch zum übernächsten Glied gilt (z. B. Vorfahre), andernfalls nicht-transitiv (z. B. Freund); eine nicht-transitive Beziehung heißt intransitiv, wenn sie nie zum übernächsten Glied gilt (z. B. Vater). Eine Beziehung heißt zusammenhängend, wenn zwischen zwei verschiedenen Gliedern ihres Feldes stets entweder sie selbst oder ihre Konverse besteht (z. B. für eine Tischgesellschaft von sechs Personen die Beziehung ‚ein, zwei oder drei Plätze links'). Eine Beziehung heißt eine Reihe, wenn sie irreflexiv und transitiv (daher asymmetrisch) und zusammenhängend ist (z. B. ‚kleiner als' für reelle Zahlen). Eine Beziehung heißt eine ‚Ähnlichkeit', wenn sie symmetrisch und reflexiv ist; eine ‚Gleichheit', wenn sie außerdem transitiv ist."

Einer in dieser Zusammenstellung nicht genannten Unterscheidung wollen wir unsere besondere Aufmerksamkeit zuwenden, nämlich derjenigen zwischen ein-eindeutigen, ein-mehrdeutigen, mehr-eindeutigen[2]) und mehr-mehrdeutigen Bezie-

[1]) „Der logische Aufbau der Welt", S. 13. Vgl. auch seinen jüngst erschienenen „Abriß der Logistik" (Schriften zur wissenschaftlichen Weltauffassung, Bd. 2, Wien 1929).

[2]) In neuerer Zeit gewinnt eine Terminologie an Verbreitung, welche von den mehr-eindeutigen Beziehungen auch die ein-eindeutigen Beziehungen umfassen läßt. Es ist dies auch die Bezeichnungsweise in den „Principia Mathematica".

hungen. Daß eine Beziehung zwischen zwei Gegenständen ein-mehrdeutig bzw. mehr-eindeutig ist, besagt, daß einer der beiden Gegenstände in der gleichen Beziehung, in der er zum zweiten Gegenstand steht, auch zu anderen Gegenständen stehen kann; während der zweite Gegenstand nicht in der gleichen Beziehung, in der er zum ersten steht, auch zu anderen Gegenständen stehen kann. Nun können aber — insbesondere in der So-seins-Sphäre, auf die wir uns hier beschränken wollen — die Beziehungen zwischen einem bestimmten Gegenstand und zwei oder mehreren untereinander verschiedenen Gegenständen nicht vollkommen gleich sein, sondern nur in gewissem Ausmaß, welches einen Spielraum für Verschiedenheiten offen läßt. Es entsprechen daher den ein-mehrdeutigen bzw. mehr-eindeutigen Beziehungen — und a fortiori den mehr-mehrdeutigen Beziehungen — nicht eigene Sachverhalte, die von den ein-eindeutigen Beziehungen nicht umfaßt würden, sondern sie sind nur logische Kombinationen von ein-eindeutigen Beziehungen, und zwar von Beziehungen zwischen eidetischen Singularitäten. Man muß sich nämlich darüber klar sein, daß alle Beziehungen innerhalb der So-Seins-Sphäre aus Beziehungen zwischen eidetischen Singularitäten aufgebaut sind und daß daher durch die vollständige Bestimmung der Beziehungen zwischen den eidetischen Singularitäten einer sachhaltigen oder formalen Sphäre jede Beziehung innerhalb dieser Sphäre bestimmt ist[1]).

Dient also der logistische Kalkül, wie auch ganz allgemein die mathematische Symbolik, dem Zweck, die formale Schicht des Seins, mit der es die Logik und die Zahlenlehre zu tun hat, in möglichster Reinheit darzustellen, so entsteht auf der anderen Seite die Gefahr, daß Formen der logischen und mathematischen Symbolik mit den symbolisierten logisch-mathematischen Gegenständen so eng gedanklich verschmelzen, daß diese Gegenstände von den Methoden ihrer symbolischen Erfassung nicht mehr deutlich unterschieden werden, so daß — in der Mathematik — die Einführung neuer heuristischer zweckdienlicher Symbole als „freie Schöpfung des Geistes“, mithin als eine sachliche Erweiterung der Sphäre der mathematischen Gegenstände aufgefaßt wird[2]).

[1]) Vgl. oben S. 17.

[2]) Eine weitere Gefahr ist die, daß Fehlauffassungen, die in die Symbolik Eingang finden, durch diese konserviert und quasilegitimiert werden.

Wir wollen uns demgegenüber den fundamentalen Unterschied zwischen den mathematischen Gegenständen auf der einen und der Art ihrer Bestimmung bzw. Darstellung auf der anderen Seite an einem besonders einprägsamen Beispiel, nämlich an der dezimalen Schreibweise der natürlichen Zahlen begreiflich machen. Hier liegt freilich der in Rede stehende Unterschied zu sehr an der Oberfläche, um von einsichtigen Beurteilern übersehen werden zu können; aber grundsätzlich liegen hier die Verhältnisse nicht anders als etwa bei der Einführung der Infinitesimalsymbolik oder der Ideale der Zahlentheorie.

Unser Beispiel bildet also die Darstellung der natürlichen Zahlen im Dezimalsystem; das bedeutet als Potenzreihen mit der Basis 10. Was zunächst die Auszeichnung der Zahl 10 anbelangt, die mit der zweifellos nicht rein mathematischen Tatsache, daß der Mensch zehn Finger hat, zusammenhängen dürfte, so ist jedem mathematisch einigermaßen Geschulten klar, daß sich an dem Erkenntnisgehalt der Arithmetik nicht das geringste ändert, wenn man statt der Basis 10 irgend eine andere natürliche Zahl, die größer als 1 ist, als Basis setzt. Aber es ist überhaupt die Darstellung der natürlichen Zahlen durch Potenzreihen, so zweckmäßig sie sich auch erweist, keineswegs eine Methode, die für das arithmetische Denken essentiell wäre; vielmehr ließe sich jeder natürliche Zahlen betreffende Sachverhalt auch ohne Zuhilfenahme dieser Darstellungsweise formulieren bzw. in eine andere Darstellungsweise transformieren.

Aus solchen Transformationen besteht, wie das logische, so auch das mathematische Verfahren; demgemäß kann dessen Sinn nur dann richtig erfaßt werden, wenn über die Unterscheidung zwischen den mathematischen Gegenständen und der Art ihrer Darstellung vollkommene Klarheit herrscht.

Bestreitet man aber die Selbständigkeit mathematischer Gegenstände gegenüber der Symbolik, so wird man geneigt sein, einer Veränderung — z. B. einer Bereicherung der Symbolik — übergroße Bedeutsamkeit beizumessen. Dies zeigt sich bei Hilberts Methode der Ideale. Die Einführung der idealen Elemente dient dem Ziele der Vereinfachung mathematischer Aussagen und mathematischer Beweise. Hilbert führt

---

Wittgensteins Kritik an der Symbolik der „Principia Mathematica", der durchgebildetsten logistischen Symbolik, die wir bis jetzt besitzen, sollte hier als Mahnung zu kritischer Vorsicht betrachtet werden.

die Bildung der algebraischen Symbole, der negativen und komplexen Zahlen und der Kummerschen Ideale als Beispiele für diese Methode an und will nun auch das Unendliche, und zwar sowohl das abzählbar als auch das unabzählbar Unendliche in analoger Weise als einen Inbegriff idealer Elemente aufgefaßt wissen.

„Gerade wie $i = \sqrt{-1}$ eingeführt wurde, um die Gesetze der Algebra, z. B. die über Existenz und Anzahl der Wurzeln einer Gleichung in der einfachsten Gestalt aufrechtzuerhalten; gerade wie die Einführung der idealen Faktoren geschah, um auch unter den ganzen algebraischen Zahlen die einfachen Teilbarkeitsgesetze beizubehalten, wie wir z. B. für die Zahlen 2 und $1 + \sqrt{-5}$ einen gemeinsamen idealen Teiler einführen, während ein wirklicher nicht vorhanden ist, so haben wir zu den finiten Aussagen die idealen Aussagen zu adjungieren, um die formal einfachen Regeln der üblichen Aristotelischen Logik zu erhalten. Und es trifft sich sonderbar, daß die von Kronecker mit solcher Leidenschaft angefochtenen Schlußweisen das genaue Seitenstück zu dem sind, was derselbe Kronecker in der Zahlentheorie an Kummer so enthusiastisch bewundert und als die höchste mathematische Leistung gepriesen hat[1]."

Da nach Hilberts Auffassung der Einführung idealer Elemente nur insofern prinzipielle Schranken gesetzt sind, als die für diese Elemente definierten Beziehungen (Operationen) sich widerspruchsfrei dem System der Mathematik einfügen müssen, sonach ihre „Konstruktion", d. h. ihre Zurückführung auf die Grundelemente der Mathematik nicht gefordert wird, so ergibt sich, daß für Hilbert die Aussagen über ideale Elemente reine Existenzaussagen sind, und seine Rechtfertigung der reinen Existenzaussagen auf Grund ihrer erkenntnispraktischen (heuristischen) Bedeutsamkeit — stimmt demgemäß auch völlig mit derjenigen der Einführung idealer Elemente überein. So heißt es in einem der jüngsten Vorträge Hilberts über Grundlagenfragen:

„Das Wertvolle der reinen Existenzbeweise besteht gerade darin, daß durch sie die einzelne Konstruktion eliminiert wird und viele verschiedene Konstruktionen durch einen Grundgedanken zusammengefaßt werden, so daß allein das für den

[1]) „Über das Unendliche", a. a. O., S. 174.

Beweis Wesentliche deutlich hervortritt: Abkürzung und Denkökonomie sind der Sinn der Existenzbeweise[1]).“

Aus den im vorstehenden wiedergegebenen und noch verschiedenen anderen Stellen der neueren programmatischen Darlegungen Hilberts über seine Beweistheorie[2]) scheint nun in einer jeden Zweifel ausschließenden Weise hervorzugehen, daß die Einführung idealer Elemente in die Mathematik und das Operieren mit Existenzialaussagen nichts anderes bezweckt und bezwecken kann, als eine Vereinfachung der Formulierung und der Beweisführung, die freilich in einer großen Anzahl von Fällen für den Erfolg heuristischer Bemühungen ausschlaggebend sein wird und aus der Mathematik kaum weggedacht werden kann. Neue mathematische Gegenstände jedoch werden durch die Einführung der idealen Elemente nicht geschaffen.

Aber Hilbert versucht nun mit Hilfe der Methode der idealen Elemente dem unabzählbar Unendlichen der Cantorschen Mengenlehre einen legitimen Platz in der Mathematik zu sichern, obwohl — wie wir im folgenden erkennen werden — dessen Konstruktion prinzipiell ausgeschlossen ist.

Hier spielt nämlich — wenn auch vielleicht nicht voll bewußt — diejenige „Existenz“ mit, die auf Grund des Komprehensionsprinzips (wonach durch jede mathematische

---

[1]) „Grundlagen der Mathematik“, a. a. O., S. 79. In derselben Arbeit wird die Zurückführung der Existenzsätze auf ein Axiom vollzogen. „Die Quelle der reinen Existenztheoreme ist das logische ε-Axiom, auf dem wiederum der Aufbau der gesamten idealen Aussagen beruht.“ (Ibd.)

„Das logische ε-Axiom lautet: „$A(a) \rightarrow A(\varepsilon A)$. Hierin bezeichnet $\varepsilon(A)$ ein Ding, für das die Aussage $A(a)$ sicher zutrifft, wenn sie überhaupt für ein Ding zutrifft; ε heiße die logische ε-Funktion. Zur Erläuterung der Rolle der logischen ε-Funktion sei folgendes bemerkt:“

„Die ε-Funktion kommt im Formalismus in dreifacher Weise zur Anwendung.“

„1. Es läßt sich mit Hilfe des ε das „alle“ und „es gibt“ definieren...“

„2. Trifft eine Aussage $\mathfrak{A}$ auf ein und nur ein Ding zu, so ist $\varepsilon(\mathfrak{A})$ dasjenige Ding, für das $\mathfrak{A}(a)$ gilt.“

„Die ε-Funktion ermöglicht es also, eine solche Aussage $\mathfrak{A}\,a$, die nur auf ein Ding zutrifft, in der Form $a = \varepsilon(\mathfrak{A})$ aufzulösen.“

„3. Darüber hinaus hat das ε die Rolle der Auswahlfunktion, d. h. im Falle, wo $\mathfrak{A}\,a$ auf mehrere Dinge zutreffen kann, ist $\varepsilon\,\mathfrak{A}$ „irgendeines von den Dingen a, auf welche $\mathfrak{A}(a)$ zutrifft“ (a. a. O., S. 67f.).

[2]) Vgl. insbesondere auch die oben S. 19, Anm. 1, wiedergegebene Stelle über die Existentialurteile als Teile von Urteilen.

Eigenschaft eine Gesamtheit von Gegenständen, die diese Eigenschaft besitzen, bestimmt wird) vorzuliegen scheint. Die Behauptungen über derartige „Existenz" aber sind prinzipiell verschieden von denjenigen über die Existenz endlicher Schranken[1]) und gegen erstere allein richten sich — im Gegensatz zu Brouwer — unsere Einwände.

Wenn demgemäß Hilbert zwar ein „inhaltliches Transfinites" aufgibt, aber dessenungeachtet glaubt, es in der „formalen Mathematik" aufrecht erhalten zu können, da hier der Widerspruch die einzige Schranke des Denkens bilde, so ist darauf zu erwidern, daß die Einzigkeit dieser Schranke für den Bereich des mathematischen Denkens zwar unbestreitbar bleibt, daß aber der „Sinn" — d. h. im mathematischen Denken der gedankliche Bezug auf die formale Sphäre — die Voraussetzung dafür bildet, daß derjenige Bereich überhaupt betreten wird, der von der Schranke des Widerspruches umschlossen ist. Sieht man aber auch die finiten Beweisfiguren als „sinnlos" an, dann kommt es dazu, daß die echte Zäsur zwischen Sinn und Sinnlosigkeit unbemerkt bleibt.

Demgemäß kann das volle Verständnis für die hohe Bedeutsamkeit, ja erkenntnispraktische Unentbehrlichkeit, der mathematischen Symbolik in ihrer heutigen Gestalt keineswegs einen Verzicht auf die Feststellung einschließen, daß jeder mit Hilfe dieser Symbolik formulierte Satz auch nach Auflösung dieser Symbolik bis auf gewisse Grundsymbole sinnvoll bleiben muß und daß, wenn ein bei Verwendung bestimmter Symbole aufgestellter Satz eine Tautologie oder eine Kontradiktion ist, auch seine „Übersetzung" in eine diese Symbole nicht verwendende Sprache eine Tautologie bzw. eine Kontradiktion ist. Diese Feststellung läßt sich formulieren als Satz von der Unabhängigkeit der Mathematik von der mathematischen Sprache, den L. E. I. Brouwer neuerdings an die Spitze seiner Kritik des Hilbertschen „Formalismus" gestellt hat[2]).

---

[1]) Um letztere handelt es sich bei Hilberts berühmtem erstem („theologischem") Beweis der Endlichkeit des vollständigen Invariantensystems („Über die Theorie der algebraischen Formen", Math. Ann., Bd. 36, S. 473 bis 534, 1890, S. 521 ff.).

[2]) In seinem Wiener Vortrag: „Mathematik, Wissenschaft und Sprache", abgedruckt in „Monatshefte für Mathematik und Physik", 36. Bd., S. 153 bis 164, 1929.

Diese These steht in engem Zusammenhange mit derjenigen der Konstruierbarkeit aller rein mathematischen Gegenstände mit Hilfe der natürlichen Zahlen (was Brouwers früherer Formulierung entspricht), wenn man unter Konstruktion „Definition" versteht[1]). Diese Thesen Brouwers sind restlos zu akzeptieren.

Aber neben der Scylla der Verquickung von mathematischer Symbolik und mathematischen Gegenständen, welche in ihrer Folge zu einem „überschwänglichen" Gebrauch der Symbolik und damit zur Bildung von Pseudogegenständen führt, liegt die Charybdis der Verquickung der mathematischen Gegenstände mit dem in der Zeit verlaufenden Prozeß des mathematischen Denkens, wodurch die Mathematik als abhängig von dem Faktum der jeweiligen mathematischen Erkenntnis aufgefaßt wird.

Diese Versuchung liegt gerade für diejenigen, die von der Analyse des Denkens her das Wesen der Mathematik erfassen wollen, aus zwei Gründen besonders nahe. Einmal darum, weil das Fundament der Mathematik, die Zahl, in enger Beziehung zu einem zeitlichen Prozeß (dem Zählprozeß) steht, obwohl die Zeit nicht in die Zahl eingeht — wie wir im nächsten Abschnitte zeigen werden —; dann aber auch darum, weil eine Gesamtheit aller Zahlen an sich gar nicht besteht und daher eine feste Sphäre der mathematischen Erkenntnis nicht vorgegeben zu sein scheint.

Demgemäß, behauptet Brouwer, erfasse man den Sinn der Mathematik nicht adäquat, wenn man sie als Sein ansehe, vielmehr sei sie ein Werden, eine geistige Tat. Durch seine Lehre,

---

[1]) Man spricht hier und in ähnlichen Fällen von einem „Postulat" und versteht darunter eine Forderung an das Denken, die es zu erfüllen habe, um „richtiges Denken" zu sein. In Wahrheit aber besagt Brouwers These, daß „unkonstruierbare mathematische Gegenstände" ein Nonsens sind, also gar nicht gedacht werden können. Der Anschein des intentionalen Bezuges auf mathematische Gegenstände entsteht hiebei nur durch Begleitvorstellungen (vgl. Husserls „Logische Untersuchungen", II., 1, S. 61ff.), die bei dem Versuche der Verdeutlichung des „eigentlichen" (zentralen) Sinnes verschwinden.

Die eben erwähnte Transposition logischer Einsichten in Forderungen an das Denken ist nicht ungefährlich, da sie leicht zu einer Verquickung logischer und psychologisch-anthropologischer Momente führt (vgl. hiezu Husserl, „Logische Untersuchungen", Bd. I, S. 9ff.).

die er Neo-Intuitionismus[1]) nennt, sind namentlich H. Weyl[2]) und O. Becker[3]) stark beeinflußt worden. Wir wollen im folgenden die Grundauffassung des Brouwerschen Intuitionismus, der im Mittelpunkte des heutigen mathematischen Methodenstreites steht, kurz darstellen, um an diese Darstellung eine gleichfalls kurze Prinzipienkritik zu knüpfen.

Um der Brouwerschen Lehre gerecht zu werden, muß man sich darüber klar sein, daß sie vor allem aus dem Bestreben hervorgegangen ist, durch eine radikale Analyse des mathematischen Denkens der Ungereimtheiten Herr zu werden, welche mit dem unabzählbar Unendlichen in der Mathematik verknüpft sind. Nur wenn man sich diesen Ursprung vor Augen hält, kann man zu Brouwers Thesen den rechten Zugang finden.

Brouwer erkennt mit voller Klarheit die Fehlerhaftigkeit der Annahme des Bestehens unendlicher Totalitäten und spricht es demgemäß mit aller wünschenswerten Deutlichkeit aus, daß die unendliche Menge überhaupt nichts anderes ist als ein Gesetz; dessenungeachtet sind seine übrigen — enge zusammenhängenden — Hauptlehren, nämlich die Bestreitung der Allgemeingültigkeit des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten, die Leugnung der Entscheidungsdefinitheit der Arithmetik und der Analysis, sowie die Ausschaltung reiner Existentialsätze und Exi-

[1]) Als Hauptvertreter des älteren „Intuitionismus" erscheinen Kronecker und Poincaré, weiter Borel, Baire und Lebesgue. Der Name dieser Lehre soll die fundamentale Bedeutsamkeit, die in ihr der intuitiven Erfassung der Reihe der natürlichen Zahlen für die Mathematik beigelegt wird, zum Ausdrucke bringen. Poincaré selbst nennt sich „pragmatiste".

[2]) Von seinen Schriften vgl. insbesondere:

„Das Kontinuum." Kritische Untersuchungen über die Grundlagen der Analysis. Leipzig 1918.

„Der circulus vitiosus in der heutigen Begründung der Analysis." Jahresbericht d. Deutsch. Math.-Ver., Bd. 28, S. 85 bis 92, 1919.

„Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik." Math. Zeitschr., Bd. 10, S. 39 bis 79, 1921.

„Randbemerkungen zu Hauptproblemen der Mathematik." Ibd., Bd. 20, S. 131 bis 150, 1924.

„Die heutige Erkenntnislage in der Mathematik." Symposion, Bd. 1, S. 1 bis 32, 1925. Auch als Heft 3 der „Sonderdrucke des Symposion" erschienen.

„Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft", München und Berlin 1927.

[3]) Vgl. neben den bereits genannten Arbeiten noch: „Das Symbolische in der Mathematik". Blätter für deutsche Philosophie, Bd. 1, S. 329 bis 348, 1928.

stentialbeweise überwiegend gerade an der durch die obige Feststellung im Grunde schon erledigten Problematik des unabzählbar Unendlichen orientiert.

Der zentrale Angriffspunkt Brouwers gegen die Lehre vom unabzählbar Unendlichen liegt in seiner Feststellung, „daß das Komprehensionsaxiom, auf Grund dessen alle Dinge, welche eine bestimmte Eigenschaft besitzen, zu einer Menge vereinigt werden ...... zur Begründung der Mengenlehre unzulässig bzw. unbrauchbar sei und der Mathematik notwendig eine konstruktive Mengendefinition zugrunde gelegt werden müsse“[1]).

Ist das Komprehensionsaxiom ausgeschaltet, dann tritt die Zurückführbarkeit der gesamten Mathematik auf natürliche Zahlen klar hervor. Diese Einsicht wird von Brouwer in folgender Weise zum Ausdrucke gebracht: „...... all mathematical sets of units which are entitled to that name can be developed out of the basal intuition, and this can only be done by combining a finite number of times the two operations: ‚to create a finite ordinal number', and ‚to create the infinite ordinal number ω'; here is to be understood that for the latter purpose any previously constructed set or any previously performed constructive operation may be taken as a unit. Consequently the intuitionist recognizes only the existence of denumerable sets, i. e., sets whose elements may be brought into one-to-one correspondence either with the elements of a finite ordinal number or with those of the infinite ordinal number ω“[2]).

---

[1]) „Intuitionistische Mengenlehre.“ Jahresber. d. Deutsch. Math.-Ver., Bd. 28, S. 203 bis 208, 1919. (Abgedruckt auch in Kon. Akad. v. Wetensch. te Amsterdam, Proceedings, Bd. 23, S. 949 bis 954, 1920.)

Vgl. auch die klare, einprägsame Formulierung, die H. Weyl, „Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik“, a. a. O., S. 42, diesem Gedanken gibt: „Durch den Sinn eines klar und eindeutig festgelegten Gegenstandsbegriffs mag wohl stets den Gegenständen, welche des im Begriff ausgesprochenen Wesens sind, ihre Existenzsphäre angewiesen sein; aber es ist darum keineswegs ausgemacht, daß der Begriff ein umfangs-definiter ist, daß es einen Sinn hat, von den unter ihn fallenden existierenden Gegenständen als einem an sich bestimmten und begrenzten, ideal geschlossenen Inbegriff zu sprechen.“

[2]) „Intuitionisme en formalisme“, Groningen 1912, zit. nach der englischen Übersetzung im Bull. of the Amer. Math. Soc., Bd. 20, S. 81 bis 96, 1914, Seite 86.

Wie ist nun aber für Brouwer die unendliche Ordinalzahl ω, die in der Cantorschen Mengenlehre als Ordinalzahl der wohlgeordneten Menge aller natürlichen Zahlen erscheint, gegeben? Welchen Sinn hat für ihn das abzählbar Unendliche? An dieser Stelle tritt nun bereits die eine Rolle, die die Zeit nach Brouwers Auffassung in der Mathematik spielt, hervor. Das Abzählbare erscheint ihm nämlich in Form einer Folge gegeben, die nicht ist, sondern wird. Das Grundschema einer solchen Folge ist die Folge der natürlichen Zahlen. Diese Folge ist eine gesetzmäßige, denn in ihr „bestimmt" jedes Glied ein folgendes nach einem allgemeinen Gesetz, und es ist demgemäß auch möglich, dieses Gesetz durch ein allgemeines Glied (n), von welchem die Gesetzmäßigkeit ausgesagt wird, zu symbolisieren. Diesen gesetzmäßigen Folgen stellt nun Brouwer, hauptsächlich zwecks Einführung eines intuitionistischen Kontinuumbegriffes, die „frei werdenden Wahlfolgen" gegenüber. Vollkommen freie Wahlfolgen liegen nach Brouwer dann vor, wenn man einzelne Zahlen ganz beliebig nacheinander wählt; weiters kennt er Wahlfolgen, die innerhalb eines bestimmten Spielraumes frei sind, also gewissen einschränkenden Nebenbedingungen unterworfen sind, und endlich solche, deren Glieder auf Grund von anderweitig vollzogenen Wahlen festgelegt erscheinen[1]).

Ein Beispiel für das Entstehen der Wahlfolgen der ersten Art ist das beliebige Hintereinandersetzen von Zahlen, für Wahlfolgen der zweiten Art das Würfeln mit einem gewöhnlichen Würfel, wobei der Variationsspielraum die Zahlen 1 bis 6 umfaßt, für Wahlfolgen der dritten Art endlich die Summe zweier Wahlfolgen erster oder zweiter Art, etwa die Summe je zweier aufeinanderfolgender Würfe. Nun ist es einleuchtend, daß die Bestimmtheit einer frei werdenden Wahlfolge über das Gewordene hinaus nie weiter reichen kann als die Gesetzlichkeit, der sie unterliegt; deshalb ist sie, da die durchgängige Gesetzmäßigkeit bei der frei werdenden Wahlfolge ausgeschlossen erscheint, von der jeweils erreichten Stelle abhängig. Es gibt also, nach Brouwer, bezüglich ihrer entscheidbare und unentscheidbare Fragen. So ist es etwa, wenn man beim Nummernziehen aus einer Urne zweimal die 3 und einmal die 2 gezogen hat und eine Zahlenreihe auf Grund der Ziehungen

[1]) Vgl. hiezu O. Becker, „Mathematische Existenz", a. a. O., S. 448ff.

bildet, vorläufig unentschieden, ob die Reihe eine 1 enthalten wird. Es gibt also hier Fragen, die „schon“, und solche, die „noch nicht“ entschieden werden können, und dieser Umstand ist in keiner Weise verwunderlich, da es sich ja um nichts anderes handelt als um die Charakterisierung von empirischem Geschehen, wobei der Unterschied von Bestimmtheit und Unbestimmtheit zusammenfällt mit demjenigen von Gewordenem und Werdendem. So weit gut.

Aber nun wendet Brouwer die eben durchgeführten Erwägungen auf die Analyse mathematischer Probleme an, und zwar in der Weise, daß er behauptet, die Erkenntnis befinde sich hinsichtlich der Entscheidbarkeit solcher mathematischer Probleme, für die ein Lösungsweg nicht bekannt ist, in derselben Lage wie gegenüber den freien Wahlfolgen; hier gelte weder „ja“ noch „nein“ als Antwort, da der fragliche Sachverhalt einstweilen unbestimmt sei. Der Satz vom ausgeschlossenen Dritten hat demgemäß nach der Meinung Brouwers hier keine Geltung. Er gelte zwar durchgängig für finite, nicht aber für transfinite Überlegungen[1]). So sind die beiden Thesen Brouwers von der nicht durchgängigen Geltung des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten und von der nicht durchgängigen Entscheidbarkeit mathematischer Fragen äquivalent, wie er selbst ausdrücklich betont. Ob ein vorliegendes mathematisches Problem lösbar ist, das ließe sich demgemäß nur dadurch entscheiden, daß die Lösung tatsächlich angegeben bzw. das betreffende Problem als Spezialfall eines gelösten allgemeineren Problems dargetan wird. Es ist nach Brouwer der Bereich des Unbeweisbaren in der Mathematik keineswegs ein für allemal eindeutig festgelegt; vielmehr verringert er sich mit fortschreitender mathematischer Erkenntnis dadurch, daß Sätze, die früher zu ihm gehört haben, nunmehr in die Gruppe der nachweisbar wahren oder der nachweisbar falschen Sätze eingereiht werden.

Es läßt sich demgemäß beispielsweise — nach Brouwer —, so lange in der Dezimalbruchentwicklung von π keine Sequenz 0123456789 bekannt ist, nicht behaupten, daß eine solche in dieser Dezimalbruchentwicklung entweder vorkomme oder (exkl.) daß ihr Vorkommen absurd (widerspruchsvoll) sei.

Vielmehr gebe es drei Möglichkeiten:

[1]) Vgl. hiezu „Intuitionistische Zerlegung mathematischer Grundbegriffe“. Jahresber. d. Deutsch. Math.-Ver., Bd. 33, S. 251 bis 256, 1925.

1. Eine solche Sequenz ist bekannt oder ein Beweis ist bekannt, daß sie spätestens an der n-ten Stelle der Dezimalbruchentwicklung von π beginnt; dann darf man sagen, daß sie innerhalb dieser Dezimalbruchentwicklung existiert.

2. Ein Beweis ist bekannt, daß das Auftreten jener Sequenz in der Dezimalbruchentwicklung von π widerspruchsvoll ist; dann darf man sagen, die Sequenz „existiert nicht“.

3. Weder ein Beweis (eine Konstruktion) gemäß 1. ist bekannt, noch ein Beweis gemäß 2.; dann läßt sich weder die Existenz noch die Nichtexistenz unserer Sequenz in der Dezimalbruchentwicklung von π behaupten.

Aus der Annahme dieser Trichotomie an Stelle der bisherigen Dichotomie ergibt sich, daß aus der Absurdität der Absurdität einer mathematischen Existenzbehauptung nicht auf die Richtigkeit der Existenzbehauptung geschlossen werden darf[1]).

Wir wollen von der Frage, ob Brouwer seine eigene Auffassung besonders glücklich dadurch zum Ausdrucke gebracht hat, daß er sie als Behauptung der Nichtgeltung des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten in unendlichen Bereichen deklarierte[2]), absehen und sogleich die Berechtigung dieser seiner Auffassung prüfen[3]).

Zu diesem Behufe haben wir uns — an das eben angeführte Brouwersche Beispiel anknüpfend — zu fragen, unter welchen

---

[1]) Wohl aber ist auch nach Brouwers Lehre Absurdität der Absurdität der Absurdität äquivalent mit Absurdität und Absurdität der Absurdität der Absurdität der Absurdität äquivalent mit Absurdität der Absurdität.

[2]) Gegen diese Terminologie wurden Einwände insbesondere von Weyl „Grundlagenkrise“, a. a. O., S. 52 und W. Burkamp, „Begriff und Beziehung“, Studien zur Grundlegung der Logik, Leipzig 1927, S. 129, erhoben.

[3]) Vor Inangriffnahme dieser Analyse ist folgende Feststellung wichtig:

Es wäre verfehlt zu meinen, daß bei Formulierung dieser Frage die Dezimalbruchentwicklung von π als fertige unendliche Gesamtheit vorausgesetzt werden müsse. Vielmehr bezieht sich auch diese Aussage, wie sinnvolle Sätze über Folgen überhaupt (vgl. unten S. 102), auf ein allgemeines Glied. Wir wollen dies an dem prinzipiell gleichartigen, aber formulierungstechnisch einfacheren Beispiel $\sqrt{2}$ zeigen, also den Satz: „es gibt in der Dezimalbruchentwicklung von $\sqrt{2}$ eine Folge 0 1 2 ...... 9“ finit formulieren. Dies geschieht folgendermaßen:

Sei ν eine beliebige natürliche Zahl und ferner sei $\nu' = a \, . \, 10^r + b \, . \, 10^{r-1} \ldots . + f \, . \, 10^{r-s+9} + g \, . \, 10^{r-s+8} + \ldots + p \, . \, 10^{r-s} \ldots + 10u + v$ (wobei die a, b, ... u, v, r, s, sämtlich natürliche Zahlen sind) die größte natürliche

Umständen der Beweis für die Absurdität der Absurdität der Behauptung, daß die angegebene Sequenz in der Dezimalbruchentwicklung von π vorkommt, als erbracht angesehen werden kann. Dies ist offenbar dann und nur dann der Fall, wenn bewiesen wird, daß an irgend einer Stelle der Dezimalbruchentwicklung von π eine solche Sequenz beginnt. Damit aber, meint Brouwer, wäre noch nicht der oben angeführten Bedingung 1 Genüge geschehen; denn wenn keine obere Schranke für die Stellenzahl besteht, so kann man nie sicher sein, daß es gelingt, eine solche Sequenz wirklich festzustellen.

Gegen diese These Brouwers läßt sich zunächst folgende Argumentation vorbringen: Ist der Beweis erbracht, daß die genannte Sequenz an „irgend einer Stelle“ der Dezimalbruchentwicklung von π beginnt, so steht fest, daß sie von der ersten Stelle in endlich vielen Schritten erreichbar ist; diese Einsicht aber ist die einzige in diesem Zusammenhange mathematisch belangvolle Erkenntnis. Denn psychologisch-anthropologische Erwägungen über die mathematische Fähigkeit der Menschen oder aber Feststellungen über das Ausmaß des derzeitigen Bestandes an mathematischer Erkenntnis gehören nicht in die Mathematik. Diesen Einwand würde nun aber Brouwer nicht anerkennen, da er ja die Mathematik als geistige Tat auffaßt, und so könnte es den Anschein haben, als führe der Streit um die Grundlagen der Mathematik an diesem Punkte zu letzten, durch keinen Vernunftentscheid austragbaren Auffassungsdivergenzen.

Aber dieser Anschein verschwindet bei näherer Überlegung. Denn Brouwers Auffassung, daß sich die mathematischen Tatsachen mit der mathematischen Erkenntnis wandeln, schließt ein, daß es ein zu Erkennendes gebe, welches erst durch die darauf bezogene Erkenntnis geschaffen würde[1]), was dem Wesen der Erkenntnis zuwiderläuft. Denn jede Erkenntnis setzt — wie wir im ersten Abschnitte festgestellt haben — einen unabhängig von seinem Erkanntwerden als bestehend zu denkenden Gegenstand voraus.

Zahl, deren Quadrat kleiner ist als $2 . 10^{\nu}$; dann ist der Satz: „$f = 0$ und $g = 1$ und $h = 2$ ...... und $q = 9$“ widerspruchsfrei.

[1]) Dies hat auch Becker („Mathematische Existenz“, S. 508, Anm. 1) klar erkannt. Seinen Versuch hingegen, die Brouwersche Grundansicht dessenungeachtet durch phänomenologische Überlegungen zu retten, halte ich für nicht geglückt.

Diese Feststellung ist nicht eine dogmatische Voraussetzung, sondern ein „Besinnungsergebnis", um einen jüngst von Brouwer selbst gebrauchten, vortrefflichen Ausdruck zu verwenden. Das will besagen: Wenn man sich den Sinn von Denkprozessen überhaupt und von mathematischem Forschen im besonderen zu deutlicher Bewußtheit bringt, so begreift man, daß die vom Denken erfaßten bzw. zu erfassenden Gegenstände unabhängig vom Faktum des jeweiligen an-sie-Denkens gedacht werden. Man kann diese Einsicht in der Weise formulieren, daß man sagt, die mathematischen Sätze würden entdeckt, nicht erfunden, muß sich aber hiebei sorgfältig vor einer falschen Deutung des Begriffes „entdecken" hüten, die dahin geht, es gebe unter den unentdeckten Tatsachen auch unentdeckbare Tatsachen[1], d. h. in unserem Falle mathematische Tatsachen, die der exakten mathematischen Erkenntnis (Axiomatisierung) prinzipiell unzugänglich wären[2].

Mit der Ablehnung der philosophischen Interpretation, die Brouwer an seine kritischen Thesen knüpft, ist jedoch die Tatsache nicht aus der Welt geschafft, daß an verschiedenen Stellen in der Mathematik mit Beweisen der Absurdität der Absurdität des Bestehens endlicher Schranken operiert wird, ohne daß es bisher gelungen wäre, einen festen Wert für diese oberen Schranken zu finden. Hiedurch entsteht aber doch wieder der Anschein, als wären Absurdität der Absurdität des Bestehens einer endlichen Schranke und Konstruierbarkeit einer endlichen Schranke verschiedene mathematische Sachverhalte.

Im folgenden soll nun die Lösung dieses Dilemmas versucht werden, wobei freilich vorweg zugestanden werden muß, daß diese Lösung wohl insolange als vollkommen überzeugend nicht angesehen werden wird, als nicht ihre Beglaubigung wenigstens an den wichtigsten der in Frage kommenden Beweise erfolgt ist.

Unser Gedankengang ist der folgende: Wenn man sich völlig deutlich macht, welches die Kriterien der Absurdität einer mathematischen Annahme sind, so erkennt man[3], daß sie darin liegen, daß sich zwei als gleichbedeutend vorausgesetzte Zeichen für natürliche Zahlen am Ende eines Beweises als nicht gleichbedeutend herausstellen. Jeder Widerspruch bezieht sich

[1] Das Wort im weitesten Sinne verstanden.

[2] Vgl. oben S. 7 und unten S. 182ff.

[3] Vgl. oben S. 47.

also auf bestimmte natürliche Zahlen; daß er überhaupt auftritt, besagt, daß er an bestimmten Stellen auftritt und seine Aufweisung muß daher die Bestimmung dieser Stellen implizit enthalten. Daß diese Bestimmung in den mathematischen Beweisen selbst nicht immer aufscheint, muß also auf die Abbreviaturen der mathematischen Begriffsbildung (Symbolik) zurückzuführen sein; aber eine vollkommen durchgebildete Beweistheorie — wie sie Hilbert intendiert — müßte sie zutage treten lassen. Es wird dann der Anschein des Bestehens reiner Existenzbeweise verschwinden und damit Brouwers Forderung nach durchgängiger Konstruktivität Genüge geschehen sein; aber gerade die Erfüllung dieser Forderung wird zeigen, daß überall dort, wo es sich um die Existenz endlicher Schranken handelt — und diese „Existenz" allein kommt für den Aufbau der Mathematik (abgesehen von der später zu analysierenden Mengenlehre) in Betracht — eine mathematische Divergenz zwischen Absurdität der Absurdität und mathematischer Existenz schon „ursprünglich" nicht bestand, so daß das Ergebnis der Existentialbeweise der klassischen Mathematik — von terminologischen Differenzen abgesehen — auch vom Brouwerschen Standpunkt aus vollkommen gerechtfertigt sein wird.

Dies gilt aber nicht von den Pseudoexistenzbeweisen in der Lehre vom unabzählbar Unendlichen, die, wie wir erkennen werden, keine konstruktive Unterlage haben. Daß deren Ablehnung jedoch — sowie die Ausschaltung der Sphäre des unabzählbar Unendlichen der klassischen Mengenlehre überhaupt — keineswegs mit einer Erschütterung der Grundfesten der Mathematik verbunden ist, wird im vierten und fünften Abschnitte gezeigt werden.

In der kritischen Auflösung des Scheingebietes des unabzählbar Unendlichen der klassischen Mengenlehre sehe ich das wichtigste Ergebnis der Brouwerschen Methodenkritik; man wird sohin, um ihrer Leistung gerecht zu werden, das Hauptgewicht hierauf und nicht auf seine — von Kant beeinflußte[1]) —

[1]) Vgl. etwa „Intuitionism and Formalism", a. a. O. S. 85, „However weak the position of intuitionism seemed to be after this period of mathematical development (Entdeckung der nichteuklidischen Geometrien), it has recovered by abondoning Kant's apriority of space but adhering the more resolutely to the apriority of time. This neo-intuitionism considers the falling apart of moments of life into qualitatively different parts, to be reunited only while

Theorie über den Zusammenhang von Zeit und Zahl zu legen haben[1]).

Abschließend dürfen wir also sagen, daß die Brouwersche Kritik stichhaltig und wichtig ist, soferne sie sich gegen die Lehre vom aktual Unendlichen überhaupt und insbesondere gegen das unabzählbar Unendliche im Sinne der Cantorschen Mengenlehre wendet; derjenige Teil der Brouwerschen Lehre aber, der wesentlich auf der Einführung des Zeitbegriffes in die Mathematik basiert, ist abzulehnen. Auf Brouwers Stellungnahme zur Entscheidbarkeitsproblematik werden wir im vorletzten Abschnitte zurückkommen.

Wir gehen nun zu einer kurzen Analyse der axiomatischen Methode über. Diese besteht nach der bekannten Definition Weyls[2]), darin „die Grundbegriffe und die Grundtatsachen, aus denen sich die sämtlichen Begriffe und Sätze einer Wissenschaft definitorisch bzw. deduktiv herleiten lassen, vollständig zu sammeln".

Wir wollen im folgenden die wichtigsten Forderungen, die gemeinhin an Axiomensysteme gestellt werden, beschreiben und uns hiebei auf die Axiomatik formaler Bereiche beschränken (diese Einschränkung wird bei Bestimmung des Begriffes der Vollständigkeit eines Axiomensystems von Wichtigkeit sein); doch bleibt hiebei auch jede geometrische Axiomatik eingeschlossen, welche gleich der Hilbertschen von der anschaulichen Bedeutung der Grundbegriffe absieht, also ein rein relationstheoretisches System darstellt.

---

remaining separated by time as the fundamental phenomenon of the human intellect, passing by abstracting from its emotional content into the fundamental phenomenon of mathematical thinking, the intuition of the bare two-oneness."

[1]) Brouwer hat auch mit bewundernswerter Energie und Konsequenz eine Mengenlehre und Funktionenlehre unabhängig vom Satze vom ausgeschlossenen Dritten aufgebaut, in der das unabzählbar Unendliche der klassischen Mengenlehre keinen Platz mehr findet. (Das Brouwersche „Kontinuum" ist nämlich von dem Cantorschen $2^{\aleph_0}$ durchaus verschieden.) Vgl. hiezu „Zur Begründung der intuitionistischen Mathematik" I bis III. Math. Ann., Bd. 93, S. 244 bis 257, 1925; Bd. 95, S. 453 bis 472, 1926; Bd. 96, S. 451 bis 488, 1927; ferner: „Begründung der Funktionenlehre unabhängig vom logischen Satz vom ausgeschlossenen Dritten." I. Teil. Amsterdam 1923. Über die Zusammenhänge zwischen der Brouwerschen und der nicht intuitionistischen Mengenlehre vgl. Menger: „Bemerkungen zu Grundlagenfragen, I. Über Verzweigungsmengen" und III. „Über Potenzmengen", Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. 37, 1928, S. 213 bis 226 bzw. 303 bis 308.

[2]) „Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft", a. a. O., S. 16.

An der Spitze der Forderungen steht diejenige der Widerspruchsfreiheit. Die bisherige Methode, die Widerspruchsfreiheit eines Axiomensystems darzutun, bestand darin, daß man ein „Modell“ für dieses Axiomensystem aufzeigte und dadurch demonstrierte, daß es nicht leer ist, was der Fall sein müßte, wenn es widerspruchsvoll wäre[1]). Durch die neuen Hilbertschen Arbeiten wird demgegenüber durch immanente Analyse eines Axiomensystems der Nachweis seiner Widerspruchsfreiheit ermöglicht.

Durchaus anderen Charakter hat die Forderung der Unabhängigkeit[2]) der Axiome voneinander, d. h. das Postulat der Unableitbarkeit jedes der Axiome aus den anderen, also der Vermeidung von Überbestimmungen. Denn diese Forderung ist offenbar nur ein Postulat der Denkökonomie. Die Richtigkeit (Seinsgemäßheit) des Gesagten hängt ja nicht davon ab, ob es mit mehr oder weniger Worten gesagt wird. Da die Unableitbarkeit eines Axioms A_1 aus anderen Axiomen $A_2, \ldots A_n$ gleichbedeutend damit ist, daß seine Negation mit diesen Axiomen verträglich

[1]) Hingegen war es zweifelhaft, ob auch jedes leere Axiomensystem widerspruchsvoll ist. Nunmehr hat R. Carnap in einer noch unveröffentlichten Arbeit über Axiomatik, die er mir im Manuskript zugänglich gemacht hat, den Nachweis erbracht, daß jedes (beweisbar) leere Axiomensystem auch (beweisbar) widerspruchsvoll ist.

[2]) Man wird, wie M. Geiger („Systematische Axiomatik der Euklidischen Geometrie“, Augsburg 1924, S. 23ff.) hervorgehoben hat, statt von Unabhängigkeit der Axiome voneinander besser von „Unableitbarkeit“ auseinander sprechen. Denn mit der Unableitbarkeit eines Axioms aus anderen ist es „sehr wohl vereinbar, daß dieses Axiom, um überhaupt als sinnvolle Behauptung auftreten zu können, die Existenz anderer Axiome voraussetzt. Damit Sätze über Dreiecke überhaupt sinnvoll sein können, muß es zum Beispiel Axiome geben, aus denen folgt, daß Gerade sich überhaupt schneiden können: ferner muß axiomatisch gewährleistet sein, daß sie drei Schnittpunkte haben können. Gibt es keine solchen Axiome, so sind keine Dreiecke und damit keine Axiome über Dreiecke möglich usw. Das Kongruenzaxiom ist also nicht unabhängig von den genannten Axiomen, obwohl es unableitbar aus ihnen ist“ (a. a. O., S. 27f.). Diese Unterscheidung ist für eine systematische Axiomatik, wie sie Geiger (dessen Grundgedanken wir im folgenden kurz skizzieren werden) postuliert, von Wichtigkeit.

Die Forderung der Unabhängigkeit läßt sich in verschiedener Weise verschärfen. Eine solche Verschärfung ist der von E. H. Moore, „Introduction to a form of general Analysis“, New Haven 1910, und E. V. Huntington, „A new set of postulates for betweenness with proof of complete independence“, Transact. of the Amer. Math. Soc., Bd. 26, S. 257 bis 282, 1924, eingeführte Begriff der „vollständigen Unabhängigkeit“; eine andere Verschärfung gibt R. Carnap in einer in Bälde erscheinenden Arbeit an.

ist, so kann sie dadurch dargetan werden, daß man ein Modell für ein Axiomensystem aufweist, welches neben den Axiomen $A_2, \ldots A_n$ ein mit A_1 im Widerspruch stehendes Axiom enthält. So wird die Unableitbarkeit des Euklidischen Postulates aus den übrigen Axiomen — etwa der Hilbertschen Axiomatik der Geometrie — durch Modelle nichteuklidischer Geometrien dargetan.

Geiger hat (a. a. O., S. 25ff.) den prinzipiellen systematischen Mangel dieser Unableitbarkeitsbeweise, die von der Existenz auf die Möglichkeit schließen, ohne doch die Gründe für die Möglichkeit zu erfassen, aufgewiesen. Mit Hilfe der durch Hilbert im Prinzip erreichten immanenten Feststellbarkeit der Widerspruchsfreiheit eines Axiomensystems läßt sich dieser Mangel beseitigen. Den Weg, auf welchem Geiger dem gleichen Ziele zustrebt, werden wir noch zu betrachten haben.

Ebenso wie mit der Unableitbarkeitsforderung steht es mit der Forderung, eine möglichst geringe Anzahl von Grundbegriffen zu verwenden. Es kann sich aber unter Umständen sogar als denktechnisch vorteilhaft erweisen, eine größere Anzahl von Grundbegriffen zu gebrauchen, als an sich erforderlich wäre, um sonst unvermeidlichen symbolischen Verwicklungen aus dem Wege zu gehen[1]. Eine große Gefahr aber bildet die Einführung eines neuen Zeichens dann, wenn man sich nicht vollkommen darüber klar ist, was es bezeichnet. Es ist ein verhängnisvoller Fehler zu glauben, daß man die Unklarheit über den Charakter bestimmter Erkenntnistatsachen dadurch unschädlich machen könne, daß man das unklar Erfaßte durch die Einführung eines spezifischen Symbols „formalisiert“ und nun mit diesem Symbol frisch und fröhlich operiert, ohne recht zu wissen, wofür es denn eigentlich Symbol ist, d. h. welches der Sachverhalt ist, den es bezeichnet. Es wird eine der wichtigsten Aufgaben dieser Arbeit sein, aufzuzeigen, zu welchen Konsequenzen das vorschnelle Operieren mit dem Begriffe der Menge führt.

Das über die Anzahlbeschränkung der Grundbegriffe Bemerkte gilt analog für die Anzahlbeschränkung der Axiome.

Es sei noch kurz hervorgehoben, daß dieselben Erkenntnistatsachen durch verschiedene Axiomensysteme beschrie-

[1] So verwenden beispielsweise Hilbert und seine Schüler „oder“ und „nicht“ als logische Grundbegriffe, obwohl Sheffer gezeigt hat, daß beide durch die Unverträglichkeitsbeziehung ersetzt werden können.

ben werden können, und daß auch bezüglich der Wahl der Grundbegriffe weitgehende Freiheit herrscht. Das bekannteste Beispiel für die Ersetzbarkeit eines Axioms durch ein anderes unter Beibehaltung der übrigen innerhalb der euklidischen Geometrie ist die Gleichwertigkeit des Euklidischen Postulats mit dem Satze von der Winkelsumme im Dreieck.

Eines der wichtigsten Probleme innerhalb der Axiomatik ist dasjenige der Vollständigkeit von Axiomensystemen. Man unterscheidet hier die folgenden drei Vollständigkeitsbegriffe[1]):

1. Vollständigkeit = Monomorphie.

Monomorph heißt ein Axiomensystem, wenn zwei beliebige Modelle dieses Axiomensystems stets isomorph, d. h. derart eineindeutig aufeinander abbildbar sind, daß das Bestehen jeder einschlägigen Beziehung zwischen den Elementen des einen Systems das Bestehen der entsprechenden Beziehung zwischen den entsprechenden Elementen des anderen Systems impliziert.

2. Vollständigkeit = Ausschluß der Gabelbarkeit.

Das bedeutet: wenn eine in das Axiomensystem einschlägige Annahme mit den Axiomen verträglich ist, so darf ihre Negation nicht ebenfalls mit den Axiomen verträglich sein.

3. Vollständigkeit = Entscheidungsdefinitheit.

Entscheidungsdefinit heißt ein Axiomensystem dann, wenn jede einschlägige Frage mit Hilfe der Axiome entschieden werden kann[2]).

---

[1]) Vgl. Fraenkel, „Einleitung in die Mengenlehre", 3. Aufl., Berlin 1928, S. 347 ff.

[2]) Vgl. hiezu die folgenden Ausführungen E. Husserls über „definite Mannigfaltigkeit" („mathematische Mannigfaltigkeit im prägnanten Sinne"):

„Diese Mannigfaltigkeit ist dadurch charakterisiert, daß eine endliche Anzahl, gegebenenfalls aus dem Wesen des jeweiligen Gebietes zu schöpfender Begriffe und Sätze die Gesamtheit aller möglichen Gestaltungen des Gebietes in der Weise rein analytischer Notwendigkeit vollständig und eindeutig bestimmt, so daß also in ihm prinzipiell nichts mehr offen bleibt."

„Wir können dafür auch sagen: eine solche Mannigfaltigkeit habe die ausgezeichnete Eigenschaft ‚mathematisch erschöpfend definierbar' zu sein. Die ‚Definition' liegt im System der axiomatischen Begriffe und Axiome, und das ‚mathematisch-erschöpfende' darin, daß die definitorischen Behauptungen in Beziehung auf die Mannigfaltigkeit das denkbar größte Präjudiz implizieren — es bleibt nichts mehr unbestimmt."

„Ein Äquivalent des Begriffes einer definiten Mannigfaltigkeit liegt auch in folgenden Sätzen:"

Aber die eben angeführten Definitionen kranken daran, daß die in Betracht kommenden Kriterien nicht angegeben werden.

Die Fragen, auf deren Beantwortung es eigentlich ankommt, sind ja gerade: Unter welchen Umständen sind sämtliche Modelle eines Axiomensystems isomorph? Unter welchen Umständen schließt die Verträglichkeit einer einschlägigen Aussage mit dem Axiomensystem die Verträglichkeit ihrer Negation mit dem Axiomensystem aus? Unter welchen Umständen ist jede einschlägige Frage auf Grund der Axiome entscheidbar?

Bezüglich dieser Fragen können wir zunächst folgendes feststellen: Es ist einerseits einleuchtend, daß die „Vollständigkeit" (in jeder der drei angegebenen Bedeutungen) eines gegebenen Axiomensystems „intern" (Wittgenstein) bestimmt ist, d. h. unabhängig vom Weltenlauf (von Empirie) ist; andererseits aber muß das Kriterium der „Vollständigkeit" eines Axiomensystems offenbar doch in Momenten liegen, die nicht selbst wieder erst durch dieses Axiomensystem bestimmt sind. Diese Momente müssen also im „Bau der Welt", und zwar — da wir nur formale Axiomensysteme betrachten — in der Struktur der Welt zu suchen sein.

Hat man aber dies erfaßt, so begreift man auch unschwer, daß alle drei genannten Vollständigkeitsbegriffe — Monomorphie, Nichtgabelbarkeit, Entscheidungsdefinitheit — auf dasselbe Kriterium zurückweisen, nämlich auf die eindeutige (weiteren formalen Besonderungen nicht mehr zugängliche) Bestimmung eines formalen Bereiches[1]).

Demgemäß sind im vollständigen Axiomensystem die Beziehungen zwischen den Grundbegriffen in der Weise festgelegt, daß jede weitere willkürlich hineingenommene Beziehung, die nicht ausdrücklich festgelegt ist, mit den Axiomen im Widerspruch stehen würde.

„Jeder aus den ausgezeichneten axiomatischen Begriffen, nach welchen logischen Formen immer zu bildende Satz ist entweder eine pure formallogische Folge der Axiome, oder eine ebensolche Widerfolge, d. h. den Axiomen formal widersprechend; so daß dann das kontradiktorische Gegenteil eine formallogische Folge der Axiome wäre. In einer mathematisch-definiten Mannigfaltigkeit sind die Begriffe ‚wahr' und ‚formallogische Folge der Axiome' äquivalent, und ebenso die Begriffe ‚falsch' und ‚formallogische Widerfolge der Axiome'." (Ideen, S. 135 f.)

Vgl. auch die Analysen in „Formale und transzendentale Logik", S. 78 ff.

[1]) Vgl. auch unten S. 185 ff.

Ein Beispiel aus der Axiomatik der euklidischen Geometrie der Ebene: Eine Gerade hat mit genau einer der durch einen nicht auf ihr liegenden bestimmten Punkt gehenden Geraden genau 0 Punkte gemeinsam. Mit jeder anderen durch diesen Punkt gehenden Geraden hat sie genau einen Punkt gemeinsam. Es ist einleuchtend, daß hier eine Ergänzung unmöglich ist, jede neue — d. h. nicht abundante — einschlägige Bestimmung muß mit den früheren in Widerspruch stehen.

Vollständigkeit bedeutet also restlose formale Bestimmtheit, und diese Bestimmtheit muß sich — ebenso wie dies Hilbert im Hinblick auf die Widerspruchsfreiheit dargetan hat — durch Analyse des betreffenden Axiomensystems selbst ohne irgendwelche Bezugnahme auf andere Axiomensysteme feststellen lassen. Wir werden dies im folgenden Abschnitte bei der Aufstellung der Axiome der Arithmetik noch deutlicher einsehen lernen.

Die axiomatische Technik hat in den letzten Jahrzehnten durch die Forscher, die unter Hilberts und Russells geistiger Führung stehen, eine bewundernswerte Durchbildung erfahren; aber ihre vorwiegende Abstellung auf die Zwecke der mathematischen Heuristik hat es mit sich gebracht, daß gewisse, gerade für die Grundlagenforschung wichtige, Gesichtspunkte nur unzureichende Berücksichtigung erfahren haben. Es sind dies vor allem die Fragen, welche mit dem Erkenntnisgehalt der Axiomatik zusammenhängen, d. h. mit den „Modellen", deren Struktur die Axiome beschreiben. Auf die hieraus erwachsenden Gefahren haben wir bereits hingewiesen.

Ihnen sucht Geiger in seinem zitierten Werke durch Aufstellung einer „systematischen Wesensaxiomatik" zu begegnen. Da er sich die axiomatische Darstellung der euklidischen Geometrie zur Aufgabe setzt, so lautet sein Grundproblem: „Gibt es irgendwelche wesentliche Ordnung im Aufbau der Gebilde des Euklidischen Raumes, die durch den Aufbau der deduktiven mathematischen Theorie nachgezeichnet werden kann[1])?" Diese Frage kann als das Problem der Wesensaxiomatik bezeichnet werden. Aus dieser Orientierung an dem Bereiche, dessen Struktur die Axiomatik wiederzugeben hat, werden weiterhin Leitgedanken für die Auffindung der Axiome gewonnen, und in

[1]) A. a. O., S. 12.

dieser Auffindung der Axiome aus Leitgedanken, die am Objekt gewonnen werden, liegt das Ziel der systematischen Axiomatik. Sie soll insbesondere auch die Vollständigkeit des aufgestellten Axiomensystems gewährleisten. Geiger stellt seine Forderungen nicht nur programmatisch auf, sondern er führt sie beim Aufbau seiner Axiomatik auch weitgehend durch.

Wir wollen die drei Prinzipien, die Geiger für die Auffindung seiner Axiome aufstellt, wörtlich wiedergeben. Sie lauten:[1])

„1. das Prinzip der Korrespondenz des Aufbaues der Gegenstandswelt in der Axiomatik: es müssen so viele Grundbegriffe innerhalb der Axiomatik anerkannt werden, als sich im Aufbau der Gegenstandswelt Grundelemente und Grundrelationen vorfinden. Ihre Zahl darf nicht durch unechte Definitionen[2]) künstlich vermindert werden. Ebenso darf der deduktive Gang nur solche Folgerungen und Ableitungen bei dem systematischen Aufbau verwenden, denen auf Seite der Gegenstandswelt korrespondierende Fundierungen und Komplizierungen entsprechen. Ebenso muß bei der Formulierung von Sätzen und Axiomen diejenige Fassung gewählt werden, die sachlich gleichgeordnete Tatbestände auch in der Formulierung gleichberechtigt sein läßt, die nicht künstlich sachliche Gleichordnung in gedankliche Abhängigkeit verwandelt. Hypothetische Sätze sind daher zu vermeiden. An ihre Stelle treten Behauptungen über Unverträglichkeiten von Relationen auf. Hypothetischen Sätzen: wenn S ist, so ist P, gibt die Wesensaxiomatik daher die Form: S und non-P sind unverträglich oder: es ist unmöglich, daß S und non-P zusammen bestehen."

„2. Prinzip der Exklusion: alle charakterisierenden Axiome[3]) dürfen innerhalb der systematischen Axiomatik nicht

---

[1]) S. 34f.

[2]) Eine unechte Definition besteht darin, „daß ein Gegenstand durch eine Relation definiert wird, in der er zu anderen bereits als bekannt vorausgesetzten Gegenständen steht" (a. a. O., S. 15).

[3]) Geiger unterscheidet zwischen existenzsetzenden und charakterisierenden Axiomen. Zur ersten Gruppe gehören diejenigen Axiome, die die Zahl der Elementensysteme angeben und diejenigen, die die Zahl der Relationssysteme angeben. „Ihnen gegenüber ..... stehen die charakterisierenden Axiome, die den Charakter der Relationen und durch sie hindurch den Charakter der Elemente näher bestimmen. Ein solches charakterisierendes Axiom wäre z. B.: zwei verschiedene Gerade schneiden sich nur in einem Punkte. Ein

aufgefaßt werden als Setzungen positiven Inhalts, als Behauptungen über mögliche Existenzen, sondern als Behauptungen über das Ausgeschlossensein bestimmter mathematischer Möglichkeiten. Alle charakterisierenden Axiome sind Ausschlußaxiome. Ihre systematisch richtige Formulierung ...... lautet demgemäß: es ist unmöglich, daß diese oder jene Möglichkeit in der qualifizierten[1]) Gegenstandswelt realisiert ist."

„3. Prinzip der mathematischen Systematik der Axiome: Die Aufsuchung der Axiome geschieht, indem die mathematischen Möglichkeiten systematisch geordnet werden, und jede solche Möglichkeit auf ihre Realisierbarkeit oder Unrealisierbarkeit innerhalb der qualifizierten Gegenstandswelt geprüft wird."

Diese Untersuchungen Geigers zur Axiomatik werden hier darum besonders hervorgehoben, weil ihre Grundauffassung auch über den Rahmen der Axiomatik hinaus für die Theorie der Mathematik von hoher Bedeutsamkeit ist. Es ist die „sachliche" Auffassung, die sich dessen bewußt ist, daß eine radikale Lösung der mathematischen Grundlagenprobleme nur dann zu erreichen ist, wenn man sich über den Charakter der „mathematischen Gegenstände", d. h. des Themas der mathematischen Forschung klar geworden ist und sich innerhalb der Grundlagenforschung stets an dieser Einsicht orientiert. Diese Auffassung bildet einen der leitenden Gedanken der vorliegenden Arbeit; sie wird namentlich in den folgenden Untersuchungen über die natürlichen Zahlen zutage treten.

---

solches Axiom gibt nicht an, wie viel Relationen zwischen Punkten und Geraden bestehen, sondern charakterisiert die Relation des Sichschneidens, die zwischen Geraden und Punkten besteht, näher, indem sie angibt, zwischen wie vielen Geraden und Punkten diese Relation bestehen kann" (a. a. O., S. 32).

[1]) „Qualifiziert" heißt derjenige Gegenstandsbereich, der das besondere Untersuchungsobjekt bildet.

III. Natürliche Zahl und Menge.

Wenn wir auf dem durch die bisher angestellten Erwägungen vorgezeichneten Wege an die Bestimmung des Begriffes der natürlichen Zahl gehen, so haben wir von der Beschreibung des Sachverhaltes, in dem die Zahlen zur Gegebenheit gelangen, dem „Modell“ der Zahlen, unseren Ausgang zu nehmen und sie dann innerhalb dieses Sachverhaltes abstraktiv zu isolieren. Dieser Sachverhalt ist der Zählprozeß; über ihn läßt sich zunächst zweierlei feststellen:

1. Gezählt werden können beliebige Gegenstände, und demgemäß werden die durch deskriptive Analyse des Zählprozesses gewonnenen Einsichten über den Zahlbegriff, unabhängig davon, was jeweils gezählt wird, gelten.

2. Durch die Zählung erhalten die gezählten Dinge nicht eine neue Eigenschaft zu ihren übrigen Eigenschaften.

Der zweite Punkt bedarf noch der Erläuterung.

Daß es zwölf Apostel gibt, bedeutet — wie Husserl in seinen „Logischen Untersuchungen“ bemerkt — nicht, daß jeder Apostel „zwölf“ ist; und wenn in einem Zimmer zwölf Gemälde hängen, so ist keines dadurch in seiner Art berührt, daß noch elf andere da sind. Man kann auch sehr wohl jedes einzelne der Gemälde nacheinander für sich allein betrachten, ohne sie zu zählen, d. h. ohne jedem von ihnen einen Ordnungsindex im Hinblick auf die früher betrachteten Gemälde zu geben, welcher seine zeitliche Stellung im Bewußtsein des Betrachtenden gegenüber den früher oder später betrachteten Gemälden festlegt.

Legt man aber eine solche Ordnung fest, dann wird eines das erste, eines das zweite, dritte, ... zwölfte sein. Welches Gemälde jedoch das erste, welches das zweite, welches das zwölfte ist, das hängt von der Reihenfolge der Betrachtung ab, und diese erscheint keineswegs von vornherein gegeben, etwa durch die örtliche Nachbarschaft der Gemälde. Ferner können Unterschiede in der Art der Betrachtung dadurch entstehen, daß man von den Gemälden A, B, C, ... L je einige, etwa B und G oder C, F und K, in der Betrachtung „zusammenfaßt“, d. h. sie gleichzeitig oder rasch hintereinander ansieht, während die Betrachtung der anderen Bilder hievon durch größere zeitliche Intervalle getrennt ist.

Was ist nun der Fixpunkt, die Invariante gegenüber all diesen Variationen?

Wir erkennen, daß sie in der Stellenordnung des „letzten“ Elementes liegt. Dieses ist in unserem Beispiel stets das „zwölfte“, wie immer die Gruppierung der Betrachtungen erfolgt sein mag. Wir wollen, um diesen für die Mathematik grundwichtigen Sachverhalt klar zu erfassen, eine präzise Bezeichnungsweise einführen.

Gegeben seien verschiedene wohlunterschiedene Dinge (D); gegeben seien ferner hievon und untereinander verschiedene und wohlunterschiedene Dinge, die wir Zeichen (Z) nennen wollen.

Nun mögen folgende Festsetzungen gelten: Jedem D werde, soweit der Vorrat an Z reicht, ein und nur ein Z zugeordnet. Es steht fest, welches das erste Z ist, das zugeordnet wird, es steht ferner für jedes zugeordnete Z fest, welches das nächste Z ist, das zugeordnet wird; hingegen besteht keine Festsetzung darüber, welchem D welches Z zugeordnet wird. (Die Art der eindeutigen Zuordnung ist willkürlich.) Gegenüber den solcher Art bestehenden verschiedenen Zuordnungsweisen bleibt invariant das dem letzten vorhandenen (bzw. bei Mangel an Z, dem letzten in den Zuordnungsprozeß einbezogenen) D zugeordnete Z. Nehmen wir nun die Z als ausreichend an, so gibt es, falls die zu bezeichnenden D eindeutig festgelegt sind, ein und nur ein hiedurch bestimmtes Z, welches das Zeichen des jeweils letzten D ist[1]).

Ist also in einem bestimmten Bezeichnungsprozeß mit vorgegebener Zeichenordnung das letzte verwendete Zeichen n, so kann man diesen Sachverhalt auch in der Weise kennzeichnen,

[1]) Auf diese Erkenntnistatsache wurde von E. Schröder, „Lehrbuch der Arithmetik und Algebra“, Bd. 1, Leipzig 1873, mit Nachdruck hingewiesen. Vgl. hiezu ferner: O. Stolz, „Vorlesungen über allgemeine Arithmetik“, Teil I, S. 9f. (1885), L. Kronecker, „Über den Zahlbegriff“, Werke, 1899, III, 1, S. 249 ff., H. Helmholtz, „Zählen und Messen“, Wissenschaftliche Abhandlungen III, S. 356 ff., O. Hölder, „Die Arithmetik in strenger Begründung“, 2. Aufl., Berlin 1929, S. 14 ff.

daß man sagt: „Der ‚Gesamtheit' der gezählten Dinge entspricht das Zeichen n."

Aber diese Terminologie darf nicht in der Weise interpretiert werden, als würde durch die Festsetzung, welche Dinge in einen solchen Bezeichnungsprozeß bezogen werden, unabhängig von diesem Prozeß eine „Gesamtheit von Dingen" konstituiert, deren „Gesamtheitseigenschaften" ein logisches prius gegenüber dem Ergebnis des Bezeichnungsprozesses — d. i. der Feststellung des Zeichens des letzten bezeichneten Dinges — bilden; wobei die Begründung die wäre, daß der eben beschriebene Bezeichnungsprozeß eine Ordnung der Dinge in sich begreife, während in dem Begriff der Gesamtheit als solcher noch keinerlei Ordnung eingeschlossen liege.

Denn der Begriff der Gesamtheit kann gar nicht anders sinnvoll erfaßt werden, als in Korrelation zu einem derartigen Ordnungsprozeß, der die verschiedenen Dinge umfaßt und sie eben dadurch „zusammenfaßt". Da nun, wie wir bereits vorweggenommen haben, der eben analysierte Bezeichnungsprozeß nichts anderes ist als der Zählprozeß, so lassen sich unsere Feststellungen folgendermaßen in mathematische Sprache übertragen:

Die Aussage, daß eine Menge von n Dingen gezählt wird, besagt nichts anderes, als daß bei beliebiger Anordnung der gezählten Dinge das jeweils letzte Ding das n-te ist.

Daraus ergeben sich zwei wichtige Folgerungen:

1. Da die Kardinalzahl (Anzahl) nichts anderes ist als die bei beliebiger Anordnung der gezählten Dinge sich ergebende Ordinalzahl (Stellenzeichen) des letzten Elementes, so erledigt sich der Streit zwischen Generationen von Mathematikern, ob die Kardinalzahl oder die Ordinalzahl das logische prius sei.

2. Es bedarf zur Definition des Zahlbegriffes nicht desjenigen der Menge[1]).

Wir wollen, um die Schwierigkeiten nicht zu kumulieren, die weiteren mit dem Begriff der Menge zusammenhängenden Analysen einstweilen zurückstellen, um sie erst dann wieder aufzunehmen, wenn der Begriff der natürlichen Zahl vollkommen präzis festgelegt ist. Sogleich aber können wir einen gemein-

[1]) Vgl. hiezu auch Burkamp, „Begriff und Beziehung", a. a. O., S. 182ff., sowie E. Cassirer, „Philosophie der symbolischen Formen", 3. Teil, Berlin 1929, S. 425ff.

samen gedanklichen Ursprung jener beiden Verdoppelungen bestimmen. Er liegt in der — im ersten Abschnitte eingehend analysierten — fehlerhaften Verselbständigung von Invarianzen, die in Wahrheit nur relativ zu einem bestimmten Variationsbereich sinnvoll bestimmt sind. In unserem Falle bilden den Variationsbereich die verschiedenen Möglichkeiten der Anordnung von n Gegenständen; ihnen gegenüber bleibt bei festgelegter Bezeichnungsordnung der Ordnungsindex des „letzten" Gegenstandes invariant; er ist stets der n-te. Diese Invarianz bedeutet aber — dies sei nochmals nachdrücklich betont — nur logische Unabhängigkeit von einer bestimmten Art der Anordnung, nicht aber Ablösbarkeit von der Ordnung überhaupt.

Nimmt man dessenungeachtet eine von der Ordinalzahl unabhängige Anzahl an, dann führt die weitere Spekulation geradlinig zur Bildung eines „Trägers" der Anzahl, d. h. der Menge. Freilich ist dies nur die eine der beiden gedanklichen Hauptwurzeln des Mengenbegriffes, während die zweite in der — ebenfalls im ersten Abschnitte dargestellten — Verquickung von individueller und spezifischer Allgemeinheit zu suchen ist. Aber hierauf kommen wir — wie schon bemerkt — später noch eingehender zurück.

Zunächst jedoch wollen wir, in unserer Analyse des Zahlbegriffes fortfahrend, eine andere Frage betrachten, die mit derjenigen der Beziehung zwischen Ordinalzahlen und Kardinalzahlen eng verwandt ist, nämlich diejenige des Verhältnisses der ein-eindeutigen Zuordnung zwischen den Elementen zweier Mengen und der Ordnung der Elemente innerhalb der beiden Mengen.

Russell stellt — im Anschluß an G. Frege — die Behauptung auf, daß jener Prozeß von diesem unabhängig sei und führt zur Erläuterung das Beispiel der Anzahl der Männer und der Frauen, die in Einehe leben, an[1]. Er erklärt, daß man einsichtigermaßen allein auf Grund der hier obwaltenden ein-eindeutigen Zuordnung feststellen könne, daß die Zahl der Ehemänner gleich der Zahl der Ehefrauen ist, ohne daß erst eine Reihenfolge unter ihnen aufgestellt werden müßte.

Aber diese Argumentation ist nicht stichhaltig, denn dem Begriff der „Gleichzahligkeit" bzw. — wie Russell sagt — der

[1] „Einführung in die mathematische Philosophie", München 1923, S. 15.

„Ähnlichkeit" ist ohne Bezugnahme auf irgendeine Ordnung keineswegs derjenige Sinn abzugewinnen, der allgemein damit verknüpft wird und auf den auch Russell hinzielt; nur die Art der Ordnung ist beliebig. Demgemäß ist der von Russell gemeinte Sachverhalt in folgender Weise korrekt zu formulieren:

Gegeben seien wohlunterschiedene Gegenstände A, B, C, ... und a, b, c, ... und es sei zwischen den durch große und den durch die konformen kleinen Buchstaben gekennzeichneten Gegenständen eine ein-eindeutige Zuordnung festgelegt, wobei auf beiden Seiten jeder Gegenstand in den Zuordnungsprozeß eingeht; dann wird sich bei beliebiger Ordnung der A, B, C, ... und der a, b, c, ... in beiden Fällen die gleiche Zahl — i. e. der gleiche Ordnungsindex des letzten Elementes — ergeben.

Den obigen Russellschen Thesen, wie überhaupt der Lehre vom Primat der Kardinalzahl, deren schärfste Formulierung jene darstellen, wird von intuitionistischer Seite auf das entschiedenste entgegengetreten, so neuerdings von H. Weyl[1]);

„......die Möglichkeit der Paarung, von der im Kriterium der Gleichzahligkeit die Rede ist, läßt sich nur prüfen, wenn die Zuordnungsakte einer nach dem anderen, in geordneter zeitlicher Folge, vorgenommen und damit die Elemente beider Mengen selber geordnet werden. Reißt man die Vergleichung zweier Mengen abstraktiv auseinander in Zahlbestimmung jeder Menge und nachfolgenden Vergleich der Zahlen, so ist es also unerläßlich, die einzelnen Mengen selber zu ordnen, durch Aufweisung eines Elementes nach dem anderen in der Zeit ....."

Aber diese Aufstellungen, so einleuchtend sie zunächst erscheinen mögen, bergen eine neue grundsätzliche Schwierigkeit in sich, welche durch die wesentliche Rolle, die die Zeit in ihnen spielt, geschaffen wird[2]).

Das Problem des Zusammenhanges zwischen Zeit und Zahl, um dessen Bewältigung unter den großen Philosophen der Vergangenheit vor allem Kant gerungen hat[3]), entspringt im wesentlichen folgendem gedanklichen Dilemma: Einerseits ist das Zählen, dessen enge Verknüpftheit mit der Zahl nicht bezweifelt wird, ein in der Zeit verlaufender Prozeß;

[1]) „Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft", a. a. O., S. 28.

[2]) Vgl. zum folgenden auch oben S. 59ff.

[3]) Die bedeutsamsten Analysen finden sich in der „Kritik der reinen Vernunft" im Hauptstück „Von dem Schematismus der reinen Verstandesbegriffe".

andrerseits aber geht offenbar der Zeitbegriff in die Zahlenlehre, in die Sätze der Arithmetik, nicht ein; denn wenn wir einen beliebigen arithmetischen Satz betrachten, so finden wir in ihm keine Spur einer zeitlichen Beziehung.

Schaltet man jedoch das Zeitmoment bei der Definition der Zahl (Anzahl) aus, so liegt die Versuchung nahe, diese als eine Art qualitas occulta von „Dinggesamtheiten"[1]), als „Mengenqualität" von Komplexen aufzufassen; oder — wenn man, um die Schwierigkeiten des Abstraktionsproblems zu vermeiden — an Stelle der Qualität eine Klasse von Dingen setzt, die Zahl als eine Klasse von Dinggesamtheiten aufzufassen. Wird dann — in Verquickung von individueller und spezifischer Allgemeinheit — eine Gesamtheit von Einzeldingen ebenso wie eine Eigenschaft von Dingen als „Klasse" oder „Menge" bezeichnet, so kommt man zu der Definition der natürlichen Zahl, die Russell — im Anschluß an Frege[2]) — aufgestellt hat. Sie lautet: „Die Zahl einer Menge (class) ist die Menge aller ihr ähnlicher Mengen." Hienach ist etwa die Zahl 2 als „Menge

---

[1]) So definiert beispielsweise Kronecker (a. a. O., S. 256), „Die Anzahl der Objekte ist also eine Eigenschaft der Schar als solcher, d. h. der unabhängig von irgend einer bestimmten Anordnung gedachten Gesamtheit der Objekte". Eine im wesentlichen gleiche Auffassung findet sich neuerdings bei Hilbert und Ackermann, „Grundzüge der theoretischen Logik", a. a. O., S. 86. Dort heißt es: „Eine Anzahl ist kein Gegenstand im eigentlichen Sinne, sondern eine Eigenschaft. Die Individuen, denen eine Anzahl als Eigenschaft zukommt, können die gezählten Dinge nicht selbst sein, da jedes von den Dingen nur eines ist, so daß eine von Eins verschiedene Anzahl danach gar nicht vorkommen könnte. Dagegen läßt sich die Zahl als eine Eigenschaft desjenigen Begriffes auffassen, unter welchem die gewählten Individuen vereinigt werden. So kann z. B. die Tatsache, daß die Anzahl der Erdteile fünf ist, zwar nicht so ausgedrückt werden, daß jedem Erdteil die Anzahl fünf zukommt; wohl aber ist es eine Eigenschaft des Prädikates „Erdteil sein", daß es auf genau fünf Individuen zutrifft."

Daß diese Auffassung unzutreffend ist, haben wir bereits eingangs dieses Abschnittes festgestellt. Sie ist darum besonders gefährlich, weil sie ein Hauptmotiv für die Einführung des erweiterten Funktionenkalküls, des Brennpunktes der logisch-mathematischen Scheinprobleme bildet.

[2]) Frege definiert: Die Anzahl, welche dem Begriffe F zukommt, ist der Umfang des Begriffes „gleichzahlig dem Begriffe F" „Die Grundlagen der Arithmetik", Breslau 1884, S. 80.

Vgl. zu diesen Fragen auch Burkamp, a. a. O., S. 182ff.

aller Paare" zu definieren[1]). Die Schwierigkeiten, in die Russell bei der konsequenten Durchführung seiner Auffassung gerät, zeigen sich vor allem in seiner Theorie der irrationalen (reellen) Zahlen.

Aus den eben gemachten Feststellungen ergibt sich nun für die weiteren Untersuchungen folgendes: Bei Behandlung des Problems, die exakte Definition der natürlichen Zahlen — d. h. desjenigen Erkenntnisobjektes, mit dem die Mathematiker unter diesem Namen faktisch operieren — zu finden, ist der Weg für uns dadurch weitgehend vorgezeichnet, daß wir hiebei weder den Zeitbegriff, noch auch denjenigen einer Dinggesamtheit oder Komplexeigenschaft (Menge, Klasse usw.) werden verwenden dürfen. Zur Lösung dieses Problems aber führen die allgemeinen Einsichten, die wir im ersten Abschnitte über die zur formalen Sphäre führenden Abstraktionen gewonnen haben. Die Zahlen erweisen sich nämlich als logische Abstrakte des schrankenlos fortsetzbar gedachten Zählprozesses. Es ist zu beachten, daß hiedurch neben das Moment der Abstraktion bei „Ableitung" der Zahl aus dem Zählprozeß ein Moment der „Idealisierung" tritt, da jeder faktische Zählprozeß eine obere Schranke besitzt. Diese Feststellung ist wichtig für die — am Ende dieses Abschnittes erfolgende — Bestimmung der Beziehung zwischen Logik und Mathematik.

Um die obige These einzusehen, wollen wir uns deutlich machen, was es im Rahmen eines Zählprozesses besagt, daß ein Ding etwa „das dritte" ist. Dies bedeutet nichts anderes, als daß ihm ein „zweites" im Zählprozeß vorangegangen ist; das „zweite" aber ist dasjenige, dem ein „erstes" im Zählprozeß vorangegangen ist, während endlich das „erste" durch den Mangel eines Vorgängers bestimmt erscheint.

---

[1]) „The cardinal number of a class α ..... is defined as the class of all classes similar to α, ..." „Principia Mathematica", V. II, p. 4.

Es ist interessant, eine gewisse Ähnlichkeit der Russellschen Auffassung mit derjenigen von J. Stuart Mill festzustellen. Dieser erklärt (in einer Anmerkung zu James Mill, „Analysis II", S. 92): „Die Zahlen sind im strengsten Sinne Namen von Objekten. Zwei ist sicherlich der Name der Dinge, welche zwei sind, der zwei Kugeln, Finger usw."

Wittgenstein hat sich dagegen von Russells Klassentheorie in der Mathematik emanzipiert. Er schreibt (a. a. O., Satz 6·031): „Die Theorie der Klassen ist in der Mathematik ganz überflüssig. Das hängt damit zusammen, daß die Allgemeinheit, welche wir in der Mathematik brauchen, nicht die zufällige ist."

Die Struktur dieser Beziehung — ihr logisches Abstrakt — aber erhält man, im Sinne der im ersten Abschnitt vollzogenen Feststellungen, dadurch, daß man die in ihr enthaltenen Unverträglichkeitsbeziehungen isoliert, also das in der Zeitfolge liegende phänomenale Moment „einklammert".

Dann ergibt sich in unserem Falle: Etwas ist ein „Drittes", soferne es unverträglich ist mit dem Nichtvorliegen eines „Zweiten", welches als „Zweites" wieder ein „Erstes" voraussetzt. Aber damit ist das Dritte noch nicht hinreichend gekennzeichnet. Denn ein Viertes, Fünftes, Sechstes usw. setzen ja ebenfalls ein Zweites und ein Erstes voraus. Das Dritte aber ist gerade dadurch charakterisiert, daß außer dem Ersten und dem Zweiten nichts vorausgesetzt wird. So ist jede Zahl eine logische Singularität, eindeutig definiert durch gewisse Unverträglichkeitsbeziehungen, die ihr zwar sämtlich mit jeder größeren Zahl gemeinsam sind, aber für sie allein mit dem Ausschluß jedweder anderen Unverträglichkeitsbeziehung verknüpft werden. Die Zahlenreihe stellt sich sohin als eine schrankenlose Superposition von Unverträglichkeitsbeziehungen über ein „erstes" Element dar, dergestalt, daß die auf eine Zahl unmittelbar folgende Zahl gerade eine Unverträglichkeitsbeziehung außer denjenigen, die ihren „unmittelbaren Vorgänger" definieren, einschließt.

Es ist also jede beliebige natürliche Zahl logisch eindeutig durch Unverträglichkeitsbeziehungen festgelegt, was durch den eben gebrauchten Terminus „logische Singularität" gekennzeichnet werden soll. Jede weitere Statuierung von Unverträglichkeitsbeziehungen wäre hier entweder abundant oder widerspruchsvoll.

Freilich ist eine Einschränkung erforderlich: Die eben gemachte Feststellung gilt nur insofern, als jede die Unverträglichkeitsbeziehung kreuzende Beziehung zwischen den Beziehungsgliedern ausgeschlossen bleibt. Denn andernfalls könnten neue, mit den ursprünglichen vereinbare Unverträglichkeitsbeziehungen in der Weise festgelegt werden, daß die Zugehörigkeit oder Nichtzugehörigkeit zum Bereiche solcher kreuzender Beziehungen die Ansatzpunkte liefert[1]).

[1]) Dies wird bei der folgenden Analyse des Prinzips der vollständigen Induktion vollkommen deutlich werden.

Das Auftreten derartiger Beziehungen resp. durch sie bestimmter Beziehungsglieder wird demgemäß bei der Definition der natürlichen Zahlen auszuschließen sein. Sohin ergibt sich diese Definition wie folgt[1]):

Als natürliche Zahlen bezeichnen wir die Elemente der durch die folgenden Festsetzungen und ausschließlich durch diese bestimmten Struktur[2]):

1.) Es gibt ein und nur ein Element, mit dessen Vorliegen das Nichtvorliegen keines anderen Elements unverträglich ist.

2.) Es gibt zu jedem Element Z_m ein und nur ein Element Z_n,

---

[1]) Hier verdanke ich Herrn Carnap eine Verbesserung meiner ursprünglichen Formulierung.

[2]) Diese Formulierung wird den mit der Axiomatik der Mengenlehre vertrauten Leser vielleicht an Fraenkels Beschränktheitsaxiom („Zehn Vorlesungen", S. 102), wodurch die nicht durch die Axiome geforderten Mengen ausgeschlossen werden, gemahnen. Gegen dieses Axiom hat sich die Kritik J. von Neumanns „Eine Axiomatisierung der Mengenlehre" (Journal f. Math., Bd. 154, S. 219ff., vgl. insbesondere S. 229) gerichtet. Der Kern dieser Kritik ist der, daß ein Beschränktheitsaxiom einem System von Axiomen nur dann widerspruchsfrei hinzugefügt werden kann, wenn das Axiomensystem Kategorizität besitzt, d. h. monomorph ist. Nun wurde die Monomorphie der Progressionen in den „Principia Mathematica" (III, S. 146, Satz 263,16) bewiesen; unsere Beschränktheitsforderung aber ist, wie wir im folgenden begründen werden, äquivalent mit dem Prinzip der vollständigen Induktion; die drei Axiome bestimmen sohin mit ihr zusammen Progressionen. Bestreitet man also den genannten Beweis in den „Principia Mathematica" — wie dies Neumann, laut mündlicher Mitteilung, tut —, so beziehen sich die auf Grund dessen gegen unsere Formulierung gemachten Einwände vollinhaltlich auch auf das Peanosche Axiomensystem. Wir kommen auf diesen Punkt unten S. 88ff. zurück.

Über die verwandte Problematik der „Vollständigkeitsaxiome" nach Analogie desjenigen, welches Hilbert in seiner Axiomatik der Geometrie verwendet, vgl. noch:

M. Geiger, a. a. O., S. 265ff., ferner:

P. Finsler, „Über die Grundlegung der Mengenlehre", I, Math. Zeitschr., Bd. 25, 1926, S. 683ff.

R. Baer, „Über ein Vollständigkeitsaxiom in der Mengenlehre", Math. Zeitschr., Bd. 27, 1928, S. 536ff.

R. Baldus, „Zur Axiomatik der Geometrie I". „Über Hilberts Vollständigkeitsaxiom", Math. Ann., Bd. 100, 1928, S. 321ff.

Herr Fraenkel, der Fahnen dieser Arbeit freundlichst durchgesehen hat, macht mich darauf aufmerksam, daß die Ersetzung des Peanoschen Axioms durch eine mit der obigen im wesentlichen übereinstimmende Beschränktheitsforderung von ihm in seiner Arbeit „Axiomatische Begründung von Hensels p-adischen Zahlen" (Journal f. Math., Bd. 141, S. 43 bis 76, 1912, S. 49) durchgeführt worden ist.

mit dessen Vorliegen das Nichtvorliegen von Z_m unverträglich ist, wobei das Vorliegen von Z_n außerdem nur mit dem Nichtvorliegen eines solchen von Z_m und Z_n verschiedenen Elements unverträglich ist, mit dessen Nichtvorliegen auch das Vorliegen von Z_m unverträglich ist.

3.) Die durch 2.) bestimmte Beziehung zwischen Z_m und Z_n ist unverträglich mit der gleichen Beziehung zwischen einem anderen Element und Z_n.

Dieses „Vorliegen" ist nicht etwa so zu verstehen, als wären die Zahlen als solche „da". Daß eine bestimmte natürliche Zahl vorliegt, soll vielmehr nur bedeuten, daß sie einem Gegenstand — nach den obigen formalen Regeln — zugeordnet gedacht ist.

Wir können diesen Sachverhalt auch beschreiben, indem wir unseren Ausgang von den Zahlzeichen nehmen; dann bedeutet das „Vorliegen" einer Zahl die Verwendung eines bestimmten Zahlzeichens, sc. im Rahmen der eindeutig festgelegten Verwendungsordnung. Eine schwere Mißdeutung aber wäre es, wollte man das „Vorliegen" — im Sinne eines überspitzten Realismus — so interpretieren, als hinge die „arithmetische Existenz" großer Zahlen bzw. das sinnvolle Operieren mit solchen davon ab, ob genügend viele Dinge „auf der Welt" existieren. Die Ablehnung einer solchen Auffassung geht aus der eben gemachten Feststellung, daß im Begriff der Zahlenreihe eine Idealisierung mitgemeint ist, unzweideutig hervor.

Wie wichtig für die mathematische Methodenlehre Klarheit über den Zusammenhang zwischen den logisch-mathematischen Abstrakten und ihrem „Modell" ist, zeigt sich auch im Hinblick auf den Methodenstreit zwischen formalistischer und neo-intuitionistischer Lehre. Eine der vier Grundthesen, in die Brouwer neuerdings die Essenz seiner Methodenkritik zusammenfaßt, besagt nämlich, „daß die (inhaltliche) Rechtfertigung der formalistischen Mathematik durch den Beweis ihrer Widerspruchslosigkeit einen circulus vitiosus enthält, weil diese Rechtfertigung auf der (inhaltlichen) Richtigkeit der Aussage, daß aus der Widerspruchslosigkeit eines Satzes die Richtigkeit dieses Satzes folge, d. h. auf der (inhaltlichen) Richtigkeit des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten beruht"[1]).

[1]) „Intuitionistische Betrachtungen über den Formalismus", Sitzungsber. d. Preuß. Akad. d. Wissensch., Phys. math. Kl., 1928, S. 48 bis 52 (S. 49).

Nun ist Brouwer darin vollkommen beizustimmen, daß die Frage nach der inhaltlichen Richtigkeit, d. h. nach dem Erkenntnischarakter der Mathematik, ihre Beantwortung nur von einer „Intuition", d. h. von einer Einsicht über die Welt her, erhalten kann. Aber die Formalisten werden darauf erwidern, daß sie eine solche Frage im Rahmen ihrer Lehre nie beantwortet oder auch nur gestellt haben, da diese Frage ein erkenntnistheoretisches, also außermathematisches Problem darstelle. Und darüber hinaus können sie behaupten, daß gerade die sich auf die „Urintuition" des zeitlichen Modells der Zahlenreihe stützende erkenntnistheoretische Analyse den Widerspruch als einzige Schranke formaler Verknüpfungen dartue. Diese Feststellung wäre unanfechtbar; nur darf nicht vergessen werden, daß die formale Sphäre selbst zur „Welt" gehört und daher nicht willkürlich durch Einführung neuer Symbole erweitert werden kann. Daß der Versuch einer solchen Erweiterung durch die These der mathematischen Existenz des unabzählbar Unendlichen gemacht wurde, hat ja, wie wir festgestellt haben, den Hauptanlaß für Brouwers Methodenkritik geboten.

Aber noch eine andere für die Grundlagenprobleme der Mathematik wichtige Folgerung ergibt sich aus der Erfassung der Beziehung zwischen den natürlichen Zahlen und ihrem zeitlichen Modell. Hat man nämlich erkannt, daß die natürlichen Zahlen selbst schon formale Begriffe sind, so muß der Versuch als aussichtslos erscheinen, neben der „inhaltlichen Mathematik" der natürlichen Zahlen eine „formale Mathematik" aufzubauen, um in dieser das unabzählbar Unendliche der Mengenlehre zu retten. Denn der Sinn jener letzten „Formalisierung", die auch von der Bedeutung der „logischen Konstanten" („nicht", „und" usw.) absieht, liegt ja, wie wir im ersten Abschnitt auseinandergesetzt haben, allein darin, daß Regeln für Formelbildungen aufgestellt werden, welche auf die Transformationen in der Sphäre der logischen Konstanten „passen".

Nach den eben gemachten Feststellungen ist es offenbar, daß auch die Frage nach dem erkenntnistheoretischen Sinn der Unendlichkeit der Zahlenreihe nur unter Bezugnahme auf das Modell der Zahlenreihe beantwortet werden kann. Man beachte wohl, daß es sich hiebei um das Problem handelt, ob dieser Annahme Erkenntnischarakter zukommt, d. h. ob und in welcher Weise sie etwas über die Welt aussagt. Es zeigt sich dann, daß als Modell dieser Unendlichkeit die grundsätzliche Schrankenlosigkeit im Zeitlichen erscheint. Eine zeitlich geordnete Ereigniskette — wie sie der Zählprozeß darstellt — ist nämlich in dem Sinne unabgeschlossen, daß sich stets eine neue Ereigniskette bilden läßt, die alle Ereignisse der ersten Kette und noch ein weiteres enthält.

Das soll nun aber keineswegs besagen, daß eine unendliche Reihe von Ereignissen „vorliegen" könne; vielmehr bedeutet es, daß zwar jede vorliegende Reihe von Ereignissen endlich, d. h. durch eine bestimmte natürliche Zahl charakterisiert ist, daß aber andererseits niemals alle Ereignisse vorliegen können. Das „Modell" der Unendlichkeit ist also, ganz im Kantschen Sinne[1]), Unvollendbarkeit eines nach einer bestimmten Regel fortschreitenden Prozesses. Die Hinzufügung je eines weiteren Elementes der Reihe ist stets der gleiche Prozeß — er unterliegt derselben Regel —, wie viele Elemente auch immer die Reihe bereits vorher enthalten haben möge. Das formale Abstrakt dieses Prozesses aber ist die wohl einen Anfang aber kein Ende besitzende Superposition von Unverträglichkeitsbeziehungen.

Da demgemäß im Sinne der im ersten Abschnitte gewonnenen Einsichten kein formaler Begriff begriffsfremd mit der Sphäre der Arithmetik ist und ferner die unbeschränkte Iterierbarkeit jedes formalen Begriffes durch die Endlosigkeit der Zahlenreihe gewährleistet ist, so bildet die Arithmetik das Universalschema für alle denkbaren formalen Systeme. Es ist also nicht möglich, ein formales Relationssystem zu konstruieren, das sich nicht auf ein — echtes oder unechtes — Teilsystem der Arithmetik ein-eindeutig abbilden lassen würde.

Wir wollen nun, um zu einem Hauptproblem der Theorie der natürlichen Zahlen — nämlich demjenigen der Analyse des

---

[1]) Die wichtigsten Stellen finden sich in der Anmerkung zur Thesis der ersten Antinomie. Dort heißt es: „Der wahre (transzendentale) Begriff der Unendlichkeit ist: daß die sukzessive Synthesis der Einheit in Durchmessung eines Quantum niemals vollendet sein kann." Besonders hervorgehoben seien die letzten Sätze dieser „Anmerkung": „Da diese Synthesis nun eine nie zu vollendende Reihe ausmachen müßte: so kann man sich nicht vor ihr und mithin auch nicht durch sie eine Totalität denken. Denn der Begriff der Totalität selbst ist in diesem Falle die Vorstellung einer vollendeten Synthesis der Teile, und diese Vollendung, mithin auch der Begriff derselben ist unmöglich."

Prinzips der vollständigen Induktion — vorzudringen, das Ausmaß der Übereinstimmung und die Art der Differenzen, welche zwischen unserer axiomatischen Bestimmung der natürlichen Zahlen und der klassischen Axiomatik Peanos bestehen, feststellen.

Peano[1]) verwendet drei Grundbegriffe „0", „Zahl", „Nachfolger" und legt die zwischen den Grundbegriffen bestehenden Beziehungen durch folgende Axiome fest:

1. 0 ist eine Zahl.
2. Der Nachfolger irgend einer Zahl ist eine Zahl.
3. Es gibt nicht zwei Zahlen mit denselben Nachfolgern.
4. 0 ist nicht der Nachfolger irgend einer Zahl.
5. Jede Eigenschaft der 0, die auch der Nachfolger jeder Zahl mit dieser Eigenschaft besitzt, kommt allen Zahlen zu.

Diese fünf Axiome sind so festgelegt, daß sich aus ihnen unter Hinzunahme der Prinzipien der reinen Logik die gesamte Theorie der natürlichen Zahlen entwickeln läßt[2]). Vergleichen wir mit ihnen die von uns formulierten Axiome, so erkennen wir, daß der Begriff der ersten Zahl (bei Peano der 0) und des Nachfolgers erst durch sie ihren präzisen logischen Sinn erhalten, indem sie durch Unverträglichkeitsbeziehungen eindeutig festgelegt werden. Abgesehen hievon entsprechen unsere drei Axiome den vier ersten Axiomen Peanos.

Wie aber steht es hinsichtlich des fünften Axioms Peanos, das man, in recht unglücklicher Terminologie, als „Prinzip der vollständigen Induktion" bzw. als „Prinzip der mathematischen Induktion" oder — treffender — als „Satz des Schlusses von n auf n + 1" bezeichnet?

Dieser Satz besagt, daß jede Eigenschaft der 0 (d. h. des ersten Elements einer Folge, für welche die vier ersten Peano-

---

[1]) Arithmetices principia nova methodo exposita, Turin 1889.

[2]) Russell hat diese Axiomatik in folgender Weise umgeformt: (vgl. „Principia Mathematica", V. II, § 122, p. 253ff. und „Einführung in die mathethematische Philosophie", S. 7ff.) Als einziger Grundbegriff figuriert bei ihm die Relation „Vorgänger" (V). Ihr Bereich wird durch die folgenden Bestimmungen festgelegt:

1. V ist eineindeutig.
2. V hat genau ein Anfangsglied.
3. Der ganze Bereich der Beziehung ist in der Nachkommenschaft des Anfangsgliedes enthalten.
4. Die Beziehung hat kein Endglied.

schen Axiome gelten), die gegenüber der Nachfolgebeziehung invariant ist, jedem beliebigen Element der Folge zukommt. Fragt man nun, unter welchen Umständen dieser Satz zutrifft, so erkennt man, daß die notwendige und hinreichende Bedingung für seine Geltung die ist, daß jedes beliebige Glied sich vom ersten her „in endlich vielen Schritten erreichen läßt". Ist dies der Fall, dann läßt er sich für ein beliebiges Glied durch eine Kette von Schlüssen der folgenden Art verifizieren:

Obersatz: Wenn ein Element eine Eigenschaft E hat, so hat auch der Nachfolger die Eigenschaft E.

Untersatz: Das n-te Element hat die Eigenschaft E.

Schluß: Das n + 1-te Element hat die Eigenschaft E[1]).

Aber der Begriff der „Erreichbarkeit in endlich vielen Schritten" ist offenbar kein rein logischer Begriff, da er ein Zeitmoment in sich schließt. Sohin liegt das Problem der vollständigen Induktion gerade darin, das logische Abstrakt der „endlichen Erreichbarkeit" bloßzulegen.

Führen wir uns, um hier völlig klar zu sehen, zunächst das Beispiel einer Reihe vor Augen, für die zwar die vier ersten Peanoschen Axiome gelten, aber nicht das fünfte. Eine solche Reihe ist:

$-1, \ -{}^1/_2, \ -{}^1/_4, \ -{}^1/_8, \ \ldots\ldots \ {}^1/_8, \ {}^1/_4, \ {}^1/_2, \ 1, \ 2, \ 4, \ \ldots\ldots$[2]).

Sie erfüllt die ersten vier Peanoschen Axiome, weil sie ein erstes Glied hat und jedem Glied umkehrbar eindeutig ein Nachfolger zugeordnet ist, aber sie genügt nicht dem Prinzip der vollständigen Induktion, weil das erste Glied „Eigenschaften" hat, die, trotzdem sie gegen die Nachfolgerbeziehung invariant sind, nicht jedem Glied der Reihe zukommen, wie etwa die „Eigenschaft", eine negative Zahl zu sein. Dies kommt daher, daß die obige Reihe nicht ausschließlich durch die Nachfolgebeziehung konstituiert erscheint, sondern durch deren Verbindung mit anderen Unterscheidungen — positive und negative Zahlen — gebildet wird.

---

[1]) Vgl. hiezu, wie zu dem ganzen Problem, auch J. König: „Neue Grundlagen der Logik, Arithmetik und Mengenlehre", a. a. O., S. 155ff., sowie O. Hölder, „Die mathematische Methode", Berlin 1924, S. 331ff.

[2]) Wir werden später dartun, daß einer solchen Reihe kein analoger mathematischer Sinn zukommt wie der Folge der natürlichen Zahlen, doch lassen wir dies einstweilen dahingestellt, um die Schwierigkeiten nicht zu kumulieren.

Die „Unerreichbarkeit“ der positiven Glieder von dem ersten Glied her bedeutet nichts anderes, als daß sie mit Hilfe des ersten Gliedes und der Nachfolgebeziehung allein nicht definiert werden können. Das zeitliche Moment fällt hier vollkommen heraus, und die „unendliche Anzahl“ von Schritten, welche unpräziser Formulierung zufolge zwischen den negativen und den positiven Gliedern der Reihe liegt, ist nur eine unkorrekte Beschreibung der Tatsache, daß innerhalb der Reihe Zäsuren auftreten, welche nicht mit Hilfe der Nachfolgerbeziehung formulierbar sind. Der Ausschluß der zu solchen Zäsuren führenden Bestimmungen — den wir in unserer Definition der natürlichen Zahlen vollzogen haben — ist sonach notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß Elemente einer Struktur, für die die ersten vier Axiome Peanos gelten, auch dem Prinzip der vollständigen Induktion genügen.

Aber um die Problemlage vollkommen zu durchschauen, haben wir uns noch darüber klar zu werden, auf welche Momente die Hauptschwierigkeiten zurückgehen, die seiner Lösung im Wege gestanden sind. Dies ist, abgesehen von der fundamentalen Eigenbedeutsamkeit dieses Prinzips für die Theorie der Mathematik, auch darum für die folgenden Betrachtungen wichtig, weil wir hier schon ein Musterbeispiel eines transfiniten Problems vor uns haben und demgemäß erwarten dürfen, durch die kritische Analyse der hier herrschenden Fehlauffassungen auch zu den Quellen von Fehlauffassungen bei der Behandlung anderer transfiniter Probleme vorstoßen zu können.

Es waren vor allem zwei Umstände, die den Weg zur Lösung unseres Problems verrammelten. Fürs erste sah man — infolge der Verquickung von individueller und spezifischer Allgemeinheit — in den Zahlen eine unendliche Gesamtheit von Einzelobjekten, die gleichsam erst hinterher durch zwischen ihnen bestehende Gesetzmäßigkeiten verbunden würden; fürs zweite glaubte man in den „transfiniten Zahlen“ Zahlen gefunden zu haben, die von der ersten her nicht in endlich vielen Schritten erreichbar sind.

Mit der zweiten These, welche für die Auffassung unseres Problems freilich erst in einem späteren Stadium, nämlich nach der Schöpfung der Cantorschen Mengenlehre, bedeutsam wurde, werden wir uns im fünften Abschnitte bei der Analyse der

Theorie der Wohlordnung eingehend befassen. Die Folgen des ersten Irrtums aber können wir uns sogleich klar machen.

Meint man, daß die Aussagen über „alle Zahlen" sich unmittelbar auf eine unendliche Gesamtheit von „Individuen" (Singularitäten) beziehen, so kommt man folgerichtig dazu, in dem Satz von der vollständigen Induktion den Schlüssel zu einem spezifischen, der Syllogistik überlegenen Verfahren zu erblicken, da diese im Gegensatz zur mathematischen Induktion auf eine endliche Anzahl von Schlüssen beschränkt bleiben müsse. Als hervorragendster Vertreter dieser Auffassung unter den Mathematikern der neueren Zeit ist H. Poincaré zu bezeichnen. Er erklärt den Schluß von n auf n + 1 für ein Axiom, das die methodologische Besonderheit der Mathematik ausmache und behauptet, daß jeder Versuch eines Beweises dieses Satzes aus der reinen Logik zu einem Zirkelschluß führe, da man bei ihm stillschweigend von dem zu beweisenden Satze bereits Gebrauch mache[1]). Diese Auffassung des großen französischen Mathematikers enthält insofern einen richtigen Kern, als unser Satz tatsächlich ein Spezifikum der natürlichen Zahlen ist. Aber man beschreibt die hier bestehende Sachlage unrichtig, wenn man

---

[1]) Vgl. „Wissenschaft und Hypothese", Berlin 1904, S. 10. „Die Haupteigenschaft des rekurrierenden Verfahrens besteht darin, daß es, sozusagen in einer einzigen Formel zusammengedrängt, eine unendliche Anzahl von Syllogismen enthält"; ferner: „Wissenschaft und Methode", Berlin 1914, 2. Buch, 3. Kap. Hervorzuheben ist, daß Poincaré neben diesem „synthetischen Prinzip" in der Mathematik noch andere ähnliche Prinzipien als bestehend annimmt. Er bemerkt (ibd. S. 135):

„Wenn eine Eigenschaft für die Zahl 1 richtig ist, und wenn man feststellt, daß sie auch für n + 1 richtig ist, vorausgesetzt, daß sie es für n ist, so wird sie auch richtig für alle ganzen Zahlen sein. Darin sah ich den Kern der mathematischen Schlußweise. Ich wollte damit nicht sagen, wie man geglaubt hat, daß alle mathematischen Schlußweisen sich auf eine Anwendung dieses Prinzips zurückführen lassen. Wenn man diese Schlußweisen etwas eingehender prüft, wird man darin viele andere, analoge Prinzipien angewandt sehen, welche die gleichen wesentlichen Eigenschaften aufweisen. In dieser Kategorie von Prinzipien ist einzig die vollständige Induktion das einfachste Prinzip von allem, und nur deshalb habe ich sie früher als typisch bezeichnet."

Zwischen Poincaré, Russell und Couturat hat in den Jahren 1904 bis 1909 eine große Diskussion über die Problematik der vollständigen Induktion (in der „Revue de Metaphysique et de Morale") stattgefunden. Poincarés Auffassung hat auch Einfluß auf den Neo-Intuitionismus gehabt und auch die neuesten formalistischen Publikationen kommen ihr nahe. Vgl. hiezu v. Neumann, „Zur Hilbertschen Beweistheorie", l. c.

in ihm eine Erweiterung der logischen Methoden erblickt und ihn als synthetisches Urteil a priori den analytischen Urteilen der Logik gegenüberstellt.

Das „synthetische Moment", die „Anschauung" oder „Urintuition", liegt, wie wir schon festgestellt haben, an einem anderen Punkte, nämlich in dem Modell jener Superposition von Unverträglichkeiten, d. i. im Zählprozeß. In der „Anschauung" des Zählprozesses erfassen wir, daß der Fortschritt von einem Zählakt zum nächsten unabhängig davon ist, was schon gezählt wurde, und das logische Abstrakt — die Struktur — dieser Grenzenlosigkeit im Fortgange des Zählens ist die „unendliche Reihe" der natürlichen Zahlen. Sie ist also weder ein sukzessiv Werdendes, da ja vom Zeitmoment abstrahiert worden ist, noch auch eine Totalität unendlich vieler für sich seiender Singularitäten, sondern das „Feld" (der Bereich) der schrankenlosen Superposition von Unverträglichkeiten. Die Geltung des Prinzips der vollständigen Induktion aber steht mit dem konstitutiven Prinzip der Reihe der natürlichen Zahlen bereits logisch fest. Sie ist die Geltung der conclusio eines Schlusses von beliebig vielen Gliedern, begreift also keineswegs ein eigenes Verfahren in sich.

Fragt man nun nach dem Erkenntniswert der vorstehenden Analysen, die zu dem Ergebnis geführt haben, daß unsere Definition der natürlichen Zahlen mit der Axiomatik Peanos nicht nur äquivalent ist, sondern auch verfahrensmäßig übereinstimmt[1]), so ist es einleuchtend, daß ihre Vorteile gegenüber dieser nicht in „technischen" Momenten gesucht werden dürfen. Sie liegen vielmehr darin, daß durch diese Analysen der Sinn der Peanoschen Axiomatik vollkommen deutlich wird, und zwar sowohl der Sinn der Peanoschen Grundbegriffe 0, Zahl, Nachfolger, als auch — abgesehen hievon — derjenige des Prinzips der vollständigen Induktion. Dadurch nämlich, daß unsere Definition der natürlichen Zahlen in einsichtiger Weise durch Strukturanalyse des Zählprozesses gewonnen wird, erscheint die Frage nach dem „Wesen" der Zahl, d. h. nach ihrem Platz im „Bau der Welt" („System der Erkenntnis") beantwortet. Es wäre ein völliges Mißverstehen der hier obwaltenden Problematik, wollte man eine solche Fragestellung als Berufung auf eine vage In-

[1]) Das will besagen, daß keine Umschichtung zwischen Axiomen und abgeleiteten Sätzen platzgreift.

tuition deuten und demzufolge ablehnen. Vielmehr liegt in dieser Fragestellung einzig und allein die Aufgabe beschlossen, das Thema der Zahlenlehre deutlich zu machen, d. h. sich dessen voll bewußt zu werden, worüber man spricht, wenn man Arithmetik treibt oder einfach rechnet. Hat man dies einmal erfaßt, dann verliert auch die Tatsache der prinzipiellen Tauglichkeit der Mathematik für Zwecke der Naturwissenschaft ihre Rätselhaftigkeit, da aus der Einsicht, wie die Zahlenreihe mit der Sukzessionsordnung des Zählprozesses zusammenhängt, die Art des Zusammenhanges der Zahlen mit der Welt hervorgeht[1]).

Aber auch auf die Grundlagenprobleme der Mathematik selbst fällt von hier aus Licht. Zunächst ergibt sich ohne Schwierigkeit die Widerspruchslosigkeit unserer Definition der natürlichen Zahlen. Da nämlich diese nichts anderes ist als eine Beschreibung des formalen Skelettes des schrankenlos gedachten Zählprozesses, d. h. seines Abstraktes nach Absehen von dem phänomenalen Moment, das in der Zeitfolge liegt, so würde ein in ihr auftretender Widerspruch implizieren, daß ein einstimmiger Zählprozeß unmöglich ist.

Ebenso ergibt sich unmittelbar aus der Analyse des Zählprozesses die „Vollständigkeit" unserer Definition in dem Sinne, daß in ihr alles enthalten ist, was sich formal über den Zählprozeß aussagen läßt. Hieraus aber folgt auch, daß sie in demjenigen Sinne „vollständig" ist, den wir im vorigen Abschnitte behandelt haben.

Dies geht aus folgenden Überlegungen hervor: Die Nichtgabelbarkeit (bzw. Monomorphie) des durch unsere Definition der natürlichen Zahlen konstituierten formalen Systems ist jedenfalls dann zweifelfrei sichergestellt, wenn dargetan werden kann, daß es die gesamte formale Sphäre umfaßt; trifft dies nämlich zu, dann ist für Gabelungen, die ja Besonderungen sind, kein Raum mehr. Dieser Fall aber liegt hier vor.

Aus den im ersten und zweiten Abschnitte gewonnenen Einsichten ergibt sich nämlich zunächst, daß die formale Sphäre als vollständig beschrieben anzusehen ist, wenn jede formale Singularität eindeutig festgelegt erscheint, d. h. von jeder anderen unterschieden ist, da Verallgemeinerungen nur partielle Unbestimmtheiten (Variabilitäten) bedeuten. Ferner haben wir im ersten Abschnitte festgestellt, daß sich die formale Sphäre,

[1]) Doch ergibt sich hieraus noch nicht, ob die mathematische Beschreibung der Welt „einfach" ist.

nach Unterscheidung zwischen Variabeln und logischen Konstanten, mit Hilfe der einen logischen Konstante „unverträglich mit" beschreiben läßt. Im Hinblick auf diesen Begriff aber sind die natürlichen Zahlen derart definiert, daß prinzipiell nichts mehr offen bleibt. Es besteht ja die Definition jeder einzelnen natürlichen Zahl in der Statuierung bestimmter Unverträglichkeitsbeziehungen und dem Ausschluß jeder anderen Unverträglichkeitsbeziehung, so daß also durch jedes solche Schema der Statuierung von Unverträglichkeitsbeziehungen nebst Ausschluß sonstiger Unverträglichkeitsbeziehungen genau eine natürliche Zahl als „Träger" dieser Beziehungen bestimmt wird.

Demgemäß bilden die natürlichen Zahlen die Singularitäten der formalen Sphäre, und ihre adäquate Beschreibung muß alles implizieren, was sich innerhalb der formalen Sphäre sagen läßt. Hieraus ergibt sich die Einzigkeit der Arithmetik gegenüber der Mehrzahl der „Geometrien" genannten Relationssysteme, deren Universalschema — wie das Universalschema möglicher Relationssysteme überhaupt — jene darstellt, was sich in der Abbildbarkeit beliebiger Geometrien auf Zahlensysteme zeigt.

Daß sich die Behauptung der Nichtgabelbarkeit der Arithmetik mit derjenigen ihrer Entscheidungsdefinitheit deckt, werden wir im vorletzten Abschnitte dartun.

Unser Ergebnis zeigt eine gewisse Verwandtschaft mit der Auffassung Russells, der die natürlichen Zahlen mit Hilfe des Prinzips der vollständigen Induktion definiert[1]). Er bemerkt hiezu[2]): „Die mathematische Induktion ist eine Definition und kein Prinzip, es gibt Zahlen, für die sie gilt und andere ...... für die sie nicht gilt. Wir definieren die „natürlichen Zahlen" als diejenigen, auf die man die mathematische Induktion bei Beweisen anwenden kann, d. h. als diejenigen, die alle induktiven Eigenschaften besitzen. Daraus folgt, daß solche Beweise auf die natürlichen Zahlen angewendet werden können. Dies ist nicht eine mysteriöse Intuition oder irgend ein Axiom oder Prinzip. Es folgt vielmehr einfach aus dem Satze selbst. Wenn „Vierfüßler"

---

[1]) „Inductive cardinals are those that obey mathematical induction starting from 0, i. e. in the language of part II, Section E, they are the posterity of 0 with respect to the relation of ν to $\nu +_c 1$ or, in more popular language, they are those that can be reached from 0 by successive additions of 1." „Principia Mathematica", V. II, p. 207.

[2]) „Einführung in die mathematische Philosophie", S. 27.

definiert sind als Tiere mit vier Füßen, so folgt daraus, daß Tiere, die vier Füße haben, Vierfüßler sind. Ganz ähnlich liegt der Fall der Zahlen, die der mathematischen Induktion genügen."

Unsere Übereinstimmung mit Russell bezieht sich auf die Einsicht, daß das Prinzip der vollständigen Induktion kein außerlogisches Verfahren in sich schließt und daß es mit dem Bildungsgesetz — der Definition — der natürlichen Zahlen eindeutig festgelegt ist.

Aber dieser Gemeinsamkeit stehen folgende Divergenzen gegenüber:

1. Benützt Russell zur Bestimmung des Begriffes der natürlichen Zahl denjenigen der Menge (Klasse), den wir, wie bald gezeigt werden wird, als doppeldeutig ablehnen müssen.

2. Stimmen wir mit seiner an der Wohlordnungstheorie der Mengenlehre orientierten Auffassung der nicht induktiven Reihen nicht überein.

Diese beiden Differenzpunkte werden im Laufe der folgenden Analysen noch schärfer hervortreten.

Geht nun aus unseren eben durchgeführten Untersuchungen hervor, daß das Prinzip der vollständigen Induktion kein synthetischer Grundsatz a priori, sondern eine logische Folge aus dem Bildungsgesetz der natürlichen Zahlen ist, so scheint gleichwohl dieses Bildungsgesetz selbst, das eine schrankenlose Superposition von Unverträglichkeitsbeziehungen statuiert, einen Weg zu unendlichen Mannigfaltigkeiten zu eröffnen. Die Problematik der angeblichen Operationen im Bereiche des Unendlichen wird uns vorwiegend im übernächsten Abschnitte beschäftigen; eine unerläßliche Voraussetzung für deren Verständnis aber ist es, sich prinzipielle Rechenschaft über den Charakter der Mannigfaltigkeiten oder Mengen zu geben, um den echten Sinn der mathematischen Aussagen, welche sich scheinbar auf unendliche Mengen beziehen, erfassen zu können. Es sind dies die Aussagen von der Form „alle Zahlen, bzw. alle Zahlen von der bestimmten Eigenschaft E_1, haben die Eigenschaften E_2" und „es gibt — sc. unter allen Zahlen — Zahlen von der Eigenschaft E_2".

Wir haben bereits oben bei Analyse des Zählprozesses festgestellt, daß zur Definition der Zahl diejenige der Menge nicht erforderlich ist. Jetzt dagegen werden wir auch zu untersuchen haben, ob dem Terminus „Menge" überhaupt ein eindeutiger Sinn beigelegt wird.

Unseren Ausgang wollen wir von der — heute freilich bereits überholten — Definition G. Cantors nehmen, welche lautet: „Unter einer ‚Menge‘ verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die ‚Elemente‘ von M genannt werden) zu einem Ganzen[1].“

Beginnen wir unsere Analyse mit der Präzisierung der Begriffe „bestimmt“ und „wohlunterschieden“. Die Forderung der Bestimmtheit ist erfüllt, wenn von jedem beliebigen Objekt feststeht, ob es Element der fraglichen Menge ist oder nicht. Die Forderung der Wohlunterschiedenheit dagegen ist erfüllt, wenn für irgend ein Element A und irgend ein Element B feststeht, ob sie begrifflich identisch oder verschieden sind.

Ausschlaggebend ist, daß nach dieser Definition die Menge vollkommen bestimmt ist durch ihre Elemente, daß also Mengen dann und nur dann gleich sind, wenn sie dieselben Elemente enthalten.

Die „Zusammenfassung von Objekten zu einem Ganzen“ kann nun aber im Sinne der in der Mengenlehre herrschenden Auffassung in zweierlei Weise erfolgen; nämlich erstens dadurch, daß Objekte gezählt, also durch ihr Eingehen in denselben Zählprozeß „zusammengefaßt“ werden, zweitens dadurch, daß „alle Objekte von einer bestimmten Eigenschaft“ auf Grund dieser Eigenschaft zusammengefaßt werden. Hiedurch jedoch entsteht eine gefährliche Doppeldeutigkeit des Mengenbegriffes.

Zu seiner Bildung kam es wohl dadurch, daß man die Gemeinsamkeit zwischen zu zählenden Objekten, welche darin liegt, daß jedes von ihnen in denselben Zählprozeß einbezogen wird, zu einer Einheit höherer Art hypostasierte, wodurch, gleichwie bei anderen Hypostasierungen, eine erhöhte Bequemlichkeit der Ausdrucksweise erzielt wird. Diese „Zusammenfassung“ von Objekten zu einem „Gegenstand höherer Ordnung“ schien auch dadurch anschaulich gerechtfertigt, daß ja die zu zählenden anschaulichen Objekte von vornherein in einem bestimmten Raumgebiet „zusammengefaßt“ erscheinen.

Versteht man aber das Wort „Menge“ in der zweiten angegebenen Bedeutung, und hält man „Gegenstände der Anschauung“ (empirische Einzeldinge) und „Gegenstände des Denkens“ (Zahlen)

[1]) Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre“, Math. Ann., Bd. 46, S. 481 bis 512, 1895, S. 481.

nicht scharf auseinander, so kommt es zu der Analogie zwischen Eigenschaften von Körperdingen und „Eigenschaften“ von Zahlen.

In Wahrheit jedoch stellen sich die „Eigenschaften“ von Zahlen als „relative Unverträglichkeitsbeziehungen“ dar. Nehmen wir als Beispiel die Teilbarkeit der Zahlen. Eine Zahl z ist dann durch die Zahl n teilbar, wenn sie die größte von n Zahlen ist, deren jede — außer der kleinsten — um die kleinste Zahl größer ist als die nächstkleinere. In der Mathematik wird dies meist so ausgedrückt, daß man sagt: „Eine Zahl z ist durch n teilbar, wenn es eine Zahl m gibt, deren n-faches z ist.“ Das an diesem Beispiel Gezeigte gilt sinngemäß für beliebige „mathematische Eigenschaften“.

Wir wollen jetzt an einigen Beispielen zeigen, wie die Formulierung von Sätzen, in denen gemeinhin der Mengenbegriff verwendet wird, sich nach Ausschaltung dieses Begriffes gestaltet.

1. Dem Satz „Die Menge aller natürlicher Zahlen enthält die Menge aller Primzahlen“ entspricht die Aussage: „Wenn etwas Primzahl ist, so ist es natürliche Zahl.“

2. Dem Satz „Die Menge aller natürlichen Zahlen $a, b, c, n > 2$, enthält kein Fermatsches Zahlenquadrupel“ entspricht die Aussage: „Wenn a, b, c und n natürliche Zahlen sind und $n > 2$ ist, so besteht zwischen ihnen die Beziehung $a^n + b^n - c^n \neq 0$.“

3. Dem Satz: „Die Menge aller natürlichen Zahlen ist unendlich“ entspricht die Aussage: „Durch eine beliebige natürliche Zahl (z) wird eine von den zu ihrer „Bestimmung“ erforderlichen Zahlen verschiedene Zahl $(z + 1)$ bestimmt.“

4. Dem Satz: „Die Menge der natürlichen Zahlen zwischen 5 und 12 ist kleiner als die Menge der natürlichen Zahlen zwischen 20 und 30“ entspricht die Aussage: „Zwischen 5 und 12 liegen weniger natürliche Zahlen als zwischen 20 und 30.“

Die hier angeführten Beispiele sind besonders einfach; aber auch eine Komplizierung würde keine prinzipiell neuen Momente zur Berücksichtigung bieten oder gar unser in den folgenden Abschnitten noch zu festigendes Ergebnis erschüttern, welches lautet: Zur Formulierung legitimer mathematischer Aussagen bedarf es nicht des Mengenbegriffes, wo hingegen dieser — bzw. der ihm entsprechende der „mathematischen Eigenschaft“ — unentbehrlich erscheint, da liegen sinnlose, pseudomathematische Sätze vor.

Aber wenn der Begriff der Menge hier ausgeschaltet werden kann, so könnte er vielleicht doch dort erforderlich sein, wo er iteriert erscheint. Wir wollen nun zeigen, daß die Ausschaltung auch in diesen Fällen vollziehbar ist, und zwar soll dies am einfachsten Beispiele der Iteration, an dem Begriffe der Mengen von Mengen, dargetan werden. Auf weitere Iterationen läßt sich dann die nachstehende Argumentation ohneweiters übertragen.

Ziehen wir folgendes einfache Beispiel heran: Die Menge der Mengen [1, 2, 3, 6, 8], [4, 5, 6], [7, 9] enthält drei Elemente. Welche Erkenntnistatsache bringt dieser Satz zum Ausdruck? Um dies zu verstehen, wollen wir zuerst den ersten der beiden Mengenbegriffe auflösen, ohne den zweiten umzuformen. Wir wollen uns also fragen: Was bedeutet hier eine „Menge von Mengen"?

Nach den von uns gemachten Feststellungen ist dies nur ein anderer Ausdruck dafür, daß den Mengen umkehrbar eindeutig natürliche Zahlen zugeordnet werden sollen.

Die zweite Frage ist dann die, wem denn eigentlich hiebei die Zahlen zugeordnet werden oder — anders ausgedrückt — welches Moment die „Zusammenfassung" der verschiedenen Elemente zu Mengen bewerkstelligt.

Dieses „zusammenfassende Moment" besteht nun darin, daß gewissen Elementen bei der Zuordnung, durch welche eine „Menge von Mengen" bestimmt wird, dieselbe Zahl zugeordnet wird. Unserem Begriff der Menge von Mengen entspricht also in dem angeführten Beispiel folgendes Zuordnungsschema:

$$\left\{\left[\frac{1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1}{1,\ 2,\ 3,\ 6,\ 8}\right], \left[\frac{2,\ 2,\ 2}{4,\ 5,\ 6}\right], \left[\frac{3,\ 3}{7,\ 9}\right]\right\}.$$

Die Iteration von Mengen bedeutet demgemäß eine Superposition solcher Zuordnungen.

Bringen wir uns nun weiter in Erinnerung, daß das Zählen von Gegenständen darin besteht, daß man ihnen umkehrbar eindeutig Ordnungsindizes zuordnet, und daß das Ergebnis des Zählprozesses unabhängig davon ist, Dinge welcher Art gezählt werden, so begreift man, daß auch Ordnungsindizes selbst gezählt werden können. Nur darf man nicht vergessen, daß kein visuelles oder akustisches Phänomen als solches Ordnungsindex ist, sondern daß es ein Ordnungsindex nur insofern ist, als ihm in einem gedanklichen Prozeß die Ordnungsfunktion zukommt. Wenn nun aber Ordnungsindizes gezählt werden, so fungieren sie innerhalb dieses Zählprozesses nicht als Ordnungsindizes, sondern als „beliebige Gegenstände“: es würde sich also nichts an der Art und am Ergebnis dieses Zählprozesses ändern, wenn statt jedes einzelnen Ordnungsindex irgend ein anderer Gegenstand in den Zählprozeß eingesetzt würde.

Diese Feststellung ist vor allem wichtig, um Fehlinterpretationen dort hintanzuhalten, wo die gezählten Zeichen, ihrem Schrift- oder Lautbild nach, die gleichen sind wie diejenigen, mit deren Hilfe gezählt wird; denn Gezähltes und Zahl fallen auch hier keineswegs zusammen. Das entscheidende Moment aber liegt in folgender Feststellung: Die eben beschriebene und an dem obigen Beispiel exemplifizierte „Zusammenfassung von Zahlen zu einer Menge“ dadurch, daß man ihnen die gleiche Zahl zuordnet, ist offenbar ein empirisches Faktum, und das gleiche gilt von der auf Grund solcher Zusammenfassungen vollzogenen Bildung einer Menge von Mengen usw.; hiedurch werden also nicht intern mathematische Beziehungen gekennzeichnet.

Nimmt man aber den Begriff „Menge“ in seiner zweiten Bedeutung als „mathematische Eigenschaft“, dann lassen sich, wie aus unseren Untersuchungen im ersten Abschnitte hervorgeht, Mengen nicht in der Weise übereinanderlagern, daß es „Eigenschaften“ von Eigenschaften, „Eigenschaften“ von „Eigenschaften“ von Eigenschaften usw. gäbe. Dies wird aber infolge der Doppeldeutigkeit des Mengenbegriffes übersehen, und so will man solche Ineinanderschachtelungen von „Mengen“ auch dort durchführen, wo die eben beschriebenen Superpositionen von Zählprozessen nicht vorliegen, wodurch es zur Bildung des erweiterten Funktionenkalküls kommt.

Hier ist nun aber der Punkt, wo die Verquickung zweier heterogener Sphären im Begriffe der „Menge“ zu mathematischen Ungereimtheiten führt, und zwar vor allem bei Bildung des Begriffes der „Menge aller Teilmengen der Menge der natürlichen Zahlen“.

Diese Begriffsbildung wollen wir jetzt näher betrachten: Die Definition der Teilmenge lautet: Eine Menge M' heißt eine Teilmenge der Menge M, wenn jedes Element von M' gleichzeitig auch Element von M ist. Ist hiebei M' mit M identisch, so nennt man M' eine unechte (uneigentliche) Teilmenge von M. Demgemäß sind also beispielsweise die „Menge der Zahlen 1, 4, 17“

7*

und die „Menge der Primzahlen“ als Teilmengen der Menge der natürlichen Zahlen zu bezeichnen, und das bedeutet nichts anderes, als daß 1, 4 und 17 natürliche Zahlen sind, bzw. daß jede Primzahl (wir denken hier selbstverständlich nicht an Primideale) eine natürliche Zahl ist. Durch die Beschreibung solcher mathematischer Sachverhalte mit Hilfe des Begriffes der Teilmenge aber wird man dazu verführt, eine Eigenschaft von Mengen „Teilmenge der Menge der natürlichen Zahlen zu sein“, zu statuieren und dieser Eigenschaft im Sinne des Komprehensionsaxioms eine „Menge aller Teilmengen der Menge der natürlichen Zahlen“ zuzuordnen, und zwar ohne Rücksicht auf die anderweitige Bestimmtheit jeder einzelnen der Teilmengen der Menge der natürlichen Zahlen, welche ihre Elemente bilden. Auf dem Begriff der „Menge aller Teilmengen der Menge der natürlichen Zahlen“ aber basiert die Lehre Cantors vom unzählbar Unendlichen, von einer Stufenfolge transfiniter Kardinalzahlen und transfiniter Zahlenklassen. Diese werden wir im übernächsten Abschnitt eingehender zu analysieren haben.

Jener Fehlauffassung gegenüber muß mit Nachdruck darauf hingewiesen werden, daß — wie aus der Definition des Begriffes der Teilmenge hervorgeht — dieser Begriff ein akzessorischer ist, d. h. anderweitige Bestimmungen, auf Grund welcher die „Teilmengenqualität“ zuerkannt wird, voraussetzt, und daß daher mit dem Begriffe der „beliebigen Teilmenge der Menge der natürlichen Zahlen“ bzw. „Menge aller Teilmengen der Menge der natürlichen Zahlen“, nicht operiert werden darf. Auf diesen Einwand könnte erwidert werden, daß doch — wie wir schon im vorigen Abschnitte dargetan haben — die mathematischen Tatsachen unabhängig von ihrer Entdeckung bestehend anzunehmen seien, und daß daher mit der „Existenz“ von Gesamtheiten solcher Tatsachen begrifflich operiert werden dürfe, auch wenn die Definition jedes einzelnen Elements der Gesamtheit prinzipiell ausgeschlossen ist. Diese Entgegnung aber ist darum hinfällig, weil — wie bereits festgestellt wurde und im folgenden noch näher dargetan werden wird — von dem Bestehen einer aktual unendlichen Totalität natürlicher Zahlen nicht gesprochen werden kann und schon gar nicht von einer neben dieser bestehenden Totalität der „Eigenschaften“ der natürlichen Zahlen.

Am tiefsten und klarsten hat hier wohl Wittgenstein gesehen, aber auch schon bei Poincaré und Borel und insbesondere bei Weyl findet sich die prinzipiell richtige Einstellung.

Mit dem Begriff der Menge, wie er in der Mengenlehre Cantors aufgefaßt wird, sind — wie schon eingangs erwähnt — auch eine Reihe von Antinomien, die „Paradoxien der Mengenlehre" verknüpft, deren Ausschaltung den Mathematikern große Schwierigkeiten bereitet hat.

Es ist darum begreiflich, daß demjenigen Forscher, der den Kampf gegen die Paradoxien mit der größten Entschiedenheit aufgenommen und der vielleicht am schwersten mit den Grundlagenproblemen der Mathematik gerungen hat — Bertrand Russell — Zweifel an der Unentbehrlichkeit des Mengenbegriffes aufgestiegen sind. Russell hat diesen seinen Zweifeln in seiner — während des Krieges entstandenen — „Einführung in die mathematische Philosophie" unzweideutigen Ausdruck verliehen, wenn er es (S. 185) als wahrscheinlich bezeichnet, daß die Mengen nur „logische Fiktionen" sind und an einer anderen Stelle (S. 192) bemerkt, daß der Nutzen der Mengen hauptsächlich darin bestehe, daß mit ihrer Annahme das Reduzibilitätsaxiom verknüpft sei. Seither scheinen nun diese Zweifel — hauptsächlich unter dem Eindruck der Untersuchungen von Wittgenstein und L. Chwistek[1]) — noch wesentlich verstärkt worden zu sein, da Russell — wie aus dem Vorwort zur zweiten Auflage der „Principia Mathematica" hervorgeht — nunmehr noch weit klarer als früher die Mängel seines Reduzibilitätsaxioms empfindet. Dort heißt es (S. XIV): „One point in regard to which improvement is obviously desirable is the axiom of reducibility." „This axiom has a purely pragmatic justification: it leads to the desired results and to no others. But clearly it is not the sort of axiom with which we can rest content." Gerade jetzt, wo erfreulicherweise die tiefen Analysen Russells zur Theorie der Mathematik auch im deutschen Sprachgebiet gewürdigt werden, ist es doppelt geboten, auf die Mängel im

[1]) „Über die Antinomien der Prinzipien der Mathematik", Math. Zeitschr., Bd. 14, S. 236 bis 243, 1922; ferner:

„The theory of constructive types." (Principles of logic and mathematics), Part. I and II. Extracted from the Annales de la Société Polonaise de Mathématique, Cracow 1923/25. Vgl. auch seine neuere Arbeit „Über die Hypothesen der Mengenlehre", Math. Zeitschr., Bd. 25, S. 439 bis 473, 1926.

Russellschen Aufbau, welche durch die Zwiespältigkeit des Mengenbegriffes bedingt sind, nachdrücklich hinzuweisen.

Mit den Unklarheiten, welche den Begriff der Menge betreffen, verschwinden auch diejenigen bezüglich des Begriffes der Folge. Eine Folge ist definiert durch ein Gesetz, wodurch jeder natürlichen Zahl eine bestimmte Zahl [redacted]eindeutig zugeordnet wird. Ein solches Bildungsgesetz aber definiert keineswegs eine transfinite Totalität, sondern lediglich eine Ordnungsrelation zwischen Zahlen bestimmter „Eigenschaften". Eine Aussage über das „allgemeine Glied einer Folge" bedeutet also nicht die mathematische Umformung einer Beziehung, welche ursprünglich auf eine unendliche Mannigfaltigkeit einzelner Elemente ginge, sondern sie ist der adäquate Ausdruck für den *generellen* Charakter jener Beziehung, demgegenüber die Anwendung auf eine bestimmte Zahl ein logisches posterius darstellt. Ebensowenig Schwierigkeit macht das Verständnis der Begriffe „Folge von Folgen von Zahlen" oder „Folge von Folgen von Folgen von Zahlen" usw. Hierunter sind Regeln zu verstehen, wodurch geordneten Paaren natürlicher Zahlen bzw. geordneten Tripeln natürlicher Zahlen (usw.) bestimmte Zahlen [redacted]eindeutig zugeordnet werden. Wir werden im nächsten Abschnitte bei der Analyse der Irrationalzahlen und im übernächsten Abschnitte bei der Analyse der transfiniten Ordinalzahlen erkennen, wie Sätze über unendliche Mengen, Mengen von Mengen usw. in Sätze über Folgen, Folgen von Folgen usw. umzuformen sind, wodurch ihr anscheinend transfiniter Charakter verschwindet. Hingegen ist es nicht zulässig, eine Folge in der Weise als Totalität aufzufassen, wie dies z. B. durch *Cantor* bei Definition der Irrationalzahlen durch Fundamentalreihen geschieht (vgl. unten S. 126).

Ist man sich hierüber grundsätzlich klar, und hält man sich auch von zeitlichen Interpretationen fern, die durch den Terminus „Folge" psychologisch nahegelegt werden, so wird man ihn im Interesse tunlichster Einfachheit der sprachlichen Ausdrucksweise unbedenklich benützen dürfen.

Zeigte sich schon beim Mengenbegriff die Gefährlichkeit des Operierens mit Symbolen, deren Bedeutung nicht völlig klar — bzw. (im *Leibnizschen* Sinne) deutlich — zutage liegt, so tritt diese Gefährlichkeit vielleicht noch prägnanter bei den sogenannten *Erweiterungen des Zahlbegriffes* hervor, die für uns vor allem darum von Interesse sind, weil sie zur Bildung des in der Problematik des Transfiniten eine wichtige Rolle spielenden Begriffes der Irrationalzahl bzw. der reellen Zahl führen.

Bei Durchführung der „Erweiterungen des Zahlengebietes" geht man häufig von den zu den Grundoperationen inversen Operationen aus, und wir wollen im folgenden ebenfalls diesen Weg einschlagen. Hiefür bildet nun zwar die Betrachtung der Addition und Multiplikation die Grundlage, doch dürfen wir von ihrer Ableitung aus den die Zahlenreihe bestimmenden Grundannahmen hier absehen, da diese Gemeingut der Grundlagenforschung ist und als bekannt vorausgesetzt werden darf.

Bei den Erweiterungen des Zahlengebietes liegt nun ein radikaler Auffassungsfehler, der unheilvolle Folgen nach sich zieht, in der schon im vorigen Abschnitte kritisierten Ansicht, daß die Einführung neuer Symbole etwas sachlich Neues bringe, neue mathematische Gegenstände „erzeuge".

In Wahrheit aber sind die legitimen Aussagen über diese neuen Zahlen nichts anderes als Aussagen über natürliche Zahlen, und die Operationen mit diesen neuen Zahlen sind nichts anderes als Operationen mit natürlichen Zahlen.

Wohl wurde der Primat der natürlichen Zahlen wiederholt von den bedeutendsten Mathematikern hervorgehoben[1]), und man kann sogar sagen, daß heute unter den mit mathematischen Grundlagenfragen befaßten Forschern im wesentlichen Einstimmigkeit über diesen Punkt herrscht, aber an den beiden entscheidenden Stellen, nämlich bei der Definition des Grenzwertes und derjenigen der Irrationalzahlen, wurden die Zusammenhänge häufig nicht klar genug erfaßt. Es wird im folgenden gezeigt werden, welche Bedeutung die Auflösung der Symbolik der Rationalzahlen und der reellen Zahlen für die richtige

---

[1]) Bekannt ist der Ausspruch Kroneckers „Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk". Auch Weierstraß hat in seinen Vorlesungen unzweideutig seiner Überzeugung vom Primat der natürlichen Zahlen Ausdruck verliehen. Husserl („Philosophie der Arithmetik", Leipzig 1891, S. 5) zitiert folgendes Diktum aus dessen Vorlesungen: S. S. 1878. W. S. 1880/81. „Die reine Arithmetik (oder reine Analysis) ist eine Wissenschaft, die einzig und allein auf dem Begriffe der Zahl basiert ist. Sie bedarf sonst keinerlei Voraussetzung, keiner Postulate und Vordersätze."

Zur Entwicklung der Zahlauffassung im 19. Jahrhundert vgl. G. Stammler, „Der Zahlbegriff seit Gauß", Halle a. S. 1925.

Auffassung des Transfiniten hat; darüber hinaus aber ist es meine Überzeugung, daß sie auch „intern mathematisch“ zu Fortschritten zu führen geeignet ist. Ich denke hier vor allem an die Einsicht in den engen Zusammenhang verschiedener, meist als weitgehend unabhängig voneinander betrachteter mathematischer Disziplinen, dann aber auch an gewisse Probleme der höheren Analysis, wie etwa dasjenige der Konvergenzkriterien.

Ist sohin die gesamte reine Mathematik in der Lehre von den natürlichen Zahlen in nuce enthalten[1]), so muß aus der eindeutigen Bestimmung des Begriffes der natürlichen Zahl und der „Operationen“ mit natürlichen Zahlen das Verhältnis der Mathematik zur Logik zu entnehmen sein. Mit dessen Klarstellung wollen wir diesen Abschnitt beschließen.

In unserer Analyse der Logik haben wir festgestellt, daß für den Begriff der Logik zwei Momente wesentlich sind, nämlich der tautologische Charakter der logischen Sätze und der formale Charakter der logischen Begriffe.

Beginnen wir mit dem zweiten Kriterium, so ergibt sich, daß es auch auf die Mathematik zutrifft; die natürlichen Zahlen fallen ja, wie wir erkannt haben, in die formale Sphäre. Wie aber steht es mit dem tautologischen Charakter der mathematischen Sätze?

Hier ist folgende Unterscheidung wichtig. Man kann die mathematischen Sätze in zwei disjunkte Klassen teilen. Zur ersten Klasse sollen die, auch im Sinne der herrschenden Auffassung, *finiten* Sätze gehören, also diejenigen, bei denen kein Gebrauch davon gemacht wird, daß keine Zahl die größte ist. Diese Sätze sind Tautologien. So bedeutet in dem Satz $5 + 7 = 12$ „$5 + 7$“ gar nichts anderes als „12“.

Anders steht es mit den Sätzen der zweiten Klasse, in die jene Voraussetzung der Unabgeschlossenheit der Reihe der natürlichen Zahlen eingeht. Denn diese Voraussetzung ist nicht erforderlich für die Definition *bestimmter* natürlicher Zahlen z_n — in welcher vielmehr nur sämtliche Zahlen, die kleiner sind als z_n, vorausgesetzt werden — und demgemäß ist kein Satz, welcher behauptet, daß es zu irgend einer Zahl überhaupt eine *größere* Zahl bzw. eine *größere* Zahl *bestimmter* „Eigen-

[1]) Daß dies auch für die reinen Geometrien gilt, wird im nächsten Abschnitte vollends deutlich werden.

schaften“ gibt, rein analytisch. Daß auch solche Sätze logisch aus den Axiomen der Arithmetik folgen, ist natürlich kein Gegenargument. Hier ist also der eine Punkt, an welchem eine Trennung zu vollziehen ist.

Die für diese Trennung konstitutive Annahme der Unabgeschlossenheit der Zahlenreihe schöpft ihre sachliche Rechtfertigung aus der Betrachtung des Zählprozesses, für dessen Abbruch an einer bestimmten Stelle kein prinzipieller Grund vorliegt.

Neben dieser, innerhalb der Mathematik selbst eine Zäsur schaffenden, Unterscheidung ist aber noch diejenige von Wichtigkeit, die darauf beruht, daß die natürlichen Zahlen formale Singularitäten sind, während in der Logik im engeren Sinne formale Singularitäten nicht auftreten. Ob man hieraus die Konsequenz ziehen will, auch die Sätze der „finiten Mathematik“ von den Sätzen der Logik im engeren Sinne terminologisch zu trennen und den Namen „Tautologien“ für letztere zu reservieren, ist eine Frage der heuristischen Zweckmäßigkeit, zu der ich nicht Stellung nehmen will.

Jedenfalls erkennt man, daß noch recht wenig gesagt ist, wenn man auf die Frage, ob die Mathematik einen Teil der Logik bildet, mit einem kurzen „Ja“ oder „Nein“ antwortet, ohne den Begriff „Logik“ präzis festgelegt zu haben. Überhaupt ist es bei der Behandlung von Grundlagenproblemen besonders wichtig, sich bei jeder Frage zu Bewußtsein zu bringen, inwieweit die darin auftretenden Begriffe noch der Verdeutlichung bedürfen, um die Frage als eindeutig bestimmt ansehen zu können.

IV. Negative Zahlen, Brüche und Irrationalzahlen.

Der einfachste Weg zum Verständnis der sogenannten Erweiterungen des Zahlbegriffes führt über die zu der Addition, der Multiplikation und der Potenzierung inversen Operationen. An die Spitze unserer Untersuchungen wollen wir eine Feststellung Russells setzen, die den Grundfehler der eingewurzelten Auffassung dieser neuen „Zahlen" bloßlegt:

„Einer der Irrtümer, der die Aufstellung von korrekten Definitionen hiefür verhindert hat, ist die allgemeine Auffassung, daß jede Erweiterung einer Zahl die früheren Arten als spezielle Fälle umfaßt. Bei der Betrachtung der positiven und negativen ganzen Zahlen glaubte man, die positiven Zahlen mit den ursprünglichen, vorzeichenlosen ganzen Zahlen identifizieren zu können. Man glaubte auch, daß ein Bruch mit dem Nenner 1 mit der natürlichen Zahl, die ihren Zähler darstellt, identifiziert werden könne. Den Irrationalzahlen, z. B. der Quadratwurzel aus 2 glaubte man einen Platz unter den rationalen Brüchen anweisen zu können. Man hielt sie für größer als einige von ihnen und kleiner als andere. Rationale und irrationale Zahlen sollte man dann in eine Menge, die der reellen Zahlen, zusammenfassen können. Erweitert man den Zahlbegriff derart, daß er auch die komplexen umfaßt, d. h. Zahlen, zu denen die Quadratwurzel aus —1 gehört, so glaubte man, die reellen Zahlen als solche komplexe betrachten zu können, deren imaginärer Teil (d. h. der Teil, der mit der Quadratwurzel aus —1 multipliziert ist) 0 ist. All diese Annahmen waren irrig. Man muß sie ...... ausschalten, wenn man korrekte Definitionen geben will[1])."

Wir wollen bei der Subtraktion beginnen und hiebei wieder, wie im vorigen Abschnitte, von der Aufweisung des zeitlichen

---

[1]) „Einführung in die mathematische Philosophie", S. 64.

Modells ausgehen, um erst hinterher das logische Abstrakt, das diesem Modell entspricht, zu bilden.

Der Sinn der Subtraktion ergibt sich bei Betrachtung der Zerlegung des Zählprozesses in Teilprozesse. Wenn man in der „sukzessiven Synthesis des Mannigfaltigen“ etwa bis zu einem fünfzehnten Ding bzw. Erfassungsakt gelangt ist, so kann man sich fragen, wie viele Dinge man nach dem zehnten oder wie viele man zwischen dem dritten und dem neunten gezählten Ding erfaßt hat. Hiedurch kommt man zur Definition der Subtraktion als der inversen Operation der Addition. Aber diese Definition ist an die Voraussetzung geknüpft, daß der Subtrahend nicht größer ist[1]) als der Minuend; die scheinbare Erweiterung dieser Operation über jene Grenze hinaus ist jedoch eine verkürzte Ausdrucksweise für einen Gedankengang anderer Art. Es handelt sich hiebei nämlich um die Beziehung zweier „gegenläufiger“ Sphären, d. h. um die Bestimmung einer Resultante durch Subtraktion zweier gleichartiger Komponenten, wobei es zunächst unbestimmt erscheint, welche der Komponenten als Minuend und welche als Subtrahent figuriert. Einfache Beispiele sind: Die Resultante zweier in entgegengesetzter Richtung wirkender Kräfte oder der Saldo eines wechselseitigen Forderung- und Schuldverhältnisses. Wenn man also von einer negativen Kraft spricht, so bedeutet dies, daß die betreffende Kraft in einer der Ausgangsrichtung entgegengesetzten Richtung wirkt, und wenn man von einer negativen Forderung des A an den B spricht, so heißt dies, daß B an A — die „Ausgangsperson“ — größere Forderungen hat als A an B.

Maßgebend für die Anwendbarkeit der Symbolik der negativen Zahlen auf irgend eine Beziehung ist also deren Gegenläufigkeit[2]), d. h. die Vollziehbarkeit der Resultantenbildung durch Subtraktion.

---

[1]) Sind Minuend und Subtrahend gleich, bleibt also bei der Subtraktion nichts übrig, so spricht man von der Differenz 0. Aber diese Differenz kann nicht sinnvoll als Faktor in einer Multiplikation auftreten. Demgemäß erscheint die Bildung des Produktes $a \times 0$ oder $0 \times a$ zunächst ebenso sinnlos wie diejenige der Quotienten $a : 0$ oder $0 : 0$. Es kann aber unter der Multiplikation mit 0 die Multiplikation mit einer beliebig kleinen Zahl verstanden werden. 0 ist dann ein Grenzbegriff. Das wird nach Diskussion der Rationalzahlen, unter denen es keine kleinste Zahl gibt, voll verständlich werden. Das eben Gesagte gilt sinngemäß auch für die 0 als Exponent (a^0).

[2]) Dies war schon Gauß völlig klar. Er betont ausdrücklich, daß negative

Hieraus ergibt sich der Sinn der negativen Zahlen wie folgt: Ein Element heißt das —n-te in bezug auf einen vorgegebenen Zählprozeß, wenn von ihm aus gezählt ein Element, welches in jenem Zählprozeß das m-te ist, zum m+n-ten wird. Es liegt hier also eine Superposition von Zählprozessen vor, wobei im zweiten Zählprozeß die im ersten Zählprozeß festgelegten Zahlensymbole beibehalten werden, obwohl sich ihr Sinn verschoben hat.

Die durch das Operieren mit der Symbolik der negativen Zahlen erreichten technischen Vereinfachungen machen sich vor allem dann geltend, wenn ein bestimmter Fixpunkt (Nullpunkt) als Ansatzpunkt für Additionen und Subtraktionen besonders nahe liegt. Als Beispiel eines solchen „natürlichen" Nullpunktes sei etwa derjenige von Vermögenswerten und Schulden gleicher Höhe erwähnt. Die Art des Rechnens mit negativen Zahlen und insbesondere die Aufklärung der paradox erscheinenden Produktbildungen mit einer negativen Zahl als Multiplikator ist nach diesen Erwägungen ohneweiters verständlich. Daß „plus mal minus" „minus", und „minus mal minus" „plus"[1]) ergibt, das bedeutet ja nichts anderes als die Verabsolutierung der Rechengesetze für die Subtraktion, wonach $(a-b)(c-d) = ac - bc - - ad + bd$ gilt. Die negative Zahl ist also der Subtrahend (Zahl und Operationszeichen) herausgelöst aus dem Gefüge der Subtraktion[2]).

Demgemäß läßt sich keine gemeinsame *logische* Eigenschaft der negativen Zahlen angeben, auf Grund welcher ihre Scheidung von den natürlichen Zahlen erfolgen könnte.

Zahlen nur dort Anwendung finden können, „wo das Gezählte ein Entgegengesetztes hat, was mit ihm vereinigt gedacht, der Vernichtung gleichzustellen ist." (Zitiert nach O. Becker, „Mathematische Existenz", a. a. O., S. 477.)

[1]) Im Hinblick auf letztere Regel schreibt der Mathematiker Clavius (1612): „debilitas humani ingenii accusanda (videtur) quod capere non potest, quo pacto id verum esse possit." (Zitiert nach Weyl, „Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft", S. 26.)

[2]) Einen einfachen Weg zur Ausschaltung der Symbolik der negativen Zahlen gibt Kronecker (a. a. O., S. 345) an: „Der Begriff der negativen Zahlen kann vermieden werden, indem in den Formeln der Faktor —1 durch eine Unbestimmte x und das Gleichheitszeichen durch das Gaußsche Congruenzzeichen modulo $(x+1)$ ersetzt wird. So wird die Gleichung $7-9 = 3-5$ in die Congruenz $7+9x \equiv 3+5x \pmod{x+1}$ transformiert; ..." In der gleichen Arbeit führt Kronecker auch die Ausschaltung der Symbolik der Brüche und der algebraischen Zahlen durch.

Etwas schwieriger gestaltet sich die Einsicht in die Prinzipien, die der Bildung der Brüche zugrunde liegen. Wir gehen hier von der zur Multiplikation inversen Operation aus. Sie wird „Division" genannt und ist dadurch gekennzeichnet, daß das Produkt und ein Faktor gegeben sind und nach dem zweiten Faktor gefragt wird. Eine Unterscheidung zwischen Multiplikand und Multiplikator ist wegen des für die Multiplikation geltenden Kommutationsgesetzes nicht erforderlich.

Daß nach dieser Definition der „nicht aufgehenden" Division kein Sinn abgewonnen werden kann, ist ohne weiteres klar. Es leuchtet ja ein, daß es „zwischen" einem n-ten und einem $n+1$-ten Element kein weiteres Element geben kann.

Es zeigt sich denn auch bei näherer Untersuchung unschwer, daß die „Brüche" genannten Symbole nicht eine Erweiterung der Zahlen darstellen, sondern Symbole für Beziehungen zwischen natürlichen Zahlen sind[1]). Man legt nämlich „für die Brüche" per definitionem fest, daß für zwei Brüche $\frac{p}{q}$ und $\frac{r}{s}$ dann $\frac{p}{q} \gtreqless \frac{r}{s}$ ist, wenn $ps \gtreqless qr$ ist und man *definiert* weiters die Grundoperationen der „Addition" und der „Multiplikation" „für Brüche" derart, daß das kommutative, das assoziative und das distributive Gesetz gelten.

Demgemäß sind alle mit Brüchen vollzogenen Operationen in Wahrheit Operationen mit natürlichen Zahlen, denen man einen anderen Namen gegeben hat. Es wird etwa die Summe zweier Brüche in der Weise bestimmt, daß man die Summe aus den Produkten „Zähler des ersten Bruches mal Nenner des zweiten Bruches" und „Nenner des ersten Bruches mal Zähler des zweiten Bruches" bildet und als Zähler des neuen Bruches setzt, während dessen Nenner das Produkt der Nenner jener beiden Brüche ist. Alle hiebei durchgeführten mathematischen Verknüpfungen sind *Operationen mit natürlichen Zahlen*; die Einführung der „Brüche" erfolgt demgemäß durch

[1]) Vgl. die auf Eudoxos zurückgehende Darstellung in *Euklids* „Elementen"; ferner hiezu: H. *Hasse* und H. *Scholz*, „Die Grundlagenkrisis der griechischen Mathematik", *Kant-Studien*, Bd. 33, S. 4 bis 34, 1928, sowie H. *Scholz*, „Warum haben die Griechen die Irrationalzahlen nicht aufgebaut?" (Ibd. S. 35 bis 72).

In der modernen Theorie der Mathematik werden die Rationalzahlen meist als geordnete Paare natürlicher Zahlen definiert.

Nominaldefinition „mit Hilfe der natürlichen Zahlen"; d. h. sie bedeutet eine Vorschrift betreffend den Gebrauch bestimmter Symbole, ohne daß hiedurch irgend ein logisch neues Moment eingeführt wird. Es ist also nicht so, wie auf Grund unkritischer Auffassung angenommen wird, daß es sowohl natürliche Zahlen wie auch gebrochene Zahlen als „zunächst" selbständige Sphären gebe, zwischen denen dann „nachträglich" Beziehungen gefunden würden, sondern eine gebrochene Zahl ist nichts anderes als ein unvollständiges Symbol, d. h. Teil eines Symbols für bestimmte Operationen mit natürlichen Zahlen.

Wie aber ist es zu erklären, daß dessen ungeachtet die Brüche meist als selbständige, neben die natürlichen Zahlen tretende „Rationalzahlen" angesehen werden und daß man dann sogar die natürlichen Zahlen nur als spezielle Rationalzahlen (nämlich als solche mit dem Nenner 1) ansieht?

Dies hat seinen Hauptgrund in einer fehlerhaften Interpretation der geometrischen Tatsachen der Messung, bei welcher man Brüche gleichsam anschaulich vor sich zu haben glaubt.

Unter „Messung" versteht man die Festlegung von Überdeckungsbeziehungen räumlicher Gebilde mit Hilfe von Zählprozessen.

Man mißt etwa eine Strecke f mit der „Einheitsstrecke" e dadurch, daß man feststellt, wie oft sich e auf f auftragen läßt. Wird mit Hilfe des n-ten e die Strecke f genau überdeckt (d. h. ohne daß das n-te e über sie hinausragen würde), so ordnet man der Strecke f die Maßzahl n zu.

Wie aber steht es dann, wenn eine solche genaue Überdeckung von f mit e nicht möglich ist? Dann gibt es, wegen der hier angenommenen Geltung des Archimedischen Axioms, eine kleinste Zahl n, so daß f mit Hilfe eines n-ten e total überdeckt werden kann, nur wird dieses e über f hinausragen. Man kann diesen Sachverhalt durch die Bezeichnung $(n-1)e < f < ne$ symbolisieren. Zur näheren Bestimmung des Reststückes r von f aber, das zwischen jenem Teil, dem wir die Zahl $n-1$ zugeordnet haben, und dem Endpunkt von f liegt, wendet man folgendes Verfahren an: Man nimmt als neue Einheit (neuen Maßstab) eine Strecke e_1 an, die 1.) kleiner ist als e[1]), 2.) nicht größer ist als r, 3.) so gewählt wird, daß sich e mit ihr genau

[1]) D. h. es kann e mit einem e_1 nicht total überdeckt werden.

überdecken läßt — etwa p mal — also derart, daß kein Stück des letztverwendeten e_1 über den Endpunkt von e hinausgeht. Diese drei Bedingungen sind, wie man leicht erkennt, stets zusammen realisierbar. Hat man ein solches e_1 gewählt, so kann es der Fall sein, daß sich auch das Reststück r mit e_1 genau überdecken läßt, und zwar möge hiezu e_1 q mal hintereinander aufgetragen werden, dann läßt sich gemäß 3.) auch die Strecke f genau mit e_1 überdecken, und zwar wird es das $p(n-1)+$ $+q$-te e_1 sein, dessen Endpunkt mit demjenigen von f zusammenfällt. Mit Hilfe dieser Erwägungen läßt sich die „Addition von „Strecken" und die „Multiplikation einer Strecke mit einer natürlichen Zahl" präzisieren. Damit sind auch die zu diesen inversen Operationen der Subtraktion und Division für den Bereich der rationalen Zahlen definiert. So ist die Gleichung $\frac{e}{f}=\frac{1}{n}$ nur eine andere Form für die Gleichung $ne=f$. Man nennt dann e den n-ten Teil von f.

Die scheinbare anschauliche Gegebenheit der Brüche bei der Messung aber beruht auf einer Fehlinterpretation der Voraussetzung, daß es im Raum kein Kleinstes und kein Größtes gibt und daher die Maßeinheit beliebig angenommen werden kann. Hat man nun zunächst eine Strecke e als Einheit gewählt, so wird man bei der Anwendung der Symbolik der Rationalzahlen auf die Messung einer Strecke e_1, die sich gerade fünfmal auf e auftragen läßt, dieser den Bruch $\frac{1}{5}$ zuzuordnen haben; aber anschaulich gegeben ist hiedurch allenfalls[1]) die Strecke, jedoch nicht der ihr zugeordnete Bruch. Da die Richtung im Raume die Ordnungsstruktur impliziert und die räumliche Überdeckung die Gleichheitsstruktur enthält, so läßt sich durch Kombination dieser beiden Momente messende Geometrie treiben; nicht aber darf man glauben, durch die geometrische Anschauung eine Erweiterung des Zahlbegriffes logisch rechtfertigen zu können.

Damit ist die prinzipielle Frage nach dem Charakter der geometrischen Anschauung aufgerollt, die wir, da sie innerhalb der Problematik des Unendlichen in der Mathematik eine wichtige Rolle spielt, kurz analysieren müssen.

[1]) Diesbezüglich sei auf die unmittelbar folgenden Ausführungen verwiesen.

Diese Analyse wird die eigenartige Zwitterstellung aufzuklären haben, welche die Anschauung in der Geometrie insoferne besitzt, als man sie einerseits als Erkenntnisquelle, als „letzte“, weiterer theoretischer Rechtfertigung weder fähige noch bedürftige Intuition, die das wissenschaftliche Denken einfach hinzunehmen und systematisch zu ordnen habe, betrachtet, anderseits aber als „vage“ Anschauung, der man nicht trauen dürfe, dem exakten Denken gegenüberstellt. Es sind hier zwei Momente getrennt zu betrachten, erstens die Beziehung zwischen Anschauung und Denken, zweitens die angebliche Anschaulichkeit der Geometrie.

Was den ersten Punkt betrifft, so ist zunächst zu betonen, daß die Gegenüberstellung von Anschauung und Denken als Gegensätzen, wie sie häufig erfolgt, unkorrekt ist. Vollziehbar ist eine Unterscheidung, welche den gemeinten Gegensatz trifft, nur innerhalb des Denkens zwischen anschaulichem und unanschaulichem Denken, wobei unter letzterem das formale Denken, welches sich auf die Struktur der Welt unter Absehung von deren sinnfälligem Inhalt bezieht, zu verstehen ist.

Die Vagheit der Anschauung aber wird meistens solchen gedanklichen Prozessen gegenüber ins Treffen geführt, durch welche gewisse einfache anschauliche Befunde voreilig erweitert werden, wobei es zur irrigen Ausschließung bestehender komplizierterer Gestaltungen kommen kann. Derartige unzulässige Verallgemeinerungen sind keineswegs auf die Raumanschauung beschränkt, sondern bilden eine Hauptfehlerquelle des Denkens im allgemeinen. Im speziellen Falle führt das kritische Zurückgehen auf die arithmetische Struktur der Anschauung und das gedankliche Operieren mit dieser Struktur nicht selten zur Beseitigung solcher Irrtümer, und zwar dadurch, daß durch Rückübersetzung von Strukturbeziehungen ins Anschauliche (Modellbildung) neue Gegenstände der Anschauung entdeckt werden, welche die ursprüngliche fehlerhafte Annahme der Unmöglichkeit solcher Gegenstände widerlegen. Ein Beispiel hiefür bildet die Peanosche Kurve[1]), welche alle Punkte einer Fläche enthält und dadurch die Annahme widerlegt, daß ein mehrdimensionales stetiges Raumgebilde „mehr“ Punkte enthalte als ein eindimensionales stetiges Raumgebilde.

[1]) G. Peano, „Sur une courbe qui remplit toute une aire plane“. Math. Ann., Bd. 36, S. 157 bis 160, 1890.

Gefährlicher noch als die Trennung von Anschauung und Denken ist die irrige Annahme der anschaulichen Realisierbarkeit bestimmter Zahlenaussagen, welche mit dem „Unendlichgroßen“ oder „Unendlichkleinen“ operieren, und für welche jene scheinbare Veranschaulichung als Legitimierung angesehen wird. Daß eine solche Veranschaulichung in Wahrheit nicht möglich ist, ist nicht auf einen „Mangel der Anschauung“, sondern auf die Unkorrektheit der arithmetischen Formulierungen zurückzuführen. Diese Formulierungen gehen jedoch — und damit kommen wir zum zweiten Punkt — bereits in die Prinzipien der Geometrie bzw. der verschiedenen Geometrien ein; denn diese sind, wie wir schon bemerkt haben und im folgenden weiter verdeutlichen wollen, nichts anderes als Analysen von Raumstrukturen mit Hilfe von Relationssystemen.

Wollen wir nun den Charakter der geometrischen Sätze völlig verdeutlichen, wollen wir erfassen, worin ihr Erkenntnisgehalt besteht, so müssen wir uns zunächst darüber klar sein, daß die Annahme, die geometrischen Begriffe seien Begriffe von anschaulichen Gegenständen, irrig ist. Sie stellen vielmehr bereits Abstraktionen einer sogleich näher zu bezeichnenden Art dar; sie sind „Idealisierungen“ anschaulicher Daten.

Anschaulich gegeben sind nur die ausgedehnten Körperdinge, aber nicht die Flächen, Kurven und Punkte der Geometrie, weshalb man, um ein im echten Sinne anschauliches Modell der Geometrie zu finden, immer auf diese dreidimensionale Gegebenheit zurückgehen muß. Dem Satz etwa, daß zwei sich schneidende Flächen eine Kurve als gemeinsames Element haben, entspricht der Sachverhalt, daß die schrankenlose Verkleinerung zweier sich durchdringender Körper nach einer Dimension hin, eine schrankenlose Verkleinerung des gemeinsamen Elementes nach zwei Dimensionen hin bedingt. Ganz allgemein läßt sich ein zweidimensionales Gebilde realiter nicht anders begreifen, denn als Körper, der nach einer Dimension hin einer beliebig weitgehenden Verkleinerung unterworfen gedacht wird. Die eindimensionalen Gebilde (Kurven) aber sind in zwei Dimensionen beliebig klein und die „nulldimensionalen“ Punkte in allen drei Dimensionen[1]).

[1]) Die mathematisch exakte Bestimmbarkeit des Begriffes der „Dimension“ schien Ende des 19. Jahrhunderts durch den Cantorschen Satz von der ein-eindeutigen Abbildbarkeit der Punkte eines n-dimensionalen Kontinuums

Beliebige Kleinheit bedeutet aber nicht Ausschaltung, sondern nur den Ausschluß der Annahme einer festen unteren Schranke der Ausdehnung[1]).

Demgemäß läßt sich der These von der Zusammensetzbarkeit der Kurven aus Punkten, der Flächen aus Kurven und der Körper aus Flächen nur dann ein anschaulicher Sinn abgewinnen, wenn der Punkt als ein beliebig kleines Kurvenstück aufgefaßt wird, denn die Auffassung, daß unendlich viele niedererdimensionale Gebilde zu einem höherdimensionalen Gebilde anschaulich zusammengefaßt werden, ist ein Ungedanke.

Diese Feststellungen über das „Unendlichkleine" lassen sich nun analog auf das „Unendlichgroße" in der Geometrie übertragen. Die „unendlichlangen" Kurven und die „nach zwei Dimensionen unendlichen" Flächen sind nur abkürzende Bezeichnungen dafür, daß feste obere Schranken der Ausdehnung ausgeschlossen werden sollen. Ist man sich hierüber klar, dann mag man die bekannte, bequeme und unter den Mathematikern eingebürgerte Ausdrucksweise immerhin verwenden, aber es wäre zu begrüßen, wenn ihr Sinn auch schon in den Lehrbüchern der Geometrie klargestellt würde.

In den obigen Ausführungen über die geometrischen Gebilde ist bereits die Aufweisung eines wichtigen unanschaulichen Momentes innerhalb der geometrischen Erkenntnis eingeschlossen. Das Fehlen der unteren bzw. der oberen Ausdehnungsschranke

---

auf diejenigen eines eindimensionalen Kontinuums, sowie durch die eben erwähnte Peanosche Kurvenkonstruktion gefährdet. Aber 1911 erbrachte Brouwer (Beweis der Invarianz der Dimensionenzahl, Math. Ann., Bd. 70, S. 161 bis 165) den Beweis, daß ein-eindeutige, stetige Abbildungen zwischen cartesischen Räumen verschiedener Dimension unmöglich sind. Die präzise Definition des Dimensionsbegriffes erfolgte unabhängig durch K. Menger (vgl. „Zur Dimensions- und Kurventheorie, Monatshefte f. Math. u. Phys., Bd. 36, S. 411 ff.) und P. Urysohn, „Les multiplicités cantoriennes", Comptes Rendus 175, S. 440 ff., 1922. Eine zusammenfassende Darstellung der Dimensionstheorie Mengers enthält seine „Dimensionstheorie", Berlin 1928.

[1]) Unsere Überlegungen sind demnach grundverschieden von denjenigen, die Hjelmslev in seiner „Natürlichen Geometrie" (Approximationsgeometrie) darstellt, da er gerade die empirischen Schranken der sinnlichen Anschauung berücksichtigt. Vgl. hiezu J. Hjelmslev, „Die natürliche Geometrie", Abh. a. d. Math. Sem. d. Hamb. Univ., Bd. 2, S. 1 bis 36, 1923. Verwandtschaft besteht dagegen mit der Auffassung von M. Pasch. Vgl. hiezu unter anderem seine „Vorlesungen über neuere Geometrie", Leipzig 1882, sowie den Aufsatz „Grundfragen der Geometrie", Journ. f. Math., Bd. 147, 1917, S. 184 bis 190.

ist nämlich einsichtigermaßen anschaulich nicht erfaßbar. Es ist besonders wichtig, sich hierüber klar zu sein, weil alle Versuche, die transfiniten Aussagen der Arithmetik und der Mengenlehre anschaulich zu verifizieren, wesentlich mit dem Unendlichgroßen oder Unendlichkleinen in der Geometrie, also mit der Beliebigkeit der oberen oder unteren Ausdehnungsschranke operieren. Vielmehr steht es, wie wir bereits erkannt haben, so, daß schon in die Grundbegriffe der Geometrie unanschauliche Momente eingehen, und zwar eben jene Momente, an die in der Arithmetik (Analysis) die Fehlinterpretationen bezüglich des Transfiniten anknüpfen. Da nun jene Fehlinterpretation („unendlichklein" für „beliebig klein" und „unendlichgroß" für „beliebig groß") schon bei den geometrischen Grundbegriffen einsetzt, so entsteht die Illusion, als sei das Transfinite in den Raumgebilden — den Gegenständen der Geometrie — anschaulich gegeben. Dieser Faszination der scheinbaren anschaulichen Gegebenheit des Transfiniten sind selbst Mathematiker und Philosophen ersten Ranges erlegen[1]), und es ist kaum anzunehmen, daß ohne dieses Vorurteil die Lehre Georg Cantors vom aktual Unendlichen verschiedener Mächtigkeiten, mit der wir uns im nächsten Abschnitte befassen werden, sich hätte durchsetzen können.

Fragen wir nun nach dem erkenntnistheoretischen Standort der verschiedenen Geometrien im System der Wissenschaften, der durch ihre Beziehungen einerseits zur Arithmetik und anderseits zur Physik bestimmt wird, so haben wir folgende drei Schichten, welche bei philosophischen Erörterungen über das Wesen der Geometrie meist nicht scharf genug auseinander gehalten werden, wohl zu unterscheiden, wobei die korrekt

---

[1]) Gauß dagegen hat die Unverifizierbarkeit von arithmetischen Behauptungen durch geometrische Anschauung deutlich eingesehen. Dies möge folgende Belegstelle zeigen: „Nach meiner innigsten Überzeugung hat die Raumlehre zu unserem Wissen a priori eine ganz andere Stellung, wie die reine Größenlehre; es geht unserer Kenntnis von jener durchaus diejenige vollständige Überzeugung von ihrer Notwendigkeit (also auch von ihrer absoluten Wahrheit) ab, die der letztern eigen ist; wir müssen in Demut zugeben, daß, wenn die Zahl bloß unseres Geistes Produkt ist, der Raum auch außer unserm Geiste eine Realität hat, der wir a priori ihre Gesetze nicht vollständig vorschreiben können." (Briefwechsel zwischen Gauß und Bessel, Leipzig 1880, S. 497 ff., zitiert nach Kronecker „Über den Zahlbegriff", a. a. O., S. 253.)

durchgeführte Untersuchung dann bereits die Beantwortung jener Frage darstellt[1]).

1. Der formale Kern, der in den modernen Axiomatiken der Geometrie den ausschließlichen Gegenstand der Betrachtung bildet[2]). Er ist ein formales System logisch-arithmetischer Relationen und daher strukturgleich mit bestimmten Teilsphären des Bereiches der Arithmetik, welch letztere das Universalschema formaler Beziehungen ist. Eine wie weitgehende Strukturgemeinschaft mit dem Anschauungsraum gefordert wird, um einem Relationssystem den Namen „Geometrie" zu geben, ist eine Frage der Konvention; heute unterscheidet man neben den nichteuklidischen Geometrien auch nichtarchimedische und nichtcartesische Geometrien und beschränkt sich keineswegs auf Systeme von bloß drei Parametern.

2. Das anschauliche (richtiger quasi-anschauliche) räumliche Modell. Dieses stellt eine „Idealisierung" von Wahrnehmungsdaten in dem oben dargelegten Sinne dar. Als solche ist sie niemals durch empirische Befunde zu bestätigen oder zu widerlegen. Falls verschiedene Modelle den gleichen formalen Kern haben, heißen sie isomorph.

3. Die empirische Geltung. Sie hängt ab von der Tauglichkeit eines Relationssystems zur Formulierung der Naturzusammenhänge und ist demgemäß weitgehend bestimmt durch die empirischen Tatsachen. Bekanntlich bedient sich die klassische Mechanik der „Sprache" der euklidischen Geometrie, die allgemeine Relativitätstheorie der „Sprache" der Riemannschen Geometrie.

Kehren wir jetzt wieder zu der Symbolik der gebrochenen

[1]) Vgl. hiezu: A. Einstein, „Geometrie und Erfahrung", Berlin 1921; ferner: R. Carnap, „Der Raum". Ein Beitrag zur Wissenschaftslehre, Ergänzungshefte d. Kant-Studien Nr. 56. Berlin 1922.

[2]) So definiert Hilbert: „Wir denken drei verschiedene Systeme von Dingen: die Dinge des ersten Systems nennen wir Punkte und bezeichnen sie mit A, B, C, ...; die Dinge des zweiten Systems nennen wir Gerade und bezeichnen sie mit a, b, c, ...; die Dinge des dritten Systems nennen wir Ebenen und bezeichnen sie mit α, β, γ, ...;"

„Wir denken die Punkte, Geraden, Ebenen, in gewissen gegenseitigen Beziehungen und bezeichnen diese Beziehungen durch Worte, wie ‚liegen', ‚zwischen', ‚parallel', ‚kongruent', ‚stetig'; die genaue und vollständige Beschreibung dieser Beziehungen erfolgt durch die Axiome der Geometrie." „Grundlagen der Geometrie", 3. Aufl. Wissenschaft und Hypothese, Bd. 7, Leipzig und Berlin 1923.

Zahlen zurück. Der für die Mathematik weitaus wichtigste Begriff, welcher mit ihr verknüpft ist, ist derjenige eines Grenzwertes einer Folge rationaler Zahlen. Gerade hier ist aber auch der Punkt, wo den Mathematikern, die mit jener Symbolik operieren, nicht selten die Klarheit darüber zu entschwinden droht, daß es sich hiebei um die Feststellung von Beziehungen zwischen natürlichen Zahlen handelt.

Man nennt $\frac{r}{s}$ den Grenzwert der Folge $\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2} \ldots \frac{p_n}{q_n} \ldots$, wenn zu einem beliebig kleinen positiven Bruch l eine Zahl n so gefunden werden kann, daß für das n-te Glied der Folge und für jedes beliebige spätere Glied die Ungleichung gilt: $\left|\frac{r}{s} - \frac{p_n}{q_n}\right|$[1] $< l$. Wenn wir jetzt den Sinn dieses Begriffes unter Ausschaltung der Symbolik der Brüche im Definiens bestimmen, so ergibt sich folgende Definition:

Gegeben seien zwei Folgen natürlicher Zahlen:

$$p_1, p_2, \ldots\ldots p_n, \ldots\ldots \text{ und } q_1, q_2, \ldots\ldots q_n, \ldots\ldots$$

Dann heißt $\frac{r}{s}$ der Grenzwert von $\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \ldots\ldots \frac{p_n}{q_n}, \ldots\ldots$ wenn zu jeder natürlichen Zahl k eine natürliche Zahl z so gefunden werden kann, daß für jede natürliche Zahl $n \geqq z$ die Beziehung $q_n r > k \left| q_n r - p_n s \right|$ gilt.

In der Analysis wird der Begriff des Grenzwertes im Zusammenhang mit demjenigen der beschränkten Folge behandelt. Da auch dieser Begriff für die folgenden Untersuchungen über die Irrationalzahlen wichtig ist, wollen wir seine Analyse gleichfalls durchführen.

Eine beschränkte Folge ist — im Sinne der Analysis — eine Folge, deren sämtliche Glieder, die als >0 vorausgesetzt werden, unterhalb einer bestimmten Zahl liegen. Man erkennt nun sogleich, daß der nach Auflösung der Symbolik der Rationalzahlen sich ergebende Sinn dieser Definition nicht der ist, daß alle Elemente einer Folge natürlicher Zahlen unterhalb einer bestimmten natürlichen Zahl liegen; sie besagt vielmehr, daß für jedes Element der Folge eine mit dem Ordnungsindex des Elementes innerhalb der Folge variierende obere Schranke festgelegt erscheint. Nach dieser Vorbemerkung wird die nach-

[1] Hiebei bedeutet $\left|\frac{r}{s} - \frac{p_n}{q_n}\right|$ den absoluten Wert der Differenz $\frac{r}{s} - \frac{p_n}{q_n}$.

folgende „Übersetzung“ des Begriffes der beschränkten Folge ohneweiters als zutreffend einleuchten.

Gegeben seien zwei Folgen natürlicher Zahlen:

$$p_1, p_2, \ldots\ldots, p_n, \ldots\ldots \text{ und } q_1, q_2, \ldots\ldots q_n, \ldots\ldots$$

dann heißt $\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \ldots\ldots \frac{p_n}{q_n}, \ldots\ldots$ eine beschränkte Folge, wenn für eine feste natürliche Zahl i und beliebige n die Beziehung $iq_n > p_n$ gilt.

Es läßt sich leicht zeigen, daß nur beschränkte Folgen einen Grenzwert haben. In diesem Punkte besteht also keinerlei Differenz gegenüber der in der Mathematik eingebürgerten Terminologie.

Die Analysis behauptet aber, daß die Beschränktheit einer monotonen[1]) Folge nicht nur notwendige, sondern auch hinreichende Bedingung dafür sei, daß sie einen Grenzwert besitze. Ob diese Annahme gerechtfertigt ist, werden wir bald zu untersuchen haben.

Nach dem im vorstehenden angegebenen Muster lassen sich die übrigen Sätze der Analysis über Grenzwerte und über solche Beziehungen, in die der Begriff des Grenzwertes eingeht, — wie etwa die „Stetigkeit“ — „übersetzen“.

So lautet beispielsweise der Satz der Analysis: „Keine Folge hat mehr als einen Grenzwert“ in der „Übersetzung“: „Zu keiner Folge gibt es mehr als ein Paar teilerfremder natürlicher Zahlen, das der eben für den Grenzwert angegebenen Bedingung genügt.“

Dieses Beispiel zeigt bereits deutlich, wie viel einfacher die gebräuchliche Formulierung mit Hilfe der Symbolik der Rationalzahlen ist als diejenige ohne Verwendung der Symbolik der Rationalzahlen. Aber es sei nochmals nachdrücklich darauf hingewiesen, daß es nicht etwa „zunächst“ einen Grenzwert von Folgen rationaler Zahlen gibt, der dann durch Beziehungen zwischen natürlichen Zahlen ersetzt werden kann, sondern die wirklich durchgeführten Operationen beim Rechnen mit rationalen Zahlen sind genau diejenigen Operationen mit natürlichen Zahlen, die wir oben beschrieben haben. Das Rechnen mit Brüchen ist ja, wie wir festgestellt haben, nichts anderes als das Rechnen mit den Zählern und den Nennern der Brüche, und

[1]) Eine Zahlenfolge heißt monoton, und zwar aufsteigend oder absteigend, wenn kein Glied größer bzw. kein Glied kleiner ist als das folgende.

nur durch die oben kritisierte Hypostasierung neu eingeführter Symbole zu neuen mathematischen Gegenständen entsteht die Fehlmeinung, als gebe es neben den natürlichen Zahlen Brüche als von jenen unabhängige Objekte der mathematischen Forschung. Selbstverständlich soll durch diese Analyse nichts gegen die in der Mathematik übliche Symbolik, welche technisch fast unentbehrlich ist, gesagt werden, sondern nur gegen ihre Fehlinterpretation, die zu Scheinproblemen bedenklichster Art führt. Diese zeigen sich freilich in ihrer ganzen Gefährlichkeit erst auf der nächsten Stufe der „Erweiterung des Zahlbegriffes“, bei der Einführung der Irrationalzahlen, der wir uns nunmehr zuwenden. Die Wurzeln der hier auftauchenden Schwierigkeiten aber liegen zum größten Teil schon in den eben analysierten Unklarheiten über den Sinn der Symbolik der Rationalzahlen.

Da wir diesen Sinn prinzipiell erfaßt haben, so können wir im folgenden, um nicht die Schwierigkeiten der Darstellung zu kumulieren, ohne Gefahr mit jener Symbolik operieren. Wir werden uns aber immer darüber klar sein, daß sämtliche sinnvolle Aussagen über Rationalzahlen Aussagen über natürliche Zahlen sind. Nur an den wichtigsten Stellen werden wir die zugrunde liegenden Beziehungen zwischen den natürlichen Zahlen explizit aufweisen. Es sei nur noch kurz darauf hingewiesen, daß wir im vorstehenden die Begriffe „Brüche“ und „Rationalzahlen“ — entgegen dem Sprachgebrauch — synonym verwendet haben, da sich die unter dem Terminus „Rationalzahl“ übliche Zusammenfassung von positiven Zahlen, negativen Zahlen und Brüchen als logische Monstrosität darstellt[1]).

Wir beginnen mit der Betrachtung der beiden zum Potenzieren inversen Operationen, d. i. des Radizierens und des Logarithmierens.

Das Verfahren der Potenzierung selbst als dasjenige der Multiplikation zweier oder mehrerer gleicher Faktoren erfordert keine nähere Betrachtung. Man erkennt auch leicht, daß diesem Verfahren zwei verschiedene „inverse“ Prozesse entsprechen, und zwar erstens die Aufsuchung der Basis oder Wurzel, d. i. des sich wiederholenden Faktors, wenn sein Exponent (d. h. die Anzahl seines Auftretens als Faktor) und die Potenz gegeben sind, und zweitens die Aufsuchung des Exponenten, wenn Potenz und Wurzel

[1]) Vgl. das eingangs dieses Abschnittes zitierte Diktum Russells.

gegeben sind. Das erste Verfahren bezeichnet man als Wurzelausziehen oder Radizieren, das zweite als Logarithmieren. Die Operation des Potenzierens und demgemäß auch die zugehörigen inversen Operationen sind aber durch unsere bisherigen Festsetzungen bloß definiert für positive ganzzahlige Exponenten, während die Basis eine beliebige Rationalzahl sein kann. Die Einführung der negativen und der gebrochenen Exponenten fügt hier nichts Neues hinzu, denn es handelt sich hiebei nur um eine abgekürzte Symbolik, der keinerlei spezifische Verfahren entsprechen. Es wird nämlich einfach für das Operationszeichen $\left(\frac{1}{a}\right)^n$ als gleichbedeutendes Zeichen a^{-n} und für das Operationszeichen $\sqrt[n]{a^m}$ als gleichbedeutendes Zeichen $a^{\frac{m}{n}}$ definitorisch festgelegt. Demgemäß besagt also die Gleichung $4^{-2} = \frac{1}{16}$ nichts anderes als $(\frac{1}{4})^2 = \frac{1}{16}$ und die Gleichung $4^{\frac{3}{2}} = 8$ nichts anderes als $\sqrt[2]{4^3} = 8$. Wie aber steht es dort, wo den angesetzten Gleichungen $x^b = p$ bzw. $b^x = p$ bewiesenermaßen kein x genügt?

Hier hat man zunächst vorbehaltlos diesen Sachverhalt anzuerkennen. Radizierung und Logarithmierung sind definiert nur als inverse Operationen einer „wirklichen“, d. h. aus dem Zählprozeß ableitbaren Potenzierung; ist eine solche Potenzierung nicht angebbar, so liefe die Aufgabe der Radizierung und der Logarithmierung darauf hinaus, inverse Operationen zu einer nicht bestehenden Operation anzugeben, was offenkundig sinnlos ist. Der Mathematiker kann keineswegs durch ein Oktroi Sinnloses sinnvoll machen und neben der Realität eine „freie Schöpfung des Geistes“ aufbauen, sondern er kann höchstens — unter gewissen Kautelen — dieselbe Symbolik für verschiedene Operationen benützen. So bedeutet, wie wir sogleich noch deutlicher erkennen werden, das Wurzelzeichen in $\sqrt{2}$ etwas durchaus anderes als in $\sqrt{4}$, aber diese Symbolik ist heuristisch im Hinblick auf bestimmte Aufgaben von großer Bequemlichkeit.

In unserem Falle basiert nun die Erweiterung der Symbolik auf folgenden Überlegungen: Daß die Zahl 2 nicht Quadrat einer Rationalzahl ist, läßt sich in bekannter Art leicht beweisen. Gesetzt nämlich 2 wäre das Quadrat von $\frac{m}{n}$ (wobei wir annehmen dürfen, daß die natürlichen Zahlen m und n nicht beide gerade sind, da man ja andernfalls so lange durch 2 kürzen könnte, bis eine der beiden Zahlen ungerade wird); es sei also $m^2 = 2n^2$; dann müßte m^2 als Doppeltes von n^2 gerade sein, und demzufolge müßte auch m gerade sein, und m^2 durch 4 teilbar sein. Da aber annahmegemäß m und n nicht beide gerade sein dürfen, müßte n ungerade sein und demzufolge könnte $2n^2 = m^2$ nicht durch 4 teilbar sein, was einen Widerspruch ergibt. Es läßt sich jedoch ein Verfahren angeben — welches man als Quadratwurzelziehung bezeichnet —, wodurch eine Folge von Rationalzahlen gefunden wird, von denen jede im Verfahren folgende größer ist als die vorhergehende (und demgemäß als sämtliche vorhergehenden), wobei die Quadrate dieser Zahlen zwar stets kleiner bleiben als 2, aber beliebig nahe an 2 heranrücken. Gibt man also eine beliebig kleine Rationalzahl μ an, so läßt sich stets eine durch jenes Verfahren zu gewinnende Rationalzahl n angeben, so daß $2 - n^2 < \mu$ wird, d. h. es ist eine unbeschränkte Approximation der Quadrate der in jenem Verfahren gewonnenen Rationalzahlen an die Zahl 2 möglich.

Man hat die zwei Forderungen, die an das Verfahren der Radizierung gestellt werden, nämlich diejenige, daß, im Falle unseres Beispieles, die Quadrate gesuchter Rationalzahlen um weniger als beliebig kleine vorgegebene Rationalzahlen kleiner sein sollen als 2 einerseits und diejenige, daß sie nicht größer werden dürfen als 2, andrerseits wohl auseinander zu halten. Der zweiten Forderung geschieht Genüge, wenn für eine beliebig kleine Rationalzahl μ die Ungleichung $2 + \mu > (z_n)^2$ gilt, wobei z_n eine beliebige im Radizierungsverfahren gewonnene Rationalzahl ist. Um das Zutreffen dieser Forderung zu beweisen, gibt man eine zweite, absteigende Folge rationaler Zahlen an, deren Glieder sich der 2 „von oben her" unbeschränkt nähern und legt ein Gesetz umkehrbar eindeutiger paarweiser Zuordnung zwischen den Elementen der beiden Folgen derart fest, daß jedes Element der zweiten Folge größer ist als das mit ihm gepaarte Element der ersten Folge. Aber es ist eine unzulässige Interpretation dieses Sachverhaltes, zu behaupten, es gäbe „zwischen" jenen beiden Folgen noch etwas, was von ihnen in beliebig enge Grenzen eingeschlossen werde, und dieses etwas könne man als Irrationalzahl definieren. Der Umstand, daß in der ersten der beiden angegebenen Folgen keine größte Rationalzahl und in der zweiten Folge keine kleinste Rationalzahl aufgewiesen werden kann, darf nicht in die Behauptung umgedeutet werden, daß es eine Grenze (die Irrationalzahl) gebe, der sich jene beide Folgen unbegrenzt nähern, ohne sie doch je erreichen zu können. Ebenso unrichtig ist es, die Folge von Rationalzahlen[1]), deren Partialsummenquadrate bzw. Partialdifferenzenquadrate sich der Zahl 2 unbegrenzt nähern (gegen 2 konvergieren) als selbständige Einheit aufzufassen und als Irrationalzahl zu definieren; denn die Bildung unendlichgliedriger Totalitäten ist unvollziehbar.

Es ist demgemäß auch eine unkorrekte Ausdrucksweise, wenn man behauptet, daß die im Verfahren der Radizierung errechneten Rationalzahlen sich unbegrenzt $\sqrt{2}$ nähern[2]), denn eine solche Zahl gibt es — zumindest auf dieser Stufe der Untersuchung — gar nicht, man dürfte korrekterweise höchstens sagen, daß sich die Quadrate jener Rationalzahlen der Zahl 2 unbegrenzt nähern.

Will man nun feststellen, was der nach Ausschaltung der Symbolik der Rationalzahlen sich ergebende Sinn letzterer Behauptung ist, so genügt es wiederum, sich klar zu machen, welche Operationen tatsächlich beim Radizieren ausgeführt werden. Man erkennt dann, daß das Verfahren der Berechnung von $\sqrt{2}$ in der sukzessiven Berechnung der größten natürlichen Zahlen besteht, deren Quadrate kleiner sind als 2.10^0, 2.10^2, $2,10^4$, $2,10^6$ usf.[3]). Man erhält so die Zahlen 1, 14, 141, 1414, usf. Ganz allgemein erkennt man, daß ein „unendlicher Dezimalbruch" nichts anderes bedeutet, als eine Folge natürlicher Zahlen, wobei, wie wir wiederholt festgestellt haben, unter „Folge" nicht eine

[1]) Diese Rationalzahlen sind in unserem Falle:

1. 0·4, 0·01, 0·004, 0·0002 bzw.

2, 0·5, 0·08, 0·005, 0·0007.

[2]) Die Begriffe „Verfahren" und „nähern" sind durchaus außerzeitlich zu verstehen. Das „Verfahren" besteht in der eineindeutigen Zuordnung zwischen Rationalzahlen und den natürlichen Zahlen (Bestimmung der ersten n-Stellen). Daß das faktische Errechnen im Fortschreiten von einer Stelle zur nächsten liegt, berührt nicht den Sinn des Prinzips, wodurch die Zuordnung für beliebige n „gleichzeitig" festgelegt wird.

[3]) Daß hier die Potenzen der Zahl 10 auftreten, ist arithmetisch unwesentlich, weil nur durch den „Zufall" der Einführung des dekadischen Systems bedingt. Aber auch ganz abgesehen hievon ist das Verfahren des Radizierens, wie überhaupt ein großer Teil der Rechenregeln, durch den „arithmetisch unwesentlichen" Umstand der Darstellung der Zahlen in Potenzreihen bestimmt. Vgl. hiezu die Ausführungen des 2. Abschnittes S. 55.

unendliche Totalität zu verstehen ist, sondern der Bereich einer bestimmten Beziehung (Gesetzlichkeit). Nennen wir in unserem Beispiel die Zahlen jener Folge $Z_0, Z_1, Z_2, \ldots. Z_n, \ldots.$ so besteht die „beliebige Annäherung" der Quadrate dieser Zahlen an 2 darin, daß zu jeder Zahl k eine Zahl m so gefunden werden kann, daß für jedes $n \geq m$, $\frac{2 . 10^{2n}}{2 . 10^{2n} - Z_n^2} > k$ wird.

Nach diesem Beispiel können wir zur Formulierung des allgemeinen Sachverhaltes schreiten, der der Bildung des Begriffes der Irrationalzahl zugrunde liegt.

Zu diesem Behufe wollen wir vom Grenzwert einer beschränkten Folge ausgehen und ihn diesmal mit Benützung der Symbolik der Rationalzahlen — im Sinne der Analysis — definieren.

Gegeben sei — sc. durch ihr Bildungsgesetz — eine beschränkte Folge F $(f_1, f_2, \ldots. f_n, \ldots.)$ von Rationalzahlen, gegeben sei ferner eine Rationalzahl G, dann heiße G der Grenzwert von F, wenn zu jeder beliebigen Rationalzahl k eine natürliche Zahl h so gefunden werden kann, daß für jedes $i \geq h$ $G - k < f_i < G + k$ gilt. Man sagt dann, daß F gegen G konvergiert.

Handelt es sich um monotone Folgen, so ist im Sinne dieser Definition der Grenzwert entweder — bei aufsteigenden Folgen — die kleinste Rationalzahl, die größer ist als jede Zahl der Folge, oder — bei absteigenden Folgen — die größte Rationalzahl, die kleiner ist als jede Zahl der Folge.

Es zeigt sich aber bereits an unserem Beispiel, der Quadratwurzel von 2, daß nicht jede beschränkte Folge von Rationalzahlen einen Grenzwert besitzt. Denn wenn es zu einer Folge von Rationalzahlen, deren Quadrate beliebig wenig kleiner sind als 2, eine kleinste Zahl gäbe, die größer wäre als jedes Element der Folge, so müßte das Quadrat dieser Rationalzahl genau 2 sein. Eine solche Rationalzahl aber gibt es bewiesenermaßen nicht. Immerhin rücken auch hier, ebenso wie im Falle konvergenter Folgen, die Werte immer enger zusammen. Diesen Sachverhalt formuliert exakt der folgende Satz:

In jeder beschränkten, monotonen, aufsteigenden (absteigenden) Folge kann für eine beliebige Rationalzahl k ein Intervall, das kleiner ist als k, aufgewiesen werden, dessen obere (untere) Grenze eine Zahl bildet, die größer (kleiner) ist als jede Zahl der Folge, und welches eine Zahl der Folge enthält.

Wir beweisen diesen Satz für die aufsteigende Folge; der Beweis für die absteigende Folge ist konform zu führen.

Sei $f_1, f_2, \ldots\ldots f_n, \ldots\ldots$ die vorliegende Folge und das gesuchte Intervall kleiner als k. Dann wähle man zwei Rationalzahlen R_1 und R_2, so daß R_2 größer ist als jedes f_i, R_1 dagegen nicht größer ist als jedes f_i. Dies ist definitionsgemäß (beschränkte Folge) stets möglich. Ist nun $R_2 - R_1 < k$, so ist $(R_1 R_2)$ ein gesuchtes Intervall. Anderenfalls suche man eine ganze Zahl n so, daß $\frac{R_2 - R_1}{n} < k$ wird und teile das Intervall $(R_1 R_2)$ in n gleiche Teilintervalle; dann entfällt entweder auf das letzte (höchste) Teilintervall ein Glied der Folge — in welchem Falle es selbst ein Intervall der gesuchten Art ist — oder unter den n Teilintervallen ist ein niedrigstes Teilintervall, dessen untere Grenze größer ist als jedes Glied der Folge. Dieses Teilintervall kann nicht das niedrigste der Teilintervalle überhaupt sein, da zwischen R_1 und R_2 definitionsgemäß ein Glied der Folge liegen muß; daher gibt es ein nächst niedrigeres Teilintervall und dieses ist ein Intervall der gesuchten Art.

Nun wollen wir an diesem für die Problematik der Irrationalzahlen besonders wichtigen Punkte die Ausschaltung der Symbolik der Rationalzahlen durchführen, um den Unterschied zwischen rationalem und irrationalem „Grenzwert" vollkommen deutlich hervortreten zu lassen.

Gegeben seien zwei Folgen natürlicher Zahlen:

$$p_1, \; p_2, \ldots\ldots \; p_m, \ldots\ldots,$$
$$q_1, \; q_2, \ldots\ldots \; q_m, \; \ldots\ldots$$

und eine natürliche Zahl l, derart, daß für jede beliebige natürliche Zahl m die Beziehung $l\, q_m > p_m$ gilt.

Dann können zu einer beliebig großen natürlichen Zahl k eine Zahl z und vier weitere Zahlen r, s, t, u so angegeben werden, daß für jedes $n > z$ die folgenden vier Bedingungen erfüllt sind:

1. $ur > st$ ($\frac{r}{s}$ ist die obere, $\frac{t}{u}$ die untere Schranke des Intervalls).

$$\left.\begin{array}{l} 2.\; p_n u > q_n t \\ 3.\; q_n r > p_n s \end{array}\right\} \left(\frac{p_n}{q_n} \text{ liegt innerhalb des Intervalls.}\right)$$

4. $ur > k\,(ur - st)$. (Das Intervall ist beliebig klein.)

Daß diese Bedingungen andere sind, als diejenigen, die dem rationalen Grenzwert einer Folge von Rationalzahlen entsprechen, zeigt der Vergleich ohneweiters.

Die herrschende Lehre in der Analysis aber hat sich über die Erkenntnistatsache, daß es beschränkte monotone Folgen rationaler Zahlen gibt, welche keinen Grenzwert besitzen, hinweggesetzt und für jede solche Folge einen Grenzwert postuliert[1]).

Hiezu bedient man sich vorzugsweise des Dedekindschen Schnittes im Bereiche der rationalen Zahlen[2]).

Ein solcher „Schnitt" wird folgendermaßen definiert: Wird eine Menge M von Zahlen derart in zwei Teilmengen M_1 und M_2 eingeteilt, daß erstens jede Zahl einer, aber auch nur einer der Mengen M_1 und M_2 angehört, zweitens jede der beiden Mengen M_1 und M_2 mindestens eine Zahl enthält und drittens jede Zahl in M_1 kleiner ist als jede Zahl in M_2, so nennt man diese Einteilung einen Schnitt in der Menge M. Besitzt die Menge M_1 eine größte Zahl P_1 oder die Menge M_2 eine kleinste Zahl P_2, so sagt man von der Zahl P_1 bzw. von der Zahl P_2, sie „erzeuge" den Schnitt. Nun bestehen vier verschiedene Möglichkeiten:

1. M_1 besitzt eine größte und M_2 eine kleinste Zahl.
2. M_1 besitzt eine größte, aber M_2 keine kleinste Zahl.
3. M_1 besitzt keine größte, aber M_2 eine kleinste Zahl.
4. Es besitzt weder M_1 eine größte noch M_2 eine kleinste Zahl.

Im ersten Falle nennt man den „Schnitt" einen „Sprung"

---

[1]) Russell bemerkt hiezu treffend: („Einführung in die mathematische Philosophie", S. 72f.). „Durch die Gewohnheit, sich durch räumliche Vorstellung beeinflussen zu lassen, ist man zu der Vermutung gekommen, daß Reihen Limites besitzen müssen in den Fällen, wo es merkwürdig aussehen würde, wenn keine existierten. Da man einsah, daß die Brüche, deren Quadrat kleiner ist als 2, keinen rationalen Limes besitzen, so erlaubte man sich einen irrationalen Limes zu ‚postulieren', der die Dedekindsche Lücke ausfüllen sollte. Dedekind stellte in der oben erwähnten Arbeit das Axiom auf, daß die Lücke immer ausgefüllt werden, d. h. daß jede Klasse eine Grenze haben müsse. Aus diesem Grunde nennt man die Reihen, bei denen sein Axiom gilt, ‚Dedekindisch'. Es gibt aber unendlich viele Reihen, für die es nicht gilt." „Die Methode, das zu ‚postulieren', was man braucht, hat viele Vorteile. Es sind dieselben wie die Vorteile des Diebstahls gegenüber der ehrlichen Arbeit. Wir wollen dies anderen überlassen und mit unserer ehrlichen Arbeit fortfahren."

[2]) R. Dedekind, „Stetigkeit und irrationale Zahlen" (1872), 5. Aufl., Braunschweig 1927.

in M, im vierten Falle eine „Lücke“ in M, im zweiten und dritten Falle spricht man von einem „stetigen Schnitt“.

Dedekind definiert nun die Irrationalzahlen dadurch, daß sie einen Schnitt erzeugen, der eine Lücke ist.

Ein solcher Schnitt ohne Ansatzpunkt erscheint nun zunächst als Nonsens. Immerhin könnte man versucht sein, die Dedekindsche Definition im Prinzip mit dem Hinweis zu retten, daß Dedekind durch Funktionen definierte Schnitte im Auge habe. Aber auch dann ist ein irrationaler Schnitt unannehmbar. Wir wollen dies an dem Beispiel monotoner Funktionen erläutern.

Gegeben sei eine Rationalzahl R und eine monotone Funktion F. Dann soll zu M_1 jede Zahl z_i gehören, für die $R > F(z_i)$ ist und zu M_2 jede Zahl Z_k gehören, für die $R \leq F(Z_k)$ ist. Gemäß diesen Voraussetzungen gibt es in M_2 dann und nur dann ein kleinstes Element, wenn es unter den Z_k eine Zahl Z_{k1} so gibt, daß $F(Z_{k1}) = R$ wird. Ist dies nicht der Fall, so gibt es keine rationale Zahl, die den Schnitt erzeugt; er wird vielmehr, wenn man hier von „Erzeugung“ überhaupt sprechen will, durch zwei Ungleichungen erzeugt. In diesem Falle ist aber auch der Ausdruck „Lücke“ unpassend, denn er scheint auf die Möglichkeit hinzudeuten, daß eine Zahl ausgelassen wurde und eingefügt werden kann, was nicht zutrifft. Es ist also nicht möglich, durch das Verfahren des Schnittes im Bereich rationaler Zahlen Irrationalzahlen (als neue Gebilde) zu gewinnen.

Erkennt man freilich die Dedekindsche Definition an, dann ist es ein Leichtes, den nach Weierstraß benannten Satz, daß jede beschränkte Folge einen Häufungswert (jede beschränkte monotone Folge einen Grenzwert) besitzt, zu beweisen.

Ebenso unzulässig wie die Definition der Irrationalzahl durch einen Schnitt im Gebiet der rationalen Zahlen ist diejenige der Gleichsetzung der beschränkten Folge mit der Irrationalzahl[1]). Denn diese Folge kann nicht als Totalität vorliegen, sondern nur durch ein Bildungsgesetz bestimmt sein. Mit diesem Bildungsgesetz aber rechnet man keineswegs, wenn man mit Irrationalzahlen rechnet. Vielmehr rechnet man mit „rationalen Approximationen“, wobei man sich bewußt ist, daß man die Approximation abschätzen und beliebig verschärfen kann. Die

[1]) Dies entspricht der Cantorschen Definition der Irrationalzahl durch eine Fundamentalreihe.

Definition eines Begriffes ist aber (wie wir im ersten Abschnitte festgestellt haben) nur dann korrekt, wenn sie den Sinn wiedergibt, der diesem Begriff im Gebrauch zukommt.

Schließlich ist auch die Russellsche Theorie der Irrationalzahlen nicht haltbar; denn sie vermeidet zwar, wie wir festgestellt haben, den Fehler, dort Grenzwerte von Folgen zu postulieren, wo sie nicht vorliegen, aber sie macht, ebenso wie die Cantorsche Definition, wesentlichen Gebrauch von dem Komprehensionsprinzip. Russells Gedankengang ist folgender: Jeder Dedekindsche Schnitt läßt sich durch seine Unterklasse festlegen. Nun betrachte man einen Dedekindschen Schnitt, dessen Unterklasse kein Maximum hat, und nenne eine solche Unterklasse ein Segment. „Dann sind die Segmente, die den Brüchen entsprechen, diejenigen, die aus allen Brüchen bestehen, die kleiner sind als der entsprechende Bruch. Dieser ist ihre Grenze. Dagegen besitzen die Segmente, die Irrationalzahlen entsprechen, keine Grenze.“ Es ergibt sich also die Definition: „Eine ‚Irrationalzahl‘ ist ein Segment in der Reihe der Brüche, das keine Grenze besitzt“.[1])

Man erkennt ohneweiters, daß gegen diese Definition Russells sich die nämlichen Einwände richten, die wir gegen seine Definition der natürlichen Zahlen erhoben haben; denn die Irrationalzahlen sind ja nach jener Definition Klassen von Rationalzahlen. Auf die Folgen, die sich hieraus für das Russellsche System der Mathematik ergeben, werden wir noch hinweisen[2]).

Eine „Irrationalzahl“ ist also nur der abgekürzte Ausdruck dafür, daß zu beschränkten Folgen ohne Grenzwert beliebig kleine Häufungsintervalle[3]) gehören. Daher bestimmen zwei beschränkte monotone Folgen ohne Grenzwert dieselbe Irrationalzahl, wenn jedes Häufungsintervall der einen Folge mit jedem Häufungsintervall der anderen Folge partiell zusammenfällt, d. h. mindestens eine Rationalzahl mit ihm gemeinsam hat[4]). Hieraus ergibt sich dann auch ohne Schwierigkeit die

---

[1]) „Einführung in die mathematische Philosophie“, S. 73, 74.

[2]) Vgl. unten S. 129, Anm. 1.

[3]) Die Beliebigkeit im Prozeß der Verengung der Intervalle bei Konstruktion der Irrationalzahlen bildet auch die Basis, auf der Brouwer seine Theorie des Kontinuums als eines „Mediums freien Werdens“ aufbaut.

[4]) Diese Definition der Gleichheit zweier Irrationalzahlen stimmt mit der von Weyl, „Grundlagenkrise“, a. a. O., S. 72, im Anschluß an Brouwer angegebenen im wesentlichen überein.

Gültigkeit der bestehenden Regeln für das Rechnen mit Irrationalzahlen.

Will man die im vorstehenden gewonnene Einsicht in den Formulierungen der mathematischen Sätze zum Ausdrucke bringen, dann müssen freilich wichtige Sätze der Algebra und Analysis komplizierter formuliert werden. So befriedigen die „irrationalen Wurzeln" einer algebraischen Gleichung diese nicht wirklich, sondern sie sind nur die Bezeichnung dafür, daß ein Bildungsgesetz für beliebige rationale Approximationen der Befriedigung besteht[1]). Aber wie man einsieht, tritt eine sachliche Änderung hiedurch keineswegs ein; man gibt den Dingen nur den richtigen Namen. Auf die Frage des praktischen Mathematikers aber nach dem Wert einer Untersuchung, deren Ergebnis in nichts anderem liege, als in der Komplizierung einer bestens bewährten einfachen Terminologie, ist folgendes zu erwidern: Die Nichtberücksichtigung sachlicher Unterscheidungen in Terminologie und Symbolik ist nur dann zulässig, wenn die Gefahr ausgeschaltet erscheint, daß hiedurch eine gedankliche Verwischung jener Unterschiede bewirkt wird. Gerade dann also, wenn der Mathematiker mit gutem Gewissen von jenen sprachlichen und semiotischen Verkürzungen Gebrauch machen will, muß er sich sorgfältig darüber Rechenschaft geben, was seine Worte und Zeichen jeweils bedeuten, sonst erwachsen ihm aus seiner eigenen Begriffsbildung und Zeichengebung die gefährlichsten logisch-philosophischen Scheinprobleme. Dies hat sich gerade an dem Begriff der Irrationalzahl bzw. an dem Rational- und Irrationalzahlen umfassenden Begriff der reellen Zahl besonders deutlich gezeigt. In neuerer Zeit hat diese Scheinproblematik geradezu eine Mauer gebildet, welche den Einblick in den wahren Charakter der als transfinit angesehenen Beziehungen verwehrte, da man die Irrationalzahl nicht anders als durch eine unendliche Menge glaubte darstellen zu können[2]) und daher den Begriff der unendlichen

[1]) Vgl. unten S. 132f.

[2]) Durch die Forderung der Konstruierbarkeit von Mengen, wie sie vor allem Brouwer mit größtem Nachdruck erhoben hat, ist zweifellos ein bedeutender Fortschritt angebahnt worden. Brouwer selbst gelangt zu einer Bestimmung der reellen Zahl, mit der die hier gegebene starke Ähnlichkeit aufweist, sobald man von der bei ihm mitauftretenden zeitlichen Interpretation absieht. Deren Ausschaltung aber ist unbedingt erforderlich, wenn man den spezifischen Sinn mathematischer Gegenstände präzis erfassen will. Die „Irratio-

Menge als unentbehrlich für die Analysis ansehen mußte. Hiedurch aber kam es dazu, daß man die mit dem Begriff des unabzählbar Unendlichen verknüpften Ungereimtheiten für eine Erschütterung der Grundlagen der Analysis ansah, da man des unabzählbar Unendlichen in der Analysis nicht entraten zu können meinte. In Wahrheit aber hat das unabzählbar Unendliche in der Analysis nichts zu suchen; der gegenteilige Anschein entsteht lediglich durch Fehlinterpretationen.

Man kann es sich leicht klar machen, daß keine auf Grund der gewonnenen Einsicht durchgeführte Umformulierung von Sätzen der Analysis an deren Erkenntnisbestande etwas zu ändern vermag; denn jene Einsicht liegt ja gerade in der korrekten Beschreibung des mathematischen Sinnes der verwendeten Symbolik. Die wichtigsten terminologischen Differenzen aber gehen hervor aus der Abänderung des Weierstraßschen Satzes vom Häufungswert einer beschränkten Folge. Nun bestimmt — wie wir erkannt haben — nicht mehr jede beschränkte Folge von Rationalzahlen eine Zahl als Häufungswert, wohl aber beliebig kleine Häufungsintervalle, die sich manchmal, aber nicht immer, auf eine Zahl zusammenziehen. Zur Bildung von Klassen oder Gesamtheiten solcher Häufungsintervalle aber liegt — wie wir sogleich erkennen werden — kein Anlaß vor, und damit verschwinden die Ungereimtheiten, die mit den Begriffen der „beliebigen reellen Zahl" bzw. der „Gesamtheit der reellen Zahlen" verknüpft sind.

Wenn man sich dies vor Augen hält, so wird man mit der die Ansprüche der mathematischen Technik vorzüglich befriedigenden Symbolik der Irrationalzahlen unbesorgt operieren können, ohne der — im nächsten Abschnitt näher zu betrachtenden — Gefahr transfiniter Fehlinterpretationen zu erliegen.

Wir wollen jetzt zeigen, daß durch die gewonnene Klarheit über den Begriff der Irrationalzahlen auch die Schwierigkeiten verschwinden, die bei den „Irrationalzahlen höherer Stufe" auftauchen[1]). Diese lassen sich nämlich ausschalten.

nalzahl" ist — darüber muß man sich völlig klar sein — keineswegs ein „Werdendes"; sie ist die abgekürzte Bezeichnung (unvollständiges Symbol) einer mathematischen Beziehung und in deren schlichter Beschreibung ohne Versuch einer substantivierenden Definition liegt die Auflösung der einschlägigen Problematik.

[1]) Diese Schwierigkeiten ergeben sich im Russellschen System daraus, daß Russell auf Grund seiner verzweigten Typentheorie verschiedene Stufen

Wir wollen dies an dem im Zentrum der Problematik stehenden Satze: „Jede monotone beschränkte Folge von Irrationalzahlen hat einen Grenzwert“, zeigen. Dieser Satz lautet nach Ausschaltung des Begriffes der Irrationalzahl: Zu jeder monotonen beschränkten Folge von monotonen beschränkten Folgen rationaler Zahlen kann ein beliebig kleines Intervall gefunden werden, das Häufungsintervalle jeder dieser Folgen, von einer bestimmten Folge an, (also „fast aller Folgen“) enthält. Wir geben den Beweis für aufsteigende Folgen von aufsteigenden Folgen, die Verallgemeinerung ergibt sich ohne jede Schwierigkeit.

Gegeben sei eine beschränkte, monoton aufsteigende Folge $f_1, f_2, \ldots f_n, \ldots$ von monoton aufsteigenden, beschränkten Folgen rationaler Zahlen, dann kann zu einer beliebig kleinen Rationalzahl k ein rationales Intervall $I_k < k$ so gefunden werden, daß nachstehende Beziehung gilt: Sei $z_1, z_2, \ldots z_n, \ldots$ eine Folge rationaler Zahlen, so daß z_1 größer ist als jedes Element von f_1, aber nicht größer als jedes Element von f_2 und allgemein z_n größer als jedes Element von f_n, aber nicht größer als jedes Element von f_{n+1}. Diese Folge ist monoton aufsteigend, da $f_1, f_2, \ldots f_n, \ldots$ monoton aufsteigend ist und sie ist beschränkt, da voraussetzungs-

von Irrationalzahlen annehmen muß, während sich doch im Sinne der Analysis jede Irrationalzahl als Folge von Rationalzahlen (als unendlicher Kettenbruch, unendlicher Dezimalbruch) darstellen lassen muß. So wurde Russell zur Einführung des sog. Reduzibilitätsaxioms gezwungen, welches besagt, daß jede Satzfunktion einer beliebigen Stufe einer Satzfunktion erster Stufe umfangsgleich (d. h. für dieselben Argumente zugleich wahr, bzw. falsch) ist. Aber ganz abgesehen von den sonstigen theoretischen Mängeln, die dem Reduzibilitätsaxiom anhaften, wird hiedurch — wie insbesondere von Ramsey (a. a. O., S. 359) hervorgehoben worden ist — die Auswirkung der verzweigten Typentheorie auf die Analysis (nicht auch auf die epistemologischen Antinomien, vgl. unten S. 195ff.) vollkommen paralysiert. Da jedoch in den „Principia Mathematica“ die Analysis unter Zugrundelegung des Reduzibilitätsaxioms tatsächlich aufgebaut wird, so ergibt sich, daß die verzweigte Typentheorie in der Analysis nichts zu suchen hat. Dennoch ist es Russell, wie er im Vorwort zur zweiten Auflage der „Principia Mathematica“ hervorhebt, nicht gelungen, die Lehre von den Irrationalzahlen ohne verzweigte Typentheorie samt zugehörigem Reduzibilitätsprinzip aufzubauen. Ein diesbezüglicher Versuch, den Ramsey in der obzitierten Arbeit unternommen hat, ist ebenfalls nicht geglückt. (Einer mündlichen Mitteilung von Herrn Waismann entnehme ich, daß dies Herr Ramsey selbst zugegeben hat.) Diese Schwierigkeiten liegen aber nicht in der Sache selbst, sondern sie sind durch die Russellsche Klassentheorie der Zahlen bedingt.

gemäß zu jedem ihrer Elemente ein größeres Element in einer der beschränkten Folgen $f_1, f_2, \ldots f_n, \ldots$ gefunden werden kann.[1]) Dann hat $z_1, z_2, \ldots z_n, \ldots$ im Sinne des oben S. 123f. bewiesenen Satzes beliebig kleine Häufungsintervalle I_k. Enthalte nun ein solches I_k jedes Element von $z_1, z_2, \ldots z_n, \ldots$ von einem bestimmten Element z_q an, so enthält es auch ein Häufungsintervall der Folge f_{q+1} und jeder späteren Folge. Denn da z_q nicht größer ist als jedes Element von f_{q+1}, wohl aber z_{q+1} größer ist als jedes Element von f_{q+1}, so muß ein Intervall, das z_q und z_{q+1} enthält, ein Häufungsintervall von f_{q+1} enthalten und allgemein muß ein Intervall, das z_{q+i} und z_{q+i+1} enthält, ein Häufungsintervall der Folge f_{q+i+1} enthalten.

Damit ist unser Satz bewiesen und zugleich der Satz über Folgen von Irrationalzahlen auf einen Satz über Folgen von Rationalzahlen zurückgeführt, wodurch die Irrationalzahlen höherer Stufe ausgeschaltet werden können. Auf diese Weise verschwindet auch der circulus vitiosus in der Begründung der Analysis[2]).

Untersuchen wir jetzt noch, wie sich nach Auflösung der Symbolik der Irrationalzahlen die Sätze über die irrationalen Wurzeln von Gleichungen gestalten. Wir wollen uns hiebei — der Einfachheit halber — auf algebraische Gleichungen beschränken und noch die weitere Einschränkung einführen, daß der Koeffizient der höchsten Potenz der Unbekannten 1 und die sämtlichen anderen Koeffizienten sowie das freie Glied natürliche Zahlen sein sollen[3]). Doch sind diese Einschränkungen grund-

[1]) Daß eine solche Folge $z_1, z_2, \ldots z_n, \ldots$ bestimmbar ist, wird durch die Voraussetzung, daß $f_1, f_2, \ldots f_n, \ldots$ eine monoton aufsteigende Folge von Folgen ist, impliziert, denn dies besagt ja nichts anderes, als daß je zwei Folgen f_i und f_{i+1} eine Rationalzahl zugeordnet werden kann, die größer ist als jedes Element von f_i, aber nicht größer ist als jedes Element von f_{i+1}.

[2]) Vgl. Weyl: „Der circulus vitiosus ...“, a. a. O., S. 87 ff.

[3]) Solche algebraische Gleichungen haben keine gebrochenen Zahlen als Wurzeln. Die irrationalen Zahlen aber, welche Wurzeln solcher Gleichungen sind, nennt man ganze algebraische Zahlen. Dieser Begriff spielt in der höheren Zahlentheorie, der Theorie der Zahlkörper und der „Ideale“, eine fundamentale Rolle. Da Hilbert die Theorie der Kummerschen „Ideale“ wiederholt als Paradigma für den Erkenntniswert der Einführung von Idealbegriffen (vgl. oben S. 55ff.) anführt, sei ausdrücklich darauf hingewiesen, daß die Auflösung der dort angewandten Symbolik prinzipiell in derselben Weise durchgeführt werden kann, wie es in diesem Abschnitte geschieht. Nur sind dort die mathematischen Sachverhalte noch komplizierter und die vereinfachende Symbolik daher noch weniger entbehrlich.

sätzlich nicht von Bedeutung; der allgemeine Erkenntnisbestand, auf den es hier ankommt, wird trotzdem klar hervortreten.

Sei also $x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} \ldots\ldots + l\,x + m = 0$ eine Gleichung, welche eine positive[1]) irrationale Wurzel besitzt und diese Wurzel sei $p + q$, wobei p die größte natürliche Zahl, welche kleiner ist als die Wurzel, also die Zahl vor dem Dezimalpunkt ist, während q der echte unendliche Dezimalbruch ist, der hinter dem Dezimalpunkt steht[2]). Der mit der ersten, zweiten, ... n-ten Stelle abbrechende Dezimalbruch werde q_1, bzw. q_2, bzw. q_n genannt.

Wir wollen nun diesen mathematischen Sachverhalt ohne Verwendung der Symbolik der Irrationalzahlen und der Rationalzahlen darstellen[3]):

Gegeben sei eine Folge (f) natürlicher Zahlen $f_1, f_2, \ldots f_n, \ldots$ von folgender Form:

$$\begin{aligned} f_1 &= r \qquad\qquad (\text{hiebei ist } f_1 = 10\,q_1,\ f_2 = 10^2\,q_2, \ldots\ f_n = 10^n\,q_n)\\ f_2 &= 10 f_1 + s \\ &\;\,. \\ f_n &= 10 f_{n-1} + v \\ &\;\,. \\ &\;\,. \end{aligned}$$

wobei jedes der r, s, ... v, eine der Zahlen 0, 1, ... 9 bedeutet. Dann läßt sich zu jeder natürlichen — noch so großen — Zahl k eine natürliche Zahl h finden, so daß für jede natürliche Zahl $i \geqq h$ folgende Beziehung gilt:

Setzt man in der Gleichung

$$x^n + 10^i a\, x^{n-1} + 10^{2i}\, b\, x^{n-2} \ldots + 10^{(n-1)i}\, l\, x + 10^{ni}\, m = 0 -$$

die Zahl $10^i p + f_i$ an Stelle der Unbekannten in das Gleichungspolynom ein, und gibt ihm diese Zahl den Wert w (wobei w eine positive oder negative ganze Zahl ist), so ist

$$\frac{10^i p + f_i}{|w|} > k.^{4)}$$

[1]) Auch diese Einschränkung ist nicht wesentlich und wird nur wegen der Einfachheit der Darstellung eingeführt; das gleiche gilt von der Verwendung des Dezimalsystems.

[2]) Wäre beispielsweise die fragliche Wurzel $3 + \sqrt{5}$, so wäre $p + q = 5{\cdot}23606 \ldots$ und die beiden Summanden wären $p = 5$ und $q = 0{\cdot}23606 \ldots$.

[3]) Auch die Symbolik der negativen Zahlen ließe sich ohne besondere Schwierigkeit ausschalten.

[4]) Es ist nicht möglich, jeder beliebigen Folge natürlicher Zahlen eine

Demgegenüber besagt die Behauptung, daß eine natürliche Zahl z eine Wurzel der Gleichung $x^n + a x^{n-1} + b x^{n-2} + \ldots + l x + m = 0$ sei, daß z in dieses Gleichungspolynom eingesetzt, diesem den Wert 0 gibt.

Man erkennt, daß hier zwei verschiedene mathematische Sachverhalte mit demselben Namen bezeichnet werden, aber so große technische und heuristische Vorteile diese Terminologie auch haben mag, und so töricht es daher wäre, sie aufzugeben, so werden die beiden verschiedenen Sachverhalte durch sie doch um nichts ähnlicher. Anderseits aber gehen bei Nichtverwendung dieser Terminologie und der zugehörigen mathematischen Symbolik die „irrationalen Wurzeln" nicht etwa verloren, sondern sie heißen nur anders.

Abschließend sei noch auf den möglichen Einwand hingewiesen, daß die Irrationalzahlen doch durch geometrische Konstruktionen anschaulich dargestellt werden könnten, etwa $\sqrt{2}$ durch die Diagonale eines Quadrates mit der Seite 1 oder durch die Peripherie eines Kreises mit dem Durchmesser 1. Da indes seine Untriftigkeit bereits aus unseren allgemeinen Feststellungen bezüglich der geometrischen Anschauung aufscheint, erübrigen sich weitere Erklärungen[1]). Aus jenen Feststellungen ergibt sich, daß die Inkommensurabilität zweier Strecken prinzipiell nicht anschaulich verifizierbar ist. Auch die Annahme eines anschaulichen

algebraische Gleichung in solcher Weise zuzuordnen, daß die eben beschriebene Beziehung gilt. Demgemäß unterscheidet man innerhalb der irrationalen Zahlen diejenigen, die Wurzeln algebraischer Gleichungen sind, als algebraische Zahlen von denjenigen, die es nicht sind. Letztere heißen transzendente Zahlen. Vgl. über diese unten S. 143, Anm. 1.

[1]) Wohl aber mögen einige Sätze von Felix Klein angeführt werden, worin er die Zurückführung des Irrationalen auf die Raumanschauung ablehnt. „Das, was in der Anschauung oder im Experimente nur approximativ gegeben ist, das formuliren wir in exakter Weise, weil wir anderenfalls damit nichts anzufangen wissen. — Hiemit ist denn auch die Stellung gegeben, die ich zur Theorie des Irrationalen einnehme. Sicher liegt die Veranlassung zur Bildung der Irrationalzahlen in der scheinbaren Stetigkeit der Raumanschauung. Ich kann aber, da ich der Raumanschauung keine Genauigkeit beilege, ihr auch nicht die Existenz des Irrationalen entnehmen wollen. Vielmehr ist mir die Theorie des Irrationalen etwas, was in rein arithmetischer Weise zu begründen oder zu umgränzen ist, und was wir dann, dank den Axiomen, in die Geometrie hineintragen, um auch in ihr diejenige Schärfe der Distinktionen zu erreichen, welche die Vorbedingung der mathematischen Behandlung ist." „Zur Nicht-Euklidischen Geometrie", Math. Ann., Bd. 37, S. 544 bis 572, 1890, S. 572.

linearen Kontinuums fällt weg, wenn man sich darüber klar geworden ist, daß die „anschauliche“ Zusammensetzbarkeit der Strecken (Kurven) aus Punkten nur eine unkorrekte Formulierung der Erkenntnistatsache ist, daß sie aus beliebig kleinen Strecken (Kurven) zusammensetzbar sind.

Damit sind die hauptsächlichen das Transfinite betreffenden Vorurteile, soferne sie durch mißverständliche Interpretation der Anschauung und der mathematischen Symbolik der Rationalzahlen und der Irrationalzahlen entstehen, beseitigt. Die Analyse derjenigen Erweiterung des Zahlbegriffes, die zu den imaginärkomplexen Zahlen führt, würde in dieser Hinsicht nichts grundsätzlich Neues bringen, weshalb wir von ihr absehen können[1]. Im nächsten Abschnitte werden wir nun ins Zentrum der Theorie vom Transfiniten vorstoßen.

---

[1]) Vgl. hiezu O. Hölder, „Die mathematische Methode“, a. a. O., S. 199ff., ferner O. Becker, „Mathematische Existenz“, a. a. O., S. 476ff.

V. Die Mengenlehre.[1]

Die bisherigen Ergebnisse liefern uns das Rüstzeug für die Analyse der Hauptbegriffe der Mengenlehre, der mathematischen Theorie des Unendlichgroßen. Wichtig hiefür sind vor allem die Unterscheidung zwischen individueller und spezifischer Allgemeinheit, die Ausschaltung des Mengenbegriffes bei der Definition der natürlichen Zahl, die Einsicht in den Zusammenhang von Kardinalzahl und Ordinalzahl, das Ergebnis der Analyse des Prinzips der vollständigen Induktion und die Auflösung der Symbolik der Irrationalzahlen.

Wir haben insbesondere einsehen gelernt, daß man zwar von einer endlichen Menge vorliegender Dinge insoferne sinnvoll sprechen kann, als durch diesen Terminus in denselben Zählprozeß einbezogene Dinge verknüpft werden sollen, daß aber hiedurch nicht diejenige Bedeutung gedeckt wird, die diesem Worte dort zukommt, wo man von der „Menge aller natürlichen Zahlen" spricht. Denn die „Anzahl der Elemente", die für die Vergleichung von Mengen essentiell ist, ist bei endlichen Mengen mit der Ordnungszahl des letztgezählten Elementes gegeben, die „Menge aller natürlichen Zahlen" aber hat kein letztes Element. Man muß sich bei dieser „Menge", wie bei unendlichen Mengen überhaupt, vor falschen Veranschaulichungen hüten; die Quelle aller Erkenntnisse über unendliche Mengen ist das konstitutive Bildungsgesetz.

Hat man diesen Unterschied prinzipiell klar erfaßt, dann ist man nicht mehr versucht, mit den unendlichen Totali-

[1]) Eine vortreffliche, auch für den Nichtmathematiker verständliche Einführung in die Mengenlehre ist Fraenkels bereits zitiertes Lehrbuch. Vorwiegend für den Mathematiker bestimmt ist F. Hausdorff, „Grundzüge der Mengenlehre", 2. Aufl., Leipzig 1927, ein großangelegtes, auch Spezialprobleme und Anwendungen der Mengenlehre berücksichtigendes Werk.

Eine kurze und recht einfache, aber doch tunlichst strenge Einführung gibt K. Grelling, „Mengenlehre" (Math. phys. Bibl. Nr. 58, Berlin 1924).

täten als solchen zu operieren, sondern weiß, daß man es bei Aussagen über unendliche Mengen einzig und allein mit Folgerungen aus dem Bildungsgesetz zu tun hat[1]). Wir haben schon festgestellt, daß Aussagen über ein „allgemeines Glied“ die adäquate Form für die hier aufzustellenden Sätze sind; was sich an dem allgemeinen Glied feststellen läßt, gilt auf Grund des Bildungsgesetzes, alles übrige bleibt unbestimmt (beliebig). Wir werden im folgenden erkennen, wie eine Reihe der wichtigsten Aussagen der Mengenlehre, in denen scheinbar über Transfinites geurteilt wird, in ihrem echten (finiten) Sinn dadurch einsichtig werden, daß an die Stelle des „Unendlichen“ ein Unbestimmtheitsspielraum tritt.

Nach diesen einleitenden Bemerkungen wollen wir an die Probleme selbst herantreten und an eine knappe Darstellung der mengentheoretischen Hauptthesen unsere Kritik anschließen.

Die von Cantor geschaffene Mengenlehre will eine mathematische Theorie des Unendlichgroßen geben und unternimmt es einerseits die Relationen „größer“, „gleich“, „kleiner“, anderseits die Relationen des „Nächstgrößeren“ (unmittelbaren Nachfolgers) im Bereich des Unendlichgroßen exakt zu bestimmen[2]).

Die Feststellung der erstgenannten Relationen (größer, gleich, kleiner) erfolgt mit Hilfe der Begriffe der Teilmenge und der

---

[1]) Demgemäß ist der Satz: „Es gibt unendlich viele Dinge in der Welt“ sinnlos. Mit der Behauptung, die Welt sei (ihrer räumlichen und zeitlichen Ausdehnung nach) unendlich, aber verhält es sich folgendermaßen: Wenn man den Begriff „die Welt“ sinnvoll, d. h. in Beziehung auf „mögliche Erfahrung“ definiert, so erkennt man, daß von einer „aktual unendlichen“ Welt nicht die Rede sein kann. Spricht man dennoch von einer „unendlichen“ Welt, so kann dies nur bedeuten, daß keine bestimmten Schranken für die Ausdehnung angenommen werden. Im physikalischen Weltbilde der allgemeinen Relativitätstheorie hat dagegen die Welt ein bestimmtes Volumen; demgemäß kann Einsteins „Welt“ als räumlich endlich gegenüber der „unendlichen Welt“ Newtons bezeichnet werden.

[2]) Über die Cantorsche Definition der Menge vgl. oben S. 96.

Die für die reine Mengenlehre grundlegenden Arbeiten Cantors sind:

„Grundlagen einer allgemeinen Mannichfaltigkeitslehre“, Leipzig 1883.

„Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten“, I und II, Zeitschr. f. Phil. u. phil. Kritik, Bd. 91, S. 81 bis 125 und 252 bis 270, 1887, und Bd. 92, S. 240 bis 265, 1888.

„Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre“, I, Math. Ann., Bd. 46, S. 481 bis 512, 1895; II, ebenda, Bd. 49, S. 207 bis 246, 1897.

Äquivalenz. Wir wiederholen zunächst die oben (S. 99) gegebene Definition der Teilmenge:

Eine Menge M′ heißt eine Teilmenge der Menge M, wenn jedes Element von M′ gleichzeitig auch Element von M ist. Ist hiebei M′ mit M identisch, so nennt man M′ eine unechte (uneigentliche) Teilmenge von M, andernfalls heißt sie eine echte (eigentliche) Teilmenge von M.

Die Definition der Äquivalenz lautet: Eine Menge M heißt einer Menge N äquivalent, wenn die Elemente von M den Elementen von N umkehrbar eindeutig zugeordnet werden können, d. h. so, daß jedem Element von M ein einziges Element von N und jedem Element von N ein einziges Element von M entspricht.

Liegen irgend zwei Mengen M und N vor, so scheinen von vornherein die folgenden vier Fälle denkbar:

1. M ist einer Teilmenge von N äquivalent und N ist einer Teilmenge von M äquivalent.

2. M ist einer Teilmenge von N äquivalent und N ist keiner Teilmenge von M äquivalent.

3. M ist keiner Teilmenge von N äquivalent und N ist einer Teilmenge von M äquivalent.

4. M ist keiner Teilmenge von N äquivalent und N ist keiner Teilmenge von M äquivalent.

Liegt Fall 1 vor, dann gilt gemäß dem sogenannten Äquivalenzsatz der Mengenlehre[1]), daß die Mengen M und N selbst äquivalent sind. Von äquivalenten Mengen sagt man auch, daß sie dieselbe Mächtigkeit oder daß sie dieselbe Kardinalzahl haben.

Im Falle 2 heißt N von höherer Mächtigkeit als M; statt dessen sagt man auch, daß N eine größere Kardinalzahl hat als M.

Im Falle 3 ist umgekehrt M eine Menge von höherer Mächtigkeit als N (M hat die größere Kardinalzahl).

Der Fall 4 endlich soll — im Sinne der Mengenlehre —

---

[1]) Den ersten Beweis des Äquivalenzsatzes hat F. Bernstein geliefert. (Veröffentlicht bei E. Borel, „Leçons sur la théorie des fonctions“, Paris 1898.) Ein weiterer Beweis stammt von J. König, „Zum Kontinuumproblem“, Math. Ann., Bd. 60, S. 177 bis 180 und 462, 1905. Doch werden die Beweise dieses Satzes von intuitionistischer Seite nicht anerkannt. Nach Ausschaltung des unabzählbar Unendlichen wird der Äquivalenzsatz trivial.

niemals auftreten. Beim Beweis dieser Behauptung stützt sich die Mengenlehre wesentlich auf den sogenannten Wohlordnungssatz, den wir im folgenden noch zu analysieren haben werden.

Hienach stünde also für zwei beliebige Mengen fest, ob sie die gleiche Mächtigkeit (Kardinalzahl) haben oder welche von beiden die höhere Mächtigkeit (größere Kardinalzahl) hat.

Ihre erkenntnispraktische Bedeutung bekommen die eben angeführten Definitionen dadurch, daß solche ein-eindeutige Zuordnungen zwischen Mengen und ihren echten Teilmengen durchgeführt, d. h. entsprechende Zuordnungsprinzipien aufgewiesen werden. Ein einfaches Beispiel ist die ein-eindeutige Zuordnung zwischen den natürlichen Zahlen und beliebigen Vielfachen der natürlichen Zahlen. Sie ergibt sich z. B. auf folgende Weise:

$$\begin{array}{l} 1,\ 2,\ 3,\ 4, \ldots\ldots\, i, \ldots\ldots \\ 2,\ 4,\ 6,\ 8, \ldots\ldots\, 2i, \ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ n,\ 2n,\ 3n,\ 4n, \ldots\ldots\, ni, \ldots\ldots \end{array}$$

Es wird also jeder natürlichen Zahl ein gewisses Vielfaches (und zwar stets dasselbe) zugeordnet. Hiebei zeigt es sich nun — bzw. scheint es sich zu zeigen —, daß ein-eindeutige Zuordnungen zwischen einer Menge und einer ihrer echten Teilmengen tatsächlich vollziehbar sind. Z. B. sind die geraden Zahlen sämtlich natürliche Zahlen, aber nicht alle natürlichen Zahlen sind gerade Zahlen. Bei endlichen Mengen aber ist eine derartige Abbildung der Menge auf eine echte Teilmenge ausgeschlossen. Demgemäß hat R. Dedekind[1]) die Äquivalenz einer Menge mit einer ihrer echten Teilmengen zum definitorischen Prinzip für die Unendlichkeit einer Menge erhoben. Die Definition lautet:

„Eine Menge M heißt unendlich (transfinit), wenn es eine zu M äquivalente echte Teilmenge von M gibt. Ist dies nicht der Fall, so heißt M endlich“[2]).

Die der Menge der natürlichen Zahlen äquivalenten Mengen werden abzählbare Mengen genannt.

---

[1]) „Was sind und was sollen die Zahlen?“ (1887), 4. Aufl., Braunschweig 1918.

[2]) Eine vortreffliche Darstellung der verschiedenen Definitionen des Endlichen gibt A. Tarski, „Sur les ensembles finis“, Fundamenta Mathematicae, Bd. 6, S. 45 bis 95, 1925.

Auch die ein-eindeutige Zuordenbarkeit zwischen der Menge der Rationalzahlen und der Menge der natürlichen Zahlen läßt sich auf Grund einfacher Überlegungen nachweisen.

Lassen sich nun aber überhaupt Mengen von höherer Mächtigkeit als die Menge der natürlichen Zahlen aufweisen? Hier liegt offenbar eine für die Mengenlehre entscheidende Frage, denn wäre dies nicht der Fall, so bestünde keine Mehrheit unendlicher Kardinalzahlen[1]). Der Beweis, daß solche Mengen existieren, wird von Cantor auf folgende Art geführt:

Es seien abzählbar viele Dezimalbrüche[2]) gegeben:

$$\begin{array}{l} a_1 = 0,\ a_{11}\ a_{12}\ a_{13} \ldots\ldots a_{1m} \ldots\ldots \\ a_2 = 0,\ a_{21}\ a_{22}\ a_{23} \ldots\ldots a_{2m} \ldots\ldots \\ a_3 = 0,\ a_{31}\ a_{32}\ a_{33} \ldots\ldots a_{3m} \ldots\ldots \\ \qquad\vdots \\ a_n = 0,\ a_{n1}\ a_{n2}\ a_{n3} \ldots\ldots a_{nm} \ldots\ldots \\ \qquad\vdots \end{array}$$

Nun bilde man einen Dezimalbruch $b = 0,\ b_1\ b_2\ b_3 \ldots\ b_n \ldots$ in der Weise, daß $b_n \gtrless a_{nn}$, dann ist b von jedem a_i verschieden, da es in mindestens einer Ziffer von a_i abweicht, es kann also in der Reihe nicht enthalten sein.

Dieses berühmte Beweisverfahren führt den Namen Diagonalverfahren, weil der neue Dezimalbruch dadurch gebildet wird, daß an Stelle jeder in der „Diagonale" liegenden Ziffer eine hievon verschiedene Ziffer eingesetzt wird. Durch diesen Beweis hält Cantor den Satz für sichergestellt, daß die Menge aller Dezimalbrüche von höherer Mächtigkeit ist als diejenige der natürlichen Zahlen, da er zeigt, daß, wie immer man eine ein-eindeutige Zuordnung zwischen sämtlichen natürlichen Zahlen und unendlichen Dezimalbrüchen durchführt, stets ein von dieser Zuordnung nicht umfaßter Dezimalbruch aufgewiesen werden könne, während andrerseits die Menge der ganzen Zahlen einer Teilmenge der Menge aller Dezimalbrüche ein-eindeutig zugeordnet werden kann.

---

[1]) Es läßt sich nämlich leicht zeigen, daß die abzählbaren Mengen die niederste Mächtigkeit unter den unendlichen Mengen haben.

[2]) Man kann an Stelle von 10, auch die Basis 2 (Dualbrüche) verwenden oder eine beliebige andere natürliche Zahl > 1 als Basis wählen.

Hier wollen wir zunächst die Darstellung abbrechen, um an die Kritik der bisher dargestellten Thesen der Mengenlehre zu schreiten. Wir beginnen mit der Analyse derjenigen Zuordnungen, die von der Mengenlehre als ein-eindeutige Abbildungen der Menge der natürlichen Zahlen auf echte Teilmengen dieser Menge aufgefaßt werden.

Das anscheinend unbezweifelbare Bestehen einer solchen ein-eindeutigen Entsprechung hat anderseits doch etwas Paradoxes an sich; denn hienach wäre ja das Ganze nicht mehr größer als irgend einer seiner Teile. Hieraus aber hat schon Leibniz[1]) gefolgert, daß „die Anzahl oder Menge aller Zahlen einen Widerspruch einschließt, wenn man sie als einziges Ganzes nimmt". Auch für Bolzano, in dessen „Paradoxien des Unendlichen"[2]) man den ersten und einzigen Vorläufer der Cantorschen Ideen zu erblicken hat, liegt gerade in jener Zuordnung, auf die er bereits ausdrücklich hinweist (§ 20), eine Paradoxie des Unendlichen. Die Mengenlehre aber interpretiert den Sachverhalt in der Weise, daß der Anschein einer Paradoxie nur dadurch entstehe, daß man das nur für das Endliche geltende Prinzip: „Das Ganze ist größer als irgend einer seiner Teile" über diesen Bereich hinaus wahr haben wolle, und dementsprechend benützt sie gerade die Zäsur, die durch die Geltung oder Nichtgeltung jenes Axioms geschaffen wird, um die Bereiche des Endlichen und des Unendlichen definitorisch scharf voneinander zu sondern[3]).

Wird nun aber durch die angegebenen Zuordnungen tatsächlich gezeigt, daß sich eine Menge einer ihrer echten Teilmengen umkehrbar eindeutig zuordnen läßt? Diese Behauptung ist es, die wir entschieden bestreiten.

Um hier klar zu sehen, müssen wir auf das peinlichste zwischen dem vorliegenden Sachverhalt, welcher schlicht wiederzugeben ist, und irgendwelchen Interpretationen dieses Sach-

---

[1]) Brief an Bernoulli, Mathematische Schriften, ed. Gerhardt, III, S. 533.

[2]) 1851 aus dem Nachlaß veröffentlicht. Neu herausgegeben durch A. Höfler, mit Anmerkungen versehen von H. Hahn (Philos. Bibl., Bd. 99, Leipzig 1920).

[3]) Es läßt sich dann auch leicht die Übereinstimmung der also definierten Begriffe des „Endlichen" und „Unendlichen" mit der naiven Auffassung vom Endlichen und Unendlichen dartun. Vgl. hiezu Fraenkel, „Einführung in die Mengenlehre", a. a. O., S. 25f.

verhaltes unterscheiden. Dann erkennen wir: Was sich beispielsweise bei der ein-eindeutigen Zuordnung zwischen den natürlichen Zahlen und den geraden Zahlen zeigt, ist allein, daß jeder beliebigen natürlichen Zahl n umkehrbar eindeutig eine gerade Zahl zugeordnet werden kann. Hingegen zeigt es sich keineswegs, daß „daher" die „Menge aller natürlichen Zahlen" umkehrbar eindeutig auf die „Menge aller geraden Zahlen" abgebildet werden kann. Versteht man allerdings hierunter nichts anderes als den im vorigen Satze gekennzeichneten Sachverhalt, dann ist freilich alles in Ordnung, aber infolge der Doppeldeutigkeit des Mengenbegriffes, welche der Verquickung von individueller und spezifischer Allgemeinheit entspringt, liegt eine über diesen Sachverhalt hinausgehende Interpretation nahe, welche verhängnisvolle Folgen zeitigt.

Es handelt sich hiebei um einen für die mengentheoretische Spekulation typischen Gedankengang, den wir sogleich seinem allgemeinen Aufbau nach beschreiben wollen. Es werden zunächst mathematische Gesetzmäßigkeiten, betreffend die ein-eindeutige Zuordnung zwischen Zahlen oder die Anordnung von Zahlen, aufgewiesen, und diese Gesetzmäßigkeiten werden, in Verquickung von spezifischer und individueller Allgemeinheit, mit Hilfe transfiniter Totalitäten interpretiert. Hiedurch scheinen die transfiniten Totalitäten einen präzisen mathematischen Sinn zu erhalten, da man ja „zwischen ihnen" bestehende Gesetzmäßigkeiten festgestellt zu haben glaubt; ja es erscheint sogar möglich, sie geradezu als „Träger" dieser Gesetzlichkeiten zu definieren (nach dem Muster der Dedekindschen Definition des Unendlichen). Bis zu diesem Punkte des Gedankenganges können gegen ihn „nur" außermathematische Einwendungen gemacht werden; denn mag auch die Verquickung von spezifischer und individueller Allgemeinheit unrichtig sein, im mathematischen Verfahren muß alles stimmen, so lange über die Grundlage der mathematischen Interpretation — die mathematischen Beziehungen selbst — nicht hinausgegangen wird. Man kann daher bis zu diesem Punkte jede Behauptung über das Unendliche in eine korrekte Ausdrucksweise „übersetzen"; das Unendliche kann bis hieher als eine bloße „façon de parler"[1]) betrachtet werden.

[1]) Diese Bezeichnung stammt von Gauß, der sie in einem Brief an Schumacher in folgendem Zusammenhange verwendet: „... so protestiere

Aber die Gefahren dieser Interpretation wirken sich auch innerhalb des Mathematischen selbst aus. Es kann nämlich die transfinite Deutung mathematischer Verfahren auch unrichtige Auffassungen bezüglich des intern mathematischen Charakters jener Verfahren mit sich bringen, und in weiterer Folge kommt es dann zu „Erweiterungen" solcher Verfahren, die sich auf jene Fehlauffassungen stützen, in den Erkenntnistatsachen selbst aber keine Rechtfertigung finden. Das prägnanteste Beispiel eines Gedankenganges nach dem eben entwickelten Schema werden wir in der für die Mengenlehre fundamentalen Cantorschen Theorie der Potenzmengen unendlicher Mengen im Zusammenhange mit seiner Interpretation des Diagonalverfahrens finden.

Prinzipiell wird es sich zeigen, daß den Aussagen der Mengenlehre über abzählbar unendliche Mengen ein mathematischer Sinn stets abgewonnen werden kann; niemals dagegen den Aussagen über unabzählbar unendliche Mengen, soferne nicht das unabzählbar Unendliche aus diesen Aussagen eliminierbar ist (vgl. unten S. 171).

Wir kehren nun wieder zu unserem Beispiel der ein-eindeutigen Zuordnung zwischen den natürlichen Zahlen und bestimmten Vielfachen der natürlichen Zahlen zurück. Daß ein solches Zuordnungsprinzip angegeben werden kann, hat darin seinen Grund, daß hier wie dort ein erstes, zweites, n-tes Element, aber kein letztes Element zu finden ist. Die ein-eindeutige Zuordnung erfolgt ja eben dadurch, daß man die n-ten Elemente paart. Wir haben schon bei der Analyse des Begriffes der natürlichen Zahlen diesen Zusammenhang zwischen Zuordnung und Ordnung besprochen und dürfen hier von einer Wiederholung absehen. Das Ergebnis war, daß die Vollziehbarkeit einer ein-eindeutigen Zuordnung zwar unabhängig ist von der Art der Anordnung der Elemente, daß aber irgend eine Anordnung hiebei vorausgesetzt wird.

Dies erkennt man auch bei der Abbildung der Rational-

---

ich ..... gegen den Gebrauch einer unendlichen Größe als einer Vollendeten, welcher in der Mathematik niemals erlaubt ist. Das Unendliche ist nur eine façon de parler, indem man eigentlich von Grenzen spricht, denen gewisse Verhältnisse so nahe kommen als man will, während anderen ohne Einschränkung zu wachsen gestattet ist." (Zit. nach Fraenkel, „Einleitung in die Mengenlehre", S. 1.)

zahlen oder der algebraischen Zahlen auf die natürlichen Zahlen[1]), da die Abbildung dadurch vollzogen wird, daß man die Rationalzahlen p/q — wo p und q teilerfremde natürliche Zahlen sind — nach der Summe von Zähler und Nenner p + q, bzw. die algebraischen Zahlen nach der „Höhe"[2]) der durch sie befriedigten Gleichungen ordnet. Durch diese Ordnung werden sie „abzählbar". Es ist ja überhaupt, sobald man sich von dem Ungedanken einer unabhängig von einem Bildungsgesetz „vorliegenden" unendlichen Totalität freigemacht hat, einsichtig, daß man zu beliebig vielen Elementen nur durch eine „Erzeugungsordnung", d. h. — in außerzeitlicher Terminologie — durch ein Prinzip gelangen kann, auf Grund dessen durch je n Elemente ein weiteres (n + 1-tes) Element bestimmt wird. Die klassische Mengenlehre aber, die eine unendliche Menge, ebenso wie eine endliche Menge, als durch eine Gesamtheit von Elementen gegeben ansieht, glaubte die Prinzipien der ein-eindeutigen Zuordnung zwischen den Elementen von Mengen — die Lehre von der Größenordnung der transfiniten Kardinalzahlen — völlig von den Prinzipien der Anordnung der Elemente isolieren zu können, um erst hinterher, in der Ordnungs- und Wohlordnungslehre, eine Brücke zwischen den beiden Betrachtungsweisen zu schlagen. In Wahrheit aber wird in den sinnvollen, mathematisch korrekten, Aussagen der Mengenlehre über unendliche Mengen die Anordnung der Elemente nicht negiert, sondern nur die

[1]) Demgemäß wird durch das Diagonalverfahren bewiesen, daß es neben den algebraischen Zahlen auch nicht-algebraische = transzendente Zahlen gibt. Dieser Beweis ist einwandfrei. Ferner läßt sich einwandfrei beweisen, daß durch jede Folge von transzendenten Zahlen weitere transzendente Zahlen, welche nicht zu dieser Folge gehören, bestimmt werden. Dagegen erheben sich gegen die Formulierung „Die Gesamtheit der transzendenten Zahlen ist von höherer Mächtigkeit als die Gesamtheit der algebraischen oder — was auf dasselbe hinauskommt — als die Gesamtheit der natürlichen Zahlen" die bereits gemachten und die noch folgenden Einwände. Ein allgemeines Kriterium für die Unterscheidung zwischen algebraischen und transzendenten Zahlen ist bis jetzt nicht gefunden worden. Hingegen wurde für einzelne irrationale Zahlen die Transzendenz nachgewiesen. Die wichtigsten sind e und π. Durch den Beweis der Transzendenz von π durch Lindemann wurde bekanntlich die Unmöglichkeit der Quadratur des Kreises mit Zirkel und Lineal dargetan.

[2]) Unter der Höhe einer algebraischen Gleichung (deren Koeffizienten man als ganzzahlig und ohne gemeinsamen Teiler voraussetzen darf) versteht man im obigen Zusammenhange die Summe der absoluten Werte ihrer Koeffizienten und ihres um 1 verminderten Grades.

spezielle Art ihrer Anordnung offen gelassen. Es gilt hier das im dritten Abschnitte über die endlichen Kardinalzahlen Gesagte mit der Verschärfung, daß zwar endlich viele Dinge vorliegen können, ohne daß sie durch Zählen geordnet werden, daß aber ein analoges „Vorliegen" des Unendlichen ausgeschlossen ist.

Dieser Sachverhalt wird noch klarer, wenn man die Äquivalenzdefinition, die mit dem Begriffe der „ein-eindeutigen Zuordnung" bzw. der Möglichkeit (können) ein-eindeutiger Zuordnung operiert, näher analysiert. Das potentielle Moment, welches in dieser Terminologie enthalten ist, drückt offenbar aus, daß hier keinerlei Abhängigkeit von dem Faktum des jeweiligen Erkenntnisbestandes in Frage kommt, sondern ein objektives Kriterium. Man kann z. B. die „Gesamtheit der geraden Zahlen" der „Gesamtheit der natürlichen Zahlen" nur dadurch umkehrbar eindeutig zuordnen, daß man zu jeder beliebigen geraden Zahl eine unmittelbar folgende gerade Zahl bestimmt, so daß es also eine erste, zweite, ... n-te gerade Zahl gibt. Analog ist die ein-eindeutige Zuordnung zwischen der „Menge der natürlichen Zahlen" und der „Menge der Rationalzahlen" zu begreifen. Es steht mithin nicht so, daß „zunächst" eine ungeordnete Gesamtheit von geordneten Paaren natürlicher Zahlen[1]) „gegeben" wäre, daß „dann" ein Gesetz aufgefunden werden könnte, wodurch ein erstes Paar und zu jedem Paar ein unmittelbar nachfolgendes Paar natürlicher Zahlen bestimmt würde, und daß endlich drittens auf Grund dieses Gesetzes die ein-eindeutige Zuordnung zu den natürlichen Zahlen erfolgte. Vielmehr verhält es sich folgendermaßen: Der Begriff einer unendlichen Gesamtheit von Zahlenpaaren ist sinnvoll überhaupt nur in Korrelation zu einem solchen Bildungsgesetz, dessen Angabe nichts anderes ist, als die umkehrbar eindeutige Zuordnung zu den natürlichen Zahlen, da eben hiedurch ein erstes, zweites, ... n-tes Zahlenpaar festgelegt wird.

Die Fehlannahme des aktual Unendlichen als einer Totalität diskreter Elemente zeitigt nun wichtige Folgen bei der Interpretation des Diagonalverfahrens, zu dessen Analyse wir jetzt übergehen.

Wir haben erkannt, daß der finite Sinn von Sätzen über die ein-eindeutige Zuordnung zwischen abzählbaren Mengen darin

[1]) D. h. von Rationalzahlen (vgl. oben S. 109).

liegt, daß ein Prinzip angegeben wird, welches für jede beliebige natürliche Zahl n die Zuordnung zwischen den n-ten Elementen der beiden Mengen herstellt.

Im Diagonalverfahren wird dagegen bewiesen, daß eine ein-eindeutige Zuordnung bestimmter — sogleich zu beschreibender — Art stets unvollziehbar ist. Es seien mehrere Zahlen — etwa die Zahlen von 0 bis 9 — gegeben, und man bilde aus diesen Zahlen n Variationen der n-ten Klasse (wobei n eine beliebige natürliche Zahl > 1 sei); dann gibt es offenbar noch andere Variationen der n-ten Klasse, denn deren Gesamtzahl 10^n ist größer als n. Um eine solche zu erhalten, kann man auf folgende Art vorgehen: Man bringe die vorliegenden n Variationen in irgend eine Ordnung und bilde zunächst diejenige Variation, die aus dem ersten Glied der ersten Variation, dem zweiten Glied der zweiten Variation, ... dem n-ten Glied der n-ten Variation zusammengesetzt ist. Dann bilde man eine weitere n-gliedrige Variation aus den vorliegenden Zahlen (0 bis 9), bei der das erste, zweite, ... n-te Glied verschieden ist vom ersten bzw. zweiten bzw. n-ten Glied der eben angegebenen Variation. Diese Variation ist sicherlich von jeder der ursprünglichen n Variationen verschieden. Hiemit ist das dem Diagonalverfahren zugrunde liegende finite Prinzip gekennzeichnet.

Wir haben im vorigen Abschnitte bei der Analyse der irrationalen Zahlen dargetan, daß ein unendlicher Dezimalbruch nur ein Symbol für eine abzählbare Folge natürlicher Zahlen ist, die bestimmten mathematischen Bedingungen genügt. Durch das Diagonalverfahren wird also, wenn wir von der — prinzipiell unwesentlichen — Symbolik der Dezimalbrüche absehen, gezeigt, wie durch jede beliebige abzählbare Folge von abzählbaren Folgen natürlicher Zahlen weitere in dieser Folge von Folgen nicht enthaltene abzählbare Folgen natürlicher Zahlen definiert werden können[1]). Dies geschieht in der Weise, daß in

[1]) Vgl. hiezu den Beweis dieses Satzes durch Poincaré in seinem Göttinger Vortrag „Über transfinite Zahlen" (Sechs Vorträge über ausgewählte Gegenstände aus der reinen Mathematik und mathematischen Physik, Leipzig und Berlin 1910, S. 45ff.); ferner Becker, „Mathematische Existenz", a. a. O., S. 601, Anm. 2: „Das Diagonalverfahren zeigt, genau genommen, folgendes: Wenn man eine abgezählte (gesetzmäßige) Reihe von Zahlfolgen hat, so kann man eine von diesen sämtlichen verschiedene Zahlfolge Stelle für Stelle berechnen."

die Definition der neuen Folge die Verschiedenheit gegenüber jeder der vorgegebenen Folgen eingeht, was dadurch erreicht wird, daß jede Stelle der neuen Folge einer bestimmten vorgegebenen Folge und innerhalb dieser Folge einer bestimmten Stelle ein-eindeutig zugeordnet wird und als verschieden gegenüber dieser Stelle definiert wird.

Es bedarf nach unseren oben gemachten nachdrücklichen Feststellungen wohl kaum der neuerlichen Betonung, daß der Begriff „abzählbare Folge natürlicher Zahlen" nicht eine unendliche Totalität für sich seiender Elemente bezeichnet, sondern den Bereich eines bestimmten Gesetzes, dem jede dieser natürlichen Zahlen genügt. Halten wir uns dies stets vor Augen, so dürfen wir, um die Darstellung nicht zu erschweren, unbesorgt die in der Mengenlehre gebräuchliche Terminologie verwenden. Ebenso dürfen wir nach erfolgter Aufklärung des präzisen Sinnes der „unendlichen Dezimalbrüche" gefahrlos mit dieser Symbolik operieren, um unmittelbar an die gegebene Darstellung des Diagonalverfahrens kritisch anschließen zu können. Dann läßt sich die durch das Diagonalverfahren aktuell gewordene, für die Mengenlehre entscheidende Frage, ob durch das Diagonalverfahren über die „Menge aller unendlichen Dezimalbrüche" etwas ausgesagt wird, wie folgt formulieren: L a ß t s i c h e i n s o l c h e s G e s e t z d e r A u f e i n a n d e r f o l g e u n e n d l i c h e r D e z i m a l b r ü c h e a n g e b e n, d a ß k e i n u n e n d l i c h e r D e z i m a l b r u c h d e n k b a r i s t, d e r n i c h t d u r c h d i e s e s G e s e t z e i n d e u t i g b e s t i m m t w ü r d e?

Bestünde ein solches Gesetz, dann ließe sich auf Grund des Diagonalverfahrens behaupten, daß zwischen den durch dieses Bildungsgesetz erzeugten (sämtlichen) Dezimalbrüchen und den natürlichen Zahlen eine ein-eindeutige Zuordnung nicht hergestellt werden kann, woraus sich dann, unter Berücksichtigung der Äquivalenz der Menge der natürlichen Zahlen mit einer Teilmenge der Menge der unendlichen Dezimalbrüche, die höhere Mächtigkeit der Menge der Dezimalbrüche gegenüber jener der natürlichen Zahlen ergeben würde. Aber ein solches umfassendes Erzeugungsprinzip ist durch das Diagonalverfahren keineswegs bestimmt, und wir werden sogar nachweisen, daß es überhaupt nicht gefunden werden kann.

Daher wird durch das Diagonalverfahren durchaus nicht bewiesen, daß eine Menge von höherer Mächtigkeit als derjenigen der Menge der natürlichen Zahlen als mathematischer Gegenstand

„existiert“. Die in der Mengenlehre herrschende entgegenstehende Meinung aber ist wesentlich darauf zurückzuführen, daß die Begriffsbestimmung der Dezimalbrüche, die Angabe ihrer gemeinsamen „Eigenschaften“, für ein definitorisches Prinzip einer Menge gehalten wurde. Demgegenüber sei abermals betont, daß durch die Definition der Dezimalbrüche keineswegs deren „Zusammenfassung zu einer Menge“ erfolgt; auch nicht in jenem Sinne, in dem die Mengenlehre von der Menge aller natürlichen Zahlen spricht. Denn die Reihe der natürlichen Zahlen ist durch ein „Erzeugungsprinzip“ definiert, eine Gesamtheit der Dezimalbrüche dagegen nicht[1]).

Hier — an der Schwelle der Lehre vom unabzählbar Unendlichen — wollen wir uns nochmals mit voller Deutlichkeit zum Bewußtsein bringen, in welcher Weise diese Lehre mit der Fehlinterpretation der Unendlichkeit der Zahlenreihe zusammenhängt.

Wir haben festgestellt, daß die natürlichen Zahlen logische Abstrakte des Zählprozesses sind, daß aber in dem Begriff der Zahlenreihe über diese Abstraktion hinaus eine „Idealisierung“ liegt. Sie besteht in der Voraussetzung des Fehlens einer festen oberen Schranke, so daß unter „Zahlenreihe“ das Abstrakt eines endlosen Zählprozesses zu verstehen ist.

[1]) Vgl. hiezu die folgenden Ausführungen Brouwers: „Let us now consider the concept: ‚denumerably infinite ordinal number‘.“ From the fact that this concept has a clear and well defined meaning for both formalist and intuitionist, the former infers the right to create the „set of all denumerably infinite ordinal numbers“, the power of which he calls aleph-one, a right not recognized by the intuitionist. Because it is possible to argue to the satisfaction of both formalist and intuitionist, first, that denumerably infinite sets of denumerably infinite ordinal numbers can be built up in various ways, and second, that for every such set it is possible to assign a denumerably infinite ordinal number not belonging to this set, the formalist concludes: „aleph-one is greater than aleph-null“, a proposition that has no meaning for the intuitionist.“ („Intuitionism and Formalism“, a. a. O., S. 91.)

Ferner seien folgende Sätze F. Brentanos hervorgehoben: „Etwas anderes ist, wenn man sagt, jedes von unendlich vielen Dingen, und wenn man sagt, alle zusammen seien widerspruchslos. Das erstere ist richtig, das letztere falsch, und durch diese Äquivokation scheinen viele und um so leichter getäuscht worden zu sein, als wenn Existenz nicht im Sinn von Widerspruchslosigkeit, sondern im eigentlichen Sinn genommen wird, sie nicht jedem einzelnen zukommen kann, ohne daß sie auch der Gesamtheit zukommt.“ „Vom ens rationis“ Abhandlung aus dem Nachlasse herausgegeben von Oskar Kraus, Philosoph. Bibl., Bd. 193, Leipzig 1925, S. 238ff. (254).

Hält man sich dies stets vor Augen, und vermeidet man demgemäß den Fehler, in der Zahlenreihe eine in sich geschlossene Totalität natürlicher Zahlen zu sehen, dann verschwindet auch die Versuchung, eine Gesamtheit aller Teilmengen der Menge der natürlichen Zahlen als eine an sich bestehende Gegebenheit anzusehen (oder aber, wenn man dies nicht tut, in einer den Sinn der Erkenntnis verfehlenden Interpretation solche Teilmengen erst durch die Erkenntnis erzeugt zu denken). Dagegen führt die Fehlinterpretation des Begriffes der „Zahlenreihe“ zu der Fehlinterpretation des Diagonalverfahrens; deshalb hat eine durchgreifende Methodenkritik schon hier einzusetzen; wenn auch die logischen Ungereimtheiten, die die kritisierte Auffassung im Gefolge hat, erst beim Operieren mit Sphären des unabzählbar Unendlichen auftreten.

Die irrige Meinung, daß sämtliche unendliche Dezimalbrüche zwischen 0 und 1 „vorliegen“, und daß es nur gelte, dieses vorliegende „Material“ mathematischer Behandlung zu unterwerfen, wird weiter bestärkt durch die scheinbare Anschaulichkeit des Linearkontinuums, dessen Punkte den reellen Zahlen zwischen 0 und 1 (die mit den echten unendlichen Dezimalbrüchen zusammenfallen) entsprechen sollen. Wir haben im vorigen Abschnitt bereits auf das Trügerische dieser Berufung auf Anschauung hingewiesen[1]).

Wir haben festgestellt, daß der finite Sinn des Diagonalverfahrens auf der Erkenntnistatsache basiert, daß die Anzahl der „Variationen k-ter Klasse von n Elementen mit Wiederholung“, d. i. n^k, für $k > 1$ größer ist als n. Da es sich hiebei um die Potenzen von n handelt, lag der Gedanke nicht ferne, die höheren Mächtigkeiten durch jene Potenzierung wirklich zu „erzeugen“. Diesen Versuch unternimmt Cantor durch die Bildung der Belegungsmengen abzählbarer Mengen. Wir wollen uns seinen Gedankengang wieder an dem Beispiel mit unendlichen Dezimalbrüchen klar machen.

Zwei nicht abbrechende echte unendliche Dezimalbrüche

---

[1]) Es sei hier auf einen treffenden Ausspruch von M. Baire (in einem Brief an M. Hadamard [1904], zit. nach Borel, a. a. O., S. 152) hingewiesen: „Dès qu'on parle d'infini (même dénombrable et c'est ici que je suis tenté d'être plus radical que Borel) l'assimilation, consciente ou inconsciente, avec un sac de billes qu'on donne de la main à la main doit complètement disparaître . . . . .“

sind dann und nur dann voneinander verschieden, wenn sie sich in mindestens einer Stelle voneinander unterscheiden. Wenn man nun jede Stelle hinter dem Dezimalpunkt von 0 bis 9 variiert — oder, wie Cantor sagt, „mit den Zahlen 0 bis 9 belegt" —, so scheint es einleuchtend, daß es keinen echten Dezimalbruch gibt, der nicht durch dieses Verfahren „erzeugt" würde. Hiedurch wäre demnach ein Weg zur Bestimmung „aller echten unendlichen Dezimalbrüche" gegeben.

Aber ist die Bildung der „Belegungsmenge"[1]) in Wahrheit ein „Verfahren"? Ist wirklich die Belegungsmenge aus der abzählbaren Menge konstruierbar, d. h. ohne Hilfe des im vorstehenden kritisierten Komprehensionsprinzips definierbar? Damit dies der Fall wäre, würde erforderlich sein, daß eine Belegungsordnung vorläge, vermöge welcher auf Grund von n vorausgegangenen Belegungen eine n + 1-te Belegung eindeutig bestimmt erscheint; denn ohne eine solche Regel entbehrt die Vorschrift des Belegens „ins Unendliche hinein" jedweden Sinnes.

Man verdeutliche sich die hier obwaltenden Beziehungen wieder durch Vergleich mit der „Menge aller natürlichen Zahlen". Bei dieser gelangt man durch Wiederholung der gleichen Operation (Addition von 1) von einer beliebigen Ausgangszahl zu jeder größeren Zahl; aber bei dem Scheinverfahren der Belegung fehlt eine solche Gesetzmäßigkeit. Selbst die Stellung der Aufgabe, ein Verfahren (Bildungsgesetz) für „alle unendlichen Dezimalbrüche" zu finden, ist in dieser Formulierung unzulässig. Denn sie setzt unerlaubterweise ein von jenem Bildungsgesetz unabhängiges „Vorliegen" von durch das Bildungsgesetz zu verknüpfenden sämtlichen Dezimalbrüchen voraus. Man darf nur fragen, ob sich ein — eventuell verschiedene Teilverfahren umspannendes — Bildungsgesetz angeben läßt, welches für zwei beliebige gegebene Dezimalbrüche deren verfahrenmäßige Verbundenheit zeigt[2]).

---

[1]) An die Stelle der Belegungsmenge (Potenzmenge) einer gegebenen Menge kann man, wie eine einfache Überlegung (vgl. etwa Fraenkel, a. a. O., S. 107) zeigt, stets die Menge aller Teilmengen dieser Menge setzen. Demgemäß gelten auch für jenen Begriff die von uns soeben über diesen gemachten Feststellungen.

[2]) In den „Principia Mathematica" (V. II, p. 458 ff.) wird — wie schon oben S. 40 erwähnt — die Bildung der Potenzmenge durch Operieren mit der „Beziehung der Identität" erreicht, was von Wittgenstein (a. a. O., Satz 5·4733 und

Diese Frage führt uns bereits in das zweite Hauptgebiet der reinen Mengenlehre, nämlich in die Theorie der Wohlordnung. Bevor wir uns dieser zuwenden, sei noch darauf hingewiesen, daß Cantor durch Iteration der Bildung von Belegungsmengen bzw. von Mengen aller Teilmengen unendlicher Mengen zu immer höheren Mächtigkeiten (transfiniten Kardinalzahlen) gelangt. Der Beweis ergibt sich mit Hilfe einer Verallgemeinerung des Diagonalverfahrens.

So ist im Sinne der Cantorschen Theorie die Menge aller reellen Zahlen die Potenzmenge der Menge aller natürlichen Zahlen und die Menge aller eindeutigen reellen Funktionen f (x) die Potenzmenge der Menge aller reellen Zahlen.

Ferner wollen wir erwähnen, daß Cantor mit den transfiniten Kardinalzahlen in analoger Weise „rechnet" (und zwar addiert, multipliziert, potenziert), wie dies mit endlichen Zahlen geschieht[1]).

So ergeben sich beispielsweise, wenn man mit a die Kardinalzahl der Menge aller natürlichen Zahlen, mit c die Kardinalzahl der Menge aller reellen Zahlen (des Kontinuums) und mit f die Kardinalzahl der Menge aller reellen Funktionen bezeichnet, folgende Gleichungen:

$$
\begin{array}{llll}
a + n = a, & a \,.\, n = a, & a^n = a & \text{(n ist eine beliebige} \\
a + a = a, & a \,.\, a = a, & n^a = c & \quad \text{endliche Zahl)} \\
c + a + n = c, & c \,.\, a = c, & a^a = c & \\
c + c = c, & c \,.\, c = c, & c^n = c & \\
f + c = f & f \,.\, f = f & c^c = f &
\end{array}
$$

In das geometrisch „Anschauliche" übersetzt besagt beispielsweise $c\,.\,a = c$, daß die Menge aller Punkte einer beliebigen Strecke äquivalent ist der Menge aller Punkte einer Geraden, und $c^n = c$, daß die Menge aller Punkte eines eindimensionalen

---

Satz 5·53—5·5352) einer vernichtenden Kritik unterzogen worden ist. Zu vergleichen ist auch die — im Anschluß an Wittgenstein erfolgte — Kritik bei Ramsey, a. a. O., S. 360ff.

[1]) Es gilt das assoziative und kommutative Gesetz, sowohl für Addition wie für Multiplikation, und das distributive Gesetz für die Verknüpfung von Addition und Multiplikation. Ein Produkt von Kardinalzahlen ist dann und nur dann 0, wenn mindestens einer der Faktoren 0 ist. Auch auf die Potenzierung sind die Grundregeln des Rechnens mit finiten Zahlen übertragbar. Es gilt also:

$$m^p \,.\, m^q = m^{p+q} \qquad m^p \,.\, n^p = (mn)^p \qquad (m^p)^q = m^{pq}$$

Die Bildung eindeutiger inverser Operationen ist aber nicht möglich.

Kontinuums äquivalent ist der Menge aller Punkte eines Kontinuums von beliebiger endlicher Dimensionenzahl.

Endlich sei schon an dieser Stelle nachdrücklich darauf hingewiesen, daß die Bildung der Potenzmenge zwar — im Sinne der Mengenlehre — den Aufstieg zu einer höheren Mächtigkeit (Kardinalzahl) darstellt, daß aber nicht feststeht, ob dies die nächsthöhere Mächtigkeit (Kardinalzahl) ist.

Zu dieser jedoch gelangt Cantor auf Grund seiner Theorie der wohlgeordneten Mengen (bzw. Ordinalzahlen). Mit der Problematik, die aus dieser Zweigleisigkeit erwächst, werden wir uns im folgenden noch zu befassen haben.

Wir kommen nun zur knappen Darstellung der Prinzipien der Wohlordnung von Mengen bzw. zur Theorie der Ordnungszahlen. Unseren Ausgang wollen wir hiebei von den geordneten Mengen nehmen.

Da die Mengenlehre die bereits erwähnte und kritisierte These vertritt, daß Denkoperationen mit ungeordneten unendlichen Mengen möglich seien, so sieht sie sich vor die Aufgabe gestellt, definitorisch festzulegen, unter welchen Umständen eine unendliche Menge geordnet heißen soll. Dies geschieht durch Definition der Ordnung als einer zusammenhängenden, asymmetrischen, transitiven Beziehung zwischen den Elementen einer Menge. Das will besagen:

1. Von zwei Elementen a und b geht eines dem andern voran (Verknüpftheit).

2. Wenn von zwei Elementen a und b, a dem b vorangeht[1]), so kann nicht b dem a vorangehen (Asymmetrie).

3. Wenn von drei Elementen a, b, c, a dem b und b dem c vorangeht, so geht a dem c voran (Transitivität).

Die Elemente einer aus mindestens zwei Elementen bestehenden, insbesondere also einer unendlichen Menge sind stets auf verschiedene Weise ordenbar.

So kann etwa die Menge der ganzen (positiven und negativen) Zahlen beispielsweise auf die folgenden Arten geordnet werden:

$$\{\ldots\ldots -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\ldots\ldots\}$$

---

[1]) Das „Vorangehen" ist hier wie bei der Folge der natürlichen Zahlen außerzeitlich und außerräumlich zu verstehen. Ein a geht dann einem b voran, wenn das Vorliegen von b mit dem Nichtvorliegen von a unverträglich ist.

$\{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots\ldots\ldots\ldots\}$

$\{0, 2, -2, 4, -4, 6, -6, \ldots\ldots 1, -1, 3, -3, 5, -5, \ldots\ldots\}$

Die Definition der Gleichordnung oder — wie es in der Mengenlehre heißt — „Ähnlichkeit" von geordneten Mengen geschieht in folgender Weise:

Eine geordnete Menge M heißt einer geordneten Menge N **ähnlich**, wenn die Elemente von N denjenigen von M auf solche Art zugeordnet werden können, daß jedem Element m von M in umkehrbar eindeutiger Weise ein einziges Element n von N entspricht und daß bei dieser Zuordnung die Anordnung entsprechender Elemente erhalten bleibt (d. h. daß, falls m und n sowie m′ und n′ zwei Paare entsprechender Elemente sind, aus der in M geltenden Beziehung: „m geht m′ voran", stets die Beziehung in N: „n geht n′ voran" folgt und umgekehrt).

Die Ähnlichkeit von Mengen schließt also ihre Äquivalenz ein. Von zwei ähnlichen Mengen sagt man auch, daß sie zum selben **Ordnungstypus** gehören. Den Ordnungstypus der natürlichen Zahlen in der „natürlichen" Reihenfolge 1, 2, 3 …… bezeichnet man mit ω, den Ordnungstypus der negativen Zahlen in der „natürlichen" Reihenfolge …. —3, —2, —1 mit $^*\omega$.

Als eine besondere Art der geordneten Mengen behandelt nun die Mengenlehre die wohlgeordneten Mengen, deren Begriff durch folgende Definition festgelegt wird:

Eine geordnete Menge heißt **wohlgeordnet**, wenn jede von der Nullmenge verschiedene Teilmenge von M (also auch M selbst) ein **erstes Element** enthält.

Wohlgeordnet sind also beispielsweise die Mengen, die zum Ordnungstypus ω gehören, dagegen sind nicht wohlgeordnet die Mengen vom Ordnungstypus $^*\omega$.

Ein weiteres Beispiel für Wohlordnung ist die Anordnung der Menge der ganzen positiven und negativen Zahlen in folgender Art:

$$\{0, 1, 2, 3, \ldots\ldots -1, -2, -3, \ldots\ldots\}$$

dagegen ist die Anordnung,

$$\{\ldots\ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\ldots\}$$

keine Wohlordnung.

Unmittelbar aus der Definition der Wohlordnung folgen nachstehende Sätze:

1. In einer wohlgeordneten Menge hat jedes Element (außer dem etwaigen letzten Element) ein einziges unmittelbar nachfolgendes Element.

2. Jede geordnete Menge, die einer wohlgeordneten Menge ähnlich ist, ist selbst wohlgeordnet.

3. Jede Teilmenge einer wohlgeordneten Menge ist selbst wohlgeordnet. — Die Ordnungstypen der wohlgeordneten Mengen werden Ordinalzahlen oder Ordnungszahlen genannt[1]).

Man definiert nun den Begriff „Abschnitt einer wohlgeordneten Menge" wie folgt: Ist m ein beliebiges Element der wohlgeordneten Menge M, so nennt man die Teilmenge aller dem Element m vorangehenden Elemente von M den durch m bestimmten Abschnitt von M. Es läßt sich beweisen, daß eine wohlgeordnete Menge keinem ihrer Abschnitte ähnlich ist.

Hieraus gewinnt man die Größenordnung der Ordinalzahlen. Man nennt nämlich die Ordinalzahl von M (und damit jeder zu M ähnlichen Menge) größer als die Ordinalzahl jedes Abschnittes von M und umgekehrt die Ordinalzahl jedes Abschnittes von M kleiner als die Ordinalzahl von M selbst.

Die „nächstgrößere" Ordinalzahl definiert man folgendermaßen:

Ist μ eine beliebige Ordinalzahl und wird die Menge aller Ordinalzahlen, die kleiner als μ sind, nach der Größe der Ordinalzahlen geordnet, so daß sie mit 0, 1, 2, ... beginnt, so ist die Menge W (μ) wohlgeordnet und von der Ordinalzahl μ.

Cantor sah in dieser seiner Theorie eine Fortsetzung der gewöhnlichen Zahlenreihe über das Endliche hinaus. Man erkennt auch leicht, daß die natürlichen Zahlen Ordinalzahlen im Sinne unserer Definition sind; sie werden als endliche oder finite Ordinalzahlen von den unendlichen (transfiniten) Ordinalzahlen unterschieden und fallen mit den finiten Kardinalzahlen zusammen. Der von 0 beginnende Aufstieg in der Reihe der Ordinalzahlen ist durch die eben angegebene Gewinnung der Ordinalzahl $\mu + 1$ aus der Ordinalzahl μ wohl definiert bis zu jeder beliebigen endlichen Ordinalzahl.

Wie aber kommt Cantor von den endlichen Ordinalzahlen zur kleinsten transfiniten Ordinalzahl? Hiezu bedarf es

[1]) Cantor hat ebenso wie für Kardinalzahlen auch für Ordnungstypen Rechenoperationen definiert; bei letzteren gilt aber weder für die Addition noch für die Multiplikation das kommutative Gesetz.

eines neuen Prinzips, das er mit Hilfe des Begriffes der Fundamentalreihe formuliert. Dieser Begriff wird, wie folgt, bestimmt:

Ist M eine geordnete Menge, so soll jede in ihr enthaltene Teilmenge vom Typus ω eine steigende Fundamentalreihe heißen, jede Teilmenge vom Typus $^*\omega$ heiße eine fallende Fundamentalreihe.

Das neue Erzeugungsprinzip aber lautet: Für jede Fundamentalreihe $\{f_\nu\}$ wachsender Ordinalzahlen existiert eine kleinste Ordnungszahl, die größer als alle f_ν ist. Sie wird als Limeszahl bezeichnet[1]).

ω selbst ist danach die Limeszahl der wohlgeordneten Menge der natürlichen Zahlen und demgemäß die kleinste transfinite Ordinalzahl. Dann geht es wieder auf Grund des ersten Prinzips zu weiteren Ordinalzahlen $\omega + n$ (wobei n eine natürliche Zahl ist). Die Ordinalzahl $\omega . 2$ aber ist wieder die Limeszahl der Fundamentalreihe.

$$\omega,\ \omega + 1, \ldots\ldots\ \omega + n, \ldots\ldots$$

Ein Beispiel für die Ordinalzahl $\omega . 2$ gibt die Reihe: 1, 3, 5, 7, ...; 2, 4, 6, 8, ...

Man kann schon aus diesen Beispielen erkennen, wie — allgemein — die Ordnungszahlen $\omega . m + n$ bestimmt werden.

Die Ordnungszahl $\omega . \omega$ oder ω^2 aber ist die Limeszahl der Reihe

$$\omega,\ \omega . 2,\ \omega . 3, \ldots\ldots\ \omega . n, \ldots\ldots$$

Man kann die natürlichen Zahlen nach dem Ordnungstypus ω^2 beispielsweise folgendermaßen ordnen: In erster Linie möge bei der Anordnung die Anzahl der Primfaktoren berücksichtigt werden (wobei gleiche Primfaktoren entsprechend ihrer Anzahl gezählt werden) in zweiter Linie die Größe der zu ordnenden Zahlen. Dann erhält man nachstehendes Wohlordnungsschema: 1, 3, 5, 7, 11, ...; 4, 6, 9, 10, 14, ...; 8, 12, 18, 27, ...; 16, 24, 36, 40, ...

Durch Kombination der beiden angegebenen Cantorschen

---

[1]) An Stelle der beiden genannten Prinzipien kann man das folgende setzen: „Ist M eine Menge von Ordinalzahlen mit der Eigenschaft, daß bei Auftreten irgend einer Ordinalzahl in M auch jede kleinere Ordinalzahl (einschließlich der 0) in M vorkommt, so ist die nach der Größe der Ordinalzahlen geordnete Menge M wohlgeordnet, und die zu M gehörige Ordinalzahl ist die kleinste Ordinalzahl, die größer ist als jede in M als Element vorkommende Ordinalzahl."

Prinzipien lassen sich nun immer höhere Ordnungszahlen bilden. So ergibt sich ω^{ω} aus der Fundamentalreihe:

$$\omega,\ \omega^2,\ \omega^3, \ldots\ldots \omega^n, \ldots\ldots$$

Wir wollen ein (von G. Hessenberg stammendes) Verfahren, die natürlichen Zahlen nach dem Ordnungstypus ω^{ω} wohlzuordnen, angeben.

Man ordne die natürlichen Zahlen in erster Linie nach der Zahl der (gleichen und ungleichen) Primfaktoren, die sie enthalten; bei gleicher Anzahl der Faktoren soll für die Anordnung zweitens die Größe der Faktoren in der Weise maßgebend sein, daß diejenigen Zahlen vorangehen, in denen der kleinste Primfaktor enthalten ist; unter solcherart zusammengehörigen Reihen soll die Anordnung drittens nach den höchsten Potenzen, in denen jene kleineren Primfaktoren auftreten, geordnet werden und in jenen Gruppen werde endlich viertens nach der Größe der Zahlen geordnet. Hiedurch ergibt sich folgende Anordnung der natürlichen Zahlen: 1, 2, 3, 5, 7, 11, ...; 4, 6, 10, 14, ...; 9, 15, 21, 33, ...; ... 8, 12, 20, 28, ...; 18, 30, 42, 66, ...; ... 27, 45, 63, 99, ...; ... 16, 24, 40, 56, ...; ...

Die nächste charakteristische Etappe ist dann der Aufstieg zu den sogenannten „ε-Zahlen“.

Er basiert auf der Fundamentalreihe:

$$\omega,\quad \omega^{\omega},\quad \omega^{\omega^{\omega}},\quad \ldots\ldots \omega^{\omega^{\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}}$$

Die Einführung der neuen Bezeichnungsweise ist darum erforderlich, weil die mit ε bezeichnete Limeszahl der obigen Reihe nicht mehr mit Hilfe der Addition, Multiplikation und Potenzsymbolik dargestellt werden kann. Cantor bezeichnet als Epsilonzahlen allgemein diejenigen Ordinalzahlen ξ, die der Beziehung $\omega^{\xi} = \xi$ genügen. ε selbst ist die kleinste Epsilonzahl. Die erste Konstruktion von Ordinalzahlen, die zu den Epsilonzahlen führt, stammt von G. H. Hardy[1]).

Wir kehren zur Darstellung der Theorie der Wohlordnung zurück. Sie gipfelt in den beiden „Hauptsätzen der Theorie

[1]) „A theorem concerning the infinite cardinal numbers.“ (Quart. Journ. of pure and applied Math., Bd. 35, S. 87 bis 94, 1903.)

der wohlgeordneten Mengen" — deren erster die Vergleichbarkeit zweier beliebiger wohlgeordneter Mengen in bezug auf ihre Ordnungszahlen und deren zweiter die Vergleichbarkeit in bezug auf ihre Kardinalzahlen behauptet — und in dem sogenannten Wohlordnungssatz.

Der erste Hauptsatz lautet:

Zwei wohlgeordnete Mengen sind entweder einander ähnlich, oder eine von ihnen ist einem Abschnitt der anderen ähnlich. Von zwei ungleichen Ordinalzahlen ist also stets eine die kleinere und die andere die größere.

Der zweite Hauptsatz lautet:

Wohlgeordnete Mengen sind nicht nur in bezug auf ihre Ordinalzahlen, sondern auch in bezug auf ihre Kardinalzahlen stets vergleichbar; die Kardinalzahlen zweier wohlgeordneter Mengen sind entweder gleich, oder eine von ihnen ist kleiner als die andere.

Sind nämlich M und N wohlgeordnete Mengen und ist die Ordinalzahl von M kleiner als die Ordinalzahl von N, so ist die Kardinalzahl von M gleich oder kleiner als die Kardinalzahl von N.

Der uns vor allem interessierende zweite Hauptsatz ergibt sich leicht aus dem ersten, wenn man sich vor Augen hält, daß einerseits in dem Begriff der Ähnlichkeit derjenige der Äquivalenz enthalten ist, und daß anderseits der „Abschnitt einer wohlgeordneten Menge", mit dessen Hilfe das Aufsteigen zur nächsthöheren Ordinalzahl erfolgt, eine spezielle Teilmenge dieser wohlgeordneten Menge ist.

Durch die beiden Hauptsätze ist aber über die Entscheidung folgender für die Mengenlehre grundwichtiger Frage noch keine Klarheit geschaffen: Ist es möglich, zu irgend einer transfiniten Kardinalzahl mindestens eine Ordinalzahl zu finden, die zu ihr „gehört"? Mit anderen Worten: Ist es möglich, zu einer unendlichen Menge beliebiger Mächtigkeit eine äquivalente wohlgeordnete Menge zu finden? Das grundsätzliche Bestehen dieser Möglichkeit behauptet der Wohlordnungssatz:

„Jede Menge kann in die Form einer wohlgeordneten Menge gebracht werden."

Die Mathematiker haben bewunderswerten Scharfsinn aufgewandt, um diesen Satz zu beweisen und Zermelo hat zwei „Beweise"[1]) geliefert, die mit dem Herausheben (der Aus-

[1]) „Beweis, daß jede Menge wohlgeordnet werden kann", Math. Ann.,

wahl) von Elementen und Teilmengen aus unendlichen Mengen auf Grund des sogenannten „Auswahlprinzips“ operieren.

Soll nun — so wird weiter argumentiert — einerseits der Wohlordnungssatz, anderseits der Mächtigkeitskalkül gelten, so muß es unter den Ordinalzahlen eine kleinste geben, die zu einer nicht mehr abzählbaren Menge gehört und demzufolge eine kleinste nicht abzählbare Kardinalzahl. Zu jener Ordinalzahl gelangt Cantor auf folgende Weise:

Er denkt sich die wohlgeordnete Menge aller endlichen und abzählbaren Ordinalzahlen gebildet. Diese hat ihrerseits die nächstgrößere Ordinalzahl, die selbst nicht mehr abzählbar sein kann und daher die kleinste zur nächsthöheren Mächtigkeit gehörige Ordinalzahl darstellt. Durch Iteration dieses Verfahrens gelangt Cantor zu immer höheren Mächtigkeiten, und zwar jeweils von einer Mächtigkeit zur nächsthöheren Mächtigkeit.

Man bezeichnet die Kardinalzahlen unendlicher wohlgeordneter Mengen als Alephs ($\aleph$) und gibt ihnen fortlaufende Indices: $\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \ldots\ldots \aleph_i, \ldots\ldots \aleph_\omega, \ldots$; $\aleph_0$ gehört zu den abzählbaren Mengen. Die nach der Größe der Ordinalzahlen geordnete Menge aller zu einem Aleph gehörigen Ordinalzahlen wird als Zahlenklasse dieses Alephs bezeichnet. Die endlichen Ordinalzahlen werden in die erste, die zu $\aleph_0$ gehörigen Ordinalzahlen in die zweite Zahlenklasse eingereiht.

Es entsteht nun die weitere Frage, in welchem Verhältnis der Aufstieg zu höheren Mächtigkeiten mit Hilfe des Wohlordnungskalküls zu dem oben dargestellten und kritisierten Aufstieg mit Hilfe der Potenzmengenbildung steht. Jener führt voraussetzungsgemäß sicherlich zur nächsthöheren Kardinalzahl, hingegen könnte es sein, daß bei der Potenzmengenbildung Kardinalzahlen übersprungen werden. Im Vordergrund des Interesses steht hier begreiflicherweise der erste Schritt im Unendlichen, d. i. die Frage, ob die Potenzmenge der abzählbaren Mengen, die mit dem sogenannten Kontinuum gleichmächtig ist, die Mächtigkeit $\aleph_1$ oder eine höhere Mächtigkeit hat. Dieses berühmte ungelöste — und wie wir zeigen werden, unlösbare — Problem der Mengenlehre führt den Namen Kontinuumpro-

Bd. 59, S. 514 bis 516, 1904. „Neuer Beweis für die Wohlordnung“, ibd., Bd. 65, S. 107 bis 128, 1908.

blem[1]). An seine Bewältigung haben seit Jahrzehnten eine Reihe der bedeutendsten Mathematiker ihre Kraft gewendet.

Wir kommen nun zur kritischen Analyse der dargestellten Theorie. Hiebei wird es unser leitendes Prinzip sein, auf das schärfste die mathematischen Sachverhalte selbst von der an sie geknüpften Interpretation zu sondern. Cantor sieht — wie schon erwähnt — in den transfiniten Ordinalzahlen eine Fortsetzung der natürlichen Zahlenreihe über das Endliche hinaus. Diese Auffassung führt ihn, wie wir zeigen werden, zu Konsequenzen, die ungeachtet der Genialität ihrer gedanklichen Konzeption logisch unhaltbar sind. Wir werden demgegenüber den unfaßbaren Gedanken eines Operierens im Unendlichen ausschalten und nach dem echten (finiten) Prinzip fragen, das der Stufenfolge der Ordinalzahlen zugrunde liegt. Hiebei handelt es sich nicht etwa um eine „finite Interpretation", die an Stelle der „transfiniten Interpretation" Cantors gesetzt werden soll, sondern um die schlichte Beschreibung der mathematischen Beziehungen selbst. Nur eine Bemerkung sei noch vorausgeschickt: Bei den Mathematikern begegnet man häufig folgender Auffassung: „Was das Wesen der natürlichen Zahlen (oder eines anderen mathematischen Gegenstandes) ist, kümmert uns nicht, was uns allein interessiert, sind die Relationen, die zwischen den natürlichen Zahlen (bzw. den fraglichen mathematischen Gegenständen) angenommen werden." Nun ist aber die Sachlage ja in Wahrheit so, daß ein mathematischer Gegenstand „hinter" jenen Relationen gar nicht besteht; diese sind nämlich — wie wir im dritten Abschnitt bei der Analyse des Begriffes der natürlichen Zahl eingehend dargetan haben — Verknüpfungen von Unverträglichkeitsbeziehungen, und der mathematische Gegenstand ist nichts anderes als der „Träger" dieser Unverträglichkeitsbeziehungen. „Das Wesen der mathematischen Gegenstände feststellen" heißt also gar nichts anderes, als die spezifische Verknüpfung dieser Unverträglichkeitsbeziehungen deutlich erfassen.

Fragen wir also nach dem legitimen mathematischen Gehalt der Theorie der Wohlordnung bzw. der Ordinalzahlen, so ist damit die Aufgabe gestellt, überall dort, wo in ihr mathemati-

---

[1]) Unter den neuesten Forschungen zu diesem Problem ist vor allem Hilberts Arbeit: „Über das Unendliche" hervorzuheben; ferner W. Sierpiński, „Sur l'hypothèse du continu", Fundamenta Mathematicae, Bd. 5, S. 177 bis 187, 1924.

sche Aussagen in transfiniter Interpretation auftreten, deren schlichten finiten Sinn festzustellen.

Untersuchen wir zunächst, was die Aussage bedeutet, daß eine bestimmte Zahl in einer bestimmten unendlichen wohlgeordneten Menge, etwa in der Menge der nach ihrer Größe geordneten Primzahlen, enthalten ist. Das besagt offenbar nichts anderes, als daß diese Zahl unter das Gesetz fällt, als dessen Bereich jene Menge erscheint, in unserem Beispiel also, daß die betreffende Zahl eine Primzahl ist[1]. Die „Übersetzung ins Finite", die wir hier an einem elementaren Beispiel verdeutlicht haben, gilt nun sinngemäß für alle die Iterationen und verwickelteren Verschachtelungen von Gesetzen, die — wie wir sogleich dartun werden — das Wesen der Wohlordnung ausmachen. Hat man diesen Sachverhalt prinzipiell erfaßt, so läßt sich der prägnante Sinn der Theorie der Wohlordnung unschwer bestimmen.

Wir können nun sogleich in medias res gehen und wollen als Beispiel für den zu beschreibenden Sachverhalt ein einfaches Modell wählen. Es seien verschiedene Dinge D mit Zeichen zu versehen. Als Zeichen mögen vorliegen: 2, 4, 6 ...... in unbekannter Anzahl, wobei aber feststehe, daß sie in geschlossener Serie vorhanden sind, d. h. daß das Vorhandensein eines Zeichens für eine höhere Zahl (etwa die 12) hinreichende Bedingung ist für das Vorhandensein des Zeichens für jede beliebige niedrigere gerade Zahl (also z. B. 10). Außerdem seien die drei Zeichen 1, 3, 5 vorhanden. Nun werde folgende Festsetzung für die Bezeichnungsordnung getroffen: Zuerst werden die vorhandenen geraden Zahlen zur Bezeichnung verwendet, und zwar der Größe nach; sind diese verbraucht, so gelangen die drei ungeraden Zahlen — ebenfalls der Größe nach — zur Verwendung. Es ist daher unbestimmt, welches der unmittelbare Vorgänger von 1 ist; für die Zahl 3 dagegen gilt, daß sie zwar einen bestimmten unmittelbaren Vorgänger — nämlich die 1 — hat, daß aber der unmittelbare Vorgänger dieses ihres unmittelbaren Vorgängers unbestimmt bleibt. Somit ist jedes Zeichen, das in bezug auf die Unbestimmtheitszäsur einen eindeutig bestimmten Platz einnimmt, vor jedem anderen durch ein Anordnungskriterium zu unterscheiden.

---

[1] Vgl. oben S. 97.

Man erkennt ohneweiters, daß die hier auftretenden „Unbestimmtheiten“ in strenger Korrelation zu „Gesetzen“ stehen, denn die Unbestimmtheit ist der durch die Bildungsgesetze begrenzte Spielraum. Daher könnten sämtliche folgenden Formulierungen derart umgefort werden, daß an Stelle von „Unbestimmtheiten“ von „Gesetzen“ oder von „Funktionen“ gesprochen wird.

Nun mögen die folgenden Definitionen eingeführt werden:

1. Zwei Ordnungsregeln O_1 und O_2 mögen „ähnlich“ heißen, wenn durch O_2 die gleiche Anzahl Unbestimmtheiten eingeführt wird, wie durch O_1, und wenn die Anzahl der — auf die letzte Unbestimmtheit folgenden — bestimmten Zeichen ebenfalls gleich ist.

2. Eine Ordnungsregel O_2 möge gegenüber einer Ordnungsregel O_1 als „nächst höhere“ bezeichnet werden, wenn durch sie die gleiche Anzahl Unbestimmtheiten definiert wird wie durch O_1 und wenn die Anzahl der — auf die letzte Unbestimmtheit folgenden — bestimmten Zeichen um 1 größer ist als gemäß O_1.

Durch diese Festsetzungen erscheint der finite Sinn der transfiniten Ordinalzahlen für jedes der $\omega . m + n$ fixiert[1]). Um aber zu den höheren Ordinalzahlen zu gelangen, muß man mit dem eben angewandten Prinzip der Hintereinanderschaltung von Unbestimmtheiten das Prinzip der Ineinanderschachtelung von Unbestimmtheiten kombinieren. So ist bei der Ordnungszahl ω^2 die Anzahl der hintereinandergeschalteten Unbestimmtheiten selbst unbestimmt, und der Ordinalzahl ω^ω entspricht die Ineinanderschachtelung von vier Unbestimmtheiten.

Wir wollen uns an dieser letzteren Ordinalzahl den logischen Kern der hier obwaltenden Beziehungen völlig klar machen, und zwar an dem oben zitierten Hessenbergschen Beispiel der Wohlordnung der natürlichen Zahlen nach diesem Ordnungstypus. Hier sind, wie wir festgestellt haben, vier Anordnungskriterien ineinandergeschachtelt, und zwar

1. Zahl der Primfaktoren,
2. Größe der Primfaktoren,
3. höchste Potenzen der Primfaktoren,
4. Größe der Zahlen.

Die gegenseitige Ordnung (Vorangehen bzw. Nachfolgen) ist also für zwei beliebige natürliche Zahlen mit Hilfe dieser vier

[1]) Vgl. hiezu auch W. Ackermann, „Begründung des ‚tertium non datur‘“, a. a. O., S. 13ff.

Kriterien festgelegt, und es steht auch diejenige Zahl fest, die der unmittelbare Nachfolger irgend einer angegebenen Zahl ist.

Aber diese logische Beziehung darf nicht, wie dies in der Mengenlehre geschieht, so interpretiert werden, als gingen bestimmten Zahlen — beispielsweise der Zahl 10 — Iterationen von unendlichen Mengen von Zahlen voran. Vielmehr hat es zu heißen:

Wenn irgend zwei Zahlen vorliegen, so ergibt sich zwischen ihnen eine Ordnungsbeziehung (die eventuell auch diejenige der unmittelbaren Nachfolge sein kann) auf Grund der genannten vier Kriterien. Aber welche Zahlen vorliegen, bleibt unbestimmt, und es ist sogar für jede der durch unsere Kriterien bestimmten Elementefolgen, Folgen von Folgen und Folgen von Folgen von Folgen unbestimmt, wieviele Vertreter vorliegen, ja ob überhaupt Vertreter von ihnen vorliegen.

Man mag dieses „Vorliegen" zwecks Veranschaulichung wieder so auffassen, daß man sich die Zahlen durch Zahlzeichen repräsentiert denkt; doch darf hiedurch nicht die Einsicht in den unanschaulichen Charakter der in Rede stehenden Gesetzlichkeit verhindert werden[1]).

Hingegen ist das Cantorsche Prinzip der Erzeugung immer höherer Ordnungszahlen, wonach es zu jeder Fundamentalreihe wachsender Ordnungszahlen eine Ordnungszahl gibt, die größer ist als alle Ordnungszahlen der Fundamentalreihe, in dieser Form abzulehnen, da es mit unendlichen Mannigfaltigkeiten operiert. Das gleiche gilt von der oben[2]) zitierten entsprechenden Cantorschen Formulierung mit Hilfe der wohlgeordneten Mengen.

Ihr mathematischer Sinn jedoch reicht so weit, wie die Hintereinanderschaltung und die Ineinanderschachtelung von Gesetzen, und jede neue Limeszahl stellt einen weiteren Schritt innerhalb dieses Prozesses dar. Aber sie versagt an dem für die transfinite Mengenlehre entscheidenden Punkte, nämlich dort, wo es gilt, den Aufstieg zu den höheren Alephs, und damit zu den über das Abzählbare hinausgehenden transfiniten Zahlenklassen logisch zu formulieren.

Wir haben oben bei Analyse des Diagonalverfahrens dar-

---

[1]) Von der Analyse des finiten Sinnes der höheren transfiniten Ordinalzahlen, insbesondere der Epsilonzahlen, dürfen wir absehen, da sie für die Behandlung des zentralen Problems der Möglichkeit des Aufstieges zu höheren Mächtigkeiten im Progreß der Ordinalzahlen nicht erforderlich ist.

[2]) S. 154, Anm. 1.

getan, daß durch diesen Beweis keineswegs die „Existenz“ höherer transfiniter Mächtigkeiten garantiert wird, und weiter festgestellt, daß dem Aufsteigen zu höheren Mächtigkeiten durch „Bildung“ der Potenzmenge nur so weit ein mathematischer Sinn abgewonnen werden kann, als es gelingt, eine eindeutige Belegungsordnung derart festzulegen, daß auf Grund von n Belegungen eine n + 1-te Belegung bestimmt wird.

Mit dem Begriff einer Menge von höherer als abzählbarer Mächtigkeit könnte also nur dann sinnvoll operiert werden, wenn es sich zeigen ließe, daß der Progreß in der Reihe der Ordinalzahlen selbst, also die Iteration von Hintereinanderschaltungen und Ineinanderschachtelungen von Gesetzen, über das Abzählbare hinausführt, d. h. zu Mengen führt, die der Menge der natürlichen Zahlen nicht ein-eindeutig zuordenbar sind, während sie echte Teilmengen besitzen, für die eine solche Zuordenbarkeit besteht.

Kurz formuliert: *An keinem Punkte der Theorie der transfiniten Ordinalzahlen darf eine unabhängig hievon bestehende Stufenfolge transfiniter Kardinalzahlen vorausgesetzt werden. Die Zweigleisigkeit im transfiniten Prozeß fällt fort. Auf eben dieser Voraussetzung aber beruht die Cantorsche Begründung der Stufenfolge transfiniter Zahlenklassen und ist darum hinfällig.*

Damit erweist sich der *einzige* von *Cantor* angegebene Weg, um zu höheren Alephs zu gelangen, als ungangbar. Doch bedarf es noch des Beweises, daß ein solcher Aufstieg *prinzipiell* ausgeschlossen ist.

Machen wir uns deutlich, was es besagen würde, wenn durch irgend ein Verfahren ein derartiger Aufstieg zu einer höheren Mächtigkeit möglich wäre. Dann müßte es offenbar Aussagen der reinen Mathematik geben, die nur innerhalb der Sphäre dieser höheren Mächtigkeiten gelten würden. Denn mathematische Gegenstände unterscheiden sich ja nur durch die Verschiedenheiten der logischen Beziehungen, als deren „Träger“ sie definiert sind[1]), und da die Ordnungszahlen, die zu höheren Zahlenklassen als der zweiten Zahlenklasse gehören würden, „neue“, d. h. von jeder endlichen und abzählbaren Ordnungszahl verschiedene Zahlen sein sollen, müßten gewisse wider-

[1]) Vgl. oben S. 158.

spruchsfreie Systeme mathematischer Aussagen bestehen, die zwar für sie zutreffen, aber für keine Zahl der ersten oder der zweiten Zahlenklasse. Demgemäß würde der Beweis, daß solche Systeme mathematischer Aussagen nicht denkbar sind, die Ausschaltung der über $\aleph_0$ hinausgehenden Kardinalzahlen bedeuten.

Dieser Beweis aber wurde tatsächlich erbracht, und zwar im Anschluß an L. Löwenheim[1]) von Th. Skolem[2]), und es ist charakteristisch für die starke Immunisierung der mengentheoretischen Forschung gegen Antinomien, daß dieser Beweis nicht noch weit größere Beunruhigung hervorgerufen hat, als dies tatsächlich der Fall war.

Der Löwenheim-Skolemsche Satz lautet: „Es sei eine unendliche Reihe von Zählaussagen gegeben, u_1, u_2 ..... mit den ganzen Zahlen numeriert; ist dann die Forderung der gleichzeitigen Gültigkeit aller dieser Aussagen widerspruchsfrei, so können sie alle gleichzeitig erfüllt werden innerhalb der unendlichen Reihe der ganzen positiven Zahlen 1, 2, 3, ... bei passender Wahl der Klassen- und Relationssymbole."

Unter einer „Zählaussage" wird hiebei eine Aussage verstanden, die aus den mathematischen Grundobjekten — als welche wir die natürlichen Zahlen annehmen können — durch solche logische Verknüpfungen gebildet wird, bei welchen sich die Begriffe „alle" und „es gibt" lediglich auf die Grundobjekte selbst, aber nicht auf Klassen (bzw. Eigenschaften) und Relationen von Grundobjekten beziehen. Daß aber trotz dieser Einschränkungen die Zählaussagen den Gesamtbereich widerspruchsfreier mathematischer Aussagen umfassen, geht aus den Analysen dieser Arbeit, die sich gegen den erweiterten Funktionenkalkül richten, klar hervor[3]).

Skolem bedient sich bei seinem Beweise der Schröder-

---

[1]) „Über Möglichkeiten im Relativkalkül", Math. Ann., Bd. 76, S. 447 bis 470, 1915.

[2]) „Logisch-kombinatorische Untersuchungen über die Erfüllbarkeit oder Beweisbarkeit mathematischer Sätze nebst einem Theoreme über dichte Mengen." Skrifter utgit av Videnskapsselskapet i Kristiania, I, Mathem.-naturw. Klasse, 1920, Nr. 4, S. 1—36. „Einige Bemerkungen zur axiomatischen Begründung der Mengenlehre", Wissenschaftliche Vorträge, gehalten auf dem fünften Kongreß der skandinavischen Mathematiker in Helsingfors 1922, S. 217 bis 232, 1923.

[3]) Vgl. hiezu auch Weyl, „Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik", a. a. O., S. 46ff.

schen Logistik und gebraucht in seiner Formulierung den Begriff des abzählbar Unendlichen in der unter den Mathematikern üblichen Weise, welche an eine unendliche Totalität selbständiger Gegenstände denken läßt. Doch wird hiedurch dem genannten Satz und seinem Beweis nichts von ihrer Triftigkeit genommen; sie lassen sich ohne Schwierigkeit „finitisieren".

Es werden also, wie Löwenheim und Skolem gezeigt haben, beliebige Systeme von Zählaussagen im Bereich des Abzählbaren befriedigt; damit aber erscheint jeder Versuch, formal selbständige Bereiche des unabzählbar Unendlichen (in dem von Cantor verstandenen Sinn) mit Hilfe des abzählbar Unendlichen und des Endlichen logisch aufzubauen, von vornherein zum Scheitern verurteilt.

Das Gesagte gilt insbesondere für die verschiedenen Axiomensysteme der Mengenlehre. Derartige Systeme müssen nämlich aus Zählaussagen bestehen und beschreiben daher — der ihnen zugrunde liegenden Absicht und der angewandten Cantorschen Terminologie zuwider — in Wahrheit ausschließlich Beziehungen im Rahmen des Abzählbaren[1]). Damit ist aber der Annahme unabzählbar unendlicher Bereiche überhaupt der Boden entzogen. Denn die zunächst aufscheinende Möglichkeit des Bestehens solcher Bereiche, unbeschadet ihrer nachweisbaren Nichterfaßbarkeit durch Axiomensysteme, fällt, wie aus den Feststellungen in den beiden ersten Abschnitten dieser Arbeit hervorgeht, fort.

Sieht man jedoch — im Gegensatz zu den Ergebnissen unserer Analysen — im Diagonalverfahren einen Beweis für die Existenz unabzählbar transfiniter Bereiche, so erhebt sich die Frage der Vereinbarkeit der Löwenheim-Skolemschen Antinomie mit dem Diagonalverfahren.

Fraenkel, der diese Frage untersucht[2]), kommt zu dem Er-

---

[1]) Dies wurde von J. v. Neumann, „Eine Axiomatisierung der Mengenlehre", a. a. O., S. 229ff., klar auseinandergesetzt.

[2]) „Zehn Vorlesungen über die Grundlegung der Mengenlehre", Leipzig und Berlin 1927, S. 112ff.

Dort heißt es: „Nicht nur innerhalb der Mengenlehre, sondern in der ganzen Mathematik läßt sich, wie mir scheint, auf rein konstruktivem Wege — nämlich ohne Heranziehung nichtprädikativer Prozesse — das überabzählbar Unendliche nicht erfassen, falls man nicht etwa in allzu elastischer Dehnung des Begriffes „reine Anschauung" es sich als unmittelbar gegeben denken will, z. B. in der Form des Kontinuums."

gebnis, es seien in dem Beweis des Skolemschen Satzes die nichtprädikativen Verfahren nicht berücksichtigt und ohne diese könne man tatsächlich nicht über den Bereich des Abzählbaren hinausgelangen. Wenn man sich nun aber durch den sprachlichen Schein nicht blenden läßt, sondern die mit Hilfe der sprachlichen Symbolik gemeinten Sachverhalte selbst ins Auge faßt, so erkennt man, daß nichtprädikative „Verfahren“ bzw. nichtprädikative „Begriffsbildungen“ sinnlos sind.

Unter einer „nichtprädikativen Begriffsbildung“ versteht man „ganz allgemein die Bildung zweier Begriffe in der Art, daß in die Definition eines jeden unter ihnen der andere Begriff notwendig eingeht[1])“. Dies bedeutet jedoch, wie man leicht erkennt, wenn man die zwischen Denken und Sprache einerseits und die gedachten bzw. genannten Gegenstände andrerseits eingeschobene Sphäre der „Begriffe“ ausschaltet, folgendes: Der Gegenstand, der mit einem Zeichen (Scheinzeichen)[2]) z_1 gemeint wird, soll total — oder partiell — dadurch bestimmt werden, daß man den Gegenstand angibt, der mit einem Zeichen z_2 gemeint wird; dieser Gegenstand aber soll wieder durch den mit z_1 bezeichneten Gegenstand bestimmt sein, was offenbar zirkelhaft ist. Zirkelhafte „Bestimmungen“ aber bestimmen, soweit sie zirkelhaft sind, nichts.

Wir werden uns mit den nichtprädikativen Begriffsbildungen im letzten Abschnitt dieser Arbeit zu befassen haben; hier sei nur vorweg bemerkt, daß der Anschein, mit Hilfe von nichtprädikativen Begriffsbildungen zu neuen mathematischen Gegenstandsbereichen gelangen zu können, eng mit der Annahme des Komprehensionsprinzips zusammenhängt. Dieser Anschein entsteht nämlich dadurch, daß man meint, es könne eine Gesamtheit von Gegenständen, die durch eine „Eigenschaft“ bestimmt wird, Elemente enthalten, welche nur mit Hilfe dieser Gesamtheit definiert werden können.

Aber ebenso undenkbar wie ein Element einer Gesamtheit, welches nur mit Hilfe dieser Gesamtheit definiert werden kann, ist ein Glied innerhalb einer mathematischen Konstruktion — oder wie man statt dessen auch sagen kann — innerhalb eines mathematischen Prozesses, welches nur mit Hilfe dieses Prozesses definiert werden könnte. Der scheinbare Unterschied zwischen

---

1) Fraenkel, „Einleitung in die Mengenlehre“, S. 247.

2) Vgl. oben S. 45.

diesen beiden Sachverhalten rührt daher, daß man unzulässigerweise den Zeitbegriff in die Mathematik hineinträgt.

Diese Feststellung richtet sich vor allem gegen O. Beckers Gedanken der selbsttranszendierenden Konstruktionen, welche es ermöglichen sollen, bis zu jeder beliebigen Stelle der zweiten Zahlenklasse konstruktiv vorzudringen. Er denkt sich hiebei den Begriff der zweiten Zahlenklasse als „Begriff eines allgemeinen Gesetzes einer Folge", als ein „Leerschema für ein mögliches Funktionsgesetz[1]) und meint — in Anknüpfung an ein von O. Veblen[2]) angegebenes Verfahren zur Konstruktion von Ordinalzahlen — im Prinzip auf diesem Wege zur systematischen Konstruktion aller Ordinalzahlen der zweiten Zahlenklasse gelangen zu können. Er bestimmt den Konstruktionstypus der selbsttranszendierenden Konstruktion wie folgt: „Das Kennzeichnende dieses neuen Typs besteht in seiner prinzipiellen Unabgeschlossenheit: ein bestimmtes noch so weit gefaßtes Konstruktionsprinzip führt niemals bis zum Ziel, sondern im Verlauf der Konstruktionstätigkeit selbst ergeben sich ständig neue Anweisungen zur Fortführung des Verfahrens."[3]) „.... auch die korrekte Durchführung des Diagonalverfahrens ist nur in selbsttranszendierender Konstruktion möglich. Denn das klassische Verfahren liefert zwar zu jeder vorgelegten abgezählten Teilmenge des Kontinuums ein neues in ihr nicht enthaltenes Kontinuumelement, aber auch die um dieses Element vermehrte Teilmenge ist doch offenbar noch abzählbar, so daß dieser Prozeß, als ein konstruktiver aufgefaßt, nur durch nichtabzählbar häufige Wiederholung zum Ziele führen würde. Aber eine solche ‚nichtabzählbar häufige' Wiederholung setzt doch offensichtlich die direkte Einführung einer ‚absolut nichtabzählbaren' Unendlichkeit voraus"[4]).

Was zunächst den Begriff eines „Leerschemas für ein mögliches Funktionsgesetz" betrifft, so kann ich damit beim

---

[1]) „Mathematische Existenz", S. 605.

[2]) „Continuous increasing functions of finite and transfinite ordinals." Transact. American Math. Soc. 9, p. 280—292, 1908. Vgl. hiezu Hausdorff, „Grundzüge der Mengenlehre", 1. Aufl., S. 114ff.

[3]) A. a. O., S. 795f. Es sei freilich darauf hingewiesen, daß sich Becker in diesem Zusammenhange so vorsichtig ausdrückt, daß wir die aufgestellte These vielleicht richtiger als Vermutung, denn als Behauptung zu bezeichnen haben werden.

[4]) A. a. O., S. 796.

besten Willen keinen anderen Sinn verbinden als denjenigen, daß man annimmt, durch den Begriff des Funktionsgesetzes sei eine Gesamtheit aller Funktionsgesetze irgendwie mitgegeben, womit das in dieser Arbeit — aber auch von Becker selbst — kritisierte Komprehensionsprinzip wieder hergestellt wäre. Allerdings unterscheidet Beckers Auffassung sich auch unter dieser Voraussetzung dadurch von derjenigen der klassischen Mengenlehre, daß er die Existenz jenes Leerschemas nicht isoliert, sondern nur in Korrelation zu den durch Konstruktion zu bewerkstelligenden „Ausfüllungen" betrachtet. Man könnte daher seine These vielleicht in der Weise deuten, daß jenes Leerschema als regulatives Prinzip, als „unendliche Aufgabe" im Sinne der Marburger Schule aufgefaßt werden soll.

Aber auch diese — abgeschwächte — Form des Komprehensionsprinzips wird von unseren gegen dieses Prinzip gemachten Einwänden getroffen. Damit verschwindet also bereits das Schema, das durch die Konstruktion auszufüllen wäre. Mit dem „regulativen Prinzip" aber, dem Ziel, das zwar als prinzipiell nicht erreichbar, aber doch als richtunggebend angesehen wird, fällt zugleich auch jenes Moment der Unabgeschlossenheit, das Becker als Kriterium der selbsttranszendierenden Konstruktionen angibt, fort.

Niemals also kann eine Konstruktion über den Bereich hinausführen, der durch das ihr zugrunde liegende Prinzip determiniert wird. So wird man etwa — um an das zitierte Beispiel Beckers anzuknüpfen — beim Diagonalverfahren durch Ineinanderschachtelung von Bildungsgesetzen für Zahlenfolgen, Folgen von Zahlenfolgen usw. zu immer neuen „mathematischen Gegenständen" gelangen, aber immer im Rahmen eines jeweils allgemeinsten Bildungsgesetzes bleiben müssen, gemäß dem der Progreß verläuft. Als Entfaltung dieses — und sonst keines — Gesetzes ist der Progreß bestimmt. Bei dem „und so weiter", mit dem man bei der Beschreibung endloser Konstruktionen operiert, ist also der Ton auf das „so" zu legen; dieses aber wird durch ein Gesetz bestimmt. Daß ferner das bei Becker mitspielende zeitliche Moment ausgeschaltet werden muß, wenn man mathematische Aussagen machen will, wurde bereits festgestellt.

Muß man hienach darauf verzichten, eine Mehrheit transfiniter Mächtigkeiten zu konstruieren, so bliebe vielleicht noch als letzter Weg, sie zu „retten", derjenige ihrer direkten Einführung übrig. Aber auch diese Möglichkeit fällt weg, wenn man bedenkt, daß ja eine derartige „Einführung", eines neuen Zeichens (scheinbaren Zeichens) gar nichts bedeutet, es sei denn, daß ein Gegenstand besteht, den es bezeichnet, und zwar müßte dies in unserem Falle, wo wir es mit mathematischen Gegenständen zu tun haben, ein formaler Gegenstand sein. Ein solcher aber kann, wie der Löwenheim-Skolemsche Satz dartut, nicht außerhalb des Bereiches des Abzählbaren liegen. Daß auch die „Anschauung" des Kontinuums keine mathematische Auswertung in der gewünschten Richtung zuläßt, haben wir im vorigen Abschnitt ausgeführt[1]).

Was endlich die Einführung höherer Mächtigkeiten als „idealer Elemente" betrifft, so können wir diesbezüglich auf unsere allgemeine Analyse über ideale Elemente im zweiten Abschnitt hinweisen.

Es ist also der Aufstieg zu höheren Mächtigkeiten als $\aleph_0$ ausgeschlossen. Im besonderen folgt daraus, daß mit dem Begriff der Menge aller Dezimalbrüche, dem „Zahlenkontinuum", ein Sinn nicht verbunden werden kann. Damit verschwindet auch das Kontinuumproblem[2]). Die Mengenlehre kann über das Abzählbare nicht hinausführen; die in diesen Bereich fallenden Aussagen aber beziehen sich — korrekt formuliert — nicht auf unendliche Mannigfaltigkeiten, sondern auf Bildungsgesetze bzw. beliebige Elemente von Zahlenfolgen.

Was aber die Geltung des Wohlordnungssatzes im Bereiche des Abzählbaren betrifft, so wollen wir nochmals auf eine in dieser Arbeit wiederholt gemachte Feststellung hinweisen: Es steht nicht so, daß eine abzählbare Menge unabhängig von einem die Wohlordnung festlegenden Bildungsgesetz gegeben sein könnte, so daß „im nachhinein" die Aufgabe, sie wohlzuordnen entstünde, sondern ein solches Bildungsgesetz ist bereits im Begriff der abzählbaren Menge enthalten. Zu der Vorstellung

---

[1]) Demgegenüber will Hölder, der sehr wohl erkennt, daß das Kontinuum (im Cantorschen Sinne) arithmetisch nicht erfaßbar ist, dieses als „Urform" betrachtet wissen. („Die mathematische Methode", S. 349 bis 351); vgl. z. B. S. 351: „Auch ist für diese Urform vielleicht der Ausdruck am Platze, daß sie eine „Anschauung" sei oder eine ideale Anschauung zur Quelle habe". Vgl. demgegenüber unsere Ausführungen über die mathematische Anschauung (S. 111ff.).

[2]) Zur Geschichte dieses Problems vgl. O. Becker, „Mathematische Existenz", a. a. O., S. 569ff.

von nicht wohlgeordneten — und a fortiori von nicht geordneten — unendlichen Mengen kommt es lediglich dadurch, daß man die im Mächtigkeitskalkül vorausgesetzte Beliebigkeit der Ordnung fälschlich für Unabhängigkeit von irgend einer Ordnung hält[1]).

Es spielt bei dieser Fehlauffassung — deren weittragende Folgen wir im vorletzten Abschnitt festgestellt haben — auch ein Gedankengang folgender Art mit: Wenn man die Menge derjenigen natürlichen Zahlen, die einer bestimmten Bedingung genügen — etwa eine gegebene diophantische Gleichung befriedigen —, betrachtet, so scheint es, als ob sie zunächst „an sich" ungeordnet vorläge und erst durch das Bildungsgesetz — also in unserem Falle die Lösungsformel der diophantischen Gleichung — wohlgeordnet würde. Aber diese Interpretation ist fehlerhaft. Was in Wahrheit unabhängig von dem Bildungsgesetz besteht, ist die Erkenntnistatsache, daß jede beliebige unter diesen Zahlen der vorgegebenen Bedingung genügt — die Gleichung befriedigt —, aber jene Zusammenfassung, welche in dem Begriff der „Menge aller Zahlen bestimmter Eigenschaften" mitgemeint erscheint, besteht in nichts anderem als in der Festlegung eines die Stellenordnung jeder einzelnen dieser Zahlen bestimmenden Bildungsgesetzes.

Auch im Bereich der „endlichen Mengen realer Dinge" verhält es sich, wie wir oben gezeigt haben, prinzipiell nicht anders. Die einzelnen Dinge existieren, unabhängig davon, ob sie gezählt werden oder nicht, aber ihre Zusammenfassung zu einer Menge ist nichts anderes als ihre Zählung. Hier spielt freilich — die Verwirrung erhöhend — noch die Vorstellung einer „Gesamtanschauung", einer Totalität im räumlichen Sinne, (Raumerfüllung) mit.

Legen wir uns nunmehr rückblickend die Frage vor, wieso die von uns als ungereimt nachgewiesene Bildung einer Stufenfolge transfiniter Mächtigkeiten dennoch einen so hohen Grad von Scheinbarkeit besitzt, daß sie auch heute noch von den bedeutendsten mathematischen Denkern der Gegenwart als Erkenntnistatsache angesehen wird, so werden wir wieder auf die allgemeinen Bemerkungen zurückgeführt, die wir in

[1]) Dagegen trägt die Axiomatik von Neumanns („Die Axiomatisierung der Mengenlehre", Math. Zeitschr., Bd. 27, 1928, S. 669ff.) dem Primat der Wohlordnungslehre Rechnung.

der Einleitung zu der vorliegenden Arbeit über die typischen Irrwege des von „Begriffen" (Symbolen) einen „überschwänglichen" Gebrauch machenden Denkens gemacht haben. Wir haben dort folgende Schritte unterschieden: Der erste liegt in einer echten mathematischen Erkenntnis. An diese knüpft sich dann zweitens auf Grund der mathematischen Symbolik eine Interpretation, die über den faktischen Erkenntnisgehalt in einer bestimmten Richtung hinausgeht. Drittens endlich findet dann auf Grund der vollzogenen Interpretation jene Symbolik auch dort Verwendung, wo die den Bedeutungsgehalt der Symbolik ursprünglich bestimmenden Erkenntnistatsachen fehlen.

Im Falle der Mengenlehre entspricht dem ersten Schritt das Diagonalverfahren, durch welches einwandfrei gezeigt wird, daß durch jede beliebige Folge von Zahlenfolgen weitere Zahlenfolgen bestimmt werden, welche in jener Folge von Zahlenfolgen nicht enthalten sind.

Nun erfolgt der zweite gedankliche Schritt, die über den Sinn des Diagonalverfahrens hinausgehende Interpretation. Es wird nämlich — auf Grund des meist stillschweigend vorausgesetzten Komprehensionsprinzips — behauptet, daß durch den ersten Schritt die mathematische Existenz einer höheren Mächtigkeit als derjenigen der Gesamtheit der natürlichen Zahlen erwiesen sei.

Der dritte Schritt aber besteht darin, daß man mit jener „Existenz höherer Mächtigkeiten" unabhängig von der ihr zugrunde liegenden Erkenntnistatsache des Diagonalverfahrens in der Weise operiert, daß man sie als konstruktiv ausschöpfbar ansieht und sie bei mathematischen Konstruktionen wesentlich mitbenützt. (Aufstieg zu höheren Zahlenklassen.)

Demgegenüber hat sich aus dem Löwenheim-Skolemschen Satze folgende Einsicht ergeben: Nimmt man zunächst hypothetisch im Sinne der Mengenlehre höhere transfinite Mächtigkeiten an, so läßt sich zeigen, daß sich über diese widerspruchsfrei nichts aussagen läßt, was nicht schon im Bereich des Abzählbaren gilt, daß also der neu eingeführte Begriff, soferne er sich nicht als widerspruchsvoll erweist, abundant ist.

Ist letzteres der Fall, so hat man sinnvolle Aussagen vor sich, und es ist nur die Interpretation, nach welcher es sich hiebei um Aussagen über unabzählbar Unendliches handelt, abzulehnen. Auf Grund solcher Interpretationen entsteht jedoch der Anschein einer logisch-mathematischen Legitimierung der Sphäre des unabzählbar Unendlichen, da sich ja „über sie" sinnvolle Aussagen machen lassen.

Wir wollen als Musterbeispiel für einen solchen Gedankengang den Satz der Mengenlehre, daß $c^n = c$ ist, anführen. Er besagt, wie wir schon oben S. 150f. erwähnt haben, in geometrischer Formulierung, daß der n-dimensionale Raum nicht mehr Punkte besitzt, als ein eindimensionales Kontinuum, also als eine Gerade oder eine beliebig kleine Strecke. Beschränken wir uns der Einfachheit halber auf die Behauptung $c^2 = c$, so lautet der Beweis folgendermaßen[1]: Stellen wir ein eindimensionales Kontinuum durch die Gesamtheit der — endlichen und unendlichen — Dezimalbrüche zwischen 0 und 1 dar, so ist c^2 die Kardinalzahl der Gesamtheit aller Paare von Dezimalbrüchen zwischen 0 und 1. Sind nun $x = 0{\cdot}x_1 x_2 x_3 \ldots\ldots$ und $y = 0{\cdot}y_1 y_2 y_3 \ldots\ldots$ irgend zwei derartige Dezimalbrüche, so wird hiedurch eindeutig der ebenfalls zwischen 0 und 1 liegende Dezimalbruch $0{\cdot}x_1 y_1 x_2 y_2 x_3 y_3 \ldots\ldots$ bestimmt. Andrerseits bestimmt irgend ein Dezimalbruch $z = 0{\cdot}z_1 z_2 z_3 z_4 z_5 z_6 \ldots\ldots$ zwei zwischen 0 und 1 liegende Dezimalbrüche $x = 0{\cdot}z_1 z_3 z_5 \ldots\ldots$ und $y = 0{\cdot}z_2 z_4 z_6 \ldots\ldots$ eindeutig, womit die umkehrbar eindeutige Zuordnung zwischen einem beliebigen Paar von Dezimalbrüchen zwischen 0 und 1 und einem Dezimalbruch zwischen 0 und 1 hergestellt ist. Demgemäß erscheint der Satz $c^2 = c$ auf den Satz $2a = a$ und — allgemein — der Satz $c^n = c$ auf den Satz $n \,.\, a = a$ zurückgeführt.

Auf Grund der von uns gewonnenen Einsichten ist die Natur dieses Zusammenhanges ohneweiters klar. Das Thema des Beweises bildet die ein-eindeutige Abbildung eines beliebigen Paares (bzw. allgemein: n-tupels) echter Dezimalbrüche auf einen echten Dezimalbruch; d. h. es kann eine Beziehung hergestellt werden, wodurch jedem beliebigen n-tupel echter Dezimalbrüche ein und nur ein Dezimalbruch und jedem beliebigen echten Dezimalbruch ein und nur ein n-tupel echter Dezimalbrüche zugeordnet wird. Das ist, in der Terminologie der Mengenlehre ausgedrückt, eine Aussage über abzählbare Mengen. Deutet man aber — auf Grund des Komprehensionsaxioms — unsere Aussagen über jeden beliebigen Dezimalbruch in eine

[1]) Er wird für beliebiges endliches n analog geführt.

Aussage über die Gesamtheit aller Dezimalbrüche um, dann bildet den Gegenstand der Aussage (sc. im Sinne der in der Mengenlehre herrschenden Auffassung) das Kontinuum. Daß demgemäß durch jene sinnvolle Aussage „über das Kontinuum" keineswegs ein Argument für die Legitimität dieses Begriffes gewonnen wird, leuchtet ein[1]).

Geht man nun — im Gegensatz zu unserer vorstehend begründeten Auffassung — von der Annahme aus, daß in den Cantorschen Thesen über das Transfinite, speziell über das unabzählbar Unendliche, mathematische Erkenntnis enthalten sei, so erscheint das Streben begreiflich, jene vermeintliche mathematische Erkenntnis von den bekanntermaßen in ihrem Gefolge auftretenden Ungereimtheiten (Antinomien) zu befreien und so eine logisch einwandfreie (strenge) Mengenlehre aufzubauen.

Als tauglichstes Instrument für diese Bestrebungen bot sich die axiomatische Methode dar, und so wurde durch E. Zermelo[2]) (1908) eine Axiomatisierung der Mengenlehre durchgeführt, die unter Aufrechterhaltung der Cantorschen Ergebnisse die „paradoxen Mengen" ausschaltet. In einer Reihe von neueren Axiomatiken, die sich mehr oder minder eng an die von Zermelo anschließen, waltet die Bemühung vor, abgesehen von den „klassischen" paradoxen Mengen, auch noch eine Reihe anderer suspekt erscheinender Begriffe und Methoden auszuschalten, ohne die wesentlichen Ergebnisse der Mengenlehre Georg Cantors aufzugeben[3]).

---

[1]) Damit erscheinen auch Argumentationen, wie diejenige von F. Bernstein („Die Mengenlehre Georg Cantors und der Finitismus", Jahresber. d. Deutschen Math.-Ver., Bd. 28, S. 63 bis 78, 1919, S. 77), worin gegen die finitistische Kritik an der klassischen Mengenlehre der consensus der Mathematiker bei Behandlung von Problemen der Mengenlehre ins Treffen geführt wird, entkräftet. Bernstein erklärt: „Als das stärkste allgemeine Argument gegen die finitistische Kritik haben wir das folgende erkannt: Wenn es möglich ist, daß voneinander unabhängige Forscher die gleiche Antwort auf die gleiche Frage finden, so ist ein logisches Experiment vollzogen, welches beweist, daß es ein widerspruchsfreies Gedankensystem geben muß, in welchem die vollzogenen Schlüsse nach den strengsten Anforderungen valent sind."

[2]) „Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre", I. Math. Ann., Bd. 65, S. 261 bis 281, 1908.

[3]) Neben der Axiomatik Fraenkels, mit der wir uns im folgenden näher befassen werden, sei hier vor allem diejenige von J. von Neumann, „Die

Was die Frage der Leistungsmöglichkeit und der Grenzen der axiomatischen Methode im allgemeinen betrifft, so sei diesbezüglich auf die Untersuchungen im zweiten Abschnitt dieser Arbeit hingewiesen; über die mengentheoretische Axiomatik im besonderen wäre noch folgendes zu bemerken:

Im Sinne unserer Ergebnisse, welche die Morschheit der Fundamente des Gedankengebäudes der Mengenlehre dartun, setzt sich jegliche Axiomatik, welche es unternimmt, dieses Gebäude zu stützen, ein unerreichbares Ziel. Aber dennoch ist die schwierige und subtile Arbeit, die hier geleistet wurde, von nicht zu unterschätzender Bedeutsamkeit für die Theorie der gesamten Mathematik. Denn durch sie wurde eine Reihe der wichtigsten Probleme der mathematischen Theorie erst ins volle Licht der Bewußtheit gehoben, was, wie bei Problemen der Wissenschaftstheorie überhaupt, meist den schwierigsten Teil des Weges zu ihrer Lösung darstellt.

Wir wollen nun das Axiomensystem, das A. Fraenkel in seiner „Einleitung in die Mengenlehre“ aufstellt[1]), wiedergeben und hieran, ohne auf eine Analyse im einzelnen einzugehen, einige Bemerkungen prinzipieller Natur knüpfen.

Die Fraenkelsche Axiomatik enthält — sc. neben den Begriffen der formalen Logik — eine einzige Grundrelation, die durch das Symbol ε gekennzeichnet wird.

„Zwischen je zwei in bestimmter Reihenfolge gegebenen Objekten m und n der Grundkategorie „Menge“ soll die durch das Zeichen ε (Anfangsbuchstabe der Kopula ἐστί) dargestellte Grundrelation entweder bestehen oder nicht bestehen. Im ersten Falle schreiben wir m ε n, oder in Worten: m ist ein Element von n, n enthält oder besitzt das Element m, m kommt in n (als Element) vor usw.; im zweiten Falle, wenn also m nicht Element von n ist, schreiben wir m $\bar{\varepsilon}$ n[2]).“

Den Axiomen werden drei Definitionen vorausgeschickt, welche lauten:

Axiomatisierung der Mengenlehre“ (die bereits oben S. 169 zitiert wurde), genannt.

[1]) Vgl. zu dem folgenden, S. 268ff. Die Fraenkelsche Axiomatik ist eine Verbesserung derjenigen von Zermelo und zeichnet sich durch besondere Klarheit und Einfachheit aus.

[2]) A. a. O., S. 272. Unter den m, n, ….. usw. sind irgendwelche Objekte nicht näher bestimmter Art zu verstehen, zwischen denen eine gewisse, ebenfalls nicht näher bestimmte Relation ε besteht oder nicht besteht.

„Definition 1. Sind m und n Mengen von der Art, daß jedes Element der Menge m auch in n als Element vorkommt (daß also aus $a \varepsilon m$ stets $a \varepsilon n$ folgt), so wird m eine Teilmenge der Menge n genannt."

„Definition 2. Sind m und n Mengen und ist sowohl m eine Teilmenge von n wie auch n eine Teilmenge von m, so heißt m gleich n; in Zeichen $m = n$. In jedem anderen Fall heißt m verschieden von n ($m \neq n$)."

„Definition 3. Sind m und n Mengen ohne gemeinsame Elemente, d. h. kommt kein Element von m auch in n als Element vor, so werden m und n elementefremd genannt. Sind allgemeiner je zwei beliebige Elemente einer Menge M stets elementefremde Mengen, so heißen die Elemente von M paarweise elementefremd oder auch kurz fremd[1])."

Die Axiome werden zwecks übersichtlicherer Gliederung — der aber natürlich mathematisch keine Bedeutung zukommt — in Gruppen geteilt:

Die erste Gruppe besteht aus dem folgenden einzigen Axiom:

„Axiom I. Sind a, b, A Mengen, ist a Element von A und gilt $a = b$, so ist auch b Element von A (Axiom der Bestimmtheit)[2])."

Die zweite Gruppe, welche den Namen „erweiternde bedingte Existenzaxiome" erhält, umfaßt drei Axiome, nämlich:

„Axiom II. Sind a und b verschiedene Mengen, so existiert eine Menge, die die Elemente a und b, aber kein von ihnen verschiedenes Element enthält. Diese Menge ist nach dem Vorangehenden mit $\{a, b\}$ zu bezeichnen und wird das Paar von a und b genannt. (Axiom der Paarung)[3])."

„Axiom III. Ist M eine Menge, die mindestens ein Element enthält, so existiert eine Menge, die die Elemente der Elemente von M als Elemente enthält, aber keine anderen Elemente besitzt. (Axiom der Vereinigung)[4])."

„Axiom IV. Ist m eine Menge, so existiert eine Menge,

---

1) A. a. O., S. 272f.
2) A. a. O., S. 274.
3) A. a. O., S. 277.
4) A. a. O., S. 278.

die sämtliche Teilmengen von m als Elemente enthält, aber keine anderen Elemente besitzt. (Axiom der Potenzmenge.)[1])“

Die dritte Gruppe, die der „einschränkenden bedingten Existenzaxiome“, enthält zwei Axiome, und zwar:

„Axiom V. Ist m eine Menge und $\mathfrak{E}$ eine Eigenschaft, die für jedes einzelne Element von m sinnvoll (zutreffend oder auch unzutreffend) ist, so existiert eine Menge, die alle diejenigen Elemente von m, denen die Eigenschaft $\mathfrak{E}$ zukommt, als Elemente enthält, aber keine anderen Elemente besitzt. Diese Menge ist demnach eine Teilmenge von m, die aus m durch „Aussonderung“ der Elemente von der Eigenschaft $\mathfrak{E}$ entsteht und mit m bezeichnet wird (Axiom der Aussonderung oder der Teilmengen)[2]).“

„Axiom VI. M sei eine Menge, deren Elemente sämtlich mindestens je ein Element enthalten und überdies paarweise elementefremd sind. Dann existiert mindestens eine Menge S — nämlich eine Teilmenge der Vereinigungsmenge $\mathfrak{S}$M —, die mit jedem Element M gerade ein einziges Element gemein hat, aber keine anderen Elemente besitzt. Jede derartige Menge S wird eine Auswahlmenge von M genannt. (Axiom der Auswahl.)[3])“

Die letzte Gruppe endlich besteht aus einem absoluten Existenzaxiom, welches lautet[4]):

„Axiom VII. Es gibt mindestens eine Menge Z von folgenden beiden Eigenschaften:

1. Falls die Nullmenge (d. h. eine Menge ohne Elemente) existiert, so ist die Nullmenge Element von Z;

2. Ist m irgendein Element von Z, so ist auch $\{m\}$

[1]) A. a. O., S. 279.

[2]) A. a. O., S. 281. Da in diesem Axiom, dessen Formulierung sich eng an diejenige Zermelos anschließt, der Begriff der „sinnvollen Eigenschaft“ der erforderlichen Präzisierung entbehrt und zu Kontroversen Anlaß bot, hat Fraenkel es dadurch wesentlich verschärft, daß er diesen Begriff ausschaltete und die Formulierung mit Hilfe des Funktionsbegriffes durchführte. Doch wollen wir auf die Wiedergabe dieses verschärften Axioms hier verzichten, weil sie längere Erläuterungen erfordern würde und zum Verständnis unserer folgenden Bemerkungen nicht erforderlich ist.

[3]) A. a. O., S. 283.

[4]) A. a. O., S. 307.

(d. h. die Menge, die m und kein anderes Element enthält) ein Element von Z. (Axiom des Unendlichen.)“

Es fragt sich jetzt, welches von diesen Axiomen den Aufstieg zum unabzählbar Unendlichen gewährleisten würde und demgemäß unseren früher gemachten Einwänden unterliegt. Da ergibt sich nun, wie gemeinhin bekannt, daß diese Funktion dem Axiom der Potenzmenge zukommt, weshalb sich in ihm ein wichtiger Teil der mengentheoretischen Problematik zentriert. Da nun aber — wie wir erkannt haben — der Aufbau der höheren transfiniten Mächtigkeiten auf dem Komprehensionsprinzip basiert, so werden wir vermuten dürfen, daß in jenem Axiom wesentlicher Gebrauch von diesem Prinzip gemacht wird.

Diese Vermutung bestätigt sich; das Axiom der Potenzmenge kann als unmittelbare Folgerung aus dem Komprehensionsprinzip gewonnen werden. Denn daß eine Menge „gegeben“, d. h. eindeutig bestimmt ist, schließt ein, daß es für jeden gegebenen Gegenstand objektiv feststeht, ob er eine Teilmenge dieser Menge ist oder nicht. Der Schluß von dieser Definitheit beliebiger Teilmengen auf die Definitheit der Gesamtheit der Teilmengen einer gegebenen Menge ist nichts anderes als die Anwendung des Komprehensionsprinzips.

Allerdings gilt dies nur dann, wenn das Axiom der Potenzmenge als reines Existenzaxiom aufgefaßt wird, wie bei Zermelo. Bei Fraenkel hingegen verhält es sich anders, da er nur konstruktiv gewonnene Teilmengen berücksichtigen will. Er bemerkt nämlich zu diesem Axiom: „Es werde hier nochmals hervorgehoben, daß, wie in Definition 1, so auch in Axiom IV, der Begriff ‚Teilmenge‘ eine andere, wesentlich engere Bedeutung hat als in der Cantorschen Mengenlehre. In dieser konnten wir bei Bildung der Potenzmenge $\mathfrak{U}m$ eine beliebige Gesamtheit von Elementen von m zu einer Teilmenge von m zusammenfassen und waren dann sicher, daß diese sich unter den Elementen von $\mathfrak{U}m$ findet. Jetzt ist uns eine derartige, weitgehende Freiheit gewährende ‚Bildung‘ einer Teilmenge von m nicht gestattet, also auch ihr Auftreten unter den Elementen von $\mathfrak{U}m$ keineswegs gesichert. Vielmehr muß uns eine Menge erst anderweitig als existierend gegeben sein, damit wir sie nach Definition 1 darauf prüfen können, ob sie etwa Teilmenge von m ist; dann erst können wir bei günstigem Ausfall der Prüfung ihres Auftretens in $\mathfrak{U}m$ sicher sein[1]).“

In dieser, konstruktivistischen Postulaten genügenden, Definition der Potenzmenge wird also die „anderweitige Gegebenheit“ jeder einzelnen Teilmenge verlangt. Für abzählbare Teilmengen bedeutet dies, daß jedes einzelne konstitutive Bildungsgesetz vorliegen muß. „Sämtliche“ abzählbare Teilmengen einer abzählbaren Menge aber können nicht in dieser Weise vorliegen, und deshalb wird der Aufstieg zum „absolut Unabzählbaren“ im Sinne der Cantorschen Mengenlehre durch dieses „gereinigte“ Postulat nicht erzielt[2]).

Neben dem Axiom der Potenzmenge verdient das Axiom der Auswahl besondere Aufmerksamkeit, und es hat diese auch — sogar weit mehr als jenes — gefunden.

Am prägnantesten wird der Sinn dieses Satzes durch folgende Definition Weyls wiedergegeben: „Das Auswahlprinzip ist das Postulat der Konstruierbarkeit einer existential bestimmten Menge“. Eine Menge existential bestimmen bedeutet aber, wie wir wissen, sie mittels des Komprehensionsprinzips bestimmen. Weiter wissen wir bereits, daß dieses Postulat dann unerfüllbar ist, wenn die „existential bestimmte Menge“ nicht abzählbar ist. Daß man dessenungeachtet jenes Postulat häufig als eine Denknotwendigkeit — ein Prinzip a priori (so etwa Poincaré) — betrachtet, rührt daher, daß man in dem Begriff der Menge, auch wenn man ihn mittels des Komprehensionsprinzips bestimmen will, doch immer ein konstruktives Moment mitmeint.

Dies wird noch deutlicher, wenn man berücksichtigt, daß Auswahlprinzip und Wohlordnungssatz logisch gleichwertig sind, d. h. daß jede der beiden Behauptungen aus der anderen folgt[3]). Denn, wie wir bereits hervorgehoben haben, wird eine „beliebige Wohlordnung“ schon in dem Begriff der Menge mitgemeint. Aber das sind erkenntnispsychologische Erörterungen, die wir nicht weiter verfolgen wollen.

---

[1]) A. a. O., S. 279.

[2]) Den Hinweis hierauf verdanke ich Herrn Carnap.

[3]) Daß der Wohlordnungssatz aus dem Auswahlprinzip folgt, bildet das Beweisthema der oben S. 156f. zitierten beiden Beweise des Wohlordnungssatzes von Zermelo. Auch der Satz von der Vergleichbarkeit beliebiger Mengen ist übrigens mit jenen beiden Prinzipien logisch gleichwertig, wie F. Hartogs, „Über das Problem der Wohlordnung“, Math. Ann., Bd. 76, S. 438 bis 443, 1915, bewiesen hat.

Theoretisch wichtig ist dagegen folgende Feststellung: Da das Auswahlprinzip über den Bereich des Abzählbaren hinaus nicht erfüllt werden kann[1]), so fallen, sobald es erfüllt ist, alle Bedenken fort, welche füglich zu einem Verbot der Verwendung des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten in der Sphäre des Transfiniten führen können[1]). Hilbert sichert durch sein ε-Axiom (vgl. oben S. 57), welches mit dem Auswahlaxiom der Mengenlehre eng zusammenhängt, die Anwendbarkeit des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten innerhalb seines Axiomensystems; allerdings wird sein Ziel, sich hiedurch das Rüstzeug für eine mathematische Behandlung des unabzählbar Unendlichen zu sichern, dabei nicht erreicht.

Man erkennt auch leicht, welche Bewandtnis es mit Hilberts These hat, daß gegen einen mit Hilfe des Auswahlaxioms bewiesenen Satz niemals ein Gegenbeweis gelingen kann[2]). Denn der Beweis eines Satzes S mittels des Auswahlprinzips besagt: In jedem echten (nicht bloß durch das Komprehensionsprinzip „erzeugten") Bereich mathematischer Gegenstände, für den die übrigen für den Beweis von S erforderlichen Prämissen (d. h. alle anderen, außer dem Auswahlaxiom) gelten, gilt S. Könnte nun gegen S ein Gegenbeweis erbracht werden, so würde das bedeuten, daß man mit mathematischen Bereichen sinnvoll operieren kann, für die das Auswahlprinzip nicht gilt, die also bloß durch das Komprehensionsprinzip konstituiert sind.

Nun mögen nur noch einige Worte über das unbedingte Existenzaxiom gesagt werden, welches die Existenz gewisser unendlicher Mengen postuliert. Zermelo und Fraenkel selbst haben dieses Axiom deutlich von den ersten sechs Axiomen, die „Axiome der allgemeinen Mengenlehre" genannt werden, abgetrennt und damit seine Sonderstellung diesen gegenüber gekennzeichnet. Ich möchte darüber hinaus behaupten, daß ein solches unbedingtes Existenzaxiom in einer mathematischen Axiomatik überhaupt nichts zu suchen hat. Denn dieses „es gibt" fällt keineswegs mit dem mathematischen „es gibt" zusammen,

---

[1]) Diese kurze, der üblichen Ausdrucksweise folgende Terminologie soll natürlich nicht implizieren, daß es noch einen mathematischen Bereich jenseits des Abzählbaren gebe, was wir ja gerade bestreiten.

[2]) Dieser Hilbertschen Behauptung entspricht in der Terminologie Brouwers der Satz von der Absurdität der Absurdität des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten.

welches wir im ersten Abschnitt dieser Arbeit analysiert haben, sondern es will etwas für die „wirkliche Welt" aussagen und bedeutet daher eine unerlaubte *μετάβασις εις ἄλλο γένος*. Mit der Ablehnung der Auffassung des abzählbar Unendlichen als eines aktual Unendlichen verschwindet übrigens die gedankliche Schwierigkeit, die zur Aufstellung dieses Axioms geführt hat.

Sind wir solcherart zu dem Ergebnis gelangt, daß auch die axiomatische Methode nicht imstande ist, den Scheinbau der höheren transfiniten Mächtigkeiten logisch zu stützen, und daß man demgemäß von einer Mengenlehre, welche neben der Arithmetik bestünde, füglich nicht wird sprechen dürfen, so soll damit keineswegs die gewaltige, heute noch gar nicht übersehbare Tragweite der unangefochten bleibenden Entdeckungen Cantors verkannt werden. Bestehen bleiben vor allem das Diagonalverfahren mit denjenigen Folgerungen, die nicht vom Komprehensionsprinzip Gebrauch machen und die Wohlordnungstheorie, soferne sie innerhalb des Abzählbaren bleibt. Daß die transfinite Interpretation dieser Entdeckungen aufgegeben werden muß, besagt nichts gegen die außerordentliche mathematische Fruchtbarkeit der Entdeckungen selbst. Auf ihnen basiert vor allem die mengentheoretische Topologie, die von Cantor selbst begründet, in den letzten Jahrzehnten zu einer eigenen mathematischen Disziplin geworden ist und neuerdings insbesondere durch die Begründung der Dimensionstheorie und der Kurventheorie zu ungeahnten Ergebnissen geführt hat. Diese bleiben durch die Ausschaltung des unabzählbar Unendlichen in ihrem Kern unangefochten[1]); nur werden sich vielleicht gewisse Umbenennungen als zweckmäßig herausstellen.

Man darf demnach wohl behaupten, daß dasjenige, was vom Lebenswerk G. Cantors unanfechtbar bestehen bleibt, hinreicht, um ihm einen Ehrenplatz unter den ganz großen Mathematikern zu sichern.

Zum Abschluß dieses Abschnittes wollen wir nochmals unserer schon in der Einleitung angedeuteten Auffassung Aus-

[1]) Das betont auch Menger in seiner Besprechung der 3. Aufl. von Fraenkels „Einleitung in die Mengenlehre". Monatshefte f. Mathematik und Physik, 36. Bd., Literaturberichte S. 7, 1929. — Daß auch die klassische Mathematik unabhängig vom Begriff des als Menge betrachteten Kontinuums ist, wurde schon von Poincaré, „Réflexions sur les deux notes précédentes", Acta Mathematica, Bd. 32, S. 195 bis 200, 1909 mit Nachdruck betont.

druck verleihen, daß die Einsicht der logischen Unhaltbarkeit des unabzählbar Unendlichen für die führenden Theoretiker der Mathematik „in der Luft liegt“. Was Brouwer und Weyl betrifft, so bedarf es diesbezüglich keiner weiteren Bekräftigung; in bezug auf Russell und Hilbert aber mögen noch einige Belegstellen angeführt werden.

Die Wandlung von Russells Einstellung zur Mengenlehre tritt vor allem im Vorwort zur zweiten Auflage seiner „Principia Mathematica“ zutage. Hier zieht der geistesgewaltige Philosoph und Mathematiker aus den Ergebnissen der methodenkritischen Analysen Chwisteks[1]) und Wittgensteins, welch letztere er, ohne sie schon endgültig zu akzeptieren, doch für sehr beachtenswert hält, die resignierte Folgerung: „. . . . . it seems that the theory of infinite Dedekindian and well-ordered series largely collapses, so that irrationals, and real numbers generally, can no longer be adequately dealt with. Also Cantor's proof that $2^n > n$ breaks down unless n is finite“ (p. XIV).

Aber auch die Forschungen Hilberts und seiner Mitarbeiter scheinen mir zwangsläufig zu demselben Ergebnis zu führen. Denn die „Methode der idealen Elemente“, die Hilbert als die spezifische Methode für die Grundlegung des Transfiniten ansieht, ist ja, wie wir erkannt haben, nichts anderes als eine zweckmäßige Symbolik, die keineswegs neue Erkenntnisbereiche schaffen kann.

Und wenn Hilbert es sich als Ziel setzt, das Transfinite vom Finiten her zu beherrschen[2]), so ist die Erreichung dieses Zieles einsichtigermaßen nur dann möglich, wenn das Transfinite nicht eine arteigene Sphäre neben dem Finiten, sondern bloß ein abgekürzter Ausdruck für finite Beziehungen, eine façon de parler ist, wie Hilbert selbst in Anknüpfung an das oben zitierte Diktum von Gauß sagt. Diese Behauptung aber gilt nur für das abzählbar Unendliche; das unabzählbar Unendliche kann nicht in dieser Weise finitisiert werden.

---

[1]) Chwistek hat darauf hingewiesen („Über die Antinomien der Prinzipien der Mathematik“, l. c. S. 243, daß der Cantorsche Beweis für die Existenz des Kontinuums im Whitehead-Russellschen System ohne Reduzibilitätsaxiom nicht ohne Sonderhypothese geführt werden kann.

[2]) „Auf dem Boden des Finiten soll also die freie Handhabung und volle Beherrschung des Transfiniten geliefert werden.“ (Log. Grundlagen der Mathematik, a. a. O., S. 156.)

Wir schließen mit einem Worte Hilberts, welches seine finitistische Überzeugung so unzweideutig festlegt, daß selbst ein Kronecker keine prägnantere Formulierung hiefür hätte finden können. „Das Unendliche findet sich nirgends realisiert, es ist weder in der Natur vorhanden, noch als Grundlage in unserem verstandesmäßigen Denken zulässig .....“[1]. Nur würde ein Kronecker hieraus wohl die Folgerung gezogen haben, daß es selbst dem souveränen Meister der mathematischen Methoden nicht gelingen könne, das unabzählbar Unendliche Cantors in irgend einer Form zu retten.

[1]) „Über das Unendliche“, a. a. O., S. 190. Auf derselben Seite heißt es: „Die Rolle, die dem Unendlichen bleibt, ist vielmehr lediglich die einer Idee — wenn man, nach den Worten Kants, unter einer Idee einen Vernunftbegriff versteht, der alle Erfahrung übersteigt und durch den das Konkrete im Sinne der Totalität ergänzt wird...“

Wir möchten hinzufügen, daß auch diese Rolle wegfällt, wenn man erkannt hat, daß jene Totalität selbst nicht deutlich gedacht werden kann.

VI. Das Problem der durchgängigen Entscheidbarkeit arithmetischer Fragen.[1]

Die Grundlagen für die Behandlung des Problems der Entscheidbarkeit arithmetischer Fragen wurden bereits in den vorangegangenen Abschnitten geschaffen, und zwar durch die Analyse der „Urteile“ bzw. der „sinnvollen Behauptungen“, durch die Feststellung der Monomorphie des Axiomensystems der natürlichen Zahlen und endlich durch die kritische Auflösung der Lehre vom unabzählbar Unendlichen.

Knüpfen wir sogleich an den ersten Punkt an: Hienach ist eine Behauptung nur dann sinnvoll, wenn ein — einfaches oder zusammengesetztes — Kriterium besteht, bei dessen Vorliegen sie als wahr, bei dessen Nichtvorliegen sie als falsch zu gelten hat. Anderenfalls liegt eine Scheinbehauptung vor, wobei der Schein des Sinns meist dadurch entsteht, daß gewisse, für einen bestimmten Bereich definierte Symbole über diesen Bereich hinaus verwendet werden.

Die Anwendung auf die Prüfung der Behauptung der Unentscheidbarkeit einer These aus vorliegenden Sätzen (Axiomen) ergibt, daß zu ihr ein Kriterium der Unentscheidbarkeit gehören muß. Jedes solche Kriterium der Unentscheidbarkeit eines Sachverhaltes aber muß ersetzbar sein durch den Nachweis der Unentschiedenheit (d. h. der objektiven Unbestimmtheit) jenes Sachverhaltes durch die Grundannahmen. Denn gesetzt, es wäre das Bestehen eines Sachverhaltes durch die Grundannahmen objektiv bestimmt und es wäre dessenungeachtet aus ihnen prinzipiell unableitbar, so gäbe es kein Kriterium für diese Bestimmtheit; dann aber wäre — gemäß der im vorstehenden formulierten Einsicht — der Behauptung der Bestimmtheit gar kein präziser Sinn abzugewinnen.

[1]) Wir verstehen unter „arithmetischen Fragen“ solche, die sich vollständig mit Hilfe der natürlichen Zahlen definieren lassen; demgemäß fällt auch die gesamte Analysis in den Bereich der so verstandenen Arithmetik.

Nach dieser Vorbemerkung gehen wir zur Darstellung des Problems der mathematischen Entscheidbarkeit über.

Hiebei wollen wir zur Erläuterung das sogenannte Goldbachsche Problem als Beispiel wählen. Die Goldbachsche Vermutung, deren Bestätigung oder Widerlegung bisher nicht gelungen ist, lautet: Jede gerade Zahl läßt sich als Summe zweier Primzahlen darstellen. Der Satz gilt erprobtermaßen für kleinere Zahlen. Weiters wurden einige Annäherungssätze bewiesen.

Nun fragt man sich: Ist es sicher, daß die Goldbachsche Behauptung sich entweder als geltend oder als nicht geltend erweisen läßt? Ist aber ein solcher Beweis oder Gegenbeweis nicht möglich, dann taucht die weitere Frage auf, ob diese Unmöglichkeit nicht in einer Unvollständigkeit der Axiome beschlossen liegt, so daß man den Goldbachschen Satz oder seine Widerfolge axiomatisch festzulegen hätte, wonach dann an Stelle der einen Arithmetik eine Goldbachsche und eine Nicht-Goldbachsche Arithmetik treten würden. Und was für die Goldbachsche Behauptung recht, das wäre für andere unbewiesene Behauptungen, wie etwa die berühmte von Fermat[1]), nur billig. Es müßte also auch eine Fermatsche und eine Nicht-Fermatsche Arithmetik geben. Für n als unbeweisbar und voneinander paarweise unabhängig angenommene Sätze ergäbe das 2^n verschiedene Arithmetiken. Dies die Darstellung der Problemlage, zu deren Diskussion wir nunmehr übergehen.

Zunächst wollen wir uns klar machen, unter welchen Umständen man von der objektiven Unbestimmtheit (Unentschiedenheit) einer Frage bezüglich gewisser Grundannahmen sprechen kann. Ein Fall einer solchen Unentschiedenheit liegt dann vor, wenn die zu entscheidende Frage sich auf andere Sachverhalte bezieht als diejenigen, worüber die Grundannahmen aussagen. So steht es z. B. bei der Scherzfrage, aus den Abmessungen eines Schiffes das Alter seines Kapitäns zu berechnen[2]). Ein Fall von dieser Art kommt aber für die faktischen Probleme der mathematischen Axiomatik kaum in Betracht.

Scheiden wir diesen trivialen Fall aus, so bleibt — sc. für theoretische Fragen formaler Art — nur derjenige der Polymorphie übrig. Denn daß ein Sachverhalt durch bestimmte Urteile nicht

---

[1]) Vgl. oben S. 97.

[2]) Vgl. Geiger, a. a. O., S. 26.

entschieden wird, kann seinen Grund nur darin haben, daß diese Urteile sich entweder gar nicht auf diesen Sachverhalt beziehen oder daß sie ihn nicht hinreichend bestimmen. Als mathematisches Musterbeispiel hiefür erscheint das Euklidische Parallelenaxiom.

Es zeigt sich, daß sowohl dieses Axiom als auch seine Negation widerspruchsfrei den übrigen Axiomen der Hilbertschen Geometrie hinzugefügt werden kann, so daß also aus jenen übrigen Axiomen weder die Geltung des Euklidischen Parallelenaxioms noch die Geltung seiner Widerfolge abgeleitet werden kann.

Dieses in der Geschichte der Mathematik im allgemeinen und der mathematischen Axiomatik im besonderen eine große Rolle spielende Beispiel hat bekanntlich den Hauptanstoß für die Untersuchungen über die Vollständigkeit von Axiomensystemen gegeben, und Zweifel, welche an der Vollständigkeit der arithmetischen Axiomatik, z. B. derjenigen von Peano, auftauchen, berufen sich gerne auf die geometrische Analogie.

Nun wollen wir uns klar machen, daß der dort bestehende Grund der Unentscheidbarkeit in der Arithmetik nicht vorliegt.

Wir haben bereits bei der Analyse des Charakters der geometrischen Erkenntnis gezeigt, daß der Sinn der geometrischen Axiome in der präzisen, unanschaulichen Form, wie sie etwa bei Hilbert auftreten, darin besteht, daß zwischen den drei Arten von Gegenständen, welche — was für das axiomatische System als solches belanglos ist — Punkte, Gerade, Ebenen genannt werden, logisch-arithmetische Beziehungen festgelegt werden. (So gehört zu zwei Punkten eine Gerade, zu drei Punkten eine Ebene, zu zwei Geraden höchstens ein Punkt usf.) Werden dergestalt formale Beziehungen zwischen den Gegenständen festgelegt, so ist eine Ergänzung der Axiomatik insolange möglich, als noch gewisse derartige Beziehungen zwischen den Gegenständen offen bleiben. Eine solche Ergänzung stellt nun das Parallelenaxiom gegenüber den anderen Axiomen dar, denn durch diese wird nur festgelegt, daß zwei Gerade höchstens einen Punkt gemeinsam haben, aber die Zäsur zwischen einem Punkt und 0 Punkten wird in ihnen noch nicht durchgeführt. Es ist also durch sie nicht festgelegt, wie viele Gerade durch einen gegebenen Punkt mit einer gegebenen Geraden 0 Punkte gemeinsam haben. Diese „Lücke" unter dem

Aspekt der Vollständigkeit füllt nun das Euklidische Parallelenaxiom oder auch ein irgend eine nichteuklidische Geometrie bestimmendes Axiom aus. Die Unentschiedenheit (Unentscheidbarkeit) des Parallelenaxioms im Hinblick auf die übrigen Axiome rührt somit daher, daß durch diese noch gewisse logische (arithmetische) Möglichkeiten offen gelassen werden.

Dagegen ist, wie wir im dritten Abschnitt eingehend dargetan haben, durch die von uns dortselbst angegebene Definition der Zahlenreihe, welche, äquivalent mit dem Axiomensystem Peanos, den Erkenntnisgegenstand natürliche Zahl beschreibt, diese als logische Singularität bestimmt, was bedeutet, daß bezüglich ihrer logisch nichts offen bleibt[1]). Dieses Axiomensystem der Arithmetik ist also monomorph. Demgemäß erscheint, wie wir oben S. 72 festgestellt haben, eine Gabelung der Arithmetik — etwa über dem Fermatschen oder dem Goldbachschen Theorem, welche der Gabelung der Geometrie über dem Parallelenaxiom entspräche — ausgeschlossen.

Die objektive Bestimmtheit der Arithmetik wird auch heute, trotz der Erschütterung mancher früher geradezu als trivial betrachteter mathematischer Überzeugungen, die die Grundlagenkrise mit sich gebracht hat, kaum angezweifelt. Dagegen geht eine Auffassung, die vielleicht als die herrschende bezeichnet werden kann, dahin, daß durch die Vollständigkeit im Sinne der Nichtgabelbarkeit eines Axiomensystems noch keineswegs seine Entscheidungsdefinitheit garantiert sei, so daß also auch für ein nichtgabelbares Axiomensystem nicht festsehe, ob nicht aus prinzipiellen Gründen eine Lösung bestimmter Fragen ausgeschlossen sei. Der Gedankengang, der zu diesem Ergebnis führt, operiert mit der Gegenüberstellung des unendlichen Bereiches der Zahlen und der Endlichkeit des Beweisganges, auf welchen das menschliche Denken beschränkt bleiben müsse. Wir haben hier — in schärferer Formulierung — das Argument vor uns, das insbesondere in der mittelalterlichen Philosophie und Theologie eine wichtige Rolle gespielt hat: der endliche menschliche Geist sei nicht fähig, die Unendlichkeit der Welt (der Idee Gottes) zu erfassen.

---

[1]) Vgl. hiezu das im zweiten Abschnitt über die Vollständigkeit von Axiomensystemen Gesagte.

Demgemäß wären bei jeder unbewiesenen arithmetischen Behauptung die folgenden Möglichkeiten in Erwägung zu ziehen[1]):

1. Beweisbarkeit der Behauptung.

2. Beweisbarkeit des Negates der Behauptung.

3. Unbeweisbarkeit der Behauptung, wobei die Unbeweisbarkeit beweisbar ist.

4. Unbeweisbarkeit der Behauptung, wobei die Unbeweisbarkeit selbst unbeweisbar ist.

Es versteht sich, daß wir diese Argumentation auf das allerentschiedenste ablehnen müssen. Der Gedanke, daß es Beziehungen gibt, die nur durch eine unendliche Anzahl von Schlüssen erfaßt werden könnten, wird sogleich als Nonsens erkannt, wenn man zu der Einsicht gelangt ist, daß das Unendliche selbst nicht anders bestimmt werden kann, denn als Bereich eines Gesetzes, so daß also eine unendliche Anzahl von Schlüssen selbst nur sinnvoll gedacht werden kann in Korrelation zu einem übergeordneten Denkgesetz, welches die Ordnung der Schlüsse fixiert. Damit aber wäre der „unendliche Denkprozeß" bereits finitisiert.

Wir können nun unser Ergebnis wie folgt formulieren: In dem Begriff der durchgängigen Entscheidbarkeit arithmetischer Fragen sind ein objektives und ein subjektives — psychologisches — Moment in verwirrender Weise verquickt. Das objektive Moment ist die eindeutige Bestimmtheit der arithmetischen Gegenstände bzw. die Monomorphie (Nichtgabelbarkeit) der mit Hilfe des Peanoschen Axiomensystems konstituierten Arithmetik. Das subjektive Moment liegt in der faktischen Fähigkeit oder Unfähigkeit der Menschen, gewisse noch offene Probleme zu lösen, wobei eine diesbezügliche empirische Behauptung den „Bereich der Menschen" räumlich-zeitlich zu umgrenzen hätte[2]).

Eine solche psychologische These der Unentscheidbarkeit und nur eine solche — ließe sich allenfalls für ein monomorphes System aufstellen. Aber sie wäre logisch-mathematisch völlig irrelevant; denn sie ist keine theoretische Behaup-

---

[1]) Vgl. P. Lévy, „Sur le principe du tiers exclu et sur les théorèmes non susceptibles de démonstration", Revue de Métaphysique et de Morale, avril 1928, abgedruckt bei Borel, a. a. O. S. 265ff.

[2]) Vgl. oben S. 21f.

tung über mathematische Beziehungen, sondern eine empirische Behauptung über die faktische Erkenntnis mathematischer Beziehungen[1]).

Der Zusammenhang mit der Problematik der Entscheidungsdefinitheit in der Arithmetik mit derjenigen des Unendlichen in der Arithmetik wird besonders deutlich, wenn man bedenkt, daß die Aussagen, deren Entscheidbarkeit in Frage steht, eben diejenigen sind, welche man als transfinite Aussagen bezeichnet und irrigerweise als Behauptungen über eine Totalität von Einzelsachverhalten auffaßt.

Diese Aussagen lassen sich in zwei Klassen einteilen:

1. Alle Zahlen — bzw. alle Zahlen mit den „Eigenschaften" e_1, e_2 ...... e_n — (gerade Zahlen, Primzahlen usw.) haben eine weitere Eigenschaft f.

2. Es gibt eine Zahl — bzw. es gibt eine Zahl mit den „Eigenschaften" e_1, e_2 ..... e_n —, welche die Eigenschaft f' hat. (Hiebei sei f' identisch mit non f gedacht, so daß diese Behauptung die Negation von f darstellt.

Unterscheidet man aber in korrekter Weise zwischen spezifischer Allgemeinheit und individueller Allgemeinheit, so fällt der Ungedanke des Durchlaufens von unendlich vielen Möglichkeiten und damit das Hauptmotiv für die irrige Annahme der Unentscheidbarkeit arithmetischer Probleme fort.

Demgemäß ist die Problematik der durchgängigen Entscheidbarkeit arithmetischer Fragen mit derjenigen des Unendlichen in der Mathematik überhaupt auf das engste verknüpft; ein besonderer Zusammenhang aber besteht noch für die Brouwersche Theorie der Unentscheidbarkeit mit der Problematik des unabzählbar Unendlichen.

Brouwer selbst bezeichnet es nämlich als einen Kernpunkt seiner Lehre, daß die Negation der Entscheidungsdefinitheit des Bereiches der Arithmetik sich decke mit der Negation der durchgängigen Geltung des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten[2]).

---

[1]) Das Zusammenfallen von Monomorphie und Entscheidungsdefinitheit ist schon von W. Dubislav, „Über das Verhältnis der Logik zur Mathematik", Annalen d. Philos., V, 193ff., 1926, S. 202, behauptet worden; ferner auch von R. Carnap, „Eigentliche und uneigentliche Begriffe", Symposion, Bd. I, S. 355 bis 374, 1927, doch fehlt es hier wie dort an zureichender Begründung. Weitergehende Analysen zu diesem Thema enthält eine noch unveröffentlichte Arbeit Carnaps.

[2]) Vgl. etwa „Intuitionistische Mengenlehre", a. a. O., S. 203.

Daher lassen sich die Feststellungen, welche wir bezüglich dieser These gemacht haben, unmittelbar auf jene übertragen.

Es ergibt sich also, daß die Entscheidungsdefinitheit überabzählbarer Scheinbereiche — wie etwa der Gesamtheit aller reellen Zahlen — freilich nicht behauptet werden kann, aber der Grund hiefür liegt einzig und allein darin, daß die Annahme solcher Bereiche logisch nicht zu rechtfertigen ist.

Von der hier behandelten und negativ entschiedenen Frage, ob die Behauptung der prinzipiellen Unentscheidbarkeit arithmetischer Probleme mit der Nichtgabelbarkeit (Monomorphie) der Arithmetik vereinbar sei, muß aber sorgsam das hierüber weit hinausgehende „Entscheidungsproblem" auseinandergehalten werden. Letzteres stellt die Zusammenfassung der folgenden beiden Probleme dar: „Wie kann man bei einem beliebigen vorliegenden Ausdruck, der keine individuellen Zeichen enthält, feststellen, ob der Ausdruck bei beliebigen Einsetzungen für die vorkommenden Variablen eine richtige Behauptung darstellt oder nicht?" (Problem der Allgemeingültigkeit eines logischen Ausdruckes.) „Gibt es überhaupt eine Einsetzung für die Variablen ..... so daß durch den betreffenden Ausdruck eine richtige Behauptung dargestellt wird?" (Problem der Erfüllbarkeit.)

„Beide Probleme sind zueinander dual. Ist ein Ausdruck nicht allgemeingültig, so ist das Gegenteil erfüllbar und umgekehrt."

„Das Entscheidungsproblem ist gelöst, wenn man ein Verfahren kennt, das bei einem vorgelegten logischen Ausdruck durch endlich viele Operationen die Entscheidung über die Allgemeingültigkeit bzw. Erfüllbarkeit erlaubt[1])."

Was den derzeitigen Stand des Entscheidungsproblems, des Hauptproblems der mathematischen Logik betrifft, so sei folgendes bemerkt[2]): Gelöst ist das Entscheidungsproblem für solche logische Ausdrücke des „engeren Funktionenkalküls" (d. h. desjenigen „Teiles des Funktionenkalküls", in dem nur All- und Existenzaussagen auftreten, die sich auf Individuen beziehen (Zählaussagen); nicht aber solche All- und Existenzaussagen, die sich auf Funktionen beziehen), die nur Funktionsvariable mit

---

[1]) Die vorstehenden, unter Anführungszeichen angeführten Sätze sind, von einer kleinen syntaktischen Änderung abgesehen, wörtliche Zitate aus Hilbert-Ackermann, „Grundzüge der theoretischen Logik", S. 72ff.

[2]) Vgl. hiezu ibd., S. 77ff.

einem Argument enthalten, und zwar von L. Löwenheim[1]) und H. Behmann[2]). Löwenheim zeigt auch in der gleichen Arbeit, daß man sich bei Behandlung der logischen Formeln auf solche beschränken darf, in denen nur Funktionszeichen mit höchstens zwei Leerstellen vorkommen. Besondere Fälle des Entscheidungsproblems für mehrgliedrige Prädikate haben P. Bernays und M. Schönfinkel[3]) gelöst[4]).

Die größten Schwierigkeiten, die das Entscheidungsproblem bietet, beziehen sich allem Anschein nach auf den erweiterten Funktionenkalkül. Da aber dieser, wie wir in den früheren Abschnitten dargetan haben, wegfallen muß, sobald die richtige Einsicht in den Sinn der Arithmetik ihren adäquaten Ausdruck in der Symbolik der mathematischen Logik gefunden hat, so darf man der durchgängigen Lösung dieses Problems vielleicht in nicht zu ferner Zeit entgegensehen.

Jedenfalls aber ist es auf Grund unserer Untersuchung über die Entscheidungsdefinitheit ausgeschlossen, daß die Unlösbarkeit des Entscheidungsproblems oder irgend eines anderen logisch mathematischen Problems bewiesen wird, oder daß bewiesen wird, ein solches Problem könne unlösbar sein, obgleich man die Unlösbarkeit nicht beweisen kann usw. Diese Feststellung ist auch vom allgemein erkenntnistheoretischen Gesichtspunkt aus wichtig, da durch sie der gerade in neuerer Zeit wieder auftauchenden Behauptung, es gebe in der Mathematik ein Sein, das sich prinzipiell der Erkenntnis verschließe, der Boden entzogen wird.

In dem nun folgenden letzten Abschnitt wollen wir noch zeigen, wie die Antinomien der Logik und Mengenlehre bei korrekter Formulierung der einschlägigen Sätze verschwinden.

---

[1]) „Über Möglichkeiten im Relativkalkül" l. c.

[2]) „Beiträge zur Algebra der Logik, insbesondere zum Entscheidungsproblem" (Math. Ann., Bd. 86, S. 163 bis 229, 1922), vgl. auch dessen Vorträge über „Entscheidungsproblem und Logik der Beziehungen" (Jahresbericht d. Deutschen Math.-Ver., Bd. 32, S. 66f., 1923, und Bd. 36, S. 17f., 1927).

[3]) „Zum Entscheidungsproblem der mathematischen Logik" (Math. Ann., Bd. 99, S. 342 bis 372, 1928).

[4]) Während der Revision der Druckbögen der vorliegenden Arbeit ist zu diesem Thema noch die wichtige Arbeit von F. P. Ramsey „On a problem of formal logic", Proceedings of the London Math. Soc., Bd. 30, 1929, S. 264 bis 286, erschienen.

Die Antinomien.

Wie wir schon in der Einleitung zu dieser Arbeit erwähnt haben, wurden die mit den theoretischen Grundlagen ihrer Wissenschaft befaßten Logiker und Mathematiker in den letzten Jahren des vorigen Jahrhunderts durch die Feststellung beunruhigt, daß der Cantorsche Mengenbegriff und seine Theorie des aktual Unendlichen zu Widersprüchen führen[1]).

Wir wollen zunächst diejenigen unter den Antinomien betrachten, deren Formulierung sich unmittelbar auf Cantors Theorie des Transfiniten stützt. Ihre Auflösung ergibt sich ohneweiters aus den Ergebnissen der vorangegangenen kritischen Analysen.

Die älteste der mengentheoretischen Antinomien ist diejenige von C. Burali-Forti[2]), die „Paradoxie der Menge aller Ordnungszahlen". Sie ergibt sich wie folgt: Man denke sich die Menge aller Ordnungszahlen nach der Größe geordnet. Diese Menge ist — im Sinne der Cantorschen Theorie — wohlgeordnet; wir wollen sie selbst W und die zu ihr gehörige Ordnungszahl φ nennen. Dann ist — sc. wieder im Sinne der Cantorschen Theorie — φ größer als jede in W enthaltene Ordnungszahl. Dies widerspricht aber der Annahme, daß W alle Ordnungszahlen enthält. Die Auflösung dieser Antinomie ist mit der Einsicht vollzogen, daß der Begriff der Menge aller Ordinalzahlen sinn-

[1]) Insbesondere auf Frege machte diese Erkenntnistatsache stärksten Eindruck, wie aus dem Anhange seiner „Grundgesetze der Arithmetik" (II, S. 253) hervorgeht. Russell hatte Frege in einem Brief auf das im folgenden zu analysierende — nach ihm benannte — „Paradoxon der Menge aller sich nicht enthaltenden Mengen" aufmerksam gemacht, und Frege erklärte die Grundlagen seines theoretischen Gebäudes hiedurch für erschüttert.

[2]) „Una questione sui numeri transfiniti", Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Bd. 11, S. 154 bis 164, 1897. Doch weist F. Bernstein, „Über die Reihe der transfiniten Ordnungszahlen", Math. Ann., Bd. 60, S. 187 bis 193, 1905, darauf hin, daß diese Antinomie schon 1895 von Cantor bemerkt worden ist.

los ist. Man darf ja, wie wir in dieser Arbeit wohl hinreichend dargetan haben, daraus, daß man Aussagen über beliebige Ordinalzahlen machen kann, nicht schließen, daß ein in sich geschlossener Inbegriff „aller" Ordinalzahlen gebildet werden könne. Der Begriff der „größten Ordinalzahl" aber ist widerspruchsvoll, da voraussetzungsgemäß zu jeder Ordinalzahl eine nächstgrößere angegeben werden kann.

Ähnliche Antinomien sind diejenigen der „Menge aller Mengen" und der „Menge aller Kardinalzahlen". Die Menge aller Mengen müßte einerseits die umfassendste Menge sein, welche nur Mengen als Elemente enthält, und daher auch die größte Mächtigkeit von diesen Mengen haben, anderseits aber ergibt sich nach einem bekannten Satze der Mengenlehre, daß die Menge aller Teilmengen dieser Menge eine höhere Mächtigkeit besitzt als sie selbst.

Noch enger verwandt mit der Antinomie der „Menge aller Ordinalzahlen" ist diejenige der Menge aller Kardinalzahlen. Sie basiert auf den beiden folgenden Sätzen der Mengenlehre:

1. Zu jeder Kardinalzahl gibt es eine größere Kardinalzahl.

2. Die Summe der Kardinalzahlen einer Menge, die zu jeder in ihr vorkommenden Kardinalzahl eine größere enthält, ist größer als jede Kardinalzahl dieser Menge.

Demgemäß müßte die Summe aller Kardinalzahlen — welche selbst eine Kardinalzahl ist — größer als jede Kardinalzahl sein, was einen Widerspruch in sich schließt.

Hinsichtlich der ersten Antinomie gilt die Kritik der Burali-Fortischen Antinomie mit der Verschärfung, daß hier mangels Wohlordnung schon der Begriff „beliebige Menge von Mengen" sinnlos ist. Was die „Menge aller Kardinalzahlen" betrifft, so ist zunächst darauf hinzuweisen, daß, wie wir erkannt haben, eine Mehrheit transfiniter Kardinalzahlen nicht angenommen werden darf. Bezüglich der restlichen Kardinalzahlen aber ist wieder zu betonen, daß ihre „Zusammenfassung zu einer Menge" unvollziehbar ist. Auch der Begriff „Menge aller Kardinalzahlen" ist also sinnlos.

Auch die als „Russell-Paradoxon"[1]) bezeichnete Antinomie der „Menge aller sich nicht als Element enthaltenden Mengen",

[1]) Vgl. hiezu Russell, „The principles of mathematics", Cambridge 1903, ferner Whitehead und Russell, „Principia Mathematica", V. I, p. 39ff.

welche wir nunmehr darstellen wollen, fällt sogleich fort, wenn man sinnlose „Begriffsbildungen" ausschaltet.

Diese Antinomie erhält man auf folgende Weise:

Man teile die Mengen in zwei disjunkte Klassen derart, daß in die erste Klasse diejenigen Mengen fallen, die sich als Element enthalten, in die zweite Klasse diejenigen Mengen, die sich nicht als Element enthalten. Dann gibt es — die Gültigkeit des Komprehensionsprinzips vorausgesetzt — eine Menge M, deren Elemente alle und nur die sich nicht als Element enthaltenden Mengen bilden, und diese wollen wir daraufhin prüfen, ob sie in die erste oder zweite Klasse fällt.

Gesetzt zunächst, M enthielte sich selbst als Element, dann enthält M ein Element, das sich selbst enthält, was im Widerspruch zu der Voraussetzung steht, daß M nur Elemente enthält, die sich nicht selbst enthalten. Danach bliebe nur die zweite Möglichkeit, daß M sich nicht als Element enthält. Aber auch hier ergibt sich ein Widerspruch. Denn enthält sich die Menge M nicht selbst, so ist sie laut Definition ein Element von M; d. h. sie enthält sich selbst. Der Begriff der „Menge aller sich nicht als Element enthaltenden Mengen" ist also ein widerspruchsvoller Begriff.

Russell selbst beseitigte diese Antinomie, ebenso wie die anderen von uns genannten, durch sein „vicious circle principle"[1]): „Whatever involves all of a collection must not be one of the collection", was sich, da Russell „Menge" und Satzfunktion einander gleichsetzt, auch in der Form: „Eine Satzfunktion kann nicht sich selbst als Argumentwert annehmen" ausdrücken läßt. Auf diesem Prinzip basiert seine (unverzweigte) Typentheorie, welche eine „Typenordnung" von „Individuen", „Mengen", „Mengen von Mengen" usf. bildet, wobei die Typenmischung ausgeschlossen wird. Innerhalb desselben Typus aber behält Russell das Komprehensionsprinzip bei, da er die Cantorsche Lehre vom unabzählbar Unendlichen nicht preisgeben will.

Man faßt das „vicious circle principle" meist so auf, als ob damit ein für die Beseitigung der Antinomien zweckdienliches, aber im Grunde willkürliches und vielleicht zu weit-

[1]) Es wird so genannt, „because it enables us to avoid the vicious circles involved in the assumption of illegitimate totalities", „Principia Mathematica", Vol. I, p. 40.

gehendes Verbot für das Denken geschaffen werde, das vielleicht unbeschadet des erstrebten Zweckes gemildert werden könnte. In Wahrheit aber verhält es sich, wie wir erkannt haben, so, daß keine „Menge" — mag man nun mit diesem Worte eine individuelle oder eine spezifische Allgemeinheit bezeichnen — sich selbst enthalten kann. Demgemäß darf das vicious circle principle ebensowenig als eine Einschränkung des legitimen Denkens bezeichnet werden, wie etwa der Satz vom Widerspruch; will man es aber doch als Norm auffassen, so kann es nur als Norm für die Beschaffenheit einer logisch einwandfreien Symbolik (Sprache) gelten[1]).

Von den bisher behandelten Antinomien hat die Russellsche darum besonderes Interesse für uns, weil sie sich anscheinend in einfacher Weise ins „rein Logische" übersetzen, d. h. ohne Benützung des Mengenbegriffes formulieren läßt. Dies geschieht auf folgende von Russell angegebene Weise: Ein Begriff heiße „prädikabel", wenn er von sich selbst ausgesagt werden kann, andernfalls „imprädikabel". (Hienach wäre z. B. der Begriff „abstrakt" prädikabel, der Begriff „konkret" dagegen imprädikabel.) Da die Begriffe „prädikabel" und „imprädikabel" als kontradiktorische Gegensätze definiert sind, müßte jeder Begriff entweder prädikabel oder imprädikabel sein, und kein Begriff könnte sowohl prädikabel als auch imprädikabel sein. Betrachten wir nun aber den Begriff „imprädikabel" selbst. Angenommen er wäre prädikabel, so würde dies bedeuten, daß das Urteil: „‚imprädikabel' ist imprädikabel" gilt, was im Widerspruch zu der Annahme „imprädikabel ist prädikabel" steht. Demgemäß müßte unser Begriff imprädikabel sein. Aber dann ließe sich ja der Begriff „imprädikabel" von sich selbst aussagen; er wäre also laut Definition prädikabel.

Wenn wir diese Antinomie näher untersuchen, so haben wir zunächst festzustellen, daß keine vollkommene Analogie mit der „Antinomie der Menge aller sich nicht enthaltenden Mengen" besteht. Der Anschein einer solchen entsteht nur durch die unhaltbare These des Komprehensionsprinzips, daß mit jeder Eigenschaft eine Gesamtheit von Gegenständen, die diese Eigen-

[1]) Vgl. hiezu Wittgenstein, a. a. O., S. 3·332: „Kein Satz kann etwas über sich selbst aussagen, weil das Satzzeichen nicht in sich selbst enthalten sein kann, (das ist die ganze ‚Theory of types')."

schaft besitzen, gegeben sei. Immerhin liegt eine weitgehende Gemeinsamkeit insofern vor, als sich in beiden Fällen unter den „Kriterien“ für das Vorhandensein einer Eigenschaft E das Vorhandensein der Eigenschaft non E befindet.

Die Auflösung auch dieser Antinomie aber ergibt sich sogleich, wenn man bedenkt, daß von wahren und falschen Aussagen sinnlose „Aussagen“ zu unterscheiden sind, wie wir im zweiten Abschnitt näher auseinandergesetzt haben. Um jedoch im Einzelfall zu erkennen, ob man es mit einer echten Aussage oder einer Scheinaussage zu tun hat, muß man untersuchen, was der in Frage stehende Satz besagt. Das heißt: man muß auf die Kriterien der Wahrheit des Satzes zurückgehen; wobei wieder sorgfältig zwischen empirischen Sätzen, sachhaltigen Sätzen a priori und Tautologien unterschieden werden muß. Geschieht dies in unserem Fall, so ergibt sich sogleich die Sinnlosigkeit des scheinbaren Urteils: „‚imprädikabel‘ ist prädikabel“ (oder imprädikabel).

Hat man erkannt, daß nur dann eine sinnvolle Aussage vorliegt, wenn Kriterien für die Wahrheit bestehen, dann verschwinden auch die Antinomien von der Art derjenigen des lügenden Kreters, welche von Russell auf die kurze Form „ich lüge“[1]) gebracht worden ist. Sobald man nach dem Sachverhalt, der hier als bestehend behauptet würde, fragt, bemerkt man, daß ein solcher fehlt und daß daher gar kein Urteil vorliegt.

Aber hinter dieser Scheinproblematik steckt doch noch ein tieferliegendes schwieriges Problem, das erst dann sichtbar wird, wenn man jene beseitigt hat. Es ist dies die Frage, ob der Urteilsgegenstand den zugehörigen Urteilsakt logisch einschließen kann, ob es möglich ist, in einem Urteil den Tatbestand der Urteilsfällung mitzumeinen. Betrachten wir etwa die Behauptung: „Ich denke mein ganzes Leben lang nicht über mein Denken“[2]) und nehmen wir an, daß

---

[1]) Dieser Satz stellt übrigens keine präzise Formulierung der intendierten Antinomik dar, wonach aus der Annahme der Wahrheit einer Aussage ihre Falschheit und aus der Annahme ihrer Falschheit ihre Wahrheit folgen soll. Denn „ich lüge“ heißt „ich behaupte wissentlich etwas, was ich für unrichtig halte“. Deswegen muß aber das lügnerisch Behauptete nicht falsch sein. Die korrekte Formulierung der zum Ausdruck zu bringenden Antinomik ist: „Ich spreche eine falsche Behauptung aus.“

[2]) Vollkommen präzis formuliert würde diese Behauptung zu lauten haben:

der Sprechende sich tatsächlich außer dem Gedanken, der in diesem Satz zum Ausdruck kommt, während seines ganzen Lebens niemals über sein Denken gedacht hat. Ist dann dieses Urteil als wahr oder als falsch anzusehen? Zu ersterem Ergebnis kommt man auf Grund der Annahme, daß die Wahrheit oder Falschheit eines Urteiles in keiner Weise durch das Faktum der Urteilsfällung beeinflußt werden kann. Dies ist die korrekte Formulierung der These, daß ein Urteil (= Urteilsgegenstand) sich nicht auf „sich selbst" (= Urteilsakt) beziehen kann. Dagegen führt die gegenteilige Annahme dazu, jenes Urteil für falsch zu erklären. Die Analyse dieser Annahme rollt eine der Kardinalfragen der Psychologie, das Problem der Reflexivität des Denkens, auf[1]). Es scheint nämlich zum Wesen des Denkens zu gehören, zugleich mit einem beliebigen Sachverhalt sich selbst meinen zu können.

Aber zu welchem Ergebnis immer die Behandlung dieses hochbedeutsamen Problems führen möge, für keinen Fall kann es eine logische Antinomie nach sich ziehen. Man erkennt dies, sobald man sich über die im Terminus „Urteil" liegende Äquivokation von Urteilsakt und Urteilsgegenstand klar geworden ist.

Die Antinomie des lügenden Kreters unterscheidet sich (in den gebräuchlichen Formulierungen) von den früher betrachteten Antinomien dadurch, daß in ihr nicht nur mit logisch-mathematischen Begriffen (bzw. Scheinbegriffen) operiert wird, sondern daß sie auch sachhaltige Begriffe enthält. Man bezeichnet solche Antinomien neuerdings als epistemologische Antinomien[2]), um auf den engen Zusammenhang der Antinomik mit der Sprache hinzuweisen. Sie wurzelt nämlich meist in der Unbestimmtheit gewisser Termini der Wortsprache, einer Unbestimmtheit, die die Beibehaltung des gleichen Sprachausdruckes bei Wandlung des Sinnes zunächst unverdächtig erscheinen läßt. Den epistemologischen Antinomien werden die früher betrachteten als „logische" Antinomien gegenübergestellt. Die epistemo-

„In den Gedanken meines ganzen Lebens kommt kein Gedanke über mein Denken vor."

[1]) Vgl. hierüber insbesondere M. Geiger, „Fragment über den Begriff des Unbewußten und die psychische Realität", Jahrb. f. Philosophie und phänomenologische Forschung, 4. Bd., S. 1 bis 137, 1921, insbesondere S. 44f.

[2]) So z. B. Ramsey und Fraenkel.

logischen Antinomien haben die Mathematiker und Logiker lange nicht so schwer beunruhigt wie die logischen Antinomien. Wir wollen nun noch zwei der bekanntesten epistemologischen Antinomien anführen:

Zu jeder bestimmten natürlichen Zahl gibt es in einer bestimmten Sprache — etwa der deutschen — eine kleinste (sc. endliche) Anzahl von Zeichen — wobei unter „Zeichen" sowohl Buchstaben als auch Ziffern verstanden werden können —, durch deren Zusammensetzung in linearer Anordnung sich die fragliche Zahl definieren läßt. Da nun aber durch eine beschränkt häufige Wiederholung beschränkt vieler Zeichen nur endlich viele Zahlen definiert werden können, muß es eine kleinste Zahl geben, die nur mit mindestens tausend Zeichen (in deutscher Sprache) definiert werden kann. Durch die gesperrt gedruckten Worte selbst ist aber eine Definition unter Benützung von weniger als tausend Zeichen angegeben.

Die Auflösung dieser Antinomie ergibt sich, sobald man den Begriff der „Definition" korrekt faßt. Der Begriff „kleinste Zahl, die sich mit nicht weniger als 1000 Zeichen in deutscher Sprache bezeichnen läßt", ist nämlich keineswegs die Definition einer Zahl; denn sie bezieht sich gar nicht unmittelbar auf die Zahl selbst, sondern auf das Denken der Zahl, welches in einer bestimmten Bezeichnungsweise seinen Ausdruck findet. Mit demselben Rechte könnte man den Begriff „größte Zahl, die auf einem bestimmten Papier aufgeschrieben steht", als Definition einer bestimmten Zahl auffassen und sich wundern, daß diese Definition nicht mehr dieselbe Zahl deckt, sobald man eine größere Ziffernfolge als die bis dahin dort verzeichnete auf jenes Papier schreibt[1]). Denn mit neuen Gedanken tauchen neue Möglichkeiten der Formulierung und damit auch der Formulierung mit einer bestimmten Höchstzahl von Zeichen auf. Übrigens wäre es, wenn man „Definitionen" von Zahlen durch empirische Aussagen über die zugehörigen Zahlzeichen zuließe, von vornherein ausgeschlossen, Zahlen anzugeben, zu deren „Definition" man mindestens eine bestimmte (nicht zu kleine Anzahl) von Zeichen benötigt, denn in diesem Falle läßt sich durch

[1]) Vgl. hiezu auch H. Dingler, „Über die axiomatische Grundlegung der Lehre vom Ding", Jahresber. d. Deutsch. Math.-Ver., Bd. 28, S. 138 bis 158, 1919, S. 153ff.

entsprechend gewählte empirische Zuordnungen weitgehende Unabhängigkeit der für die „Definition" benötigten Zeichenanzahl von der Größe der zu definierenden Zahl erzielen.

Zum Schlusse sei noch kurz die Antinomie von Richard angeführt, welche an das Cantorsche Diagonalverfahren anknüpft. Sie entspringt folgender Erwägung: Man erkennt leicht, daß man mit endlich vielen Zeichen nur abzählbar viele Dezimalbrüche eindeutig bestimmen kann. Denn mit einer gegebenen (sc. endlichen) Anzahl von Zeichen können nur endlich viele Dezimalbrüche in dieser Weise bestimmt werden, was eine Ordnung der endlich definierbaren Dezimalbrüche in eine Folge — in erster Linie nach der Anzahl der zur Definition erforderlichen Zeichen, in zweiter Linie nach den verwendeten Zeichen, deren Reihenordnung (Alphabet) vorausgesetzt ist — ermöglicht. Dann läßt sich aber gemäß dem Diagonalverfahren ein Dezimalbruch angeben, der nicht in jener Reihe vorkommt und daher nicht endlich definierbar sein dürfte. Er ist aber gerade durch das soeben angegebene Verfahren selbst definiert.

Zur Auflösung dieser Antinomie sind die zur vorgenannten Antinomie gemachten Bemerkungen hinreichend. Es sei nur noch hervorgehoben, daß die Annahme nicht endlich definierbarer Begriffe einen Nonsens darstellen würde.

Damit wollen wir unsere Analyse der logischen Antinomien beendigen[1]). Ihr Ergebnis ist, daß die scheinbaren Widersprüche der Logik aus Denkfehlern hervorgehen, und daß sie demgemäß bei Vermeidung dieser Denkfehler verschwinden. Ein Scherzwort sagt: Wenn das Ergebnis einer Rechnung nicht mit dem Einmaleins zusammenstimmt, so ist stets die Rechnung falsch, nie das Einmaleins. Die konforme These für das Spekulieren über die Frage der Widerspruchsfreiheit der Logik ergibt sich leicht und ist beherzigenswert.

[1]) Hinsichtlich des zahlreichen Schrifttums zur Problematik der Antinomien sei auf das Literaturverzeichnis in Fraenkels „Einleitung in die Mengenlehre" hingewiesen. Unter den allerjüngsten Beiträgen zu diesem Problem verdient der von H. Behmann bei der Jahresversammlung der Deutschen Math.-Vereinigung im September 1929 gehaltene Vortrag „Zu den Widersprüchen der Logik und Mengenlehre" besondere Beachtung.

Literaturverzeichnis.

Ackermann, W., Begründung des „tertium non datur" mittels der Hilbertschen Theorie der Widerspruchsfreiheit. Math. Ann., Bd. 93, S. 1—36, 1924.

— Zum Hilbertschen Aufbau der reellen Zahlen. Math. Ann., Bd. 99, S. 118 bis 133, 1928. Siehe auch unter Hilbert.

Baer, R., Über ein Vollständigkeitsaxiom in der Mengenlehre. Math. Zeitschr., Bd. 27, S. 536—539, 1928.

Baldus, R., Zur Axiomatik der Geometrie. I. Über Hilberts Vollständigkeitsaxiom. Math. Ann., Bd. 100, S. 321ff., 1928.

Becker, O., Beiträge zur phänomenologischen Begründung der Geometrie und ihrer physikalischen Anwendungen. Jahrbuch für Philosophie und phänomenologische Forschung, Bd. 6, S. 385—560, 1923.

— Mathematische Existenz. Untersuchungen zur Logik und Ontologie mathematischer Phänomene, ebenda, Bd. 8, S. 439—809f., Halle 1927 (auch als Sonderdruck erschienen).

— Das Symbolische in der Mathematik. Blätter für deutsche Philosophie, Bd. 1, S. 329—348, 1928.

Behmann, H., Beiträge zur Algebra der Logik, insbesondere zum Entscheidungsproblem. Math. Ann., Bd. 86, S. 163—229, 1922.

— Entscheidungsproblem und Logik der Beziehungen. Jahresber. d. Deutsch. Math.-Ver., Bd. 32, S. 66f., 1923, und Bd. 36, S. 17f., 1927.

— Zu den Widersprüchen der Logik und Mengenlehre. Vortrag, gehalten in der Deutsch. Math.-Ver. in Prag, September 1929.

Bernays, P., Über Hilberts Gedanken zur Grundlegung der Arithmetik. Jahresber. d. Deutsch. Math.-Ver., Bd. 31, S. 10—19, 1922.

— Erwiderung auf die Note von Herrn Aloys Müller „Zahlen als Zeichen". Math. Ann., Bd. 90, S. 159—163, 1923 (vgl. auch ebenda S. 153—158).

— Axiomatische Untersuchung des Aussagenkalküls der „Principia mathematica". Math. Zeitschr., Bd. 25, S. 305—320, 1926.

Bernays, P., und M. Schönfinkel, Zum Entscheidungsproblem der mathematischen Logik. Math. Ann., Bd. 99, S. 342—372, 1928.

Bernstein, F., Über die Reihe der transfiniten Ordnungszahlen. Math. Ann., Bd. 60, S. 187—193, 1905.

— Die Mengenlehre Georg Cantors und der Finitismus. Jahresber. d. Deutsch. Math.-Ver., Bd. 28, S. 63—78, 1919.

Bolzano, B., Paradoxien des Unendlichen. 1851 aus dem Nachlaß von Fr. Přihonsky veröffentlicht. Neu herausgegeben durch A. Höfler, mit Anmerkungen versehen von H. Hahn. Philosophische Bibliothek, Bd. 99. Leipzig 1920.

Borel, E., Leçons sur la théorie des fonctions. Paris 1898. 3. Aufl., 1928.

Brentano, F., Vom ens rationis. Abhandlung aus dem Nachlasse, herausgegeben von Oskar Kraus, Philosoph. Bibl., Bd. 193, S. 238ff., Leipzig 1925.

Brouwer, L. E. J., Beweis der Invarianz der Dimensionenzahl. Math. Ann., Bd. 70, S. 161—165, 1911.

— Intuitionisme en formalisme. Antrittsrede. Groningen 1912. (In englischer Übersetzung im Bull. of the Amer. Math. Soc., Bd. 20, S. 81—96, 1913.)

— Intuitionistische Mengenlehre. Jahresber. d. Deutsch. Math.-Ver., Bd. 28, S. 203—208, 1919. (Abgedruckt auch in Kon. Akad. v. Wetensch. te Amsterdam, Proceedings, Bd. 23, S. 949—954, 1920.)

— Begründung der Funktionenlehre unabhängig vom logischen Satze vom ausgeschlossenen Dritten. I. Teil. Amsterdam 1923.

— Zur Begründung der intuitionistischen Mathematik. I—III. Math. Ann., Bd. 93, S. 244—257, 1925; Bd. 95, S. 453—472, 1926; Bd. 96, S. 451 bis 488, 1927.

— Intuitionistische Zerlegung mathematischer Grundbegriffe. Jahresber. d. Deutsch. Math.-Ver., Bd. 33, S. 251—256, 1925.

— Intuitionistische Betrachtungen über den Formalismus. Sitzungsber. d. Preuß. Akad. d. Wissensch., Phys. math. Kl., S. 48—52, 1928.

— Mathematik, Wissenschaft und Sprache. Monatshefte f. Math. u. Phys., Bd. 36, S. 153—164, 1929.

Burali-Forti, C., Una questione sui numeri transfiniti. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Bd. 11, S. 154—164, 1897.

Burkamp, W., Begriff und Beziehung. Studien zur Grundlegung der Logik. Leipzig 1927.

Cantor, G., Grundlagen einer allgemeinen Mannichfaltigkeitslehre. Leipzig 1883.

— Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten. I. und II. Zeitschr. f. Phil. u. phil. Kritik, Bd. 91, S. 81—125, und 252—270, 1887, und Bd. 92, S. 240 bis 265, 1888.

— Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre. I. Math. Ann., Bd. 46, S. 481—512, 1895; Bd. 49, S. 207—246, 1897.

Carnap, R., Der Raum. Ein Beitrag zur Wissenschaftslehre. Ergänzungshefte der Kant-Studien Nr. 56. Berlin 1922.

— Eigentliche und uneigentliche Begriffe. Symposion, Bd. 1, S. 355—374, 1927.

— Der logische Aufbau der Welt. Berlin-Schlachtensee 1928.

— Abriß der Logistik. Schriften zur wissenschaftlichen Weltauffassung, Bd. 2, Wien 1929.

Cassirer, E., Philosophie der symbolischen Formen. 3. Teil. Phänomenologie der Erkenntnis. Berlin 1929.

Chwistek, L., Über die Antinomien der Prinzipien der Mathematik. Math. Zeitschr., Bd. 14, S. 236—243, 1922.

— The theory of constructive types. (Principles of logic and mathematics.) Part I and II. Extracted from the Annales de la Société Polonaise de Mathématique, Cracow 1923/1925.

— Über die Hypothesen der Mengenlehre. Math. Zeitschr., Bd. 25, S. 439 bis 473, 1926.

Dedekind, R., Stetigkeit und irrationale Zahlen (1872), 5. Aufl., Braunschweig 1927.

— Was sind und was sollen die Zahlen? (1887), 4. Aufl., Braunschweig 1918.

Dingler, H., Über die axiomatische Grundlegung der Lehre vom Ding. Jahresber. d. Deutsch. Math.-Ver., Bd. 28, S. 138—158, 1919.

Dubislav, W., Über das Verhältnis der Logik zur Mathematik. Ann. d. Philos. u. philos. Kritik, Bd. 5, S. 193—208, 1926.

— Elementarer Nachweis der Widerspruchslosigkeit des Logikkalküls. Journ. f. Math., Bd. 101, 1929.

Einstein, A., Geometrie und Erfahrung. Berlin 1921.

Finsler, P., Über die Grundlegung der Mengenlehre. I. Teil. Die Mengen und ihre Axiome. Math. Zeitschr., Bd. 25, S. 683—713, 1926.

Fraenkel, A., Axiomatische Begründung von Hensels p-adischen Zahlen. Journ. f. Math., Bd. 141, S. 43—76, 1912.

— Zehn Vorlesungen über die Grundlegung der Mengenlehre. (Wissensch. u. Hypoth., Bd. 31.) Leipzig und Berlin 1927.

— Einleitung in die Mengenlehre. III. Aufl., Berlin 1928.

Frege, G., Die Grundlagen der Arithmetik. Breslau 1884.

— Über Sinn und Bedeutung. Zeitschr. f. Phil. u. phil. Kritik, Bd. 100, S. 25 bis 50, 1892.

— Grundgesetze der Arithmetik. I. und II. Jena 1893 und 1903.

Gauß, C. F., Briefwechsel zwischen Gauß und Bessel. Leipzig 1880.

Geiger, M., Fragment über den Begriff des Unbewußten und die psychische Realität. Jahrbuch f. Philosophie u. phänomenologische Forschung, Bd. 4, S. 1—137, 1921.

— Systematische Axiomatik der Euklidischen Geometrie. Augsburg 1924.

Grelling, K., Mengenlehre. (Math. phys. Bibl. Nr. 58.) Leipzig und Berlin 1924.

Hardy, G. H., A theorem concerning the infinite cardinal numbers. Quart. Journ. of pure and appl. Math., Bd. 35, S. 87—94, 1903.

Hartmann, N., Grundzüge der Metaphysik des Erkennens. 2. Aufl., Berlin 1925.

Hartogs, F., Über das Problem der Wohlordnung. Math. Ann., Bd. 76, S. 438 bis 443, 1915.

Hasse, H., und H. Scholz, Die Grundlagenkrisis der griechischen Mathematik. Kant-Studien, Bd. 33, S. 4—34, 1928.

Hausdorff, F., Grundzüge der Mengenlehre. (1914.) 2. Aufl., Leipzig 1927.

Helmholtz, H., Zählen und Messen. Wissensch. Abhandl., III, 1895, S. 356 bis 391.

Hilbert, D., Grundlagen der Geometrie. (1899.) Wissensch. u. Hypoth., Bd. 7, 6. Aufl., Leipzig und Berlin 1923.

— Über die Theorie der algebraischen Formen. Math. Ann., Bd. 36, S. 473 bis 534, 1890.

— Neubegründung der Mathematik. Erste Mitteilung. Abh. a. d. Math. Sem. d. Hamb. Univ., Bd. 1, S. 157—177, 1922.

— Die logischen Grundlagen der Mathematik. Math. Ann., Bd. 88, S. 151 bis 165, 1923.

— Über das Unendliche. Math. Ann., Bd. 95, S. 161—190, 1925. (Auszugsweise abgedruckt im Jahresber. d. Deutsch. Math.-Ver., Bd. 36, S. 201 bis 215, 1927; in französischer Übersetzung in den Acta Mathematica, Bd. 48, S. 91—122, 1926.)

— Die Grundlagen der Mathematik. (Mit Diskussionsbemerkungen von H. Weyl und einem Zusatze von P. Bernays.) Abh. a. d. Math. Sem. d. Hamb. Univ., Bd. 6, S. 65—92, 1928.

Hilbert, D., und W. Ackermann, Grundzüge der theoretischen Logik, Berlin 1928.

Hjelmslev, J., Die natürliche Geometrie. Abhandl. a. d. Math. Sem. d. Hamb. Univ., Bd. 2, S. 1—36, 1923.

Hölder, O., Die Arithmetik in strenger Begründung. (1914.) 2. Aufl., Berlin 1929.

— Die mathematische Methode. Berlin 1924.

Huntington, E. V., A new set of postulates for betweenness with proof of complete independence. Transact. of the Amer. Math. Soc., Bd. 26, S. 257 bis 282, 1924.

Husserl, E., Philosophie der Arithmetik. Leipzig 1891.

— Logische Untersuchungen. Bd. I und II, 3. Aufl., Halle 1922.

— Ideen zu einer reinen Phänomenologie und phänomenologischen Philosophie Halle 1913.

— Formale und transzendentale Logik. Jahrb. f. Phil. u. phänomenolog. Forsch., Bd. 10, S. 1—298, Halle 1929.

Kant, J., Kritik der reinen Vernunft. 1. Aufl., 1781.

Klein, F., Zur Nicht-Euklidischen Geometrie. Math. Ann., Bd. 37, S. 544 bis 572, 1890.

König, J., Zum Kontinuumproblem. Math. Ann., Bd. 60, S. 177—180 und 462, 1905.

— Neue Grundlagen der Logik, Arithmetik und Mengenlehre. Leipzig 1914.

Kronecker, L., Über den Zahlbegriff. Werke III, 1, S. 249ff. Leipzig 1899.

Leibniz, G. W., Mathematische Schriften. Ed. C. I. Gerhardt. Berlin 1849.

Lewy, P., Sur le principe du tiers exclu et sur les théorèmes non susceptibles de démonstration. Revue de Métaphysique et de Morale, avril 1928, abgedruckt bei Borel, S. 265ff.

Löwenheim, L., Über Möglichkeiten im Relativkalkül. Math. Ann., Bd. 76, S. 447—470, 1915.

Menger, K., Zur Dimensions- und Kurventheorie. Monatshefte f. Math. u. Phys., Bd. 36, S. 411, 1929.

— Dimensionstheorie. Berlin 1928.

— Bemerkungen zu Grundlagenfragen. I. Über Verzweigungsmengen; und III. Über Potenzmengen. Jahresber. d. Deutsch. Math.-Ver., Bd. 37, S. 213 bis 226, bzw. 303—308, 1928.

— Besprechung der III. Aufl. von Fraenkels „Einleitung in die Mengenlehre“. Monatshefte f. Math. u. Phys., Bd. 36, Literaturberichte S. 7, 1929.

Moore, E. H., Introduction to a form of general analysis. New Haven 1910.

Müller, A., Über Zahlen als Zeichen. Math. Ann., Bd. 90, S. 153—158, 1923. (Vgl. auch ebenda S. 163.)

v. Neumann, J., Eine Axiomatisierung der Mengenlehre. Journ. f. Math., Bd. 154, S. 219—240, 1925.

— Zur Hilbertschen Beweistheorie. Math. Zeitschr., Bd. 26, S. 1—46, 1927.

— Die Axiomatisierung der Mengenlehre. Ebenda, Bd. 27, S. 669—752, 1928.

Neurath, O., Eindeutigkeit und Kommutativität des logischen Produktes „a b". Arch. f. syst. Phil., Bd. 15, S. 104—106, 1909.

— Definitionsgleichheit und symbolische Gleichheit. Ebenda, Bd. 16, S. 142 bis 144, 1910.

Nicod, J. G. P., A reduction in the number of the primitive propositions of logic. Proc. of the Cambridge Philos. Soc., Bd. 19, S. 32—41, 1917/1920.

Pasch, M., Vorlesungen über neuere Geometrie. Leipzig 1882. Neuausgabe, Berlin 1926.

— Grundfragen der Geometrie. Journ. f. Math., Bd. 147, S. 184—190, 1917.

Peano, G., Arithmetices principia nova methodo exposita. Turin 1889.

— Sur une courbe qui remplit toute une aire plane. Math. Ann., Bd. 36, S. 157—160, 1890.

Poincaré, H., Wissenschaft und Hypothese. (1904.) Deutsche Ausgabe von F. und L. Lindemann. (Wissensch. u. Hypothese, Bd. 1.) 3. Aufl., Leipzig und Berlin 1914.

— Réflexions sur les deux notes précédentes. Acta Mathematica, Bd. 32, S. 195—200, 1909.

— Über transfinite Zahlen. Sechs Vorträge über ausgewählte Gegenstände aus der reinen Mathematik und mathematischen Physik, Leipzig und Berlin 1910, S. 45 ff.

— Wissenschaft und Methode. Deutsche Ausgabe von F. und L. Lindemann. (Wissensch. u. Hypothese, Bd. 17.) Leipzig und Berlin 1914.

Ramsey, F. P., The foundations of mathematics. Proceedings of the London Math. Soc. (2), Bd. 25, S. 338—384, 1927.

— On a problem of formal logic. Proceedings of the London Math. Soc., Bd. 30, S. 264—286, 1929.

Russell, B., The principles of mathematics. I. Cambridge (Engl.) 1903.

— Einführung in die mathematische Philosophie. Deutsch von Gumbel und Gordon. München 1923; siehe auch unter A. N. Whitehead.

Scholz, H., Warum haben die Griechen die Irrationalzahlen nicht aufgebaut? Kant-Studien, Bd. 33, S. 35—72, 1928; siehe auch unter H. Hasse.

Schönfinkel, M., siehe P. Bernays.

Schröder, E., Lehrbuch der Arithmetik und Algebra. Bd. 1, Leipzig 1873.

Sheffer, H. M., A set of five independent postulates for Boolean algebras, with application to logical constants. Transact. of the Amer. Math. Soc., Bd. 14, S. 481—488, 1913.

Sierpiński, W., Sur l'hypothèse du continu. Fundamenta Mathematicae, Bd. 5, S. 177—187, 1924.

Skolem, Th., Logisch-kombinatorische Untersuchungen über die Erfüllbarkeit oder Beweisbarkeit mathematischer Sätze nebst einem Theoreme über dichte Mengen. Skrifter utgit av Videns Kapsselskapet i Kristiania, 1920. Math.-naturw. Klasse Nr. 4, S. 1—36.

— Einige Bemerkungen zur axiomatischen Begründung der Mengenlehre. Wissenschaftliche Vorträge, gehalten auf dem fünften Kongreß der skandinavischen Mathematiker in Helsingfors, 1922, S. 217—232, 1923.

Stammler, G., Der Zahlbegriff seit Gauß. Halle a. S. 1925.

— Begriff, Urteil, Schluß. Halle a. S. 1928.

Stolz, O., Vorlesungen über allgemeine Arithmetik. I. Teil. Leipzig 1885.

Tarski, A., Sur les ensembles finis. Fundamenta Mathematicae, Bd. 6, S. 45 bis 95, 1925.

Urysohn, P., Les multiplicités cantoriennes. Comptes Rendus, Bd. 175, S. 440ff., 1922.

Veblen, O., Continuous increasing functions of finite and transfinite ordinals. Transact. Amer. Math. Soc. 9, p. 280—292, 1908.

Voss, A., Über das Wesen der Mathematik. 2. Aufl., Berlin 1913.

Waismann, F., Logik, Sprache, Philosophie. Erscheint demnächst in der Sammlung: Schriften zur wissenschaftlichen Weltauffassung, Wien.

Weyl, H., Das Kontinuum. Kritische Untersuchungen über die Grundlagen der Analysis. Leipzig 1918.

— Der circulus vitiosus in der heutigen Begründung der Analysis. Jahresber. d. Deutsch. Math.-Ver., Bd. 28, S. 85—92, 1919.

— Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik. Math. Zeitschr., Bd. 10, S. 39—79, 1921.

— Randbemerkungen zu Hauptproblemen der Mathematik. Ebenda, Bd. 20, S. 131—150, 1924.

— Die heutige Erkenntnislage in der Mathematik. Symposion, Bd. 1, S. 1—32, 1925. (Auch als Heft 3 der „Sonderdrucke des Symposion“ erschienen.)

— Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft. I. Teil. (4. Lieferung [Abt. II A] des Handbuchs der Philosophie, herausgegeben von A. Baeumler und M. Schröter.) München und Berlin 1926; siehe auch unter Hilbert.

Whitehead, A. N., und B. Russell, Principia mathematica. Cambridge (Engl.), Vol. I (1910, Neuauflage 1925), Vol. II (1912, unveränderte Neuauflage 1927), Vol. III (1913 bzw. 1927).

Wittgenstein, L., Tractatus Logico-Philosophicus. With an introduction by B. Russell, London 1922 (auch in den Ann. der Natur- und Kulturphilosophie, Bd. 14, 1921).

Zermelo, E., Beweis, daß jede Menge wohlgeordnet werden kann. Math. Ann., Bd. 59, S. 514—516, 1904.

— Neuer Beweis für die Wohlordnung. Ebenda, Bd. 65, S. 107—128, 1908.

— Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre. I. Ebenda, S. 261 bis 281, 1908.